第二周作业答案

罗曾宇

题目 1. 证明

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{f}) = 0.$$

解答.

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f}) = \partial_i \epsilon_{jki} \partial_j f_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} = -\epsilon_{jik} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_i} = -\partial_j \epsilon_{ikj} \partial_i f_k = -\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f}),$$

所以

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{f}) = 0.$$

图 1: 齿轮球

类似的，对于 $\nabla \times (\nabla f) = 0$ 的证明，即梯度的旋度等于零，可以用下图十分形象化的表示：

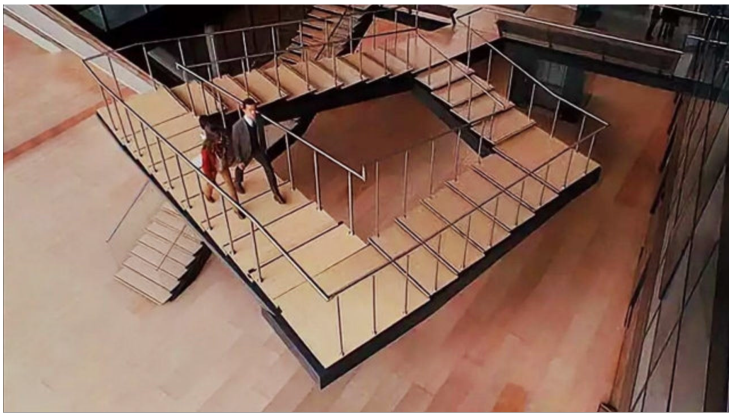

图 2: 彭罗斯阶梯

题目 2. 附在郭书第三题的解答中.

题目 3. 随时间均匀变化磁场产生的感生电场与静电场有区别吗？在笛卡尔坐标系中，判断以下电场是否为静电场：

(1)$\boldsymbol{E} = 3xz\boldsymbol{e_x} + 2xy\boldsymbol{e_y} + yz\boldsymbol{e_z}$,

(2)$\boldsymbol{E} = z^2\boldsymbol{e_x} + x^2\boldsymbol{e_y} + y^2\boldsymbol{e_z}$.

解答. 静电场是有源无旋的，而感生电场是无源有旋的.

(1)

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_x} & \boldsymbol{e_y} & \boldsymbol{e_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3xz & 2xy & yz \end{vmatrix} = z\boldsymbol{e_x} + 3x\boldsymbol{e_y} + 2y\boldsymbol{e_z}.$$

非静电场.

(2)

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_x} & \boldsymbol{e_y} & \boldsymbol{e_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} = 2y\boldsymbol{e_x} + 2z\boldsymbol{e_y} + 2x\boldsymbol{e_z}.$$

非静电场.

题目 4. 设 $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ 为源点 $\boldsymbol{x}'$ 到场点 $\boldsymbol{x}$ 的距离，$\boldsymbol{r}$ 的方向规定为从源点指向源点.

(1) 证明下列结果，并体会对源变数求微商 (∇') 和对场变数 (∇) 求微商的关系.

$$\nabla r = -\nabla' r = \frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},$$

$$\nabla \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0,$$

$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\nabla' \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0.(r \neq 0)$$

(2) 求 $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$,$\nabla \times \boldsymbol{r}$,$(\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{r}$,$\nabla(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})$,$\nabla \cdot [\boldsymbol{E_0} \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})]$ 及 $\nabla \times [\boldsymbol{E_0} \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})]$, 其中 $\boldsymbol{a, k, E_0}$ 均为常矢量.

解答.

$$\boldsymbol{r} = (x - x^{'})\boldsymbol{e_1} + (y - y^{'})\boldsymbol{e_2} + (z - z^{'})\boldsymbol{e_3}$$

(1).1

$$\nabla r = \partial_i r \boldsymbol{e_i} = \frac{1}{2} \frac{2(x - x^{'})}{\sqrt{(x - x^{'})^2 + (y - y^{'})^2 + (z - z^{'})^2}} \boldsymbol{e_i} = \frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

$$\nabla^{'} r = \partial_i^{'} r \boldsymbol{e_i} = -\frac{1}{2} \frac{2(x - x^{'})}{\sqrt{(x - x^{'})^2 + (y - y^{'})^2 + (z - z^{'})^2}} \boldsymbol{e_i} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

所以

$$\nabla r = -\nabla^{'} r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

(1).2

$$\nabla \frac{1}{r} = \frac{d(\frac{1}{r})}{dr} \nabla r = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},$$

$$-\nabla^{'} \frac{1}{r} = -\frac{d(\frac{1}{r})}{dr} \nabla^{'} r = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},$$

所以

$$\nabla \frac{1}{r} = -\nabla^{'} \frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

(1).3

$$\nabla \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = (\nabla \frac{1}{r^3}) \times \boldsymbol{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \times \boldsymbol{r} = (\frac{-3\boldsymbol{r}}{r^5}) \times \boldsymbol{r} + \frac{1}{r^3} \epsilon_{ijk} \partial_i r_j \boldsymbol{e_k} \xlongequal{i \neq j} 0$$

(1).4

$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = (\nabla \frac{1}{r^3}) \cdot \boldsymbol{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \boldsymbol{r} = (\frac{-3\boldsymbol{r}}{r^5}) \cdot \boldsymbol{r} + \frac{1}{r^3} \partial_i r_i = \frac{-3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$$

$$-\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-(\nabla'\frac{1}{r^3})\cdot\boldsymbol{r}-\frac{1}{r^3}\nabla'\cdot\boldsymbol{r}=(\frac{-3\boldsymbol{r}}{r^5})\cdot\boldsymbol{r}-\frac{1}{r^3}\partial_i' r_i=\frac{-3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0$$

注：在 $r=0$ 处，取以 $r=0$ 为中心，半径 $r\to 0$ 的小球面，由高斯定理，有

$$\int_V \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}dV=\oint_S\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_S\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot(r^2\sin\theta d\theta d\varphi\boldsymbol{e_r})=4\pi=4\pi\int_V\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')dV,$$

因此

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=4\pi\delta(\boldsymbol{r})(r=0).$$

[感谢王俊凇同学提供的思路]

另解: 这里为避免麻烦，认为 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，即将源点设为原点，源点不在原点的情况下，平移即可.

对

$$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

两边同时做傅里叶变换，等式右边，

$$-4\pi\iiint_V\delta(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}dxdydz=-4\pi\iiint_V\delta(\boldsymbol{r})e^0dxdydz=-4\pi,$$

等式左边，在对拉普拉斯算子做傅里叶变换时，

$$\iiint_V\nabla^2fe^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}dxdydz=\iint[\int\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}e^{-ik_xx}dx]e^{-ik_yy-ik_zz}dydz+...,$$

其中，

$$\int\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}e^{-ik_xx}dx=\int e^{-ik_xx}d(\frac{\partial f}{\partial x})=e^{-ik_xx}\frac{\partial f}{\partial x}|_{\text{边界}}-(-ik_x)\int\frac{\partial f}{\partial x}e^{-ik_xx}dx,$$

因为傅里叶变换的要求，f 在边界上收敛到零，所以 $\frac{\partial f}{\partial x}|_{\text{边界}}=0$，即

$$\int\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}e^{-ik_xx}dx=ik_x\int\frac{\partial f}{\partial x}e^{-ik_xx}dx,$$

容易推得，

$$\int\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}e^{-ik_xx}dx=(ik_x)^2\int fe^{-ik_xx}dx,$$

也就是说，做傅里叶变换时，可以把哈密顿算子替换成 $i\boldsymbol{k}$，这是一个非常重要的结论，在后面的学习中也会经常用到这个技巧. y, z 方向也是类似的，最终

$$\iiint_V \nabla^2 f e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} dxdydz = (i\boldsymbol{k})^2 \iiint_V f e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} dxdydz,$$

对于这道题，$f = \frac{1}{r}$，尽管它在边界收敛到零，但是并不是绝对可积的 (可以对它做全空间积分验证，此处不做赘述)，所以不能直接对它做傅里叶变换. 不过，我们可以“曲线救国”，因为 $\frac{1}{r}$ 不绝对可积，说明它衰减的比较慢，我们不妨给它乘上一个因子 e^{-ar}，让它加快衰减，从而使得整体绝对可积，再对 $\frac{e^{-ar}}{r}$ 做傅里叶变换，将结果中的 a 取为零，就可得到 $\frac{1}{r}$ 的傅里叶变换.

在球坐标下，

$$\begin{aligned}
&\iiint_V \frac{e^{-ar}}{r} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\
&\qquad = \iiint_V e^{-ar-ikr\cos\theta} r \sin\theta dr d\theta d\varphi \\
&\qquad = -2\pi \int_0^\infty e^{-ar} \int_0^\pi e^{-ikr\cos\theta} d(r\cos\theta) dr \\
&\qquad = \frac{4\pi}{k} \int_0^\infty e^{-ar} \sin kr dr \\
&\qquad = \frac{4\pi}{k} Im(\int_0^\infty e^{-ar} e^{ikr} dr) \\
&\qquad = \frac{4\pi}{a^2+k^2},
\end{aligned}$$

令 $a = 0$，可以得到

$$\iiint_V \frac{1}{r} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{k^2},$$

所以等式左边为

$$(i\boldsymbol{k})^2 \times \frac{4\pi}{k^2} = -4\pi = \text{等式右边}.$$

(2)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = \partial_i r_i = 3,$$

$$\nabla \times \boldsymbol{r} = \epsilon_{ijk}\partial_i r_j \boldsymbol{e_k} \xlongequal{i\neq j} 0,$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r} = a_i\partial_i \boldsymbol{r} = a_i\boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{a},$$

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) = \nabla(a_i r_i) = a_i\boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{a},$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot[\boldsymbol{E_0}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] &= \nabla\cdot\boldsymbol{E_0}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) + \nabla\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E_0}\\ &= 0 + \frac{d\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{d(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E_0} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E_0}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}),\\ \nabla\times[\boldsymbol{E_0}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] &= \nabla\times\boldsymbol{E_0}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) + \nabla\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{E_0}\\ &= 0 + \frac{d\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{d(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{E_0} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E_0}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}).\end{aligned}$$

题目 5. 已知一个电荷守恒系统的偶极矩定义为

$$\boldsymbol{p}(t) = \int_V \rho(\boldsymbol{x}',t)\boldsymbol{x}'dV',$$

利用电荷守恒定律 $\nabla'\cdot\boldsymbol{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ 证明 $\boldsymbol{p}$ 的变化率为

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t)dV'.$$

解答. $\nabla'\cdot\boldsymbol{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0\nabla'\cdot\boldsymbol{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ 将电荷守恒定律式代入偶极矩定义中

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \int_V \frac{\partial\rho(\boldsymbol{x}',t)}{\partial t}\boldsymbol{x}'dV' = -\int_V \nabla'\cdot\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}'dV',$$

下面证明

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{AB}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B},$$

$\nabla\cdot(\boldsymbol{AB}) = \partial_i(A_iB_j)\boldsymbol{e_j} = \partial_iA_iB_j\boldsymbol{e_j} + A_i\partial_iB_j\boldsymbol{e_j} = (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}.$

所以

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} &= -\int_V (\nabla'\cdot(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}') - (\boldsymbol{J}\cdot\nabla')\boldsymbol{x}')dV'\\ &= -\int_V \nabla'\cdot(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}')dV' + \int_V (\boldsymbol{J}\cdot\nabla')\boldsymbol{x}'dV'\\ &= -\oint_S d\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}') + \int_V \boldsymbol{J}dV',\end{aligned}$$

注：$(\boldsymbol{J}\cdot\nabla')\boldsymbol{x}' = J_i\partial_i' x_j' \boldsymbol{e_j} = J_i\delta_{ij}\boldsymbol{e_j} = J_j\boldsymbol{e_j} = \boldsymbol{J}$.

总可以将积分区域取的可以完全包裹电荷分布区域 V，所以积分区域的界面 S 上有 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{0}$, 即

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t)dV'.$$

题目 6. 若 $\boldsymbol{m}$ 是常矢量，证明除 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{0}$ 点以外，矢量 $\boldsymbol{A}=\dfrac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{R}}{R^3}$ 的旋度等于标量 $\varphi=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3}$ 的梯度的负值，即

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi, (\boldsymbol{R}\neq\boldsymbol{0})$$

其中 R 为坐标原点到场点的距离，方向由原点指向场点.

解答. 首先证明

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = -(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A},$$

$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \epsilon_{ijk}\partial_i(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_j\boldsymbol{e_k} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{abj}\partial_i(A_aB_b)\boldsymbol{e_k} = -\epsilon_{jik}\epsilon_{jab}(\partial_iA_aB_b + A_a\partial_iB_b)\boldsymbol{e_k} = -(\delta_{ia}\delta_{kb}-\delta_{ib}\delta_{ka})(\partial_iA_aB_b + A_a\partial_iB_b)\boldsymbol{e_k} = (-\partial_aA_aB_k - A_i\partial_iB_k + \partial_bA_kB_b + A_k\partial_bB_b)\boldsymbol{e_k} = -(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$.

所以

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \nabla\times(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{R}}{R^3}) = -(\nabla\cdot\boldsymbol{m})\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} - (\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} + (\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\cdot\nabla)\boldsymbol{m} + (\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R^3})\boldsymbol{m}$$

$$\overset{\boldsymbol{m}\text{ 为常矢量},\boldsymbol{R}\neq\boldsymbol{0}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} -(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3},$$

且

$$-\nabla\varphi = -\nabla(\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3}) = -\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\times(\nabla\times\boldsymbol{m}) - (\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\cdot\nabla)\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}\times(\nabla\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}) - (\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}$$

$$\overset{\boldsymbol{m}\text{ 为常矢量},\boldsymbol{R}\neq\boldsymbol{0}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} -(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3},$$

所以

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = -\nabla \varphi .(\boldsymbol{R} \neq \boldsymbol{0})$$