2.5.2 根式函数(多值函数)

设$n \in \mathbb{Z}^+$，$w = z^n$的反函数$w = \sqrt[n]{z}$ 称为根式函数.

$\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{\infty} = \infty$. 当$z \neq 0, \infty$时，

$$w = \sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{|z|}\right)\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)$$

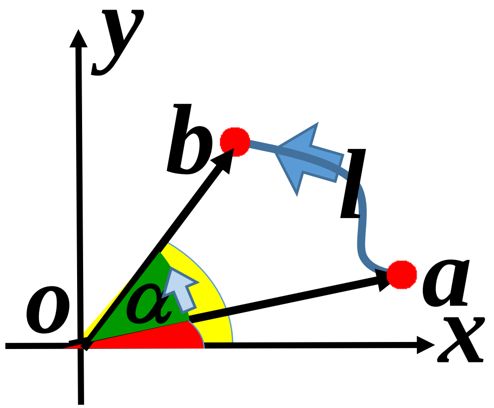
$$= \left(\sqrt[n]{|z|}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \quad \left(\sqrt[n]{|z|}\right) \geq 0, \; k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

当$z \neq 0, \infty$时，$w = \sqrt[n]{z}$是 n 值函数. 多值函数比较复杂.

下面以根式函数为例，介绍与多值函数有关的几个概念：

辐角变化，支点，支割线，单值解析分支.

辐角变化



设 l：连续曲线，起点为 a, 终点为 b,（a,b均为复数）

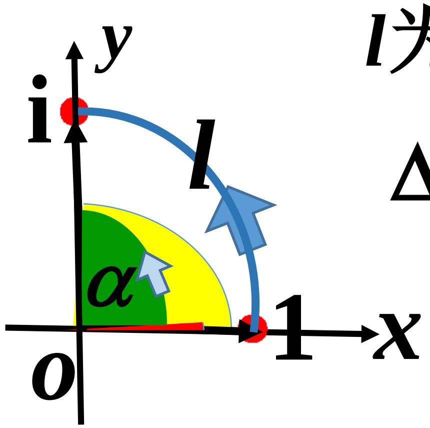
选定a 一个辐角值$\arg a$, 当z沿l连续地从a 向b 运动时，

$\arg z$从$\arg a$连续变化到b辐角的一个确切值$\arg b$,

称$\arg b-\arg a$为z沿l辐角变化，

记为$\Delta_l \arg z=\arg b-\arg a=\alpha$(图中). $\Delta_l \arg z$与$\arg a$ 的具体选定值无关.

例



l为从1到i在第一象限的单位圆周.

$$\Delta_l \arg z=\arg \mathrm{i}-\arg 1=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2},$$

$$(或)=\frac{5\pi}{2}-2\pi=\frac{\pi}{2}, 等等.$$

z沿曲线l辐角变化：$\Delta_l \arg z = \arg b - \arg a$，　a 是 l 起点，b是l 终点.

若 l 是连续闭曲线，即起点终点重合，　需分两种情形讨论$\Delta_l \arg z$：

(a) 原点在闭曲线l 内部.

z从起点沿 l 逆时针 (正向) (绕原点)旋转 k 圈运动到终点 (和起点在同一位置)，

z沿l辐角变化 $\Delta_l \arg z = k \cdot 2\pi = 2k\pi$，　$k \in \mathbb{Z}$ (整数).

$k > 0$：逆时针旋转，正向旋转；

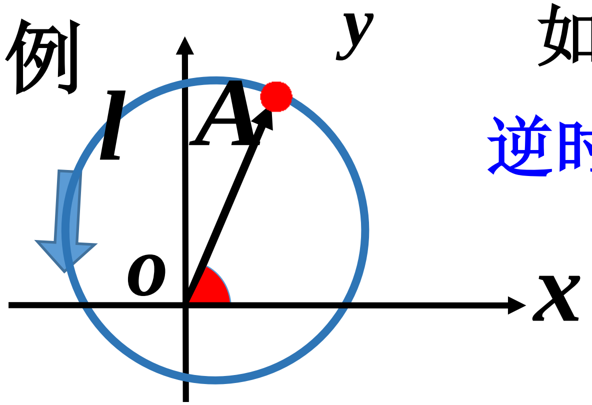
$k < 0$：(实际是)顺时针旋转，负向旋转.

(b) 原点在闭曲线l 外部

z从起点A 沿 l 逆时针 (正向) 旋转任意整数圈运动到终点 (和起点在同一位置)，

z沿l辐角变化 $\Delta_l \arg z = 0$.

例

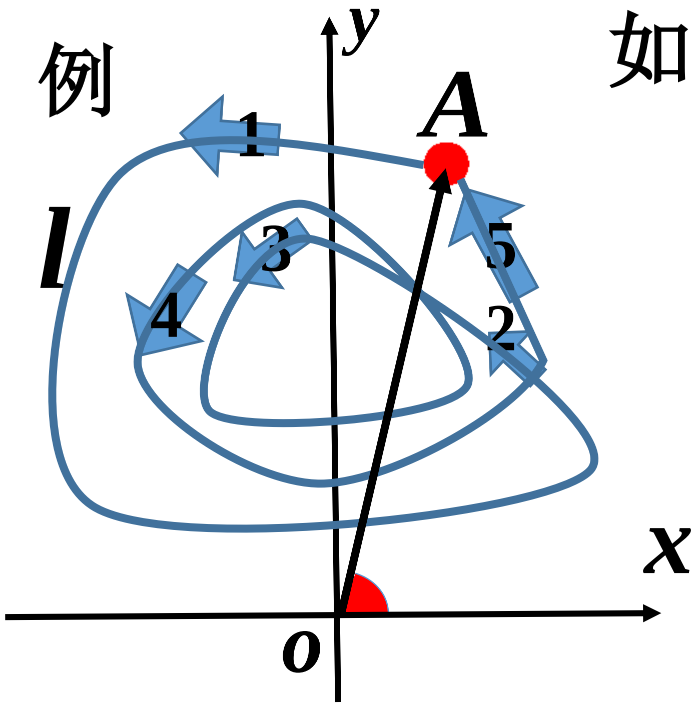


如图, 原点在l 内部, z 从起点A 沿 l

逆时针(正向) 绕着原点转一圈，回到终点A ,

$$\Delta_l \arg z = 2\pi .$$

例



如图, 原点在l 外部, z 从起点A 沿 l

逆时针(正向) 转三圈，回到终点A ,

$$\Delta_l \arg z = 0.$$

$$w=\sqrt[n]{z}=\left(\sqrt[n]{|z|}\right)e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}},\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

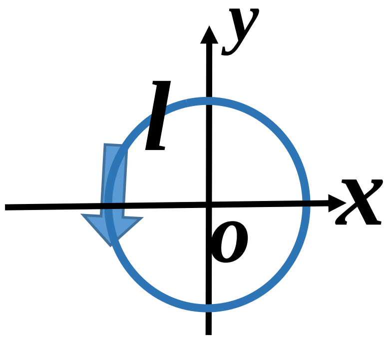
$\mathrm{Arg}\,z$的多值性引起了 $\sqrt[n]{z}$ 的多值性. 选定 $\mathrm{Arg}\,z$的一个值记为$\arg z$.

对任意给定的$z=r\,e^{i\varphi}\neq 0$, 若选定$\sqrt[n]{z}$ 的一个值, 比如选$k=0$, 则得

$$w_0\triangleq\left(\sqrt[n]{z}\right)_0=\left(\sqrt[n]{|z|}\right)e^{i\frac{\arg z}{n}}=\left(\sqrt[n]{r}\right)e^{i\frac{\varphi}{n}}.$$ 过z作一简单闭曲线l.

(a) 若原点 0 在 l 内, z沿l逆时针转一圈回到原位置, 则

z的辐角从φ变成$\varphi+2\pi$, 故 函数$\sqrt[n]{z}$从$w_0=\left(\sqrt[n]{r}\right)e^{i\frac{\varphi}{n}}$



变成$w_1=\left(\sqrt[n]{r}\right)e^{i\frac{\varphi+2\pi}{n}}=w_0\,e^{i\frac{2\pi}{n}}\neq w_0$.

若z沿l逆时针再继续转一圈回到原位置, 则

$\sqrt[n]{z}$从w_1变成$w_2=w_1\,e^{i\frac{2\pi}{n}},\cdots$ 连续转n 圈, 才能回到w_0.

(b) 若原点 0 不在 l 内, 则z 沿l 逆时针转一圈回到原位置时,

z辐角不变，从而 函数$\sqrt[n]{z}$ 也不变.

支点

定义8(P35) 设$w=f(z)$是多值函数，在点 $z=a$ 的充分小邻域内，作一条包围该点a的简单闭曲线C，如果当z从C上某点出发，沿C逆时针连续转一圈回到出发点时，函数$f(z)$从一值变到另一不同的值，称点a是$f(z)$的支点.

从前面分析知，$z=0$是 $w=\sqrt[n]{z}$的支点.

$\forall R>0$, $\{z \| z| > R\}$是∞的邻域，

在其内部任作一条围绕∞的含0点的简单闭曲线C，

当z沿C逆时针转一圈回到原位置时，$\sqrt[n]{z}$变化一个因子$e^{i\frac{2\pi}{n}}$，

因此，$z=\infty$也是 $w=\sqrt[n]{z}$的支点.

除了$0, \infty$ 外，$w=\sqrt[n]{z}$没有其他支点.

(2)支割线和多值函数单值解析分支

定义 设$w=f(z)$是多值函数，(每个单值连续)，

连接$f(z)$任意两个支点的简单曲线称为$f(z)$ 的支割线.

取一些$f(z)$的支割线(通常是支点两两组合连接)，

将闭复平面割成多联通区域，记为G，在 G 内任取一条简单闭曲线l ，

若当 z 从l 上任一点出发沿着 l 连续变动一圈回到出发点时，

$f(z)$都回到原来值，则在 G 内 可确定 $f(z)$的一条单值连续分支：

先对 G 内某一点 z_0，从 $f(z_0)$ 的多值中选定一个值$\left(f(z_0)\right)_k$，

对G 内其他任一点z，用G 内一条简单曲线l 连接z 和z_0，

z 从z_0 沿l 连续变化到z 时，$f(z)$从$\left(f(z_0)\right)_k$ 连续变化到一确定值$\left(f(z)\right)_k$，

这样确定的单值函数$\left(f(z)\right)_k$，叫做$f(z)$ 的一个单值连续分支.

单值连续分支依赖支割线的选取.

例 $w=\sqrt[n]{z}$是多值函数, 有且只有两个支点：0 和 ∞.

负(或正)半实轴， 或者, 上(或下)半虚轴, 或者, 任意一条从原点出发的射线, 均可作为$\sqrt[n]{z}$的支割线.

若选负实轴为$\sqrt[n]{z}$的支割线，在沿负实轴(支割线)割开的复平面内,

$w=\sqrt[n]{z}$有以下n个单值连续分支：$k=0,1,2,\cdots,n-1,$

$$w_k=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k=\left(\sqrt[n]{|z|}\right)e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}},\quad -\pi<\arg z<\pi,$$

或者记为: $w_k=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k=\left(\sqrt[n]{|z|}\right)e^{i\frac{\arg z}{n}},\quad (2k-1)\pi<\arg z<(2k+1)\pi.$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{沿负半实轴割开的}z\text{ 平面}\\ (2k-1)\pi<\arg z<(2k+1)\pi\end{array}}\ \xrightarrow[\text{单叶}]{w_k=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k}\ \boxed{\begin{array}{l}w\text{平面的角域}D_k:\\ \frac{(2k-1)\pi}{n}<\arg w<\frac{(2k+1)\pi}{n}\end{array}}$$

单值解析分支

定义9 设$w = F(z)$是区域 D 内的多值函数，

$w = f(z)$是区域 D 内的单值解析函数，

如果$f(z)$在 D 每一点的值，都等于 $F(z)$ 在该点的一个值，则称 $f(z)$ 是 $F(z)$ 在 D 内的一个单值解析分支.

如，$w = \sqrt[n]{z}$有n个单值连续分支w_k，$k = 0,1,2,\cdots,n-1.$

每个单值分支w_k有反函数$z = w_k^n$，可导，$\dfrac{dz}{dw_k} = nw_k^{n-1}$，

故由反函数求导法则得$w_k = \left(\sqrt[n]{z}\right)_k$可导，

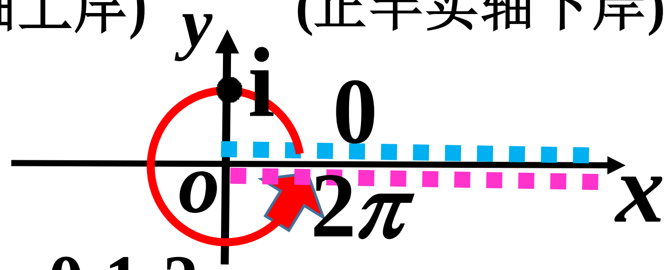
$$\frac{dw_k}{dz} = \frac{1}{\dfrac{dz}{dw_k}} = \frac{1}{nw_k^{n-1}} = \frac{w_k}{nw_k^n} = \frac{w_k}{nz} = \frac{\left(\sqrt[n]{z}\right)_k}{nz}, \qquad (2.10)(P36)$$

故每个单值w_k是w的单值解析分支.

例9(P36)，$w=\sqrt[3]{z}$ 确定在沿正实轴割开的z 平面，且$w(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$，求$w(-\mathrm{i})$，$w'(-\mathrm{i})$，$w(-1)$，$w'(-1)$.

解：z平面沿正半实轴割开，故可取 $\underline{\quad 0 \quad} < \arg z < \underline{\quad 2\pi \quad}$.

(正半实轴上岸) (正半实轴下岸)



$w=\sqrt[3]{z}$有三个单值解析分支：

$$w_k=\left(\sqrt[3]{|z|}\right)e^{\mathrm{i}\frac{\arg z+2k\pi}{3}},\quad 0<\arg z<2\pi,\ k=0,1,2.$$

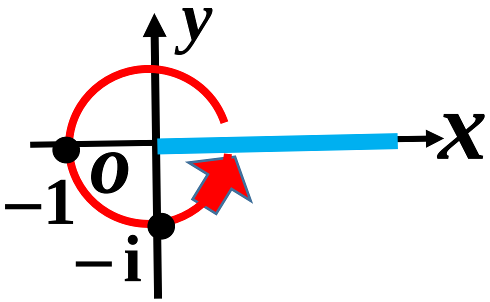
它们分别将沿正半实轴割开的z平面映照成三个角域：

$$D_0:\ 0<\arg w<\frac{2\pi}{3},\quad D_1:\ \frac{2\pi}{3}<\arg w<\frac{4\pi}{3},\quad D_2:\ \frac{4\pi}{3}<\arg w<2\pi.$$

$w(\mathrm{i})=-\mathrm{i}=e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$，在第三个角域$D_2$，

故取$k=2$的分支$w_2=\left(\sqrt[3]{|z|}\right)e^{\mathrm{i}\frac{\arg z+4\pi}{3}}$，$\quad 0<\arg z<2\pi.$

由$w(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$得 w取$k=2$的分支:



$\boxed{\arg(-\mathrm{i})=\frac{3\pi}{2}}$

$\boxed{\arg(-1)=\pi.}$

$$w_2=\left(\sqrt[3]{|z|}\right)e^{\mathrm{i}\frac{\arg z+4\pi}{3}},\quad 0<\arg z<2\pi.$$

$$\boxed{w_k=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k\text{的导数}\frac{\mathrm{d}w_k}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w_k}}=\frac{w_k}{nz}.}$$

$$w_2(-\mathrm{i})=\left(\sqrt[3]{|-\mathrm{i}|}\right)e^{\mathrm{i}\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{3}}=e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2},$$

$$w_2(-1)=e^{\mathrm{i}\frac{\pi+4\pi}{3}}=e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

$$w_2'(-\mathrm{i})=\frac{w_2(-\mathrm{i})}{3(-\mathrm{i})}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}}{3\bullet(-\mathrm{i})}\cdot\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{6}.$$

同理, $w_2'(-1)=\dfrac{w_2(-1)}{3(-1)}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}{-3}=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{6}$. #

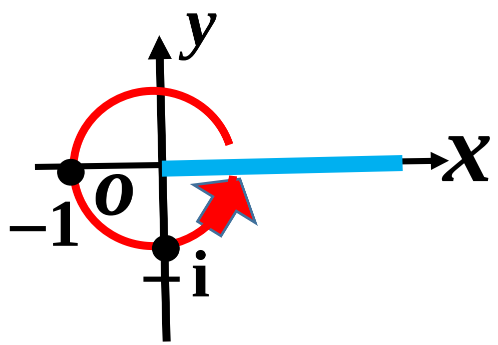
(3) 关于支割线两岸的函数值

一般，一个多值函数的各个单值连续分支，在支割线两岸取不同的函数值.

例如，$w=\sqrt[3]{z}$在沿正半实轴割开的z平面的分支

$$w_0=\left(\sqrt[3]{|z|}\right)e^{i\frac{\arg z}{3}},$$

$$0<\arg z<2\pi,$$



在正半实轴上岸，$\arg z=0$，故$w_0=\left(\sqrt[3]{|z|}\right)$,

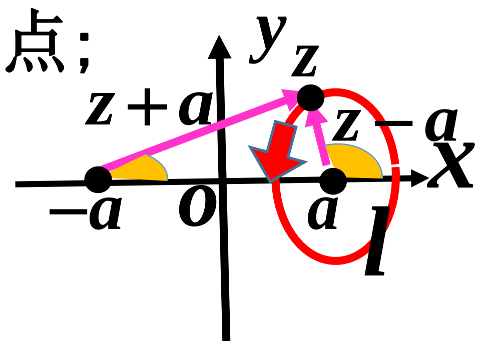
在正半实轴下岸，$\arg z=2\pi$，故$w_0=\left(\sqrt[3]{|z|}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$\left(z\neq 0\text{时},\neq\left(\sqrt[3]{|z|}\right)\right)$

例 设 $f(z)=\sqrt{z^2-a^2},\ a>0$. (1)求 $f(z)$支点；

(2) 若$f(z)$在支割线上岸取值为$-b\mathrm{i},\ b>0$,

求$f(2a),\ f'(2a),\ f''(2a)$.



解 (1) 因$\sqrt{z}$有且只有两个支点0 和∞ ,

$f(z)$所有可能的支点是使得$z^2-a^2=0$ 或∞ 的点,

即a, $-a$, ∞. 下面按支点定义逐一判断它们到底是不是支点.

首先$f(z)=\sqrt{(z+a)(z-a)}$ $=\left(\sqrt{|z+a|\cdot|z-a|}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{Arg}(z+a)+\mathrm{Arg}(z-a)}{2}\right\}$.

首先分析a. 在a充分小邻域内, 作一条简单闭曲线l,使得a 在l 内部,

$-a$在l 外部, 如图. 当z从l 上某点出发,

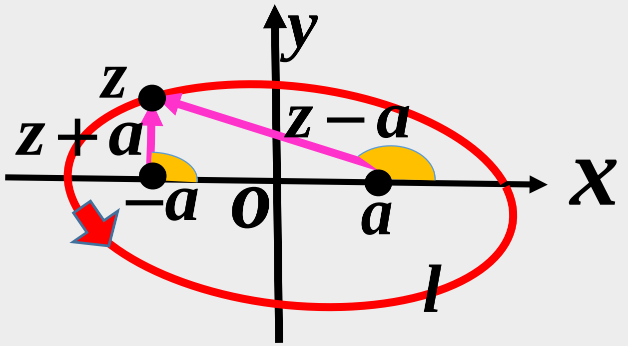
沿l 逆时针连续变动一圈回到出发点时, $z+a$辐角不变,

$z-a$辐角增加2π. 故$f(z)$辐角增加$\dfrac{0+2\pi}{2}=\pi$.

因此$f(z)$值要改变一个因子$e^{\mathrm{i}\pi}=-1$. 故a是$f(z)$的支点.

类似分析可得, $-a$也是$f(z)$的支点.

$$f(z)=\sqrt{z^2-a^2},\ a>0$$



解 (1) 因$\sqrt{z}$有且只有两个支点0 和∞，

$f(z)$所有可能的支点a，$-a$，∞.

首先$f(z)=\sqrt{(z+a)(z-a)}=\left(\sqrt{|z+a|\cdot|z-a|}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{Arg}(z+a)+\mathrm{Arg}(z-a)}{2}\right\}.$

首先由支点定义分析得a 是$f(z)$的支点. 类似地，$-a$也是$f(z)$的支点.

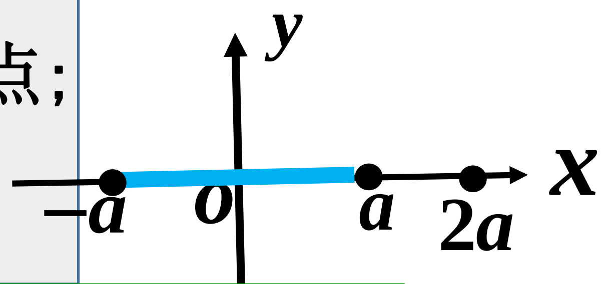
最后分析∞. 在∞充分"小"的邻域内，作一条简单闭曲线l，使得l 包含 a 和$-a$，如图. 当z从l 上某点出发，沿l 逆时针连续变动一圈回到出发点时，$z+a$和$z-a$的辐角都分别增加2π，

故$f(z)$辐角增加$\dfrac{2\pi+2\pi}{2}=2\pi.$

故$f(z)$值要改变一个因子$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}=1$， 故$f(z)$值不变.

因此 ∞ 不是$f(z)$的支点. $f(z)$有且仅有两个支点 a 和$-a$.

例 设 $f(z)=\sqrt{z^2-a^2}$, $a>0$. (1)求 $f(z)$支点;
(2) 若$f(z)$在支割线上岸取值为$-b\mathrm{i}$, $b>0$,
求$f(2a)$, $f'(2a)$, $f''(2a)$.



解 (1) …… $f(z)$有且仅有两个支点a 和$-a$, ∞不是支点.

(2) 连接两支点$-a$和a的线段$[-a,a]$, 为支割线.

在割去线段$[-a,a]$ 的z平面, $f(z)$可分出两个单值连续分支, 且由反函数和复合函数求导公式知, 每支解析, 且

$$f'(z)=\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{2(z^2-a^2)}\cdot(z^2-a^2)'=\frac{z}{f(z)}.$$

且 $$f''(z)=\frac{1\cdot f(z)-z\cdot f'(z)}{f^2(z)}=\frac{1}{f(z)}-\frac{z f'(z)}{f^2(z)}.$$

等式两边取同一分支.

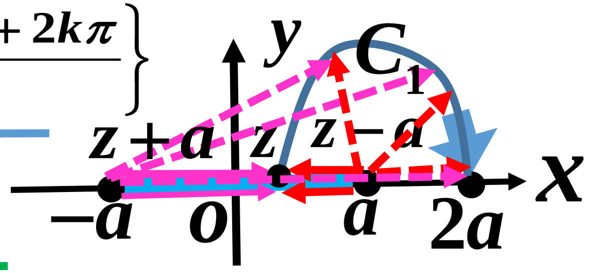
下面先求 $f(2a)$.

为此先根据$f(z)$在支割线上岸取值为$-b\mathrm{i}$, $b>0$, 确定是哪个分支.

当z在支割线上岸时,可规定$\arg(z+a)=0$，$\arg(z-a)=\pi$，从而

$$f(z)=\left(\sqrt{|z+a|\cdot|z-a|}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\,\frac{\arg(z+a)+\arg(z-a)+2k\pi}{2}\right\}$$

$$=\left(\sqrt{|z^2-a^2|}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\,\frac{0+\pi+2k\pi}{2}\right\},\quad k=0,1.$$



当z在支割线上岸时，$f(z)=-b\mathrm{i}=b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$.

故$f(z)$应取k使得 $\frac{0+\pi+2k\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$ 的那一分支，即$k=1$分支，故

$$f(z)=\left(\sqrt{|z^2-a^2|}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\,\frac{\arg(z+a)+\arg(z-a)+2\pi}{2}\right\}.\ (\Diamond)$$ 下求$f(2a)$.

在支割线上岸内取定一点z，并在割去线段$[-a,a]$ 的z平面，作一条连接上岸点z 和$2a$ 的简单曲线C_1，当z从上岸沿C_1 连续变化到 $2a$ 时，

$\arg(z+a)$ 不变，即$\arg(z+a)\big|_{z=2a}=\arg(z+a)\big|_{z\text{在支割线上岸}}=0$;

$\arg(z-a)$减少π，即$\arg(z-a)\big|_{z=2a}=\arg(z-a)\big|_{z\text{在支割线上岸}}-\pi=\pi-\pi=0.$

代入$(\Diamond)$求$f(2a)$.

$$f(z)=\left(\sqrt{|z^2-a^2|}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\frac{\arg(z+a)+\arg(z-a)+2\pi}{2}\right\}.\quad(\lozenge)$$

$\arg(z+a)\big|_{z=2a}=0;\ \arg(z-a)\big|_{z=2a}=\pi-\pi=\mathbf{0}.$ 代入$(\lozenge)$求$f(2a)$.

$$f(2a)=\left(\sqrt{|(2a)^2-a^2|}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\frac{0+0+2\pi}{2}\right\}=(\sqrt{3})a\,e^{\mathrm{i}\pi}=-(\sqrt{3})a.$$

$$f'(z)=\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{2(z^2-a^2)}\cdot(z^2-a^2)'=\frac{z}{f(z)}.$$

$$\text{且 } f''(z)=\frac{1\cdot f(z)-z\cdot f'(z)}{f^2(z)}=\frac{1}{f(z)}-\frac{z\,f'(z)}{f^2(z)}.$$

等式两边取同一分支.

$$\text{故 } f'(2a)=\frac{2a}{f(2a)}=\frac{2a}{-(\sqrt{3})a}=-\frac{2}{(\sqrt{3})},$$

$$f''(2a)=\frac{1}{f(2a)}-\frac{2a\,f'(2a)}{f^2(2a)}=\frac{1}{-(\sqrt{3})a}-\frac{2a\cdot\left(-\frac{2}{(\sqrt{3})}\right)}{\left\{-(\sqrt{3})a\right\}^2}=\frac{1}{3(\sqrt{3})a}.\quad\#$$

2.5.3 指数函数 ★★★ 熟记定义

根据欧拉公式和指数函数应该满足的运算法则定义指数函数.

定义：设 $z=x+\mathrm{i}\,y,\ x,y\in\mathbb{R}$, 则定义指数函数

$$e^z=\exp(z)=e^{x+\mathrm{i}\,y}=e^x e^{\mathrm{i}\,y}=e^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y),$$

即 $e^z=e^{\mathrm{Re}\,z}(\cos\mathrm{Im}\,z+\mathrm{i}\sin\mathrm{Im}\,z)$. 熟记

$$\mathrm{Re}(e^z)=e^x\cos y,\quad \mathrm{Im}(e^z)=e^x\sin y.$$

$$|e^z|=e^{\mathrm{Re}\,z}=e^x,\quad \mathrm{Arg}\,e^z=\mathrm{Im}\,z+2k\pi=y+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

例 $e^{2+3\mathrm{i}}=e^2e^{3\mathrm{i}}=e^2(\cos 3+\mathrm{i}\sin 3),\quad e^0=1.$

$$e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{i},\quad e^{\pi\mathrm{i}}=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1,$$

$$e^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}=\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}=-\mathrm{i},\quad \cdots\cdots$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{z}=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^{x}(\cos y+\mathrm{i}\sin y),\ x,y\in\mathbb{R}.}$$

e^{z} 是单值函数, 具有如下性质:

(1) $\forall z\in\mathbb{C}$(复数域), $\left|\mathrm{e}^{z}\right|=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}z}\neq 0$, $\mathrm{e}^{z}\neq 0$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^{z}$ 不存在, e^{∞} 无意义.

证:
$$\mathrm{e}^{z}=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}\to+\infty, & z=x\to+\infty,\\ \mathrm{e}^{x}\to 0, & z=x\to-\infty,\\ \cos y+\mathrm{i}\sin y\text{不收敛}, & z=\mathrm{i}y,\ y\to+\infty,\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\end{cases}$$

故 $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^{z}$ 不存在. #

同理, $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^{2}}{\mathrm{e}^{z}}$ 不存在, 因为
$$\frac{z^{2}}{\mathrm{e}^{z}}=\begin{cases}\dfrac{x^{2}}{\mathrm{e}^{x}}\to 0,\ z=x\to+\infty\text{时},\\ \dfrac{x^{2}}{\mathrm{e}^{x}}\to+\infty,\ \text{当}z=x\to-\infty\text{时},\end{cases}$$

$$e^z = e^{x+\mathrm{i}y} = e^x e^{\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y),\ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$(复数域), $\left|e^z\right| = e^{\mathrm{Re}z} \neq 0,\quad e^z \neq 0.$

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在，　e^{∞} 无意义.

(3) $e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

证：设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}\,y_1$ ， $z_2 = x_2 + \mathrm{i}\,y_2$ ，　$x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$,

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2} = (e^{x_1} e^{\mathrm{i}y_1})\cdot(e^{x_2} e^{\mathrm{i}y_2})$$

$$= (e^{x_1} e^{x_2}) e^{\mathrm{i}(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2} e^{\mathrm{i}(y_1+y_2)}$$

$$= e^{x_1+x_2+\mathrm{i}(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}.\ \ \#$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y),\ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$(复数域), $\left|e^z\right| = e^{\mathrm{Re}\, z} \neq 0$, $e^z \neq 0$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在, e^∞ 无意义. (3) $e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

(4) e^z 是以$2\pi i$为周期的周期函数, 即

$$e^{z+2k\pi i} = e^z,\ \forall k \in \mathbb{Z}.\quad ★★★$$

证明: $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\underline{e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1.}$

由(3)得, $e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z$.

故 e^z 以$2\pi i$为周期. #

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y),\ x, y \in \mathbb{R}.}$$

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$(复数域), $\left|e^z\right| = e^{\mathrm{Re}z} \neq 0$, $e^z \neq 0$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在, e^∞ 无意义. (3) $e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

(4) e^z 是以$2\pi i$为周期的周期函数, 即$e^{z+2k\pi i} = e^z$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

(5) $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, 使得$z_1 = z_2 + 2k\pi i$.

证明: 充分性 "$\Leftarrow$". 直接由上述性质(4)得出.

必要性 "$\Rightarrow$". 若 $e^{z_1} = e^{z_2}$, 则由性质(3)得

$$1 = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}\cdot\frac{e^{-z_2}}{e^{-z_2}} = \frac{e^{z_1-z_2}}{e^0} = e^{x_1-x_2}\, e^{i(y_1-y_2)}.$$

$$\text{故}\begin{cases} e^{x_1-x_2} = 1, \text{ 即} x_1 - x_2 = 0, \\ y_1 - y_2 = 0 + 2k\pi, \ \exists k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \text{故}\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2 + 2k\pi, \ \exists k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

#

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y),\ x, y \in \mathbb{R}.$$

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$(复数域), $\left|\mathrm{e}^z\right| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}z} \neq 0$, $\mathrm{e}^z \neq 0$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} \mathrm{e}^z$ 不存在, e^∞ 无意义. (3) $\mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}$.

(4) e^z 是以$2\pi \mathrm{i}$为周期的周期函数, 即$\mathrm{e}^{z+2k\pi \mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

(5) $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, 使得$z_1 = z_2 + 2k\pi \mathrm{i}$.

教材P39-40

(6) $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\bar{z}}$.

证明: $\overline{\mathrm{e}^z} = \overline{\mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)} = \mathrm{e}^x(\cos y - \mathrm{i}\sin y)$

$$= \mathrm{e}^x\{\cos(-y) + \mathrm{i}\sin(-y)\} = \mathrm{e}^{x-\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{\bar{z}}\ .\quad \#$$

(7) e^z在全平面解析, $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$.

证: 利用柯西-黎曼定理(C - R方程). 详细证明见P29例6. #

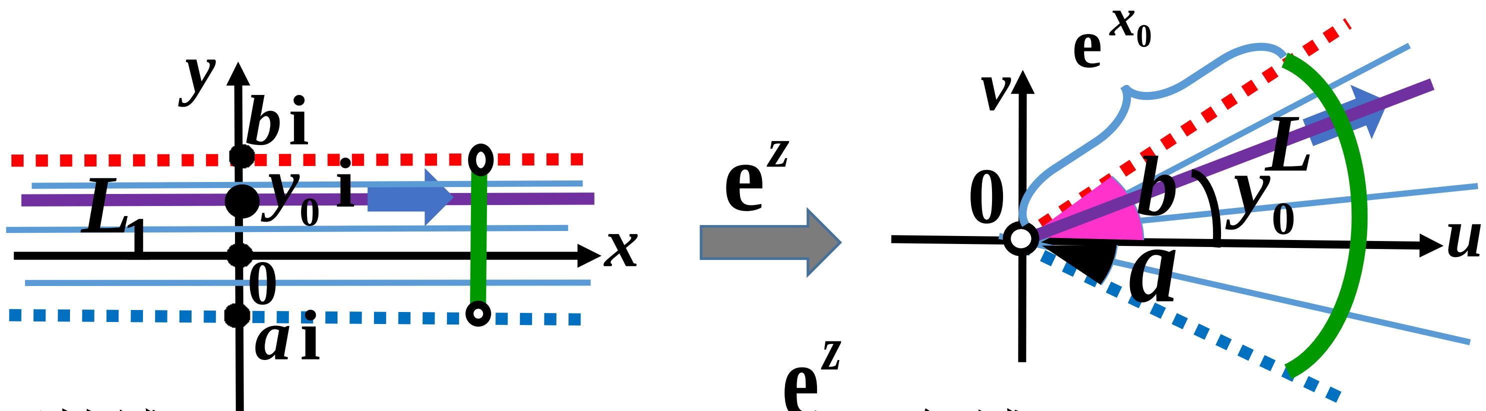
e^z 单叶性区域

$e^z = e^{x+\mathrm{i}y} = e^x e^{\mathrm{i}y}$：单值且全平面解析函数

(5) $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, 使得$z_1 = z_2 + 2k\pi\mathrm{i}$.

D是e^z单叶性区域$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{不存在不相等的} z_1, z_2 \in D\text{，满足：} \\ z_1 = z_2 + 2k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \end{cases}$

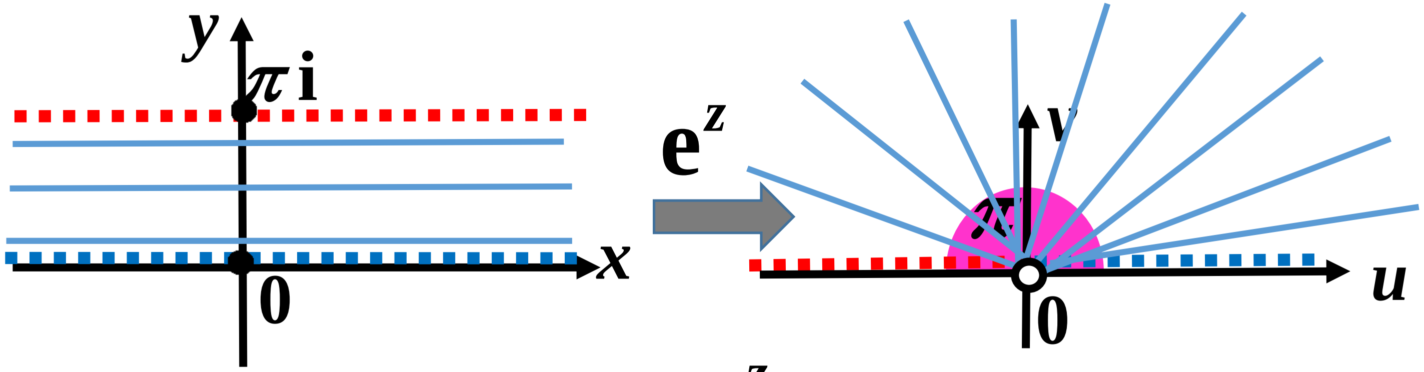
条形性域: $a < \mathrm{Im}\, z < b,\ b - a \le 2\pi$ 是e^z的单叶性区域.



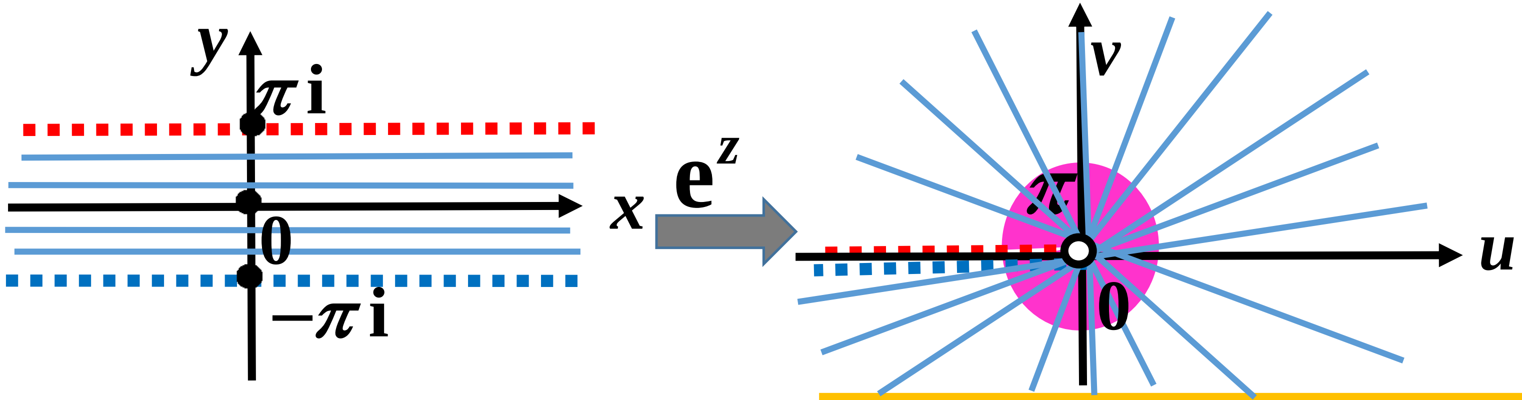
条形性域: $a < \mathrm{Im}\, z < b,\ b - a \le 2\pi \xrightarrow{e^z}$ 角域: $a < \arg w < b$.

直线L_1： $\mathrm{Im}\, z = y_0,\ a < y_0 < b \xrightarrow{e^z}$ 不含原点的射线L： $\arg w = y_0$.

线段： $\mathrm{Re}\, z = x_0,\ a < \mathrm{Im}\, z < b \xrightarrow{e^z}$ 圆弧$|w| = e^{x_0},\ a < \arg w < b$.



条形性域: $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ $\xrightarrow{e^z}$ 上半w平面: $0 < \arg w < \pi$



条形性域: $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ $\xrightarrow{e^z}$ 割去负半实轴和原点的w平面 $-\pi < \arg w < \pi$

条形性域: $(2k-1)\pi < \operatorname{Im} z < (2k+1)\pi$ $\xrightarrow{e^z}$ 割去负半实轴和原点的w平面 $(2k-1)\pi < \arg w < (2k+1)\pi$

作业 P 48

13 , 19 (3)

14(选做) $\left(\begin{array}{l}\text{即证明在割去线段}\left[-\frac{1}{k},-1\right]\text{和}\left[1,\frac{1}{k}\right]\text{的}z\text{平面，}\\ z\text{沿任一简单闭曲线}l,\text{逆时针转一圈后，函数值不发生改变.}\end{array}\right)$

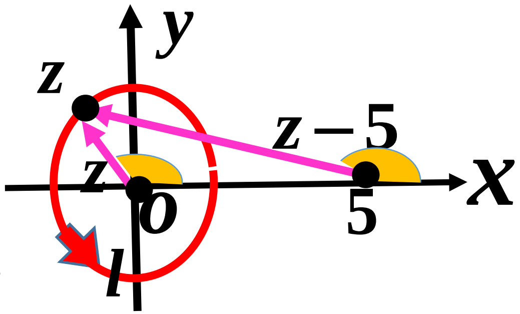
15(选做) (首先$w=\sqrt[4]{(-1)z(z-1)^3}$，然后分析. 参考此PPT补充例题P 27 - 31)

例 设 $w=\sqrt[3]{(5-z)z^2}$, 求在割线[0,1] 的下岸取正值的那一支.

并且求在 $z=-1$ 的函数值和导数值.

解 (1) 记 $w=g(z)=\sqrt[3]{(5-z)z^2}$, 所有可能支点是使得$(5-z)z^2=0$ 或∞ 的点,

即 0, 5, ∞. 下面按支点定义逐一判断它们到底是不是支点.



首先 $g(z)=\sqrt[3]{(5-z)z^2}=\sqrt[3]{(-1)(z-5)z^2}$

$$=\left(\sqrt[3]{|z-5|\cdot|z|^2}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\,\frac{\operatorname{Arg}(-1)+\operatorname{Arg}(z-5)+2\operatorname{Arg} z}{3}\right\}.$$

首先分析0. 在0充分小邻域内, 作包含0不包含5 的简单闭曲线l, 如图.

当z从l上某点出发, 沿l逆时针连续变动一圈回到出发点时,

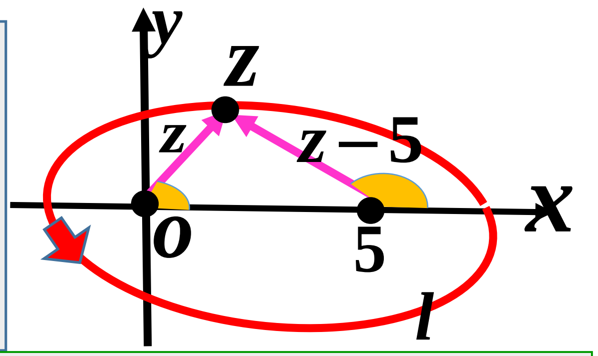
$z-5$辐角不变, z 辐角增加2π, 故$f(z)$辐角增加$\frac{0+2\cdot 2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$.

因此$f(z)$值要改变一个因子$e^{i\frac{4\pi}{3}}\neq 1$. 故 0 是$f(z)$的支点.

类似分析可得5 也是 $g(z)$ 的支点.

首先 $g(z)=\sqrt[3]{(5-z)z^2}=\sqrt[3]{(-1)(z-5)z^2}$

$$=\left(\sqrt[3]{|z-5|\cdot|z|^2}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\,\frac{\operatorname{Arg}(-1)+\operatorname{Arg}(z-5)+2\operatorname{Arg}z}{3}\right\}.$$



首先分析得 a 是 $f(z)$ 的支点. 类似分析可得5 也是 $g(z)$ 的支点.

最后分析∞. 在∞充分"小"的邻域内, 作一条简单闭曲线 l ,

使得 l 包含 0 和 5, 如图. 当 z 从 l 上某点出发,

沿 l 逆时针连续变动一圈回到出发点时， $z-5$ 辐角增加 2π,

z 辐角也增加 2π， 故 $g(z)$ 辐角增加 $\dfrac{2\pi+2\cdot 2\pi}{3}=2\pi.$

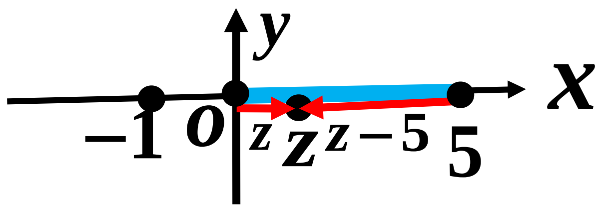
因此 $g(z)$ 值要改变一个因子 $e^{i2\pi}=1$， 故 $g(z)$ 值不变.

因此 ∞ 不是 $g(z)$ 的支点. $g(z)$ 有且仅有两个支点 0 和 5.

例 设 $w=\sqrt[3]{(5-z)z^2}$, 求在割线[0,1] 的下岸取正值的那一支在 $z=-1$ 的函数值和导数值.

解 首先 $g(z)=\sqrt[3]{(-1)(z-5)z^2}$

有且仅有两个支点 **0 和 5 .**



(2) 连接两支点0和5的线段$[0,5]$，为支割线.

在割去线段[0,5] 的z平面， $f(z)$可分出三个单值解析分支.

$$g(z)=\left(\sqrt[3]{|z-5|\cdot|z|^2}\right)\exp\left\{i\frac{\arg(-1)+\arg(z-5)+2\arg z+2k\pi}{3}\right\},\quad k=0,1,2.$$

下面先求 $g(-1)$. 为此先根据$g(z)$在支割线下岸取正值，确定分支.

可规定$\arg(-1)=\pi$. 当z在支割线下岸时，

规定$\arg(z-5)=-\pi$，$\arg z=0$， (此处不同规定将决定下面k可能不同.)

$$g(z)=\left(\sqrt[3]{|z-5|\cdot|z|^2}\right)\exp\left\{i\frac{\pi+(-\pi)+2\cdot 0+2k\pi}{3}\right\}=\left(\sqrt[3]{|z-5|\cdot|z|^2}\right)\exp\left\{i\frac{2k\pi}{3}\right\}>0.$$

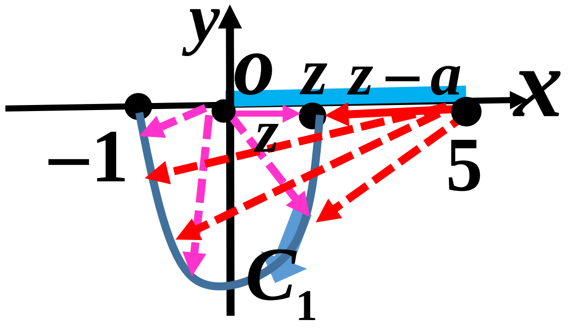
$k\in\{0,1,2\}$. 为此取$k=0$.

当z在支割线下岸时，规定 $\arg(z-5)=-\pi$, $\arg z=0$,

$$g(z)=\left(\sqrt[3]{|z-5|\cdot|z|^2}\right)\exp\left\{i\frac{\pi+(-\pi)+2\cdot 0+2k\pi}{3}\right\}$$

$$=\left(\sqrt[3]{|z-5|\cdot|z|^2}\right)\exp\left\{i\frac{2k\pi}{3}\right\}>0.$$

$k\in\{0,1,2\}$. 为此取可 $k=0$.



故 $g(z)=\left(\sqrt[3]{|z-5|\cdot|z|^2}\right)\exp\left\{i\frac{\pi+\arg(z-5)+2\arg z}{3}\right\}$. $(\Diamond)$

为求 $g(-1)$，在支割线下岸内取定一点z，并在割去线段[0,5]的z平面，作一条连接支割线下岸点z和−1的简单曲线 C_1，如图.

当z从下岸沿 C_1 连续变化到 -1 时，

$\arg(z-5)$不变，故 $\arg(z-5)\big|_{z=-1}=-\pi+0=-\pi$;

$\arg z$ 减少 π， 故 $\arg z\big|_{z=-1}=0-\pi=-\pi$. 代入 $(\Diamond)$，得

$$g(-1)=\left(\sqrt[3]{|-1-5|\cdot|-1|^2}\right)\exp\left\{i\frac{\pi+(-\pi)+2\cdot(-\pi)}{3}\right\}=\left(\sqrt[3]{6}\right)\exp\left\{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right\}$$

$$k=0,\ g(z)=\left(\sqrt[3]{|z-5|\cdot|z|^2}\right)\exp\left\{i\frac{\pi+\arg(z-5)+2\arg z}{3}\right\}.\quad (\lozenge)$$

$\arg z\big|_{z=-1}=-\pi;\quad \arg(z-5)\big|_{z=-1}=-\pi,$ 代入$(\lozenge)$, 得

$$g(-1)=\left(\sqrt[3]{|-1-5|\cdot|-1|^2}\right)\exp\left\{i\frac{\pi+(-\pi)+2\bullet(-\pi)}{3}\right\}=\left(\sqrt[3]{6}\right)\exp\left\{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=\left(\sqrt[3]{6}\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{(\sqrt{3})}{2}\right).$$

$$g'(z)=\frac{g(z)}{3\{(5-z)z^2\}}\{(5-z)z^2\}'=\frac{g(z)}{3(5-z)z^2}\{-z^2+(5-z)\bullet 2z\}$$

$$=\frac{(-3z^2+10z)g(z)}{3(5-z)z^2}.$$

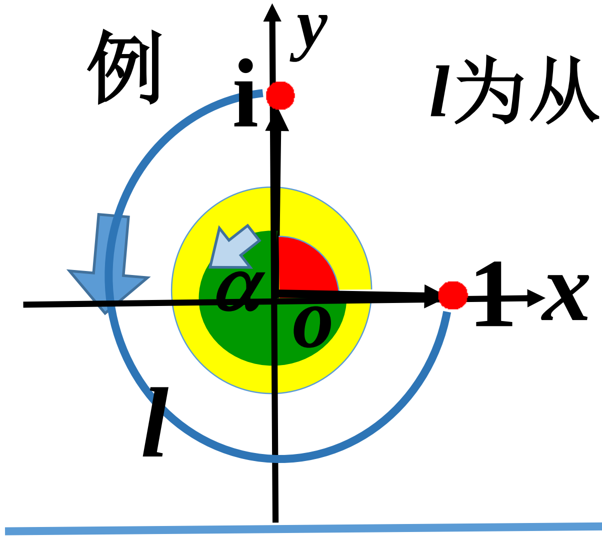
因此 $g'(-1)=\dfrac{(-3-10)g(-1)}{3\bullet(5+1)}=-\dfrac{13}{18}\left(\sqrt[3]{6}\right)\left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{(\sqrt{3})}{2}\right)=\cdots$(化简). #

z沿曲线l辐角变化: $\Delta_l \arg z = \arg b - \arg a$,

其中 a 是 l 起点, b是l 终点.

$\Delta_l \arg z$与$\arg a$值的选取无关.

例



l为从i到1在第二、三、四象限的单位圆周.

$$\Delta_l \arg z = \arg 1 - \arg \mathrm{i} = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2},$$

(或) $= 4\pi - \dfrac{5\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$, 等等.

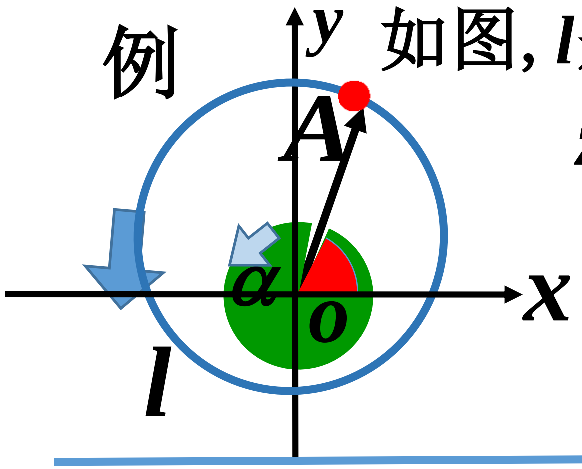
若 l 是连续闭曲线, 即起点终点重合, 需分情形讨论$\Delta_l \arg z$:

(a) 原点在闭曲线l 内部;

(b) 原点在 闭曲线l 外部.

(*a*) 原点在闭曲线*l* 内部

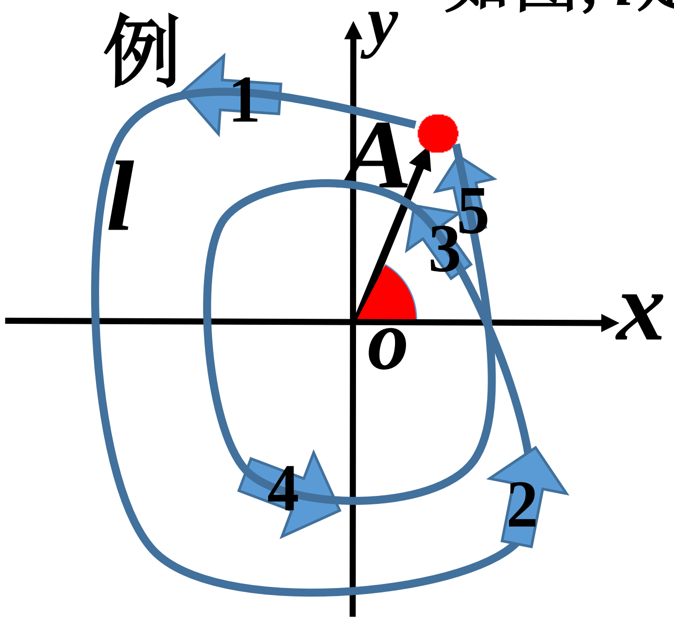
例



如图, *l*是闭曲线, 起点终点都是*A*, 原点在*l* 内部, *z* 从起点 *A* 沿 *l* 绕原点逆时针旋转一圈, 回到*A*,

$$\Delta_l \arg z = 2\pi.$$

例



如图, *l*是闭曲线, 起点终点都是*A*, 原点在*l* 内部, *z*从 起点*A*沿*l*绕原点逆时针旋转两圈, 回到*A*,

$$\Delta_l \arg z = 2\cdot 2\pi = 4\pi.$$

(a) 原点在闭曲线l 内部

若l是闭曲线，起点终点都是A，原点在l 内部，

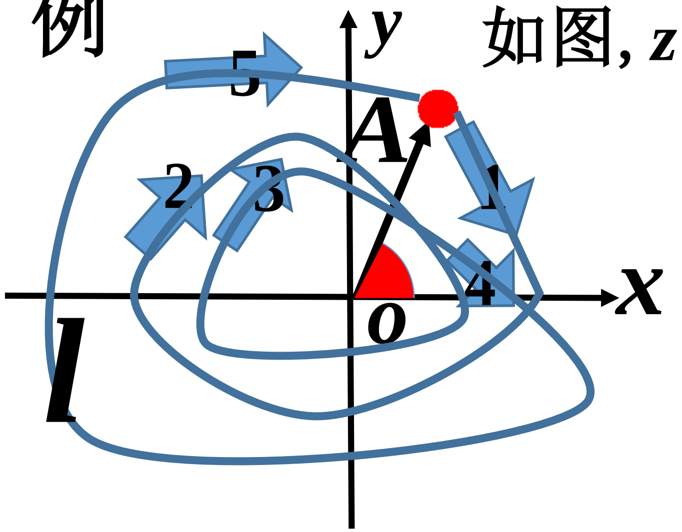
z从起点到终点沿 l 逆时针 (正向) 绕原点旋转了 k 圈，

z沿l辐角变化$\Delta_l \arg z = k \cdot 2\pi = 2k\pi$， $k \in \mathbb{Z}$ (整数).

$k > 0$： 逆时针旋转，正向旋转；

$k < 0$： 顺时针旋转，负向旋转.

例



如图，z 从起点A 到终点A 沿 l 顺时针(负向)

绕原点旋转了三 圈，

$$\Delta_l \arg z = -3 \cdot 2\pi = -6\pi.$$

例 $w=\sqrt[n]{z}$是多值函数，有且只有两个支点：0 和 ∞.

$\{z \mid \operatorname{Im} z=0, \operatorname{Re} z \le 0$(或$\ge 0)\}$即负(或正)半实轴，
或 $\{z \mid \operatorname{Re} z=0, \operatorname{Im} z \ge 0$(或$\le 0)\}$即上(或下)半虚轴，
或 $\{z \mid 0<|z|<+\infty, \arg z=\alpha_0\}$($\alpha_0 \ne 0$实常数)，$\cdots$

均可作为 $\sqrt[n]{z}$的支割线.

例如，取负半实轴为$w=\sqrt[n]{z}$ 的支割线，选定$\arg 1=0$, / 2π,

则沿负实轴割开复平面内任意z，$\underline{-\pi}<\arg z<\underline{\pi}$. / $\pi<\arg z<3\pi$.

$$\begin{cases}\text{负半实轴下岸的辐角值：} 0-\pi=-\pi, \ / \ 2\pi-\pi=\pi, \\ \text{负半实轴上岸的辐角值：} 0+\pi=\pi. \ / \ 2\pi+\pi=3\pi.\end{cases}$$

$w=\sqrt[n]{z}$取分支 $w_0=(\sqrt[n]{z})_0=\left(\sqrt[n]{|z|}\right)e^{i\frac{\arg z}{n}}$, $\quad -\pi<\arg z<\pi$.

/ $w_1=(\sqrt[n]{z})_1=$ ___同上___, $\quad \pi<\arg z<3\pi$.

沿负半实轴割开的z 平面	$w_0=(\sqrt[n]{z})_0$ 单叶 $\Rightarrow$	w平面的角域
$-\pi<\arg z<\pi$ / $\pi<\arg z<3\pi$.		$D_0: \ -\frac{\pi}{n}<\arg w<\frac{\pi}{n}$. / $D_1: \ \frac{\pi}{n}<\arg w<\frac{3\pi}{n}$.

以此类推.

例 $w=\sqrt[n]{z}$是多值函数,有且只有两个支点：0 和 ∞.

在沿负实轴割开的复平面内, $w=\sqrt[n]{z}$有n个单值连续分支：

$$w_k=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k=\left(\sqrt[n]{|z|}\right)e^{i\frac{\arg z}{n}},\quad (2k-1)\pi<\arg z<(2k+1)\pi,$$

或, $$w_k=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k=\left(\sqrt[n]{|z|}\right)e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}},\quad -\pi<\arg z<\pi.$$

$k=0,1,2,\cdots,n-1.$

沿负半实轴割开的z 平面

$(2k-1)\pi<\arg z<(2k+1)\pi$

$$\xrightarrow[\text{单叶}]{w_k=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k}$$

w平面的角域D_k：

$$\frac{(2k-1)\pi}{n}<\arg w<\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

定义9 设$w=F(z)$是区域 D 内的多值函数,

$w=f(z)$是区域 D 内的单值解析函数,

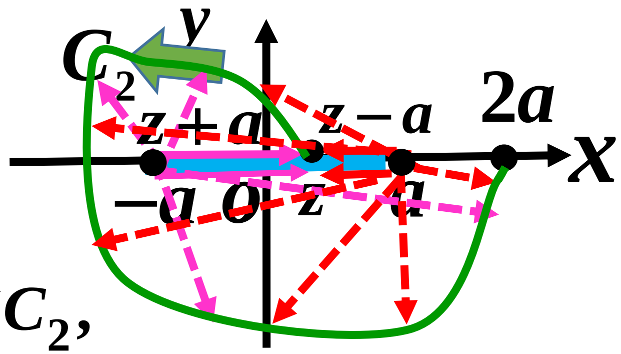
如果$f(z)$在 D 每一点的值, 都等于 $F(z)$ 在该点的一个值,

则称 $f(z)$ 是 $F(z)$ 在 D 内的一个单值解析分支.

$$f(z)=\left(\sqrt{\left|z^2-a^2\right|}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\,\frac{\arg(z+a)+\arg(z-a)+2\pi}{2}\right\}. \quad (\lozenge)$$

$$\arg(z+a)\Big|_{z=2a}=0;\quad \arg(z-a)\Big|_{z=2a}=\pi-\pi=0.$$

$$f(2a)=\left(\sqrt{\left|(2a)^2-a^2\right|}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\,\frac{0+0+2\pi}{2}\right\}=\left(\sqrt{3}\right)a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-\left(\sqrt{3}\right)a.$$



注：若在割去线段$[-a,a]$的z平面，

作其他连接上岸点z和$2a$的简单曲线，如C_2，

因当z从上岸沿C_2连续变化到$2a$时，

$\arg(z+a)$增加2π，$\arg(z+a)\Big|_{z=2a}=0+2\pi=2\pi;$

$\arg(z-a)$增加π，$\arg(z-a)\Big|_{z=2a}=\pi+\pi=2\pi.$ 代入$(\lozenge)$，得

$$f(2a)=\left(\sqrt{\left|(2a)^2-a^2\right|}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\,\frac{2\pi+2\pi+2\pi}{2}\right\}=\left(\sqrt{3}\right)a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi}=-\left(\sqrt{3}\right)a.$$