

CAMBRIDGE

# 等离子体物理与聚变能

## Plasma Physics and Fusion Energy

[美] Jeffrey Freidberg 著

王文浩 等 译



科学出版社

[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

*Plasma Physics and Fusion Energy 1e* (978-0-521-73317-5) by Jeffrey Freidberg  
first published by Cambridge University Press 2007 All rights reserved.

This simplified Chinese edition for the People's Republic of China is published  
by arrangement with the Press Syndicate of the University of Cambridge, Cam-  
bridge, United Kingdom.

© Cambridge University Press & Science Press 2010

This book is in copyright. No reproduction of any part may take place without the  
written permission of Cambridge University Press or Science Press.

This edition is for sale in the mainland of China only, excluding Hong Kong  
SAR, Macao SAR and Taiwan, and may not be bought for export therefrom.

此版本仅限中华人民共和国境内销售,不包括香港、澳门特别行政区及中国  
台湾。不得出口。

Plasma Physics and Fusion Energy

# 等离子体物理与聚变能

[美] Jeffrey Freidberg 著  
王文浩等 译

科学出版社

北京

图字：01-2009-7763号

## 内 容 简 介

本书是在麻省理工学院的研究生课程“等离子体物理和聚变能”的一系列讲义的基础上形成的。内容叙述从世界能源需求的概述开始,然后是目前的能源生产方法、聚变在未来的潜在作用等。全书包括两部分,前一部分论述能源问题,诸如聚变能的产生、功率平衡、简单聚变反应堆的设计等;后一部分讲述聚变能发展所面临的基本等离子体物理学问题,包括宏观平衡和稳定、输运和加热等问题。

本书适合应用物理和核工程方面的研究生和研究人员阅读。书中搜集的作者在过去二十多年的教学过程中积累的大量习题有助于读者对各章内容的理解。

### 图书在版编目(CIP)数据

等离子体物理与聚变能/(美)Jeffrey Freidberg 著;王文浩等译. —北京:科学出版社,2010

ISBN 978-7-03-028606-2

I. 等… II. ①J… ②王… III. ①等离子体物理学 ②聚变反应  
IV. ①O53 ②TL61

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第158521号

责任编辑:孙力维 杨 凯/责任制作:董立颖 魏 谨

责任印制:赵德静/封面设计:李 力

<http://www.okbook.com.cn>

**科 学 出 版 社** 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京天时彩色印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2010年11月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2010年11月第一次印刷 印张: 40 1/4

印数: 1—3 000 字数: 787 500

**定 价: 68.00 元**

(如有印装质量问题,我社负责调换)

# 译者序

随着能源问题和环境问题日益突出,人们对未来的能源选择变得兴趣大增。特别是随着中国加入国际热核聚变堆(ITER)项目建设,“ITER”一如当年“哥德巴赫猜想”一词,已成为媒体和普通民众经常使用的热词。应当说,近30年来磁约束聚变研究的发展,已使得面向反应堆的聚变工程研究变得与等离子体物理研究同样引人注目。为适应这一形势和学科布局发展的需要,国内(大陆)很多有条件的高校纷纷开设了面向聚变研究的专业方向。这样,原先主要以高温等离子体物理内容为主的教材就显得不能很好地满足当前的需要。这本最新出版的(2007年版)美国麻省理工学院的教材《等离子体物理与聚变能》,正是以聚变反应堆建设为目标(而不是像以往教材那样仅仅是背景)来展开叙述的,特别适合用来弥补目前流行教材的不足。因此在科学出版社的大力帮助下,我们组织力量将它翻译介绍到国内来。

作者 Jeffrey Freidberg 是麻省理工学院(MIT)核科学与工程系的资深教授,多年来一直从事聚变等离子体物理和工程方面的研究,曾任 MIT 等离子体科学和聚变研究中心副主任,具有丰富的实践经验和理论造诣。本书是他对多年来从事研究生相关教学的一个总结,在内容的铺陈和深度的把握上,不仅做到了物理机理论述和工程技术要求之间的恰当平衡,而且提供了很多具体的聚变研究概念和观点,这些都是国内现有教材中着墨不多的遗珠之处。例如,从聚变堆反应应用前景的角度对多种磁约束位形进行描述,引入能量约束时间的经验定标律概念,各种加热技术之间的优劣比较及其经济成本分析等,这些以往仅出现在专业期刊或专著中的概念和术语进入教材,对学生进入相关领域后能够迅速准确地理解所从事的工作的意义,能够在学术研讨会上听懂别人的工作介绍甚至参与讨论,都有莫大的好处。

本书是由 SUNIST 聚变实验室全体师生集体翻译的。具体分工(依章节顺序)如下:第1章,谢会乔、王文浩;第2、3章,吴彦斌(东华大学);第4、5章,王文浩;第6、7章,李明;第8章,赵爱慧;第9、10章,王文浩;第11、12章,曾龙;第13章,李明、谭熠;第14章,王文浩;第15章,高喆;第16章,王文浩。序言、致谢以及附录等也由王文浩翻译。为方便读者查询,我们将原书的术语表按中文音序重新进行了编排,所注页码已改为中文版该词实际所在页的页码。译者一直认为,中文教材乃至各种专著中书末缺少术语表是一大缺憾,不方便读者检索。因此我们对原书的这一惯例予以保留。全书由王文浩进行最后的统一校订和润色,部分章节进行了互校,并请中国科学院物理研究所王龙研究员进行了审阅。

由于我们对聚变科学的诸多分支了解得不够全面,理解存在偏差,英译能力亦难达信、达、雅的最高境界,因此译文中一定存在各种疏忽甚至误译,请读者发现后不吝来函指正,联系方式:[whwang@mail.tsinghua.edu.cn](mailto:whwang@mail.tsinghua.edu.cn)。

最后,我们要感谢科学出版社刘红梅编辑的大力支持,是她的充分信任和积极购买原书的版权,才有了今天这本教材的中文版。我们还应感谢本书的责编孙力维女士,是她不懈的努力和严谨细致的工作,才使我们享受到阅读的快乐。

译者

2010年7月2日于清华园

# 序 言

《等离子体物理学和聚变能》是一本关于等离子体物理学的教科书。等离子体物理学的主要使命是磁约束聚变能。我们的目标是半个世纪以来,为实现聚变能梦想所必需的等离子体物理学提供一个广泛而严谨的概述。

本书采用的叙述方法适用于应用物理系或核科学与工程系的教学。材料的选取、内容展开的顺序,以及始终紧贴能源这个最终目标的连贯且富于故事性的事实的铺陈,均带有服务于应用学科的特征。具体来说,本书从简单的核聚变反应堆设计出发。这个设计是基于核物理原理、能量平衡以及一些基本工程限制给出的,其要点不是对该领域诸多方面进行评价,而是指出基本设计几乎不需要考虑等离子体物理学。然而,由这个设计得到的一个重要结论是,要实现磁约束聚变能,等离子体就必须满足一整套条件。具体来说就是设计必须遵循一套特定的压强、温度、磁场和等离子体几何参数值。因此,从一开始这些条件就界定了等离子体的参数范围。在此之后,等离子体物理学家的任务就是去发现满足这些要求的各种实现方式,由此自然形成一系列独立成篇的问题,包括宏观平衡及其稳定性、运输和加热等问题。因此,我们以聚变能为核心构成了整本书的框架,即等离子体物理学共同体的使命就是找到利用等离子体来实现能源的方法。

为什么要写这样一本书呢?在过去几年里,全球都面临着开发新的可靠能源的压力,这使得聚变研究在国际上受到了空前重视。随着最近下一代国际热核实验反应堆(ITER 计划)协议的签署,我预计参加聚变计划的新的学生和青年科学家的人数会大幅度增加。虽然聚变成为商业上可行的能源还有很长的路要走,但 ITER 的出现大大增强了全球范围内业已存在的对等离子体物理和核聚变研究的兴趣。虽然科学上和工程上存在的问题使其具有难以置信的挑战性,但因这种能源系统具有无尽的燃料、近乎完善的环境效应和强有力的经济竞争力等优点,使其对新的学生和研究人员具有巨大的吸引力。

本教科书的读者对象都有谁呢?他们是高年级本科生、入学第一年的研究生和刚跨入这一领域的年轻科学家。总体上说,本书既有旨在发展物理直觉的深入的物理解释,也包括许多厘清等离子体物理中各种数学难点的详细推导。因此,这本书非常适于聚变领域的新人独立阅读。书中还给出了作者在麻省理工学院 20 多年的教学过程中积累起来的内容广泛的习题。

如果将过多的解释和详细推导都包括进来,那将使本书显得过于庞大。因此,我

们对所用的材料进行了仔细的选择。要决定哪些该选进来,哪些必须割爱实在是一个艰难的抉择。我采用的取舍标准是:为新人提供一个对磁约束聚变能源中所有重要问题的良好的初步理解。因此,书中材料主要集中在聚变能源所要求的等离子体物理范围内,而起初最容易描述的当属宏观流体模型。

本书没有包含的那些内容大都是聚变工程上很少讨论的问题。我们对等离子体动力学理论(如弗拉索夫方程和福克-普朗克方程)也进行了少量讨论。让我有点意外的是,直到本书的第15章,我才第一次真正感到需要用到动力学理论的详细结果(即射频加热和电流驱动的碰撞阻尼率),随后我用简单、直观的单粒子分析进行了推导。我认为对第一次接触这门课的学生来说,全面了解所涉全部问题的最佳方法,特别是要强调等离子体物理学的自洽统一性,莫过于将重点放在宏观流体模型上,这样更容易将物理直觉与实验现实联系起来。理想情况下,在此基础上接着进行动力学理论的学习将是掌握聚变等离子体物理的一个合乎逻辑的步骤。在这种研究中,本书描述的许多课题都将在标志着当代聚变研究前沿的更高级水平上得到分析。

从本书的篇幅上可以清楚地看到,要全面详细地讲完所有内容需要两个学期。但是通过摘要选讲,将它用于一个学期的课程也是可行的。先决条件是读者具有本科物理和数学的坚实基础,具体要求包括:①数学应学过偏微分方程;②力学;③基本流体动力学;④电磁理论(即静电学、静磁学和波的传播)。经验表明,物理或大多数工程学科的本科学位学历都能够提供令人满意的准备。

最后,我希望这本书能使得下一代聚变研究人员受益,这是决定建设国际核聚变实验堆——世界上第一个反应堆规模的燃烧等离子体实验堆——的一个重要目的。



# 致 谢

书中的材料是多年研究和教学的结果。众多朋友、同事和学生,以及不胜枚举的其他人的卓越贡献才使本书得已出版。在此,我对他们的帮助、合作以及同志般的情谊深表感谢。

麻省理工学院的许多人也值得特别感谢。Bob Granetz, Ian Hutchinson, Ron Parker 和 Abhay Ram 等人所教授的课程也与本书的内容有密切关系。我很感谢他们让我分享他们的讲义和教学经验。

麻省理工学院的很多同事非常友善地阅读了本书的章节,并向我提供了有价值的反馈意见,为此我要感谢 Paul Bonoli, Leslie Bromberg, Peter Catto, Jan Egedal, Martin Greenwald, Jay Kesner, Jesus Ramos 和 John Wright 等人。麻省理工学院的其他同事也慷慨地花时间参与了详细讨论,为此我要向 Darin Ernst, Joe Minervini, Kim Molvig, Miklos Porkolab 和 Steve Scott 等人表达我诚挚的谢意。

聚变界的许多朋友和同事也阅读了部分书稿,并向我提供了宝贵意见,特别是第 13 章,这一章描述了当今聚变方面的许多概念。为此我要感谢下述几位的帮助,他们是 Dan Barnes 和 Dick Siemon (场反位形),Riccardo Betti 和 Dale Meade (托卡马克和聚变反应堆),Alan Boozer 和 Hutch Neilson (仿星器),Bick Hooper (球马克),Martin Peng (球形托卡马克)和 John Sarff (反场箍缩)。

特别感谢我的同事 Don Spong 为本书封面制作了鲜明的图示。

正如人们所料,准备手稿是一项繁重的工作。我非常感谢麻省理工学院的研究生干部(其中许多人现在是专职研究人员)为本书准备了插图。为此我要感谢 Joan Decker, Eric Edlund, Nathan Howard, Alex Ince-Cushman, Scott Mahar 和 Vincent Tang。特别感谢 Vincent Tang 对全部手稿的内容和版式进行了校对。我的助手 Liz Parmelee 也在书稿的整个筹备工作方面提供了宝贵的行政和组织方面的支持。

剑桥大学出版社各位同仁在书稿的出版方面——从最初写作本书的意向到最后出版——提供了巨大帮助,他们是 Simon Capelin(出版总监),Lindsay Barnes (助理编辑),Dan Dunlavey 和 Emma Pearce(制作编辑),以及 Maureen Storey(文本编辑)。

最后,感谢我的妻子凯伦在我编写书稿时提供的无尽支持和鼓励。她还帮忙校对了一大部分文稿校样。

# 单位制

本书采用标准的 MKS 单位制。唯一的例外是温度。聚变等离子体物理学领域目前的常见做法是将玻尔兹曼常数  $k$  合并到温度内,即出现  $kT$  的地方总是代之以  $T$ ,即  $kT \rightarrow T$ ,其中  $T$  的单位是能量(焦耳)。

还有一些表示“实用”单位的导出单位,除非另有说明,这些单位说明如下:

数密度	$n$	$10^{20} \text{ m}^{-3}$
温度	$T$	keV
压强	$p$	大气压(atm)
磁场	$B$	特[斯拉](T)
电流	$I$	兆安(MA)
小半径	$a$	米(m)
大半径	$R$	米(m)
约束时间	$\tau_E$	秒(s)

# 目 录

## 第一部分 聚变能

<b>第 1 章 聚变与世界能源</b> .....	3
1.1 引 言 .....	3
1.2 现有的能源方式 .....	4
1.3 聚变能的作用 .....	14
1.4 本章总结 .....	17
参考书目 .....	17
<b>第 2 章 聚变反应</b> .....	18
2.1 引 言 .....	18
2.2 核反应与化学反应 .....	18
2.3 裂变核能 .....	20
2.4 聚变核能 .....	21
2.5 结合能曲线 .....	25
2.6 本章总结 .....	30
参考书目 .....	31
习 题 .....	31
<b>第 3 章 聚变功率的产生</b> .....	33
3.1 引 言 .....	33
3.2 截面、平均自由程和碰撞频率的概念 .....	34
3.3 反应速率 .....	37
3.4 分布函数、聚变截面、聚变功率密度 .....	41
3.5 辐射损失 .....	46
3.6 本章总结 .....	50
参考书目 .....	51
习 题 .....	52

<b>第4章 聚变反应堆功率平衡</b> .....	53
4.1 引 言 .....	53
4.2 零维能量守恒关系 .....	53
4.3 磁约束聚变的一般功率平衡关系 .....	55
4.4 稳态零维功率平衡 .....	55
4.5 等离子体内的功率平衡 .....	57
4.6 反应堆功率平衡 .....	61
4.7 聚变反应堆的时变功率平衡 .....	66
4.8 本章总结 .....	73
参考书目 .....	73
习 题 .....	74
<b>第5章 简单磁约束聚变反应堆设计</b> .....	76
5.1 引 言 .....	76
5.2 一般磁约束聚变反应堆 .....	76
5.3 反应堆关键设计参数计算 .....	78
5.4 设计目标,工程和核物理方面的基本限制 .....	79
5.5 反应堆设计 .....	82
5.6 本章总结 .....	94
参考书目 .....	95
习 题 .....	96

## 第二部分 聚变能等离子体物理学

<b>第6章 磁约束聚变概述</b> .....	101
6.1 引 言 .....	101
6.2 等离子体的基本描述 .....	102
6.3 单粒子行为 .....	103
6.4 自洽模型 .....	104
6.5 磁流体力学平衡及其稳定性 .....	105
6.6 磁约束聚变概念 .....	105
6.7 输 运 .....	106
6.8 加热和电流驱动 .....	107

6.9 聚变研究的未来 .....	109
参考书目 .....	109
<b>第7章 聚变等离子体定义</b> .....	<b>110</b>
7.1 引 言 .....	110
7.2 等离子体对稳恒电场的屏蔽——德拜长度 .....	111
7.3 等离子体对振荡电场的屏蔽——等离子体频率 .....	115
7.4 低碰撞频率和集体效应 .....	118
7.5 对磁约束聚变等离子体的额外约束 .....	121
7.6 宏观行为和碰撞的关系 .....	123
7.7 本章总结 .....	123
参考书目 .....	124
习 题 .....	124
<b>第8章 单粒子运动——导心理论</b> .....	<b>126</b>
8.1 引 言 .....	126
8.2 单粒子运动的基本性质 .....	128
8.3 均匀稳恒磁场中的运动 .....	129
8.4 稳恒磁场 $\mathbf{B}$ 和电场 $\mathbf{E}$ 下的运动: $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移 .....	134
8.5 垂直梯度的场下的运动: $\nabla B$ 漂移 .....	138
8.6 弯曲磁场中的运动: 曲率漂移 .....	142
8.7 真空磁场中 $\mathbf{V}_{\nabla B}$ 漂移和 $\mathbf{V}_{\kappa}$ 漂移的综合 .....	145
8.8 时变电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 中的运动: 极化漂移 .....	146
8.9 平行梯度场下的运动: 磁矩和磁镜 .....	152
8.10 本章总结 .....	161
参考书目 .....	162
习 题 .....	163
<b>第9章 单粒子运动——库仑碰撞</b> .....	<b>166</b>
9.1 引 言 .....	166
9.2 库仑碰撞——数学推导 .....	167
9.3 试探粒子碰撞频率 .....	173
9.4 再论磁镜 .....	180
9.5 高能离子的慢化 .....	183
9.6 逃逸电子 .....	189
9.7 净交换碰撞 .....	193

---

9.8 本章总结 .....	200
参考书目 .....	201
习 题 .....	201
<b>第 10 章 自洽的双流体模型 .....</b>	<b>204</b>
10.1 引 言 .....	204
10.2 流体模型的性质 .....	205
10.3 质量守恒 .....	207
10.4 动量守恒 .....	210
10.5 能量守恒 .....	214
10.6 本章总结 .....	220
参考书目 .....	222
习 题 .....	222
<b>第 11 章 磁流体力学——宏观平衡 .....</b>	<b>224</b>
11.1 宏观平衡和稳定性的基本问题 .....	224
11.2 从双流体模型推导磁流体力学模型 .....	225
11.3 从导心理论推导磁流体力学模型 .....	231
11.4 磁流体力学平衡——定性描述 .....	236
11.5 磁流体力学平衡模型的基本性质 .....	238
11.6 径向压强平衡 .....	240
11.7 环向力平衡 .....	247
11.8 本章总结 .....	267
参考书目 .....	267
习 题 .....	268
<b>第 12 章 磁流体力学——宏观稳定性 .....</b>	<b>270</b>
12.1 引 言 .....	270
12.2 稳定性的一般概念 .....	271
12.3 磁流体力学不稳定性的物理图像 .....	276
12.4 理想磁流体力学稳定性问题的一般方程 .....	280
12.5 无限大均匀等离子体——磁流体力学波 .....	286
12.6 直线 $\theta$ 箍缩 .....	290
12.7 直线 $Z$ 箍缩中的 $m = 0$ 模 .....	293
12.8 直线 $Z$ 箍缩中的 $m = 1$ 模 .....	296
12.9 本章总结 .....	300

参考书目 .....	301
习 题 .....	302
<b>第 13 章 磁约束聚变概念</b> .....	305
13.1 引 言 .....	305
13.2 悬浮偶极器(LDX) .....	307
13.3 场反位形(FRC) .....	316
13.4 表面电流模型 .....	322
13.5 反向场箍缩(RFP) .....	328
13.6 球马克 .....	343
13.7 托卡马克 .....	349
13.8 仿星器 .....	390
13.9 简单聚变反应堆回顾 .....	403
13.10 本章总结 .....	407
参考书目 .....	409
习 题 .....	411
<b>第 14 章 输 运</b> .....	414
14.1 引 言 .....	414
14.2 一维柱形等离子体中的输运 .....	416
14.3 求解输运方程 .....	429
14.4 新经典输运 .....	442
14.5 经验定标关系 .....	460
14.6 输运理论在聚变点火实验中的应用 .....	474
14.7 本章总结 .....	488
参考书目 .....	489
习 题 .....	490
<b>第 15 章 加热与电流驱动</b> .....	493
15.1 引 言 .....	493
15.2 欧姆加热 .....	495
15.3 中性束加热 .....	498
15.4 波加热和电流驱动的基本原理 .....	509
15.5 冷等离子体色散关系 .....	526
15.6 无碰撞阻尼 .....	528
15.7 电子回旋加热(ECH) .....	544

---

15.8 离子回旋加热(ICH) .....	554
15.9 低杂波电流驱动(LHCD) .....	566
15.10 本章总结 .....	581
参考书目 .....	582
习 题 .....	584
<b>第 16 章 聚变研究的未来</b> .....	<b>588</b>
16.1 引 言 .....	588
16.2 等离子体物理研究现状 .....	588
16.3 ITER .....	592
16.4 示范聚变电站(DEMO) .....	598
参考书目 .....	598
附录 A $\langle \sigma v \rangle$ 的解析推导 .....	599
附录 B 加速电荷的辐射 .....	604
B.1 辐射场定义 .....	604
B.2 时变源的 $\mathbf{A}$ 和 $\phi$ 的计算 .....	604
B.3 应用到单个加速粒子的情形 .....	607
B.4 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的计算 .....	608
B.5 辐射功率的计算 .....	608
附录 C 布泽坐标的推导 .....	610
C.1 一般的坐标变换 .....	610
C.2 到布泽坐标叉积形式的部分简化 .....	611
C.3 到布泽坐标梯度形式的部分简化 .....	612
C.4 去掉自由函数 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ .....	613
C.5 将物理量引入到布泽坐标系 .....	614
C.6 布泽坐标系下的导心轨道 .....	617
附录 D 坡印亭定理 .....	619
主题词索引 .....	621



第一部分  
聚 变 能



# 第 1 章 聚变与世界能源

## 1.1 引言

众所周知,多年来,生活质量标准直接与能量消耗成正比。能源在食品生产、家庭取暖与照明、工业设备运行、提供公共与私人交通以及通信保障等方面必不可少。一般来讲,高质量的生活需要由价格合理的充足的能量消耗来保证。

尽管人们已经认识到这些,但现今世界大部分地区的能源状况却不容乐观,并且情况不是在好转而是变得越来越糟。简单地说,就是对新的产能持续增长的需求超过了现有资源配置条件下具有经济可行性和环境友好型方法所能取得的供给。这些需求中,有些来自如北美、西欧和日本等世界工业化区域对能源使用的持续增长,还有很大一部分则来自于正处于快速工业化过程中的国家,如中国和印度。几乎所有关于未来能量消耗的预测都指出,到 2100 年,世界能源需求量将至少是目前能源消耗量的两倍。

加剧能源供给矛盾的一个重要问题是环境的恶化。特别是有越来越多的证据表明,温室气体排放已开始对环境产生明显的副作用。如果不存在温室气体排放的问题,那么通过增加煤的使用就可以大大缓解能源供给短缺的问题。地球上煤的储量十分充足,然而,如果要减少未来温室气体的排放,那么对主要化石燃料(煤、天然气、石油)的产能就需要设定一个限制。测算表明,现已探明的天然气和石油储量将在未来几十年内消耗殆尽,这将使问题变得更加复杂,而温室气体对环境的影响是我们必须正视的一个问题。因此在下面的讨论中,我们将把能源生产过程中减少温室气体的排放作为一个重要的考虑因素。

为了更好地理解增加供给同时减少排放这个问题,我们先简单介绍一下现有的几种主要能源供给方式。我们知道,任何方式都存在着优点和缺点,所以未来的能源供给也不存在单一的解决方案。但是,知道了方案的问题所在,将有助于我们对新的能源供给途径进行评估。

聚变正是在这样的背景下进入了人们的视野。通过和现有能源供给方式进行对比,可以发现聚变能的发展潜力十分突出。比较显示,聚变能在诸如安全性、燃料储量以及最小的环境破坏性等方面具有很多令人瞩目的优点。当然同样重要的是,聚变必须能够提供不间断的可靠的大规模电力,这样才能成为世界能源供给的主力军。半个多世纪以来,正是这些优点支撑着聚变研究者们的美好梦想。然而,

聚变能也存在不利的一面,首要问题就是要解决聚变过程中存在的复杂的科学和工程难题。国际聚变界正在逐一寻找解决这些难题的方案。最后的目标是将这些方案进行整合,建成经济上可行的具有竞争力的发电站,这样聚变才能在世界能源生产中发挥其应有的作用。

本章余下的内容包括对不同能源供给方式进行比较说明,并对聚变能如何满足未来能源的需求进行进一步详细讨论。

## 1.2 现有的能源方式

### 1.2.1 背景

用于产能的初级自然资源主要分为三类:化石燃料、核燃料和太阳能,其中太阳能是大多数可再生能源的来源。一般来讲,这些自然资源既可以作为最终需求直接利用,也可以转换成电力以满足各种需要,即间接使用。直接用途包括家庭、商业建筑和工业设施等的加热取暖,以及用作交通燃料等方面;电力则用于制造业和建设,以及家庭、商业和工业照明与制冷等方面。

所有形式的能源都有一个共同的问题需要考虑,就是利用率。它直接影响到能源的储备和/或成本。人们希望得到明显高的利用率,实际上这已经影响到资源的保护方法。从逻辑上讲,我们应最大可能地对资源进行保护,以应对能源问题。

作为对当前能源形势的一个简单综述,我们来考虑能源的最终消费状况。2001年,像美国这样的工业发达国家,其能源的直接利用占到60%,其余40%用来发电,如图1.1所示。

将电力单列出来是因为其用途广泛。实际上,这也是聚变可以有所作为的主要领域。图1.2所示是美国在2001年用来发电的能源相对消耗的详细分类。我们看到,化石燃料发电占了较大部分,提供了大约70%的电力,其中煤的贡献占51%。核能、天然气和水力发电也占有很大比例,而风能、太阳能和其他可再生能源发电所占比例很小(仅0.4%)。

从这些事实中可以得出如下一些结论:第一,世界上大部分能源,包括电力,都是从化石燃料中得到的;第二,所有的化石燃料都会产生温室气体;第三,如果要减少未来温室气体的排放,同时应对能源需求的持续增长,就必须将核能、水电、可再生能源(如风能、太阳能、地热等)与环境保护结合起来,以满足能源的供给;第四,一些主要的能源直接利用方式(例如,用化石燃料来取暖)可以用电力替代,虽然这么做会因为较低的能量利用率而使成本有所增加;第五,机动车燃料的需求将使交通问题变得突出。简言之,通过合成燃料、乙醇或者氢燃料的生产,电力将有助于改善目前的能源状况,这些燃料最终会取代汽油和柴油。

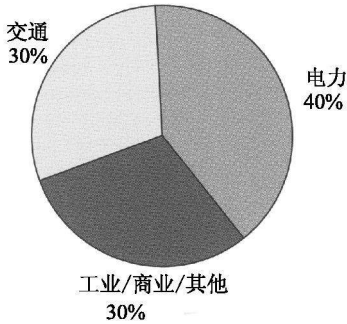


图 1.1 2001 年美国的能源分配  
(Annual Energy Review, 2001 Energy  
Information Administration, US Department  
of Energy)

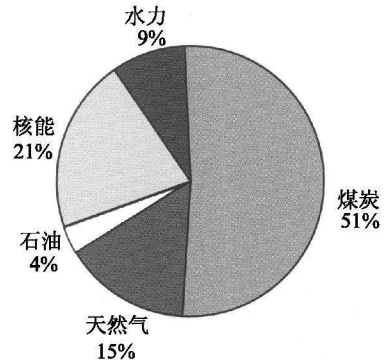


图 1.2 2001 年美国用于发电的燃料消耗分类  
(Annual Energy Review, 2001 Energy  
Information Administration, US Department  
of Energy)

总之,运用经济的、环境友好的手段来增加电力供应,在现在和将来都是应对世界能源问题的重要措施。聚变是一种能够完成这种使命的新的能源方式。当然这需要有一个长期的解决过程(可能要 30 ~ 100 年)。在这个过渡时期,化石燃料仍然是世界电力生产的主要来源。

基于上述背景,现在我们可以更详细地讨论现有的各种能源方案,特别是在电力方面,以便将聚变置于一个适当的位置上。

### 1.2.2 煤 炭

煤炭是用来发电的主要化石燃料(在美国占 51%)。煤炭的一个主要优势是很多国家都具有充足的煤炭储量。按照目前的消耗量,煤炭发电可供人类使用几百年。表 1.1 列出了地球上各种燃料的大致储量。如果能源问题只是一个燃料来源问题,那么在可以预见的未来,煤炭就可以解决问题。但考虑到环境因素,煤炭就不是合适的选择。

表 1.1 各种初级燃料的蕴藏量估计

能 源	蕴藏量/夸德	总耗年限/年	单耗年限/年
煤 炭	$10^5$	200	900
石 油	$10^4$	20	60
天然气	$10^4$	20	100
$^{235}\text{U}$ (标准)	$10^4$	20	300
$^{238}\text{U}$ , $^{232}\text{Th}$ (增殖)	$10^7$	20 000	
聚变(氘-氘)	$10^7$	20 000	
聚变(氘-氚)	$10^{12}$	$2 \times 10^9$	

注:这些是非常粗略的估计,只能看作导向。总耗年限是指这种能源以每年 500 夸德(Quad)的速率(略高于 2001 年速率)用作世界整个能源消耗的使用年限。单耗年限是指每种能源以 2001 年的单独消耗速率消耗的可用年限。 $1 \text{ 夸德} \approx 10^{18}$  焦耳。

通过建设大型远距离电站,煤炭为我们提供了持续的、不间断的电力。这个非常重要的不间断特性就是人们所熟知的“基本负荷”电力。作为参照,可知一个大型发电站一年一般能提供 1 GW 的电力,可以满足总人口为 250 000 人的城市的供电。煤炭作为能源的另外两个优点是技术成熟和发电成本最低。

为了对发电耗煤用量有一个直观认识,我们以总人口为 600 000 人的波士顿市为例。它一年的电力总耗约为 2.4 GW。按照这个电力供应水平,维持一年所需的煤炭体积可以将一个可容纳 70 000 人的足球场完全填满。

接下来我们考虑煤炭转换为电能的效率。所有化石燃料(例如,煤炭、天然气和石油)的燃烧都是化学反应,输出的主要是热量。如图 1.3 所示,热交换器将水变成水蒸气,水蒸气驱动与发电机相连的蒸汽轮机,从而进行发电。热力学原理表明,在适当的运行温度下,热能转换为电能的最高效率为 35% ~ 40%。从烟囱排出而损失的热量比转化为电能的热量要多。只要采用蒸汽循环来发电,这种令人不快的结果就不可避免,无论燃料是煤炭还是核物质。

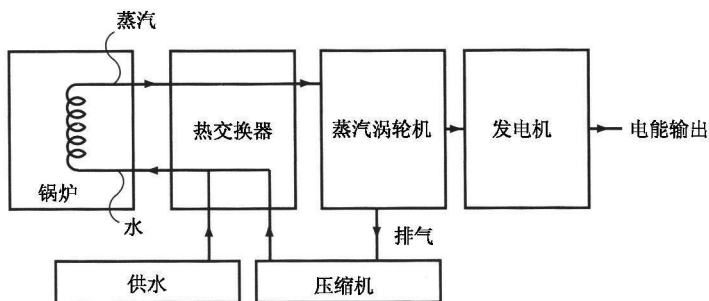


图 1.3 化石燃料发电厂示意图

化石燃料燃烧的主要不足之处是对自然环境的影响。任何化石燃料的燃烧都不可避免地会产生二氧化碳( $\text{CO}_2$ ),而二氧化碳是温室效应的主要原因。如果考虑通过增加化石燃料的消耗来提供新的电力供应,这个弱点将变得十分突出。

燃煤对环境还有一些不利影响。由于杂质的存在,煤炭燃烧时会释放出大量粉尘(大部分是碳酸钙)、二氧化硫、氮氧化物以及汞氧化物等,所有这些物质都对人的健康有害。通过静电除尘和洗尘装置的处理,这些有害物质的排放可以减少,即使不能彻底清除。但是这样做也增加了发电成本。

值得注意的是,煤炭燃烧还会将存在于天然煤炭中的微量的放射性同位素排放到大气中。虽然其比例很小,但是煤炭的总消耗量巨大,结果造成事实上燃煤发电的放射性同位素排放量超出了核电站的排放量。尽管如此,据说这种放射性水平还是很很小,不足为虑。

总之,我们可以看到,煤炭能源有优势(储量和成本)也有劣势(温室气体和污染物排放)。正是基于其优点以及目前尚没有明显优越的替代能源等原因,在未来

很多年内,煤炭仍将作为电力生产的主要承担者。

### 1.2.3 天然气

天然气是由甲烷( $\text{CH}_4$ )组成的一种化石燃料。它被广泛应用于家庭、商用建筑和工业厂房的取暖,同时也用来发电。在美国,有15%的电力生产来源于天然气。波士顿一年的液化天然气消耗量与同体积的煤炭消耗量相当。与煤炭相比,天然气既有优势也有弱点。

从优势上说,首先,天然气的燃烧比煤炭清洁,其颗粒物排放远少于煤炭,燃烧时的 $\text{CO}_2$ 排放也较少;第二,在100 MW级水平上,天然气电站的规模可以建设得较小,这意味着较短的建设周期和较少的初期投资,两方面都使得资金效益的考虑更富吸引力;第三,天然气电站可以以“联合循环”模式运行,也就是说,可以将热动力蒸汽循环与天然气循环结合起来,使从天然气到电能的整体转换效率提高到50%~60%;最后,人们普遍认为,无论是家庭取暖还是工业设施供热,采用天然气无论在便利性还是在费用方面都将是最理想的。

其实,天然气应用也有其不利的方面。第一,虽然天然气的每兆瓦时电力生产所排放的 $\text{CO}_2$ 比燃煤的要少,但总量依然巨大,这是所有化石燃料的本性所决定的,因此,它造成的温室效应也非常严重;第二,天然气的储量要远少于煤炭,按照当前的天然气消耗量估计,天然气储量只够人们消耗不到100年(见表1.1),并且,大部分已探明储量都不在作为天然气主要消耗地区的工业化国家境内;第三,高的需求量加上产能限制和稀缺的储量共同导致不稳定的高燃料价格;第四,由于需要采用管道运输和高压液化气罐,天然气的运输和储存不仅在技术上比煤炭和石油困难,而且成本较高;第五,很多人认为,天然气是一种十分理想的供热燃料,将它用来发电是对这种宝贵的天然资源的滥用,这种滥用很大程度上是受到短期经济利益的驱使,以及对长远后果缺乏考虑而放开能源价格所导致的。

总之,利用天然气发电有其优势(在所有化石燃料的燃烧中是最清洁的,且短期成本最低),也有不利的一面(温室气体排放、储量不足,以及资源利用不合理)。总的来说,短期经济利益追求支配着利弊权衡,将使得利用天然气发电继续存在。

### 1.2.4 石油

下面我们来讨论化石燃料——石油。石油因其便携性和高的能量含量成为优越的交通运输能源。它也是天然气耗尽后可以用作直接供热的燃料选择。世界能源消耗的很大一部分(35%)来源于石油,大部分都用于交通运输,很少直接用来发电。

作为对能量含量的直观描述,我们注意到,1 gal(加仑,1 gal = 4.546 dm<sup>3</sup>)牛奶容器所盛的汽油可以让一辆普通汽车行驶35 mi(英里,1 mi = 1609.344 m),这确实令人印象深刻。不仅如此,一个装满15 gal燃料的油箱的总重量大约只有120 lb

(磅,  $1 \text{ lb} = 0.453\ 592\ 37 \text{ kg}$ ), 相对于汽车整体重量来讲几乎可以忽略不计。这样装满的油箱可以让汽车行驶大约 375 mi, 这也确实令人印象深刻。

第二个让人感兴趣的特点是汽油的价格。相对于其他常见液体来说, 汽油的价格低廉得令人吃惊。在美国, 每加仑汽油的税前价格甚至低于瓶装饮用水。汽油价格还将会一直这么低廉, 虽然现在的价格稍高了一些。

当然, 用汽油作为交通运输动力也有一些缺点。第一, 汽油作为化石燃料会排放大量的温室气体, 其排放量与煤炭的总温室气体排放量相当; 第二, 世界上盛产原油的地区就那么几个, 主要产地是政治形势很不稳定的中东地区; 第三, 石油储量远远少于煤炭, 按照目前的消耗速度计算只有几十年的使用时间。发展中国家对石油资源的竞争在未来很可能会加剧, 进而导致石油价格上升和限产。

那么是否有办法减少世界对石油的依赖呢? 可能的途径有多种, 但是实行起来都不容易。采用混合动力以减少消耗的交通工具可以起到重要作用, 虽然这将使购买汽车的费用相应增加, 但仍会被公众接受。采用先进燃料的小型汽车在减少能源消耗上也有很大的帮助, 尽管许多人认为开小型车降低了他们的生活标准, 因而有些不情愿。

有一种途径是基于这样一个事实, 即汽油可以从煤焦油和储量丰富的油页岩中提炼出来。最终产品就是人们熟知的“合成燃料”, 但是目前这一生产过程还不是很经济。而且合成燃料也属于化石燃料, 它所带来的温室气体排放仍会引起严重的环境问题。

另一种途径是利用生物质转化而来的非石油类燃料。目前这种方法还仅限于将谷物转化为乙醇燃料。虽然从热效率上看起来乙醇足以取代汽油, 但是这种产品不具有经济可行性。乙醇燃料的生产需要占用大量的土地, 并且需要消耗大量的能量, 其所耗能量与生产出的乙醇所含的能量相当, 有时甚至会超出。

开发利用氢燃料电池技术来制造全电动力汽车, 进而完全取代汽油, 也具有十分令人瞩目的前景。氢有这样一些优点: ①初级燃料储量丰富(例如, 水); ②燃料转化为电能的效率高; ③最重要的是燃烧的最终产物是无害的水蒸气而不是  $\text{CO}_2$ 。这也许是交通运输燃料的终极解决方案, 但要先排除如下两个困难。

首先, 氢本身并不是初级燃料。它必须专门生产出来, 例如, 通过电解的方法, 这需要消耗大量能源。如果电解水所需的能源是从化石燃料得来的, 那么氢燃料所具有的减少  $\text{CO}_2$  排放的优势就被抵消了。

其次, 在大气压下, 氢气虽然有较高的转换效率, 但是其能量含量仍然远远低于汽油, 大约是汽油的  $1/1200$ 。所以, 要想将氢燃料的能量含量提高到汽油的水平, 就需要将氢气压缩到 1200 个大气压的高压下。这使得车载储氢燃料箱的设计变得非常困难。另一种选择是以液态方式储氢, 但这需要昂贵的车载低温制冷系统。第三种选择就是研制一种室温下可以存储氢气并且可以快速完成大量氢气循环的装



置。这种装置的研制已成为当前研究的一个热点,但是距离成功还有很长的路要走。人们看到,车载大容量储氢装置的研制将是一项十分困难的技术挑战。

通过前面的讨论我们得到如下一些结论:短期内不存在简单而又十分吸引人的选择来取代汽油在交通运输中的作用。从长远看,合成燃料、乙醇和氢燃料都可能是解决方案,但每一种都存在着不经济、能量平衡或环境污染等问题。利用无 CO<sub>2</sub> 排放的电力(例如,核能)来提供生产氢和乙醇所需的能量,对解决这些问题有很大帮助,但这并不能解决其他问题。短期内最佳战略也许是增加混合动力汽车的使用,并推动使用具有高燃料利用率的小型汽车。

### 1.2.5 核能

核能的主要用途是通过铀同位素<sup>235</sup>U 的裂变(即核分裂)来提供大规模的基础电力。目前,核能的利用仍引起公众的担忧。然而,更仔细的分析表明,这种能源形式要比我们目前已知的其他能源形式更可取,它可能是未来切实可行的无 CO<sub>2</sub> 排放电力生产的主要解决办法之一。

我们可以将核能与矿物燃料的使用进行多方比较,来说明为什么核电作为电力来源会受到广泛重视。

第一点是燃料的能量含量。核反应的单位基本粒子产能是化石燃料化学反应的 100 万倍。这意味着产出额定数量的能量所需的核燃料比化石燃料少得多。具体来说,为波士顿供电一年所需的核燃料棒的总体积只有小货车后车厢那么大,而所需的化石燃料的体积则堪比足球场。

第二点是对环境的影响。核电站既不产生 CO<sub>2</sub>,也没有其他有害物质排放,这是一个很大的环境优势。

再一个是安全问题。尽管公众会担忧,但核能的实际安全性要比公众认为的强得多。在西方国家建设的核电站里,没有一个核电站职工或市民因为放射性事故而失去生命。美国最严重的核电站事故发生在三哩岛。它曾给电力公司带来严重的财务危机,但实际上只有极微量的辐射被释放到环境中。原因是西方的核电站设计有多重安全防护,一旦发生“最恶性的”事故,容纳反应堆的巨大的钢制金属外壳可以为公众提供强有力的“纵深防御”。切尔诺贝利核电站事故造成的大量生命损失和环境破坏是由于没有围绕反应堆的安全外壳。这样的核电站设计在西方国家根本就不可能获得生产许可。总体而言,核电站设计和运行的安全性始终是人们担心的主要问题,但记录显示,西方国家核电站的这一问题能得到有效的解决。

还有就是燃料的蕴藏量问题,这是一个复杂的问题。从最简单的观点来看,可以认为<sup>235</sup>U 是基本燃料,其中大部分在反应堆中消耗掉,由此产生的乏燃料棒则以永远不可回收的方式被掩埋掉。按照这种方式考虑,以目前的消耗速度,用<sup>235</sup>U 发电足够用上数百年。另一方面,乏燃料棒中含有丰富的钚,可以通过化学提取后作

为一种新的核燃料继续使用。事实上,我们可以用消耗钚来产出更多的钚这种方式来运行。这种“增殖型”反应堆可将核燃料储备扩充到数千年。增殖堆的成本要比传统型核电站的成本高,由于目前还无法得到低成本的 $^{235}\text{U}$ ,因此尚未成为现实。但是从长远的观点看,增殖堆可以是能源选择的方案之一。

核废料及其处置是另一个重要问题,而且也相当敏感。很多放射性裂变产物的半衰期都较短,不足30年,它们需要存储大约100年才能通过自身的放射性衰变成为无害的物质(理想的结果)。而那些长寿命的、半衰期长达几千年的核废料则受到公众的关注。目前,认真考虑的可能的解决方案有几种:一是将这些核废料制成玻璃(即玻璃化)然后永久掩埋;二是将这种燃料进行定期的化学处理或通过增殖反应堆进行重新利用,通过这种办法,大部分长寿命的核废料可以转变成有用的电力;三是采用核技术将长寿命的不具有裂变性质的放射性废料蜕变成无害的其他元素,但这种处理目前代价昂贵。实际上,关键问题是核废料总量很小。给波士顿市供电一年产生的核“垃圾”总量只需1辆卡车即可拉走。因此结论是,对于核废料,我们有多种技术解决方案,现在的主要问题更多的是政治上的而非技术上的。

最后一个重要问题是核扩散的问题,即政局不稳定国家的政府或恐怖组织有可能获得核武器。乍一看人们可能得出这样的结论,就是减少使用核能显然会降低核扩散的危险,但这个结论并不正确。技术上说,很关键的一点是反应堆产生的乏燃料不可能直接用来制造核武器,因为其中的可裂变物质品位太低。因此,核废料往往是通过回收加工成核反应堆使用的新燃料,从而提高了如前所述的燃料储备。然而,再生处理中有一步是近乎纯钚的生产环节,正是在这一点上可导向将其用作核武器材料。因此,“有效非扩散计划”的一个重要组成部分是对政局不稳的国家进行检查,阻止其得到用于制造核武器的钚。在实施这一计划时有两个事实必须注意到:①再生处理可能得到宝贵的能源和经济效益;②再生处理技术尽管非常昂贵,但已十分成熟。因此任何国家都能够基于能源需求来证明其再生处理设施建设的正当性,从而开辟了使少量的钚向武器制造秘密转移的可能性。一种对应做法是,由世界上主要的、稳定的核大国在它们本国国内进行所有的核燃料再生处理,然后将所生产的核燃料以合法的、满足其能源需求的方式卖给小国家。但这并不具有防止再生处理设施扩散的正当性。具有讽刺意味的是,自卡特政府以来,美国一直采取的是一种善意但拙劣的政策,就是不考虑乏燃料的后处理问题,它希望其他国家也这样做。而现实情况是,这种再生处理技术已经见缝插针地扩散到其他国家,这表明美国的政策可能会使核不扩散状况变得更糟而不是更好。我们从以上讨论得出的结论是什么呢?首先,核不扩散是一个非常严肃而重要的问题,必须加以解决;第二,像美国这样的政局稳定的国家是否多建核电站对核不扩散问题几乎没有直接影响,实际上只可能将人们的注意力从真正的问题上移开。

总之,核能有许多尚未被人们充分认识到的优点,也有一些缺点。即使是一些

知名的环境学家现在也开始支持将核能看作生产无二氧化碳电力的唯一选择。建设新的核电站的短期阻碍主要是,虽然燃料成本低,但反应堆的复杂性使得投资成本高。在一个放松管制的市场里,这将严重抑制新的投资。

### 1.2.6 水 电

水力发电是一种广泛使用的可再生能源。它提供了世界 2% 的能源和美国约 9% 的电力。水力发电所基于的想法概念上很简单。在地理条件和技术条件均适当的河床位置建坝,使得在大坝地势高的一侧形成一个巨大的水库。当水库里的水因为重力从坝口下泄时,将驱动发电机涡轮转动,从而推动发电机发电。

水电有许多吸引人的优点。首先,它在电力生产过程中不产生  $\text{CO}_2$  和其他有害物质;第二,水电站产生的强大电力可以和煤电或核电相当;第三,流体动能转化为电能的效率由于无需热蒸汽循环因而非常高;第四,除了长期干旱等极少数情况下,水电站可作为基本电力供应连续运行;第五,发电成本低,通常与燃煤发电相当;第六,也是最重要的是,燃料储备可以说是无限的,水力发电显然是一种可再生能源。

但水力发电有两点不足。首先,最适合建坝的河流已经建坝,因此如果不在技术上采用有吸引力的办法,水电发展将很困难,可建坝的地方已经不多;其次,虽然在早期建坝过程中环境因素不是主要问题,但它会对未来的水电站建设产生巨大影响。这里说的主要问题是建坝造成土地大量被淹没,通常这些土地可用于农业或用作其他再生性资源,因此,在将土地用于水电开发之前,必须作出得失权衡。

总的来说,虽然扩张的可能性受到限制,但水电将继续为电力供应作出重要贡献。

### 1.2.7 风力发电

风力是另一种近几年来备受关注的可再生能源。尽管如此,目前在美国风力所提供的电力只占微不足道的一小部分。几乎可以肯定,风力将比目前得到更多的应用,但基于技术方面的原因,它不会是电力供应的最终解决方案。

风力发电的概念很容易理解。风力使得大型风车的叶片旋转,这种旋转产生的动能通过一系列齿轮驱动发电机发电。

风力具有一些重要的优势。首先,风能显然是一种可再生能源;其次,它以非常干净的方式发电,不产生  $\text{CO}_2$ ,也不生成任何有害的污染物;第三,不需要蒸汽循环,因此风的动能转化成电能的效率很高;第四,由于上述几种原因,虽然风力发电的成本较现有燃煤发电要高,但仍在可以承受的范围内。如果将往往被忽略的化石燃料发电的环境成本考虑进来,风力的这些优势就更明显了。

但风力发电也有一些局限性。首先,风力强度不恒定。如果风力太小,就无法产生大的电力;如果风力过于强烈,则必须将叶轮的叶片转向平行于风向,以防止叶片旋转太快造成机械损坏。因此,风力发电也不会产生大的电力。平均来说,一

个大型的现代化风力电站的产能约是其最大额定功率的 35%。不要求蒸汽循环带来的优势大部分被过窄的风速变化范围抵消了。第二,以产生 1 GW 的电力平均来说,35% 的使用效率意味着需要风力电站装备总功率约为 3 GW 的风力发电设备。问题是要将良好风力条件下产生的多余电力存储起来,以便在风力不足时使用是非常困难的,也非常昂贵。第三个缺点是与燃煤发电相比,风力发电的强度非常低。因此要产生大的电力就需要在大面积范围上安装大量的风车。例如,一个现代化的风力电站,按 40% 的发电效率乐观估计,将需要大约 4000 个风车,占地约 400  $\text{mi}^2$ ,才能生产波士顿市所需的 2.4 GW 的电力。请注意,波士顿市的面积只有约 50  $\text{mi}^2$ 。因此,给波士顿供电的风车所占面积是波士顿本身面积的 8 倍多。如果说将“足球场”比作煤电所需面积,“小货车”比作核电所需面积,那么风力发电的等效面积就是“城市加郊区”。

最后,还有几个环境问题需要考虑。风车往往会发出很大的噪声,并危害到鸟类。还有一个美学上的问题。工程师们可能会觉得现代风车很美,但一般公众则倾向于认为风车有碍观瞻。此外,风车太大,风车之间的塔距在百米量级,叶片长近 50 m。图 1.4 所示是伦敦大笨钟、现代化风车和老式的荷兰风车的相对高度比较。

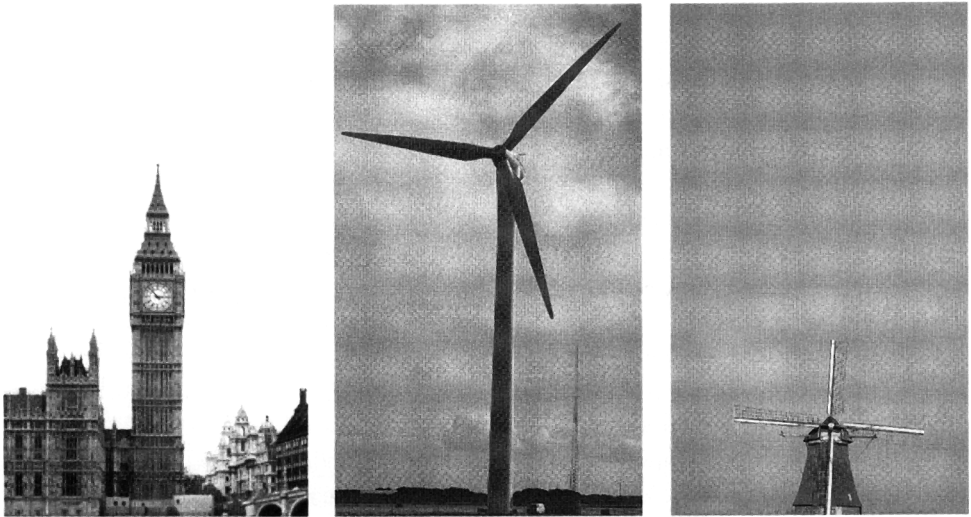


图 1.4 相同缩放比例下大笨钟、现代化风车和老式的荷兰风车的相对高度比较

上述讨论表明,风力发电如果想最终取代煤炭电力成为主要能源的话,还面临一些非常严峻的挑战。风力发电更大的可能是作为调峰能源,在每日的用电高峰,以及夏季和冬季这样的酷热和严寒季节里帮助满足用电需求。按照这种要求,风力发电最多可以提供 20% 的电力。它无法提供更多的电力,因为风速的巨大波动性有可能造成国家电网的不稳定。

### 1.2.8 太阳能发电

最后要讨论的可再生能源是太阳能。如同风力发电量可以忽略不计一样,目前美国的太阳能发电也少得可以忽略。不过,太阳能发电通常被认为是一种潜在的有吸引力的化石燃料替代能源。太阳能发电在许多具体应用方面都具有吸引力,但出于基本技术的原因,它不太可能成为世界电力问题的最终解决方案。

理解太阳能发电的原理涉及量子力学和半导体理论的具体细节,这已超出了本书的范围。就目前而言,我们假设有这么一种精心设计的太阳能电池,它能以平均约 10% 的效率将白天的太阳能直接转换为电能。

太阳能发电有两个主要优势。首先,太阳能显然是可再生的且是免费的;第二,能量转换过程中既不产生 CO<sub>2</sub> 也没有其他有害物质排放。从这个意义上说,太阳能发电在环保上是非常有吸引力的。

太阳能的弱点与风能很相似。首先,很明显,太阳能只能在白天无云的条件下利用,因此不可能用作基础电力,因为没有什么简单的方法可以将白天过剩的电力存储起来供晚间使用。其次,比起燃煤锅炉,太阳的发热强度非常低,因此需要大面积的太阳能电池才能产生大量的电力。例如,要提供波士顿市所需的 2.4 GW 的电力供应,需要的太阳能电池板覆盖面积约 50 mi<sup>2</sup>。我们知道,波士顿地区也就约 50 mi<sup>2</sup>,也就是说,太阳能发电的有效占地面积是以“城市”来计算的,供应一座城市用电的太阳能电池的敷设面积就相当于这座城市那么大。最后,太阳能发电是昂贵的,原因是所需的加工原材料将覆盖整个城市地区。而采掘、运输和制造这种材料的成本非常之高且不可避免。

总而言之,如果将太阳能发电用作大规模电能生产,将面临一些巨大的挑战。但太阳能还是有许多其他有吸引力的用途,例如,住宅和一些商用的取暖等。这种贡献可能是巨大的,应当予以鼓励。

### 1.2.9 资源保护

资源保护可以定义为对我们现有天然资源的更有效的利用。显然,最大限度地保护资源将对缓解目前和未来的能源紧张局面作出重要和有意义的贡献。虽然我们在提高资源保护方面已经付出了大量努力,但仍有许多机会可以开发利用。

资源保护可以通过下述两种途径来实施,第一种途径已得到公众的广泛认可,而后一种途径则还不太现实。虽然这两种途径都能节约能源,但它们之间还是有比较清晰的界线的。

前一种非常具有吸引力的途径是考虑利用技术进步的优势来节省燃料,同时要求在家用电器、汽车和其他日用品方面保持性能不变。采用这种途径的例子包括混合动力汽车、效率更高的设备、为老房子加装额外隔热层等。

后一种也是更难实施保护的途径是要求公众在日常生活的某些方面直接减少

对能源的使用。这通常看作生活水平的下降。公众一般很不愿意放弃那些他们已经习惯了的生活方式。这方面的例子有采用高效汽油的小型汽车、小房子、增加公共交通、夏天减少空调的使用、冬天调低加热器的温度设定等。

随着新的电力需求的不断增加,特别是在一些发展中国家,很难想象资源保护能彻底解决未来世界的用电问题,但它可以减缓问题的严重性。它可以为世界各国赢得更多的时间来开发并过渡到新的替代能源。

### 1.2.10 结 论

本节的讨论表明,世界面临的能源方面的困难在未来可能会继续恶化。目前还没有明显的、一劳永逸的解决办法。现有的每一种能源选择都面临着一大堆困难,包括资源有限、CO<sub>2</sub> 排放、有毒废气、废物处理、过多的土地占用以及高成本等。能源供应最终将走组合选择的道路,这种选择是通过理性而不是通过危机来进行的。这种组合选择现在新增了一种可能性,而且具有潜在的巨大影响,这就是聚变能的应用,这是我们下一节要讨论的主题。

## 1.3 聚变能的作用

### 1.3.1 聚变能

聚变能是一种核能形式。它的主要应用方式是通过大型基本负荷发电站进行电力供应。如果从单位质量结合能角度来看,聚变反应的基本核过程发生在质量谱上与比裂变相对的另一端。具体来说,就是裂变涉及像 <sup>235</sup>U 这样的重原子核的分裂,而聚变则涉及轻元素,主要是氢(H)及其同位素氘(D)和氚(T)等的合并(即聚合)。氢核聚变是太阳维持其存在的主要反应形式。

聚变能主要有三大优势:燃料蕴藏量、环境影响和安全性。我们首先考虑燃料蕴藏量问题。从电力产生上说,反应速率足够快的聚变反应主要有两种,它们都要用到纯净的氘,以及氘和氚的等量组合。天然的氘存在于海水中,平均每 6700 个氢原子就有 1 个是氘原子。氘的提取也很容易,成本非常低。如果海洋中所有的氘都用于聚变反应堆,并利用标准的蒸汽循环进行电力生产,那么按当今世界总的能源消耗速度计算,产生的动力将足够地球维持约 20 亿年!换句话说,由于聚变是一种核过程,因此,大约只需要一小卡车的含氘海水(HDO,而不是 H<sub>2</sub>O)就足以以为波士顿市提供一年的电力。

氘氚(DT)反应生产的能量超过纯氘(DD)反应。而且 DT 反应还有一个主要优点是反应发生的速度更快,从而更容易建立这种类型的反应堆。因此,所有第一代核聚变反应堆都将采用 DT 反应的形式。从燃料储备方面说,用于 DT 反应堆以及 DD 反应堆的氘可以用上几十亿年,但氚则不然。氚是一种半衰期约为 12 年的

放射性同位素,而且地球上没有天然的氦存在,但氦可以通过锂同位素 ${}^6\text{Li}$ 的反应来增殖获得。 ${}^6\text{Li}$ 是聚变堆包层的一个组成部分。这样,DT聚变的总体燃料储备由此转化为 ${}^6\text{Li}$ 的储备限制。地质估计表明,地球上可获得的廉价 ${}^6\text{Li}$ 可以用上2万年(假设世界能源总消费量按目前速度进行)。据推测,早在 ${}^6\text{Li}$ 耗尽之前,科学技术就已经发展到将聚变反应途径转换到DD反应堆上了。

聚变能的第二个优势是对环境的影响小。聚变反应不产生 $\text{CO}_2$ 或其他温室气体排放,也不会向大气排放任何其他有害化学物质。聚变反应的主要代谢物是无害的惰性气体氦气。聚变引起的最大的环境问题是,不论是DD反应还是DT反应,都会释放出高能中子。这些中子在聚变包层里被捕获,因此不会对公众构成威胁。然而,当它们经过包层的结构材料时,中子会造成材料结构改性,使材料变得也具有放射性。但即便如此,这种放射性结构材料的半衰期很短,因此,更换下来需要存储的时间也短,在100年量级。总的来说,从整体环境上考虑,聚变能是一种比化石燃料、核能和其他可再生能源更具吸引力的选择。

聚变能的最后一个主要优势是安全性。由于聚变是一种核过程,因此,人们非常在意发生如三哩岛事故那样的放射性灾难的可能性。支配核聚变反应的物理学的基本规律可以保证这种事情不可能发生。具体来说,在裂变反应堆里,相当于电力生产几年的整个能量被即时地存储在反应堆的堆芯。正是这种巨大的能量使得裂变堆有可能崩溃。而聚变反应堆的工作并不取决于大量燃料的链式反应。相反,燃料必须源源不断地送入反应堆才能维持所需的消耗。最终的结果是,在任何时刻,聚变反应堆内的燃料质量都非常少,也许仅相当于几面邮票的重量。正是这种任何瞬间都极少的燃料质量使得聚变堆不可能发生崩溃。

上述讨论表明,从燃料蕴藏量、对环境的影响和安全性等角度来看,聚变能的潜在优势的确给人留下了深刻印象。

正如人们所预料的那样,聚变也有些不足的地方必须考虑到。这些不足之处包括科学上、技术上的挑战,也有经济上的不利因素。关键性问题有如下几个方面。

首先,聚变科学相当复杂。具体来说,DT燃烧需要将燃料加热到 $150 \times 10^6 \text{ K}$ 这样的极端温度,比太阳中心温度还要高。在这样的温度下,燃料完全电离成了等离子体。由在这种高温下自由运动的电子和离子构成的集体主要受电磁力支配。一旦变热后我们就需要采取某种方法将等离子体约束在一起。人们能想到的主要办法就是通过巧妙的磁场位形来箍缩,这个概念对那些不熟悉等离子体物理学的人来说是非常模糊的。但没有其他选择的余地。过于简单的磁场位形只能使等离子体迅速损失掉,这样,聚变反应在还没能产生足够多的能量之前就中断了。即使是采用精巧的磁场位形,对等离子体仍有压强上的限定,这样才能确保等离子体在磁场中被约束住,不会快速损失掉。

为了实现将密度足够高的等离子体在足够高的温度下约束足够长的时间,世界

各国的聚变研究计划已经对此进行了 50 年的研究。净功率输出的聚变反应堆之所以要这么久才能实现,首要原因是科学上遇到了意想不到的困难。

此外还有工程上的挑战。许多人认为它们和科学挑战一样困难。首先,必须开发出能够承受聚变等离子体产生的中子和热负荷的先进的低活性材料;其次,必须开发出大型的、能够产生强磁场的大电流超导磁体,以便约束等离子体,聚变规模所需的超导磁体至今还未制造出来;第三,必须开发出能够将等离子体温度提高到极高水平的加热新技术,这涉及非常宽的技术领域,从大功率中性束到兆瓦级毫米微波波源,不一而足。显然,要使聚变成为现实,就需要有大量的研究和开发项目。

最后还有经济学上的不利因素。聚变反应堆本身就是一套复杂的设施。它包括燃烧室、包层以及一系列复杂的超导磁体。此外,由于结构材料变得具有放射性,因此还需要有远程处理系统,以便进行安装、拆卸和定期维护。氚的使用加上结构材料的活化意味着还必须有辐射防护。这些基本的技术要求意味着一个聚变反应堆的建设成本将大于化石燃料电厂的建设成本,并且很可能高于裂变电站的建设成本。这些因此显然都会提高消费者的用电成本。但与此相平衡的是聚变能的燃料成本低,保护环境所需的成本也低,这两方面都可能会使消费者的用电成本降低。

显然,很难预料未来 30 ~ 50 年后聚变能成本与其他能源成本进行比较的结果。问题复杂的主要原因是,将燃料储备和环境治理成本综合起来考虑,其他能源选择的成本有可能大大增加,因此这种比较同时涉及多个变动的方面。未来聚变能的成本估计不会偏离其他能源选择太远,但由于不确定性很大,故应谨慎对待。这些估计的主要价值在于证明了继续进行聚变研究是有意义的。聚变不应因其内在非常高的用电成本而被忽略,也不会像人们过去所希望的那样“过于便宜”。

### 1.3.2 聚变小结

聚变发电的实现将是很多年以后的事。尽管如此,它还是值得追求的,因为它具有大的燃料资源储备、较低的环境影响以及内在的安全性等基本优势。最重要的是,聚变能够产生大量的基础负荷电力,因此,有可能对世界各国的能源消费产生重大影响。

聚变能的两个主要不利因素是在科学和技术问题上遇到了意想不到的困难。在解决科学问题方面,目前已取得重大进展;面对技术方面的挑战,目前研究人员正投入巨大的努力,但其结果仍不能确定。许多关键性问题还有待于通过新的实验,即所谓“国际热核聚变实验堆(ITER)”予以解决。这项由多国资助的项目已于 2006 年开始建设。

如果成功的话,聚变能在用电成本上应该具有与其他能源选择一较高下的竞争力,虽然作出这种预测存在很大程度上的不确定性,但预料中的成本仍具有足够的合理性,它不会对完成必要的电力来源的技术可行性评估研究构成威胁。



## 1.4 本章总结

本小节对电力生产问题进行全面总结,我们的结论是,聚变可以在电力生产方面发挥重要作用。这一结论是基于以下两点关于电力消费的现实:首先,电力需求很大,预计未来还将增长;第二,越来越多的证据表明,温室效应是一个必须解决的现实问题。

对无二氧化碳排放电力的短期需求很可能要求增加使用核能来提供大量的基本负荷电力。电力当然也可以用天然气来生产,但天然气最理想的用途是用于取暖,用来发电似乎是对燃料的滥用。水电仍将继续做出重要贡献,虽然其进一步开发的潜力将受到限制,原因我们已讨论过。另一种对电力生产有重要贡献的是风力,但由于风力的易变性以及不易低成本存储的特性,这种形式的能源更适于在用电高峰时起削峰作用。太阳能除了给水加热等特殊用途之外,用于发电目前仍显过于昂贵。资源保护也可以在减缓用电缺口问题的严重性方面起到重要作用,但它本身无法解决增加电力需求的问题。

从长远的角度看,聚变能是一个极好的新选择。它有可能最终成为世界电力供应的主要来源,这也是聚变研究的主要使命。然而,科学技术方面的困难依然存在,用电成本可能也是一个问题。最终时间将会告诉我们,聚变研究究竟能不能完成自己的使命。

## 参考书目

关于一般性能源问题的书有很多。下面列出的这些是第 1 章内容的主要来源。需要特别说明的是,有关能源使用和能源储备的数字,许多书中给出了这类数字,但它们之间差别很大。第 1 章中引用的数值代表了这些数字的大致平均,虽是为简单起见,但这并不意味着它们不准确可靠。数据最完备的当属 Tester 等人的著作及其所载的参考文献。

### 1. 一般能源

Hughes, W. L. (2004). *Energy 101*. Rapid City, South Dakota: Dakota Alpha Press.

Rose, D. J. (1986). *Learning About Energy*. New York: Plenum Press.

Tester, J. W., Drake, E. M., Driscoll, M. J., Golay, M. W., and Peters, W. A. (2005). *Sustainable Energy*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

### 2. 核能

Reynolds, A. B. (1996). *Bluebells and Nuclear Energy*. Madison, Wisconsin: Cogito Books.

Waltar, A. E. (1995). *America the Powerless*, Madison, Wisconsin: Cogito Books.

### 3. 聚变能

Fowler, T. K. (1997). *The Fusion Quest*. Baltimore: John Hopkins University Press.

McCracken, G. and Stott, P. (2005). *Fusion, the Energy of the Universe*. London: Elsevier Academic Press.

Wesson, J. (2004). *Tokamaks*, third edn. Oxford: Oxford University Press.

# 第 2 章 聚变反应

## 2.1 引言

聚变能的研究是从讨论核聚变反应开始的。本章的内容安排是,首先对化石燃料燃烧时的化学反应与核裂变电站,以及将来核聚变电站产生能量的核反应进行比较。接着进一步分析核裂变反应的基本反应机制,并解释为什么这种机制不适合核聚变能。这一讨论提供了一种视角,使我们认识到必须采用另一种能够提供大量核聚变反应能源的替代机制。此外本章还详细描述了包括氘氚(D-T)反应在内的一些聚变反应过程。

通过对上述问题的分析,我们可以得出以下结论:无论是重原子的裂解(裂变)还是轻元素的结合(聚变),都会有效地产生核能。这两种对立的能量机制是核力——将不同元素的原子核结合在一起的力——的性质的直接结果。这些核力的行为可通过“结合能”对原子序数的曲线方便地展现出来。一个简单的物理图像解释了结合能曲线的形状。这个解释说明了为什么轻元素或重元素是产生核能的理想来源,而位于中间的元素不行。

## 2.2 核反应与化学反应

通过对不同种类燃料的能量当量进行比较,我们很容易看出为什么人类对产生核能的核反应有浓厚的兴趣:

化石燃料      裂变      聚变

$10^6$  t 原油 = 0.8 t 铀 = 0.14 t 氘

可以看出,相同能量当量的核燃料质量要比化石燃料少  $10^6$  倍,这样可以大大节省燃料且有利于环境保护。之所以存在如此大的差别,是因为核反应与化学反应的基础不同。

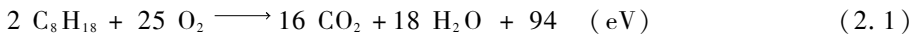
为了弄清楚这些问题,我们先考虑化学反应。为供电或传输的化石燃料的燃烧过程属于化学反应。化石燃料含有复杂的碳氢化合物,在氧气中燃烧时释放出能量并产生新的分子和化合物。这是化学反应,因为每种元素(如氢、碳和氧)的原子数

在反应前后并未发生改变。然而由氢、碳、氧的化合物构成的反应产物却不同于原初燃料的化学组成。新分子的电子键结构不同,电子键的作用是使电子在适当位置上绕每个原子运动。控制电子行为的主要的力是电磁力,它能够在不改变原子核的情况下重新排布电子结构。

在“燃烧反应”中,燃料的一部分化学势能转化为反应产物的动能,另一部分转化为辐射能并以可见光的形式发出。因此,反应产物的化学势能比燃料的要低。燃烧产生的动能通过粒子间的随机碰撞转变成热能,这个热能可用来产生蒸汽或驱动汽轮机,也可以通过增压来推动汽车引擎的活塞。

实际上,人们主要关心的是确定每次化学反应释放出的能量多少。我们注意到,化学反应的一种极端形式是电离,在这个过程中,原子或分子获得足够大的能量使其中的一个电子可以脱离原子核的束缚,由此我们可以估算这个能量的量级。化石燃料燃烧所释放出的能量一般要比电离能低,因为在燃烧过程中很少发生燃料被电离的情形。例如,由量子理论可知,氢的电离势约为 13.6 eV(许多其他物质亦类似)。因为  $1 \text{ eV} \approx 11\,600 \text{ K}$ ,由此可知,在化石燃料形成的典型温度(约几千 K)下,化学反应所释放的能量量级为每次反应单位原子所释放的不到 1 eV 能量(注意,这个估计不能应用到裂变反应堆的芯部,尽管那里的温度大约也为  $10^3 \text{ K}$ ,但那是核反应而不是化学反应)。

我们来考虑汽油燃烧这样一个实际的例子。尽管汽油是由多种碳氢化合物组成,但眼下我们可以假设其最主要的成分是  $\text{C}_8\text{H}_{18}$ 。汽油完全燃烧时的化学反应式为:



因为这里有 102 个原子参与反应,平均每个原子释放 0.9 eV 的能量。宏观上看,每次反应放出的 94 eV 能量大约相当于  $40 \text{ MJ/kg} \approx 100 \text{ MJ/gal}$  的汽油。这是用来比较化学反应与核反应的重要参考数据。请记住,40 MJ/kg 是一个很大的数,因为 1 L 汽油就可以使汽车开出 10 km。

下面考虑核反应,包括裂变和聚变。核反应的结果是参与反应的原子核的基本结构发生改变。核反应把一种元素的原子变成了另一种元素的原子(例如裂变反应中,铀变成了氙和锶)。

核反应的另一个主要特征是原子核内的基本粒子(通常称核子)的守恒,就当前目的来说,假设只涉及质子和中子。在一些核反应中,质子数和中子数分别守恒。然而,在很多其他核反应中,一些中子会通过放出  $\beta$  粒子(即电子)而衰变成质子。所以,通常核反应的守恒是指原子核内核子总数的守恒,而不是个别种类的核

子数守恒。

接下来考虑能量的产生。与化学反应相比,核反应每次释放的能量是巨大的。原因是这里引起反应的是核力而不是电磁力。核力是一种短程力,其力程仅与原子核的直径相当,但强度要比同样距离下的电磁力强得多。

核反应中能量的释放相当于核“势能”的减少或等效于原子核反应前后结合能的增加。随着反应末态原子核总质量的些微减少,反应末态的原子核因为结合能的增加而变得更稳定。根据爱因斯坦著名的质能关系  $E = mc^2$ ,正是这个质量差转变成了能量。释放出的能量通常表现为末态粒子的动能或  $\gamma$  射线。因此,像裂变和聚变这样的核反应都可以写成:



其中能量  $E$  由下式给出:

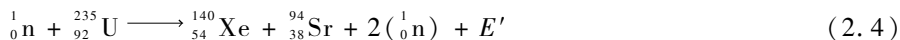
$$E = [(m_{A_1} + m_{A_2}) - (m_{A_3} + m_{A_4} + \cdots + m_{A_k})]c^2 \quad (2.3)$$

通常,核反应的能量  $E$  的值为  $10 \sim 100 \text{ MeV}$ 。核反应与化学反应所释放的能量相差百万倍,这正好解释了为什么两种能源的宏观能量当量会相差相应的量级。

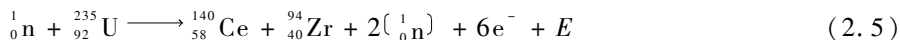
接下来我们通过具体的例子在更深层次上来比较两种主要的核反应——裂变和聚变——的相同点和不同点。

## 2.3 裂变核能

通常产生裂变能的方法是用慢中子(即能量近似于室温能量  $0.025 \text{ eV}$  的中子)轰击相对稀缺的铀同位素  ${}_{92}^{235}\text{U}$  原子。就产能而言,这个过程有两个主要优点,这可以通过检验典型的裂变反应看出来。我们注意到,存在多种不同的使  ${}_{92}^{235}\text{U}$  裂变的方式。从反应产物和能量释放方面看,下面给出的反应就很典型:



在这个反应中,氙和锶本身就是不稳定的同位素,大约经过两周的时间,会通过若干次  $\beta$  衰变而变成稳定的元素。最终的反应式可写成:



所释放的能量  $E$  可以很容易地从标准的核反应数据表中确定。反应前后

元素的总质量分别为 236.053 u 和 235.832 u ( $1\text{u} = 1.660\,566 \times 10^{-27}\text{ kg}$ , 是原子质量单位)。利用爱因斯坦的质能关系, 这个质量差可改写成每次核反应释放出  $E = 206\text{ MeV}$  的能量或每个  ${}_{92}^{235}\text{U}$  核子释放出 0.88 MeV 的能量。释放的这些能量宏观上等同于  $84 \times 10^6\text{ MJ/kg}$ , 与燃烧汽油相比, 能量增益大约要大  $10^6$  倍。

现在可以确认这种强大的裂变反应能够转变成实用电能的原因有两个。首先, 触发裂变反应只需要一个中子, 而反应产物中则包含两个中子。事实上, 如果将所有可能的裂变反应都考虑进来, 那么平均来说产生的中子数还要略高一点, 大约为每次反应产生 2.4 个中子。这种中子倍增行为使得链式反应得以维持, 链式反应的好处就在于裂变反应堆更新一次, 燃料可以自持燃烧好几年。我们需要做的只是保证充足的燃料使中子损失减到最小。

另一个原因与触发核反应的中子触发的电中性有关。正是中子的电中性使得它可以轻易地穿过包围在原子周围的电子云, 从而近距离接触到原子核本身。原子核的电磁库仑力对中子不起作用, 无法将其从原子核相互作用区域排开。结果, 低能中子相对来说更容易地与  ${}_{92}^{235}\text{U}$  产生裂变反应。无论是从能量平衡、经济效益, 还是从反应堆运行上看, 这都有明显的优点, 也就是说, 反应堆可以在燃料保持固态的足够低的温度范围内运行。

这就是为什么裂变反应能够有效地产生用于发电的核能的两个原因。

## 2.4 聚变核能

### 2.4.1 中子触发的轻元素的核反应

重原子裂变的途径启发了我们, 那就是对于轻元素是否也存在通过慢中子轰击触发链式反应来实现大部分的裂变和聚变反应途径呢? 很遗憾, 答案是否定的。弄清楚原因之后, 选择什么方式来产生聚变能就变得很明确了。

我们可以这样来解释, 考察两种假设性的核反应, 它们分别对应中子驱动下的轻元素裂变反应或聚变反应。下面的简单计算说明了为什么这两个反应都不能成功实现。轻元素的裂变以中子轰击氘核( ${}^2_1\text{H}$ )为例进行说明, 相关的反应可以写成:



这个反应产生了所希望的中子增殖。但从表 2.1 中的数据可以计算出, 所释放的能量为  $E = -2.23\text{ MeV}$ 。负号表示反应不是释放出能量而是需要输入能量才能发生。很显然, 这个反应不能作为能量的来源。其他轻元素的裂变反应也都一样。

表 2.1 聚变反应中主要轻元素原子核的性质

元素	符号	质量数 $A$	电荷数 $Z$
电子	$e^-$ 或 $e$	0.000 549	-1
中子	${}^1_0n$ 或 $n$	1.008 665	0
氢(质子)	${}^1_1H$ 或 $p$	1.007 276	1
氘	${}^2_1H$ 或 $D$	2.013 553	1
氚	${}^3_1H$ 或 $T$	3.015 501	1
氦-3	${}^3_2He$	3.014 933	2
氦-4( $\alpha$ 粒子)	${}^4_2He$ 或 $\alpha$	4.001 503	2
锂-6	${}^6_3Li$	6.013 470	3
锂-7	${}^7_3Li$	7.014 354	3

注:核的质量和核电荷数分别用  $Au$  和  $Ze$  表示,其中,  $u = 1.660\ 565\ 5 \times 10^{-27} \text{kg}$ ,  $e = 1.602\ 189\ 2 \times 10^{-19} \text{C}$ 。

现在考虑另一种情形:中子轰击轻元素的聚变反应。同样假设中子是与氘核发生碰撞。反应可以写成:



在此情形下由核数据得到释放出的能量为  $E = +6.27 \text{ MeV}$ 。对于产能来说,这个反应是积极可行的,但是这种反应要消耗中子。反应要由一个中子触发,但是聚变之后却没有剩余的中子。既然中子没有来源,那么这种反应就不能自持。因此,这种反应作为能量来源也是不可行的。其他轻元素的中子驱动聚变反应也是一样的结果。

#### 2.4.2 轻元素聚变反应

上述例子表明,轻元素的裂变或聚变并不直接具有重核裂变的好处。尽管如此,我们也已经了解了如何利用轻元素的核反应来产生能量。主要有两点:第一,从产能角度说,我们应该把注意力集中在轻元素的聚变而不是裂变反应上,因为这些反应产生能量而不是消耗能量;第二,不能依赖中子来触发聚变反应,因为这些反应消耗中子,并且没有外在可用的中子来源。

那么该怎么触发轻元素的聚变反应呢?基本思想是用另一种轻元素原子来代替中子,也就是说,利用两个轻元素原子之间的碰撞,譬如用两个氘核相互碰撞来产生核反应。这种方法的优点在于可以简单地通过持续供给氘原子而不是中子来克服缺乏链式反应带来的困难,这种方法简单可行且成本不高。

但用两个氘原子碰撞来进行核反应的缺点是这两个氘原子的距离必须足够接近,通常要在原子核直径的尺度范围内。在如此接近的距离下,两个带正电荷的粒子间的库仑势将产生很强的排斥力,这将改变粒子的运动轨迹,从而大幅度降低了核反应的可能性。如果氘核的能量足够高,就可以克服这种排斥性的库仑力,目前

的聚变研究也正是基于这一考虑。这个能量的大小以及相关的物理问题是聚变研究的重要主题,我们将在下一章进行详细讨论。眼下暂不予考虑这些问题,我们将注意力全部集中在不同类型聚变反应的产能多少,而不考虑实现这些反应的难易程度。

对轻元素聚变的原子核性质的研究表明,有三类反应产生的核能是最多的。涉及的原子包括氘、氚和氦的一种同位素——氦-3。图 2.1 中给出了这三种核的原子结构图。相关的核聚变反应如下。为了简化标注,此后文中的符号改为:中子  ${}^1_0\text{n}$  为  $\text{n}$ ;氢原子核(质子)  ${}^1_1\text{H}$  为  $\text{p}$ ;氘原子核(氘核)  ${}^2_1\text{H}$  为  $\text{D}$ ;氚原子核(氚核)  ${}^3_1\text{H}$  为  $\text{T}$ ;氦原子核( $\alpha$ 粒子)  ${}^4_2\text{He}$  为  $\alpha$ ;氦-3 原子核  ${}^3_2\text{He}$  为  ${}^3\text{He}$ 。

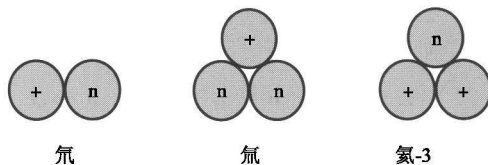
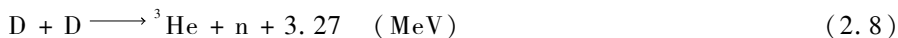


图 2.1 氘、氚及氦-3 的原子结构图

### 1. D-D 反应

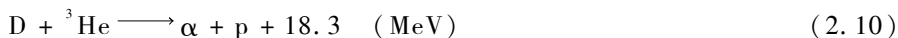
顾名思义,D-D 反应是通过两个氘核之间的相互作用来产生聚变能。由于反应所需的低成本的燃料可以很容易从海水中提取,燃料供应几乎是用之不竭的,因此这个反应是我们最希望发生的。但从下一章可以看出,在上述三类反应中,这种反应是最难发生的。D-D 反应实际上有两个分支,二者发生反应的概率差不多相等,相关的反应式如下:



从能量上说,这两个反应中每个核子的产能分别为  $0.82 \text{ MeV}$  和  $1.01 \text{ MeV}$ 。宏观上相当于每千克氘产能  $78 \times 10^6 \text{ MJ}$  和  $96 \times 10^6 \text{ MJ}$ 。D-D 反应很难发生,所以不是目前研究的重点。

### 2. D- ${}^3\text{He}$ 反应

这个反应是将氘核与氦-3 原子核聚合在一起。这个反应也很难实现,但比 D-D 反应要容易一些。然而,这个反应需要以氦-3 作为燃料,而地球上并不存在天然的这种同位素。尽管如此,这个反应还是值得研究的,因为它的反应产物全都是带电粒子。从工程角度上看,比起中子,我们更希望从带电粒子上获取能量,因为后者在材料活化和放射性损伤等方面的问题要小得多。除此之外,后者还有可能直接将核能转化为电能而无需借助于效率很低的蒸汽循环系统。这个反应写为:



即使以核为单位来看,每次反应释放出的能量也是非常巨大的。18.3 MeV 的能量相当于每个核子产能 3.66 MeV,宏观上相当于每千克 D- $^3\text{He}$  混合燃料产能  $351 \times 10^6$  MJ。注意,这个反应并不是完全与中子无关,因为一些 D-D 反应和下一代的 D-T 反应也会发生,这二者都会产生中子。但  $^3\text{He}$  获取上的困难加上触发 D- $^3\text{He}$  聚变反应的困难使得这个反应也不是目前聚变研究的重点。

### 3. D-T 反应

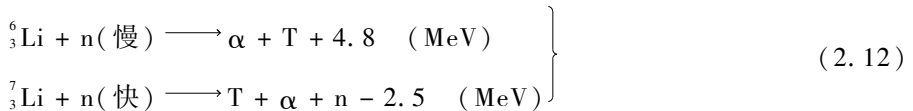
D-T 反应是指氘核与氚核之间的聚变反应。它是所有聚变反应类型中最容易发生的(尽管与  $^{235}\text{U}$  的裂变反应相比触发条件仍要困难得多)。从产能的吸引力方面看,D-T 反应能够产生大量中子,同时又需要供给氦来使反应得以持续,而地球上不存在天然的氦。此外,氦有放射性,半衰期为 12.26 年。尽管如此,D-T 反应毕竟能够产生巨大的核能。该反应式可写成:



这相当于每个中子产能 3.52 MeV,宏观上相当于每千克燃料产能  $338 \times 10^6$  MJ。尽管有氦和中子等问题,但因为它是最容易发生的聚变反应,这就决定了 D-T 反应必然成为目前国际上聚变研究的重点。

既然选择了 D-T 反应,那又该怎么处理氦和中子的问题呢?多年的裂变研究已经使核工程师们掌握了如何处理高能中子带来的材料活化和放射性损伤等问题。对于氦的放射性处理也基本类似。解决方法虽然相当复杂,但目前这些技术已经成熟。

一个突出的问题是氦的供给。解决方法是在 D-T 聚变反应区周围的包层内增殖氦。最适合用来产生氦的化学元素是锂。涉及的主要核反应如下:



这两个反应都能产生氦。不同的是第一个反应是放能的,而第二个反应是耗能的。天然存在的锂有 7.4% 是  $^6_3\text{Li}$ ,92.6% 是  $^7_3\text{Li}$ 。尽管  $^7_3\text{Li}$  占了绝大部分,但核反应数据显示, $^6_3\text{Li}$  的反应更容易发生,因此,它在氦的增殖过程中占主导地位。

考虑  $^6_3\text{Li}$  的反应,如果不存在中子的损失,那么聚变过程中每消耗一个中子就能产生一个新的氦原子,而中子可以通过产生中子的聚变反应来实现,因此,增殖比为 1.00。然而在实际的反应堆中,中子总不可避免有损失。于是就需要有一些增殖中子的方法。另外还需要有慢化高能中子的方法,因为从式(2.12)可以看出,慢速的低能中子更容易发生反应。

这些问题我们放到第 5 章中去讨论。目前我们假设这些问题已获得圆满解决。因此,通过  $^6_3\text{Li}$  来增殖氦就能够解决氦的持续供给问题,只要锂的供给充足即可。



锂的已知储量足够使用几千年,因此,燃料的获取不是问题。从长远来看,目标当然是开发 D-D 聚变反应堆。

### 2.4.3 聚变反应的能量分配

聚变反应释放出的能量大部分是以反应产物的动能形式出现的。对于 D-T 反应来说,确定两种反应产物的能量分配尤为重要,因为它的反应产物中一种是带电的,而另一种不带电。通过假设每种反应产物的能量和动量均远远大于反应前聚变核的能量和动量,我们很容易就能确定这个分配。

计算过程如下,两种反应产物分别以下标 1 和 2 标示出来。假设聚变前粒子是静止的(相对于反应产物的速度而言),这样聚变反应前后的能量和动量的守恒关系就只与反应产物有关,因此有:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = E \quad (2.13)$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0 \quad (2.14)$$

从这两个方程可以很容易同时解出  $v_1$  和  $v_2$ ,以及相对应的动能。结果是:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}E \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}E \quad (2.16)$$

注意:动能与质量成反比。换言之,较轻的粒子携带了大部分能量。举例来说,对于 D-T 反应,释放的能量  $E = 17.6 \text{ MeV}$ 。反应产物为一个  $\alpha$  粒子和一个中子,质量比  $m_\alpha/m_n = 4$ 。那么  $\alpha$  粒子的动能为  $E/5 = 3.5 \text{ MeV}$ ,中子的动能为  $4E/5 = 14.1 \text{ MeV}$ 。中子的能量是  $\alpha$  粒子的 4 倍。于是我们可以把 D-T 聚变反应重新写成稍微方便的形式:



至此,我们讨论了聚变反应的基本性质。本书余下的部分主要讨论 D-T 反应,因为这个反应是目前国际聚变研究领域的主流。

## 2.5 结合能曲线

在这一节里,我们将给出下述观察结果的物理解释:最易触发的核反应不是发生在重元素上(例如,裂变),就是发生在轻元素上(例如,聚变),而中等元素则不行。解释分为两部分:第一,检验由实验测得的结合能对原子质量的曲线可知,轻

元素和重元素原子核的结合力都比中等元素的要弱,这就基本上解释了为什么位于原子质量两端的元素更容易发生核反应;有了这个结论,我们可以接着讨论解释的第二部分,那就是结合能曲线的形状为什么是这样的。可以证明,曲线的形状是由强的短程核力与弱的长程库仑力在几何上的竞争造成的。

### 2.5.1 结合能曲线

考虑一种其原子核由  $N$  个中子和  $Z$  个质子组成的基本化学元素。我们注意到,整数  $N + Z$  虽然非常接近但却不完全等于实验测得的实际质量数  $A$ ,即  $N + Z \approx A$ ,这里  $m_A = Au$  是核的质量。比较核的实际质量与构成该原子核的每个粒子质量的总和可以发现:

$$Nm_n + Zm_p > m_A \quad (2.18)$$

这里的质量差可看成已转化为使原子核结合在一起的结合能。具体来说,我们将结合能定义为:

$$E_B \equiv (Nm_n + Zm_p - m_A)c^2 \quad (2.19)$$

即给原子核加上等于  $E_B$  的能量才能使核分解成其各个组成部分。使用上更方便的一个物理量是单位核子的结合能,定义为  $E_B/A$ ,这个量是对原子核每个核子上的平均结合能的量度。

举个例子,我们可以计算元素氟的每个核子的结合能。元素氟的  $N = 10, Z = 9, A = 18.998\ 40 \approx 19$ 。相关的质量  $m_n = 1.008\ 66\ u, m_p = 1.007\ 28\ u, m_A = 18.998\ 40\ u$ 。相应的质量差  $Nm_n + Zm_p - m_A = 0.154\ u$ 。代入式(2.19)得  $E_B = 143\ \text{MeV}$ ,  $E_B/A = 7.5\ \text{MeV/核子}$ 。我们注意到,原子核内使粒子结合在一起的能量相当大。

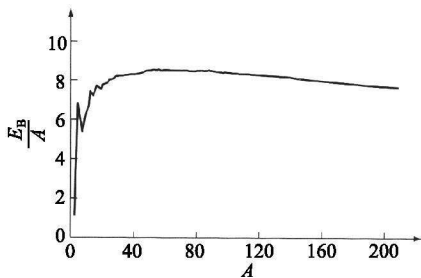


图 2.2 每种化学元素的单位核子结合能与质量数的关系曲线

这个计算适用于所有元素。将这些结果画成单位核子结合能关于原子质量数的曲线则如图 2.2 所示。我们看到,轻元素和重元素的  $E_B/A$  都较小,而处在中间位置的铁元素 ( $A \approx 56$ ) 的  $E_B/A$  达到最大值。因此,我们有结论:相对于中间位置上的元素,轻元素和重元素将核子结合在一起的核力均较弱。因此,轻元素和重元素更容易触发核反应。不仅如此,轻元素聚合成曲线上结合能较强的较重元素,意味着这种反应会有能量释放出来。类似地,重元素通过裂变裂解成曲线上结合能较强的较轻元素也会有能量释放出来。

结合能曲线的形状解释了为什么轻元素和重元素是产能核反应的主力。最后要问的问题是,为什么  $E_B/A$  关于  $A$  的曲线形状会是这个样子。

结合能曲线的形状解释了为什么轻元素和重元素是产能核反应的主力。最后要问的问题是,为什么  $E_B/A$  关于  $A$  的曲线形状会是这个样子。

## 2.5.2 结合能曲线的形状

结合能曲线的形状是强的短程核力与弱的长程库仑力之间竞争的结果。图 2.3 给出了一个带电粒子的核势与库仑势以及相应的所受的力的示意图。以此为基础,下面给出一个简单的模型来定性估计结合能曲线的形状。在开始前应该强调的是,这个模型忽略了所有的核效应和量子效应,并假设原子核由小的半径为  $r_0$  的硬球形质子和中子组成,因此,粒子的行为符合经典牛顿力学。由所有这些条件即可以得出预期的结果。

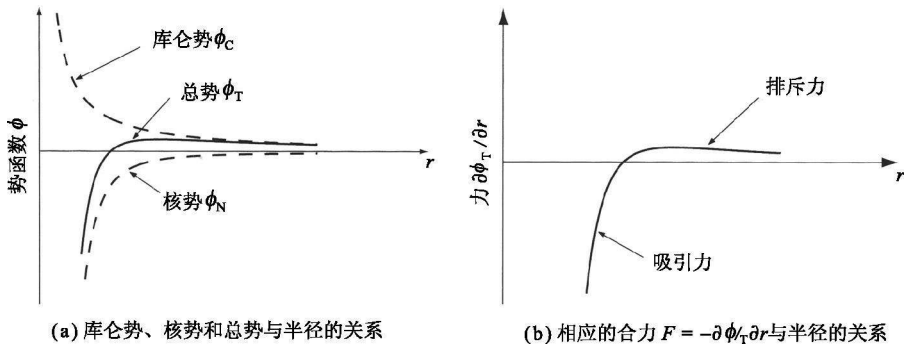


图 2.3 带电粒子的核势与库仑势及相应所受的力的示意图

这个模型的基本思想是假设存在这样一个球形的原子核,它由  $N + Z \approx A$  个核子组成。然后我们来计算放置在这个球体表面的新带电粒子受到的净的吸引力(例如,核力减去库仑力)。几何关系如图 2.4 所示。计算的目的是要确定这个力对核子数  $A$  的依赖关系。由于这个力的大小是对新粒子受到核的束缚程度的好的

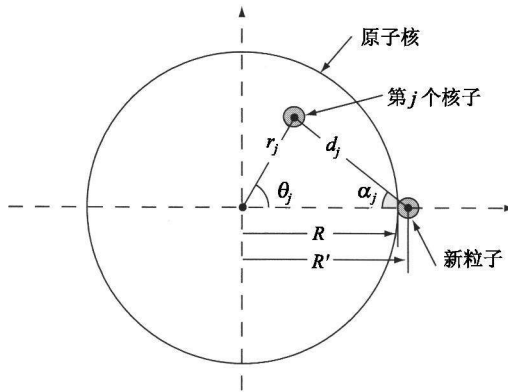


图 2.4 简单结合能模型的几何关系  
(注意:  $R' = R + r_0$ )

量度,因此,这个力与原子核  $A$  的函数关系定性上应当与结合能曲线的形态相似。

计算过程如下:先考虑新粒子受到原子核内第  $j$  个粒子的库仑排斥力(与  $1/r^2$  成正比)。力在  $R$  方向上的分量为:

$$\mathbf{F}_j^{(c)} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\alpha_j}{d_j^2} \mathbf{e}_R \quad (2.20)$$

沿  $R$  方向的总的库仑力可通过对  $j$  求和得到(注意求和后,力的切向分量由于对称性抵消了):

$$\mathbf{F}_R^{(c)} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{\cos\alpha_j}{d_j^2} \mathbf{e}_R \quad (2.21)$$

其中系数  $1/2$  反映了只有一半的核子是带电的。

式(2.21)对所有粒子求和可以转化为积分,每个粒子所占体积必须近似等于微分体积元。

$$d\mathbf{r} \equiv r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \approx (4/3) \pi r_0^3 \quad (2.22)$$

力的表达变为:

$$\mathbf{F}_R^{(c)} \approx \left[ \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{3}{4\pi r_0^3} \int \frac{\cos\alpha}{d^2} d\mathbf{r} \right] \mathbf{e}_R \quad (2.23)$$

其中省略了所有粒子变量的下标  $j$ ,因为现在这些变量是连续的。经过稍显冗长的代数和几何代换,我们可以解析地求出这个积分。考虑到该模型的简单性,我们把细节计算留做作业而不在正文中进行演算了。另外我们还注意到,原子核的总体积近似等于每个核子体积的  $A$  倍,这样力的最终形式可以写成关于  $A$  而不是  $R$  的表达式:

$$\frac{4\pi}{3} A r_0^3 \approx \frac{4\pi}{3} R^3 \quad (2.24)$$

于是库仑力沿  $R$  方向的分量的表达式为:

$$\mathbf{F}_R^{(c)} \equiv F_R^{(c)} \mathbf{e}_R = \frac{F_0}{2} \frac{A}{(A^{1/3} + 1)^2} \mathbf{e}_R \quad (2.25)$$

其中  $F_0 = e^2/4\pi\epsilon_0 r_0^2$ 。

由于力的“吸引”方向是沿着  $-R$  方向,因此“吸引力”库仑力是  $-F_R^{(c)}$ ,它关于  $A$  的函数关系如图 2.5(a) 所示。正如直观上所预期的,库仑力的大小随  $A$  的增大

而单调增加。电荷越多,产生的力就越大。而且对于较大的  $A$ ,力与  $A^{1/3}$  成正比。这是因为原子核的总电荷随  $R^3$  增长,而力的几何行为随  $R^{-2}$  递减。因此,考虑所有这些因素后的净效果是  $R \sim A^{1/3}$ 。

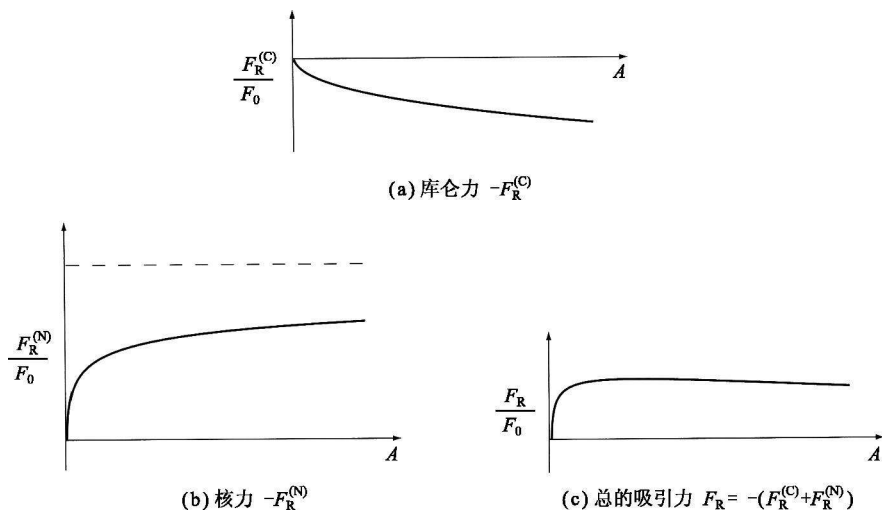


图 2.5 归一化吸引力与原子质量数  $A$  的关系

接下来考虑核力,我们基本上可以建立一种最简单的模型(根据积分计算)来证明,短程强作用力是一种与  $-K/r^4$  成正比的中心力。 $K$  的值可通过假定在临界位置  $r = r_c$  核力与库仑力大小相等来确定,由此得到  $K = e^2 r_c^2 / 4\pi\epsilon_0$ 。这里  $r_c$  的典型值为几个核子半径,即  $r_c = k r_0$ ,其中  $k$  是量级为 1 的已知无量纲数。我们注意到,在  $r < r_c$  时,核力超过库仑力占主导;而当  $r > r_c$  时,情况则相反。这些都是我们预期的短程强力的定性特征。

基于这些假设,核力的  $R$  分量可以写成:

$$\mathbf{F}_R^{(N)} \equiv F_R^{(N)} \mathbf{e}_R \approx - \left[ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{4\pi r_0^3} \int \frac{k^2 r_0^2 \cos\alpha}{d^4} dr \right] \mathbf{e}_R \quad (2.26)$$

其中负号意味着核力在  $R$  的反方向(即吸引力方向)上。经过代数运算我们同样可以解析地求出这个积分。由此得到所预期的核力关于  $A$  的函数表达式为:

$$F_R^{(N)} = - F_0 \frac{k^2 A}{(A^{1/3} + 1)^2 (2A^{1/3} + 1)} \quad (2.27)$$

这个“吸引力”的核力  $-F_R^{(N)}$  如图 2.5(b) 所示,其中  $k = 3.4$ 。注意,在  $A$  较小时,力随  $A$  增长,随着  $A$  变大,曲线变得水平。力的这种性态与下述的物理图像是一致的:对于小的原子核,相应的  $A$  较小,每增加一个新的核子,核力的吸引强度就会

增加。然而,当增加到足够多的核子后,原子核变得很大,而核力又是短程力,因此,新加入的粒子将不再感受到远处核子的作用。换句话说,不管原子核内可能的核子数目有多少,核力的短程性质使得新粒子只能受到有限数目核子(即那些差不多处于距离  $r_c$  范围内的核子)的作用。

总的吸引核力为:

$$F_R = - (F_R^{(C)} + F_R^{(N)}) \quad (2.28)$$

如图 2.5(c) 所示。请注意,这个曲线的性态与结合能曲线 ( $E_B/A$  对  $A$ ) 定性上类似。因此我们有结论:对于较小的原子核,结合能曲线的形状由吸引力逐渐增强的核力决定;但对于较大的原子核,核力逐渐达到饱和,曲线最终由弱的但持续增加的排斥性库仑力主导。结果是很轻和很重的元素的结合能比中等质量元素的要弱。这就解释了为什么原子质量谱两端的原子发生核反应产能是最有效的。

## 2.6 本章总结

化石燃料燃烧过程中发生的化学反应与反应分子的电子结构的重新排布有关,但每种元素的化学性质保持不变。化学反应由电磁力支配,每次反应中每个原子所释放的能量在几分之一 eV 量级。而核反应与原子核内部核子的裂解或聚合有关,核反应使得最初的燃料元素转变为新的化学元素。在这些反应中,核力占主导,所释放能量的典型值为每次反应每个核子产能兆电子伏。所以,核反应每次释放的能量通常是化学反应的百万倍。

核反应主要有两种:裂变和聚变。裂变主要发生在重元素情形下,尤其是  ${}_{92}^{235}\text{U}$ 。在这些反应中,裂变由慢中子触发,每次反应平均产生 2.4 个新的中子。由此形成链式反应,使得反应可以持续自持地进行。

但中子不能有效地触发轻元素的聚变反应,因为聚变反应堆的运行要消耗中子而不是产生中子。所以,聚变反应改由两个带正电的原子核直接相互作用。由于反应要克服库仑排斥力的阻碍,所以聚变反应的发生要比裂变反应困难得多。因为不存在链式反应,所以为使反应能够持续进行,就必须不断加入新的燃料。最容易发生的聚变反应是 D-T 反应,反应释放出 17.6 MeV 的能量,其中,中子占 14.1 MeV,  $\alpha$  粒子占 3.5 MeV。目前,国际上聚变能研究都集中在 D-T 反应上,因为这一反应很容易触发,这远比氙的增殖问题要重要。

## 参考书目

第 2 章的大部分内容多年来早已为人们所熟知。许多关于内容的稍许不同的理解可以在下面的参考书中找到,这些书都集中探讨了聚变能。

### 聚变反应

Dolan, T. J. (1982). *Fusion Research*. New York: Pergamon Press.

Glasstone, S. and Loveberg, R. H. (1960). *Controlled Thermonuclear Reactions*. Princeton, New Jersey: Van Nostrand.

Gross, R. (1984). *Fusion Energy*. New York: John Wiley & Sons.

Miyamoto, K. (2001). *Fundamentals of Plasma Physics and Controlled Fusion*, revised edn. Toki City: National Institute for Fusion Science.

Rose, D. J. and Clark, M. (1961). *Plasmas and Controlled Fusion*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Stacey, W. M. (1981). *Fusion Plasma Analysis*. New York: John Wiley & Sons.

Stacey, W. M. (2005). *Fusion Plasma Physics*. Weinheim: Wiley-VCH.

Wesson, J. (2004). *Tokamaks*, third edn. Oxford: Oxford University Press.

## 习 题

2.1 考虑完全“催化的 D-D”聚变反应所释放的能量。在这个过程中,由单纯的 D-D 反应产生的  ${}^3\text{He}$  和氘又与其他氘原子发生核反应,最后只留下  $\alpha$  粒子、质子和中子。计算当完全燃烧时每个氘核释放的平均能量,并与单纯的 D-D 反应进行比较。

2.2 计算下列各种燃料所包含的能量。答案均以焦耳为单位。

① 一桶煤 (200 lb)<sup>1)</sup>, 其中, 1 lb 煤所包含的热量相当于  $1.3 \times 10^4$  BTU<sup>2)</sup>。

② 50 gal 汽油, 其中, 1 gal 所包含的热量相当于  $3 \times 10^7$  cal<sup>3)</sup>。

③ 50 gal 海水——完全催化的 D-D 反应。

④ 25 gal 海水加上等量氘的 D-T 反应。

⑤ 一桶铀矿石 (4000 lb) (矿石中只有 0.2% 是铀, 其中 0.7% 的铀是  ${}^{235}\text{U}$ ), 一个  ${}^{235}\text{U}$  原子核裂变释放的能量约为 200 MeV。

⑥ 一年中每天一个巧克力圣代冰淇淋, 一个圣代产生的热量相当于 500 cal。

2.3 一些学聚变工程的学生决定假期开车从波士顿到劳德代尔堡旅行, 两地相距 1500 mi。学生们驾驶的是新型的聚变能汽车, 燃烧采用完全催化的 D-D 反应进行。如果海水中有 0.0153% 的原子是氘原子, 那么需要多少加仑的海水? 比较一下, 如果平均每行驶 25 mi 消耗 1 gal 汽油, 那需要多少加仑汽油?

2.4 D-D 反应较 D-T 反应的一个优点是带电粒子携带更多的能量。假设 D-D 反应的两个分支有相等的发生概率, 且氦核完全燃烧, 而  ${}^3\text{He}$  在与氘反应之前就已逃逸, 试计算带电粒子携带的

1) 1 lb = 0.453 59 kg。——译者

2) 1 BTU = 251.996 cal。——译者

3) 1 cal = 4.184 J。——译者

能量。并与 D-T 反应结果进行比较。

2.5 给出推导的代数步骤,证明式(2.25)和式(2.27)。

2.6 为了测试核力模型对结合能曲线形状的敏感性,利用下述中心力重新推导式(2.27):

$$F_j^{(N)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_c^2} \operatorname{cosech}^2\left[\frac{r^2}{r_c^2}\right] e_R$$

和正文中一样  $r_c = k r_0$ , 改变  $k$  使得结合能曲线对于铁达到最大。推导过程中可能会有数值计算。将结果与正文中的结果进行比较。



# 第 3 章 聚变功率的产生

## 3.1 引言

物理学定律已经证明,每次核聚变反应发生都会释放大量的动能。在第 3 章至第 5 章中,我们将着力分析并讨论在什么条件下这种能量可以转化为人类社会可以利用的能源,例如,发电或产氢。我们的思路是,从最终目标出发,以回溯的方式来展开论述。聚变的吸引力最终取决于设计出实用的、经济性好的反应堆,它应有良好的功率平衡,即  $P_{\text{out}} \gg P_{\text{in}}$ 。为此已提出了两种性质不同的聚变概念:磁约束聚变和惯性约束聚变。本书集中讨论磁约束聚变。

第 3 章至第 5 章的目的是要提出一种简单的磁约束聚变堆的设计。为此我们需要有磁约束聚变系统下的宏观功率平衡的知识基础,因此,第 4 章将讨论功率平衡问题。可以预料,这一分析将涉及很多与能量来源和消耗有关的物理现象。大部分这类现象我们都很熟悉,包括热传导、对流和压缩等,但对于核聚变反应产生的宏观能量我们可能就不是很有行了,而它们却明显是聚变系统中最重要的部分。类似地,我们对库仑相互作用引起的带电粒子的库仑辐射损失可能也不是很熟悉。因此,第 3 章就先来讨论聚变功率的产生和辐射损失问题,它是讨论功率平衡的基础。

本章将从聚变功率的计算开始。我们先引入一些微观量:截面、平均自由程和碰撞频率。这些量有效地确定了给定的 D-T 混合燃料触发聚变反应的概率。然后通过反应速率的概念从微观世界过渡到宏观世界。这对于计算反应堆宏观体积的 D-T 燃料产生的总功率来说是必需的。

接下来计算辐射造成的功率损失。这种损失被称为韧致辐射损失,是由带电粒子间的库仑相互作用引起的。我们给出一种简单的启发性推导来得到正确的、带有半定量精确定标系数的密度和温度的标定关系。

如上所述,有关聚变功率的产生和辐射损失的知识对于确定磁约束聚变堆的总体功率平衡至关重要。

## 3.2 截面、平均自由程和碰撞频率的概念

计算 D-T 聚变反应产能的第一步是研究原子核碰撞的基本微观物理过程。一旦掌握了这些知识,就可以相对直接地过渡到宏观尺度来确定磁约束聚变堆产生的能量。这些微观概念是截面、平均自由程和碰撞频率。

### 3.2.1 截面

截面定量描述了一对氘氚原子核发生聚变反应的概率。具体来看,假设氘核静止,氚核以速度  $v$  向它运动,如图 3.1 所示。我们把氘核当做靶粒子而将氚核看作入射粒子。现在想象靶粒子被球对称的力场包围。与入射粒子运动方向垂直的环形阴影部分就是截面  $\sigma$ 。如果入射粒子穿过  $\sigma$  区域,那么靶粒子施加在它上面的力将足够强,从而发生核反应。显然,这种相互作用可以称为“碰撞”。反之,如果入射粒子没有穿过  $\sigma$  区域,那么它受到靶粒子的作用力就很弱,将不会发生碰撞。

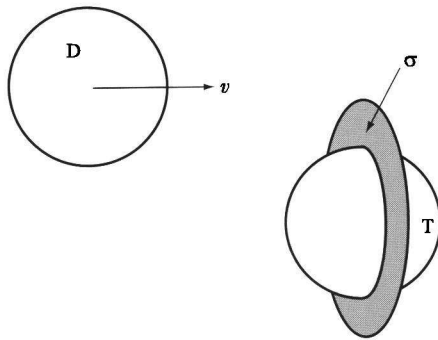


图 3.1 “硬球”碰撞的截面区域  $\sigma$

尽管截面的概念很简单,但是要确定  $\sigma$  的大小、它与  $v$  的函数关系以及它的几何形状却并不容易,这主要取决于粒子间相互作用力的本质。支配聚变反应的短程核力使我们预料到并确实发现,截面大小在原子核直径的量级。核力的短程本质还说明了在这个范围之外穿过的入射粒子受到的相互作用极弱,不足以产生聚变。因此,图 3.1 所示的发生碰撞的清晰界限给出了原子核碰撞的合理近似。这里的截面通常是指“硬球”截面。不难想象,截面的实际行为远比这复杂,一般来说需要通过实验来确定。以后我们会简要说明实际的聚变截面,眼下假设  $\sigma$  是一种与  $v$  和几何形状无关的、可用硬球碰撞来表征的已知常量已足够用了,以后这些假设将去掉。

### 3.2.2 平均自由程

直观上看,  $\sigma$  的值与发生聚变碰撞的概率相关。大的  $\sigma$  意味着靶粒子大, 因此, 触发碰撞相对容易, 或者说概率相对较高。小的  $\sigma$  表示靶粒子小, 较难发生碰撞, 即概率较低。截面  $\sigma$  与碰撞概率之间是通过“平均自由程”这个概念联系起来的。

为了理解这个概念, 考虑一定体积的靶粒子, 体积的宽度为  $dx$ , 宏观截面面积为  $A$ , 如图 3.2 所示, 故体积  $V = Adx$ 。假设靶粒子的数密度由  $n_1$  表示, 则体积内总的粒子数为  $N_1 = n_1 V = n_1 Adx$ 。

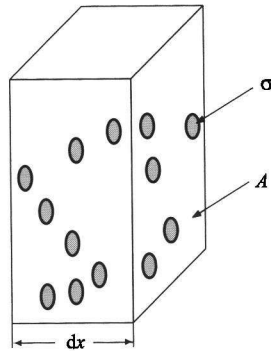


图 3.2 靶粒子的体积

(每个靶粒子占据截面积为  $\sigma$  的区域)

每个靶粒子占据的面积为  $\sigma$ , 在此之内入射的粒子将与之发生碰撞。现在假设靶的密度足够低, 截面足够小, 从入射粒子的角度来说, 这些截面  $\sigma$  不互相重叠。这对于包括聚变等离子体在内的大部分材料是一个很好的近似, 因为原子核的有效体积只占据很小的部分。在此近似下, 靶粒子占据总面积的比例  $dF$  可以写成:

$$dF = \frac{\sigma N_1}{A} = \frac{\sigma n_1 Adx}{A} = \sigma n_1 dx \quad (3.1)$$

$dF$  的值可以理解为一个入射粒子穿越  $dx$  距离过程中发生核碰撞的概率。相应地, 量

$$\frac{dF}{dx} = \sigma n_1 \quad (3.2)$$

是单位长度上发生核碰撞的概率。

这个概率可以用来计算所谓平均自由程  $\lambda_m$  这个很有用的量。计算过程如下:假设入射粒子不止一个,而是很多,数密度为  $n_2$ , 全都以速度  $v$  接近靶,如图 3.3 所示。入射粒子通量  $\Gamma$  定义为单位时间内、单位面积上穿过区域  $A$  的总的粒子数:

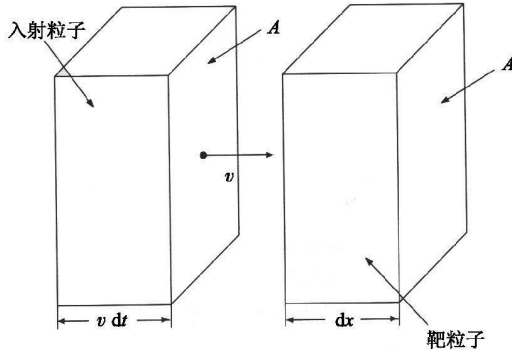


图 3.3 以速度为  $v$  撞击一定体积静止靶粒子的入射粒子通量

$$\Gamma = \frac{N_2}{Adt} = \frac{n_2 Avdt}{Adt} = n_2 v \quad (3.3)$$

设  $d\gamma$  为这个通量里粒子移动  $dx = vdt$  距离过程中发生核碰撞的那部分通量,则有

$$d\gamma = dF \Gamma = \sigma n_1 \Gamma dx \quad (3.4)$$

相应地,量  $-d\gamma$  等于粒子总通量里经过  $dx$  距离后没有发生一次碰撞的粒子通量的减少,即  $-d\gamma = \Gamma(x + dx) - \Gamma(x) = d\Gamma$ 。因此,未发生碰撞的通量变化可以写成:

$$d\Gamma = -\sigma n_1 \Gamma dx \quad (3.5)$$

这是一个简单的常微分方程,它描述了入射通量的空间演化。通过合理的假设, $\sigma$  和  $n_1$  在我们关心的长度范围内近似为常量,因此式(3.5)很容易积分,得到:

$$\Gamma = \Gamma_0 e^{-x/\lambda_m} \quad (3.6)$$

其中  $\lambda_m = 1/n_1 \sigma$  被称为平均自由程。平均自由程概念可以用两种方式理解。首先,它清楚地给出了入射通量未发生碰撞的特征指数衰减长度;其次,它还可以理解为入射粒子在发生碰撞前行进的平均距离。注意, $\lambda_m$  与  $n_1, \sigma$  二者成反比。这使我们直观地认识到,高的靶粒子密度和/或大的截面意味着入射粒子无需行进太远就能够发生碰撞。

### 3.2.3 碰撞频率

最后我们考察碰撞频率  $\nu_m$  和它的倒数  $\tau_m$  ——平均碰撞时间,通常简称为碰撞

时间。它们的定义说明如下,前述分析已经说明了典型入射粒子在发生碰撞前前进距离为  $\lambda_m$ 。如果粒子以速度  $v$  运动,则碰撞前的相应时间为:

$$\tau_m = \frac{\lambda_m}{v} = \frac{1}{n_1 \sigma v} \quad (3.7)$$

碰撞频率定义为碰撞时间的倒数:

$$\nu_m = \frac{1}{\tau_m} = n_1 \sigma v \quad (3.8)$$

物理上说就是平均每秒有  $\nu_m$  个粒子发生核碰撞。很明显,对于核相互作用,一个入射粒子只能经历一次碰撞,之后该粒子将不再以原来的形式存在。但同时存在的还有许多其他种类的碰撞,特别是带电粒子之间的库仑碰撞,同一粒子可以不断碰撞而不改变自身的特征。对于这些多次相互作用,量  $\nu_m$  仍可以理解为单个粒子每秒发生的平均碰撞数。

截面、平均自由程、碰撞时间和碰撞频率的概念在等离子体物理和聚变能的各个方面有着广泛的应用,本书中也会不时出现。从计算聚变能产生的角度说,碰撞频率正比于  $\sigma v$ , 它反映了每秒的碰撞数,且能很好地衡量产生所需的 D-T 反应的难易程度。

## 3.3 反应速率

### 3.3.1 硬球反应速率

刚才讨论的概念涉及的是单个粒子间核碰撞的微观物理。聚变反应堆产能计算的下一步将由微观世界转到宏观世界。我们引入反应速率  $R_{12}$  的概念,它决定了单位体积、单位时间内的聚变碰撞次数。一旦  $R_{12}$  的值已知,那么就可以直接计算单位体积产生的聚变功率。

我们还是用硬球碰撞来模拟,这样反应速率的计算将很容易。首先,注意到在  $dt = dx/v$  时间内,将有  $n_2 A dx$  个入射粒子通过靶区域。这其中发生碰撞的数目由  $dF(n_2 A dx)$  给出。反应速率是单位体积、单位时间内发生碰撞的粒子数——每立方米每秒的碰撞数。因此,

$$R_{12} = \frac{dF n_2 A dx}{A dx dt} = \sigma n_1 n_2 \frac{dx}{dt} = n_1 n_2 \sigma v \quad (3.9)$$

现在可以很容易算出聚变功率密度。如果每次核碰撞产生能量  $E_t$ , 那么单位体积每秒产生的总能量就是  $E_t R_{12}$ 。这个量等于以瓦特每立方米 ( $\text{W}/\text{m}^3$ ) 为单位的聚变功率密度,可以写成:

$$S_f = E_f n_1 n_2 \sigma v \quad (\text{W/m}^3) \quad (3.10)$$

这就是所需的表达式。应当强调的是,式(3.10)中的能量  $E_f$  对应于总聚变能、 $\alpha$  粒子能量和中子能量,具体意义取决于能量密度计算的背景。这种区分很明确也很重要,下一章我们将详细讨论。最后应该记住的是,式(3.10)只是概念上正确,因为它采用的是硬球碰撞模型,显然太过简化了。

### 3.3.2 包含各种速度的反应速率

#### 1. 分布函数

首先,我们将反应速率概念推广到考虑靶粒子和入射粒子的速度都具有随机分布的情形。也就是说,不是所有的靶粒子都静止,也不是所有的入射粒子都以相同的速度  $v$  运动。这种推广可通过引入高级密度函数来实现。这个函数除了具有简单的粒子数密度  $n$  的意义之外,还包含了粒子很多其他信息。这个高级函数被称为分布函数,用符号  $f$  表示。

为了理解  $n$  和  $f$  之间的区别,考虑物理空间下的一个小立方体元  $d\mathbf{r} = dx dy dz$ 。这个体积内在给定时刻的总粒子数是  $n(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$ , 它包括所有粒子,不论其速度大小。假设现在我们想知道的是这个体积内某一特定速度范围内的特定子类粒子的总数目。具体说就是,假设这个子类定义为运动速度在范围  $v_x \sim v_x + dv_x, v_y \sim v_y + dv_y, v_z \sim v_z + dv_z$  之间的粒子。分布函数是在由三维物理体积  $d\mathbf{r}$  概念推广得到,在六维相空间体积  $d\mathbf{r}d\mathbf{v}$  上定义的,其中  $d\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z$ 。分布函数是数密度的推广。在某个给定时刻,六维相空间体积元内的粒子(即那些位于以  $\mathbf{r}$  为中心的物理体积  $d\mathbf{r}$  内,速度以  $\mathbf{v}$  为中心,范围在  $d\mathbf{v}$  内的粒子)总数就是密度乘以相体积元的结果,即  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ 。

很明显  $f$  比  $n$  包含更多的信息。事实上,  $n$  可以很容易地由  $f$  得到。如果对于给定的  $\mathbf{r}$  对所有速度求和(即积分),就可以得到物理体积  $d\mathbf{r}$  内包含所有粒子速度的粒子总数。把这个数除以体积  $d\mathbf{r}$  就得到  $n$ ,即单位体积内的粒子数。

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{dx dy dz \int f dv_x dv_y dv_z}{dx dy dz} = \int f d\mathbf{v} \quad (3.11)$$

注意,虽然  $d\mathbf{r}$  和  $d\mathbf{v}$  是微分量,即都是小量,在感兴趣的长度和速度上的变化可以忽略,但它们仍然包含足够多的粒子数目,所以采用统计学解释是有意义的。

类似地,如果希望计算以  $\mathbf{r}$  为中心的体积  $d\mathbf{r}$  内所有粒子的平均速度  $\mathbf{u}$ ,做法是选择一个速度  $\mathbf{v}$ ,并乘以以这个速度  $\mathbf{v}$  运动的粒子数,然后对所有可能的  $\mathbf{v}$  值求和(即积分),最后再除以  $d\mathbf{r}$  内的总粒子数:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{d\mathbf{r} \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}}{n d\mathbf{r}} = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} \quad (3.12)$$

事实上,任意一个量  $W$  的平均值都可以按如下公式通过计算分布函数加权平均来得到:

$$\langle W \rangle = \frac{1}{n} \int W f d\mathbf{v} \quad (3.13)$$

## 2. 反应速率的第一次推广

通过下述简单步骤我们可以将反应速率  $R_{12} = n_1 n_2 \sigma v$  推广到包含速度分布的情形。首先,密度  $n_1$  和  $n_2$  需要代换为  $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t) d\mathbf{v}_1$  和  $f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2, t) d\mathbf{v}_2$ ; 其次,既然“靶”粒子和“入射”粒子的选取是任意的,那么  $R_{12}$  表达式中的速度  $v$  实际上表示两个粒子的相对速度,即  $v = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$ ; 最后,需要把截面看成相对速度的函数。例如,在 D-T 碰撞中,如果两个粒子间的相对速度很小,则库仑排斥力会使轨道强烈偏转以避免两个粒子靠得太近。换言之,对于小的相对速度,截面对于核碰撞来说将会非常非常小。当相对速度增加时,库仑排斥力的效果减弱,截面将随之增加。因此,截面通常是相对速度的函数,即  $\sigma = \sigma(|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|)$ 。结合这些修正,得到下面所示的反应速率的推广:

$$\begin{aligned} R_{12} &= \int f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) \sigma(|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|) |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \\ &= n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

这里,第二个等号表达式用了  $W$  的定义式(3.13)。最后,注意到对于同种粒子碰撞有:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{2} \int f_1(\mathbf{v}_1) f_1(\mathbf{v}_2) \sigma(|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|) |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \\ &= \frac{1}{2} n_1^2 \langle \sigma v \rangle \end{aligned} \quad (3.15)$$

出现系数 1/2 是因为当对两个速度  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  积分时,每次碰撞都累计了两次。

## 3. 反应速率的第二次推广

刚才给出的反应速率表达式在计算由短程核碰撞产生的聚变能时很有用,每次碰撞产生相同的能量  $E_f$ 。换言之,式(3.10)的推广可以写成:

$$S_f = E_f n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle \quad (3.16)$$

第二次推广适用于这样的情形:相互作用力的本质是长程力,并且粒子待求的量取决于相对速度和碰撞的几何特征。这是典型的库仑碰撞,它在聚变物理学中是很重要的。

为了便于理解,考虑电子(入射粒子)与氦核(靶粒子)的库仑相互作用,如图 3.4 所示。注意到轨道的几何特征由“碰撞参数  $b$ ”表征。具体来说就是,假设我们只考虑电子与氦核相互作用前后在  $z$  方向的动量变化  $\Delta m v_z$ 。对于库仑碰撞,  $\Delta m v_z$  的角色类似于核碰撞情形下的  $E_f$ 。直观上看,对于固定的  $b$  值,由于电子移动得非常快,因此氦核对电子轨道的扰动非常小,相互作用的时间很短。 $b$  值相同但速度较慢的电子,其轨道

偏转得较大。这意味着  $\Delta m v_z$  是相对速度  $v$  的函数。同样,速度  $v$  相同但  $b$  值不同的两个电子将有不同的轨道偏转。因为距离越远,库仑力越弱,较大  $b$  值的电子偏转程度较小。所以,  $\Delta m v_z$  也是碰撞参数  $b$  的函数。因此对于库仑碰撞,先计算反应速率再对速度积分,然后乘以动量改变  $\Delta m v_z$  的做法是不正确的,因为  $\Delta m v_z$  本身就是速度的函数。它应该置于积分号下,成为积分的一部分。

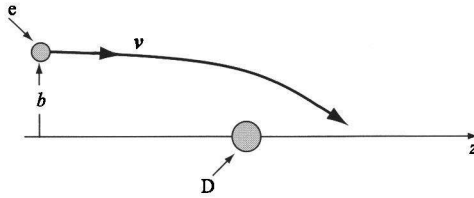


图 3.4 速度为  $v$ , 碰撞参数为  $b$  的电子与静止的氘核“碰撞”

库仑碰撞的第二个要解决的问题是碰撞参数  $b$  以及它与截面的关系。因为库仑力的长程性质,某种程度上说截面似乎是无穷大。所有粒子,无论其  $b$  和  $v$  如何,都将受到库仑力的作用。困难之处在于如何将“无限大”的截面分割成一系列面积为  $d\sigma = 2\pi b db$  的截面环微元,如图 3.5 所示。对  $0 < b < \infty$  范围内的所有碰撞参数值进行  $d\sigma$  积分,总面积确实是无穷大。然而,由于  $\Delta m v_z$  是  $b$  的函数,且随  $b$  增大而减小,因此在被积函数中,微元截面带有减函数  $b$  的权重,当对  $b$  积分时,总的积分依然是有限的<sup>1)</sup>。注意到  $d\sigma$  与  $v$  无关,因为对于任何给定  $b$  值的粒子,不论速度是多少,都将通过一个微元环。

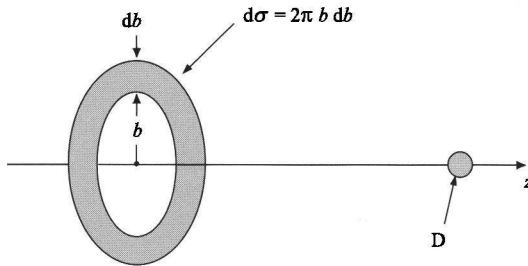


图 3.5 微元截面 ( $d\sigma = 2\pi b db$ ) 的示意图

我们可以按下述做法将反应速率概念推广应用于长程力场的行为。用微分截面  $d\sigma = 2\pi b db$  替代截面  $\sigma$ ,现在需要再对  $b$  进行积分。下一步,假设用物理量  $W =$

1) 实际情况更复杂。即使考虑到截面的加权,但在进行有限范围  $0 < b < b_{\max}$  积分时,库仑碰撞情形下仍然有弱的对数发散的问题。这个问题将在第 9 章详细讨论。眼下我们只需假设积分仍然是有限的即可。



$W(v, b)$  来刻画碰撞, 其中,  $v = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$ 。这个量可以是单次碰撞引起的  $z$  方向的动量变化量, 也可以是动能或碰撞辐射引起的能量损失的改变量。换言之,  $W$  表示的是单个粒子在单次碰撞后该物理量的改变量。这个量的相应的宏观改变量记为  $w$ , 它表示单位时间单位体积内该量的改变。广义的反应速率允许我们在假设  $W$  和分布函数已知的情形下计算  $w$ 。二者的关系是:

$$w = 2\pi \int W(v, b) f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) v b \, db \, d\mathbf{v}_1 \, d\mathbf{v}_2 \quad (3.17)$$

注意, 取  $W = E_t H(b_0 - b)$ , 其中,  $H$  是赫维赛德函数,  $b_0^2 = \sigma(v)/\pi$ 。上述表达式即简化为核反应的短程碰撞形式。

### 3.4 分布函数、聚变截面、聚变功率密度

经过很长的讨论, 我们得到了一个合适的公式(3.16), 它使我们至少从概念上能够估计反应堆的聚变功率密度。但实际上要进行这个计算, 还需要具备分布函数和截面的详细知识, 下面我们就来进行这方面的研究。

#### 3.4.1 分布函数

第9章将说明, 库仑截面比 D-T 聚变截面大得多。这意味着随机的库仑碰撞将在远比核聚变碰撞时间尺度短的时间内使粒子分布函数弛豫到热力学平衡分布。此外, 由统计力学可知, 热力学平衡是由麦克斯韦分布函数描述的。具体来说就是, 假定氘和氚的分布函数为:

$$f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n_j \left[ \frac{m_j}{2\pi T_j} \right]^{3/2} e^{-m_j v^2 / 2T_j} \quad (3.18)$$

其中,  $j$  表示氘或氚;  $n(\mathbf{r}, t)$ ,  $T(\mathbf{r}, t)$  分别是数密度和温度;  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ 。这些分布函数将用来计算聚变功率。

#### 3.4.2 聚变截面和能量密度

聚变截面的推导可分几步来进行。首先, 我们用硬球模型来简单估算一下。然后试着单纯地用经典物理学来研究  $\sigma$  对库仑碰撞速度的依赖关系。结果证明, 这种估算相当悲观, 于是我们再考虑加入核的量子力学效应来做第三种计算。尽管截面最终要由实验测量来确定, 但这个量子模型是准确的。

##### 1. 硬球截面

硬球截面假设每个参与碰撞的粒子的行为像一个撞球, 如图 3.6 所示。每个粒子的直径假定为原子核直径, 即  $d \approx 5 \times 10^{-15} \text{ m}$ 。这一图像表明, 截面面积  $\sigma =$

$\pi d^2$ 。原子核截面的常用单位为靶恩(b), 1 靶恩(b) =  $10^{-28} \text{m}^2$ 。因此, 硬球模型预测的聚变截面为:

$$\sigma = \pi d^2 \approx 0.8 \times 10^{-28} \text{m}^2 \approx 1 \text{b} \quad (3.19)$$

这是对  $\sigma$  的合理估计, 但它没有考虑到库仑力的排斥作用会使慢粒子不经历核碰撞的事实。下面我们就先来纠正这个缺点。

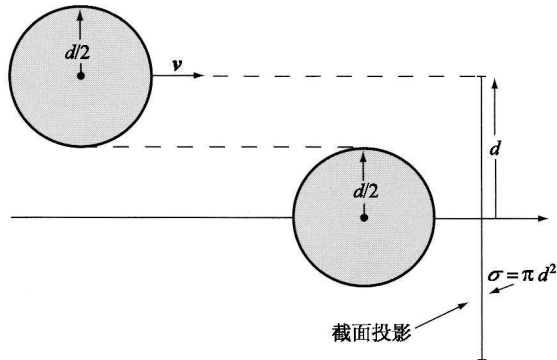


图 3.6 硬球模型碰撞截面 ( $\sigma = \pi d^2$ )

## 2. 经典截面

经典模型尝试将经典物理学和硬球模型结合起来, 通过考虑库仑排斥力和吸引力核力之间的竞争来确定  $\sigma$  对速度的依赖关系, 这种思路很明白。假设氘核以速度  $v$  直接朝静止的氚核运动。图 3.7 显示了实验室系下和质心系下的这种运动。为了形成硬球碰撞, 能量守恒要求, 在质心系下, 氘与氚在相距很远时的初始动能应超过它们相互接触时粒子表面的库仑势能。如果不是这样, 氘氚将在它们发生碰撞之前被排斥开。数学上, 当满足下式时将发生碰撞:

$$\frac{m_D}{2} \left[ \frac{m_T}{m_D + m_T} v \right]^2 + \frac{m_T}{2} \left[ \frac{m_T}{m_D + m_T} v \right]^2 \geq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \quad (3.20)$$

式(3.20)可以简化为:

$$\frac{1}{2} m_r v^2 \geq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \quad (3.21)$$

其中  $m_r = m_D m_T / (m_D + m_T)$  是约化质量。如果代入  $d = 5 \times 10^{-15} \text{m}$ , 并定义质心动能  $K_{cm} = m_r v^2 / 2$ , 那么发生碰撞的条件简化为:

$$K_{cm} \geq 288 \quad (\text{keV}) \quad (3.22)$$

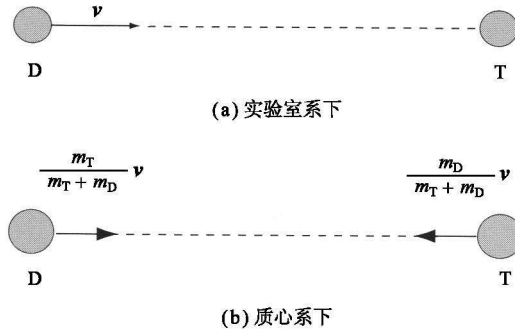


图 3.7 不同参照系下的 D-T 碰撞图像

$\sigma$  对  $v$  或对  $K_{\text{cm}}$  的依赖关系的经典图像如图 3.8 所示。主要特征是在 288 keV 处有很高的势垒,任何较低能量的粒子都将不会经历核聚变碰撞。与实际情况相比,这个结果甚为悲观。

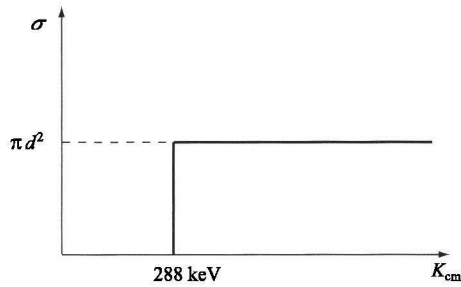


图 3.8 经典相互作用图像下 D-T 截面作为能量的函数

### 3. 核的量子力学效应

正确的聚变碰撞截面必须包含核的量子力学效应,这是因为核相互作用最强烈的区域是在原子核线度的尺度上。在如此小的尺度上,经典物理学已不再适用,需要考虑量子力学效应。

原子核长度尺度上最重要的效应是核既表现出粒子性,又表现出波的特性。这种波特性使我们必须在简单经典硬球模型基础上引入三点量子修正。第一,在量子力学起作用的地方,隧道效应开始显现。隧道效应的一个简单例子是声波在吸声材料表面的反射。即使这种吸声材料对声波完全无损耗,但声波仍然可以穿透材料内部一定深度,尽管幅度呈指数形式衰减。如果吸声材料足够薄,那么声能将会出现在它的背面,也就是说材料被能量“隧穿”了。从截面的角度说,“隧穿”相当于势垒穿透。换句话说,即使动能低于库仑势垒,也仍然会发生一定的相互作用。288 keV

并不是很高的截止能量。直观上看,动能越低于截止能量,相互作用的概率也越低。

波动效应引起的第二点修正是,在原子核的距离上,两个原子核实际上可以相互穿越。原子核的相互作用可以看成两支密切耦合的波的相互作用。粒子(波)的相对速度越大(即  $K_{cm} \gg 228 \text{ keV}$ ),那么这种紧密耦合相互作用的时间就越短,从而聚变碰撞的概率也就越低。所以,随着相对速度的增加,聚变截面将很快减小。

波动效应引起的最后一项修正是共振的概率。在一定几何位形和相对速度的条件下,两个碰撞原子核的结合势能可以产生共振。结果是在这种条件下,核反应的概率将增加,因此截面也相应增大。这正是 D-T 相互作用的情形。

图 3.9 简要图示了这三项波动修正,并与经典图像进行了比较。实际聚变反应的截面是由实验确定的,通常是让一束单能粒子(在这里是氘原子)射向静止的靶。图 3.10 绘出了三种主要聚变反应的实验截面对氘原子能量(不是相对论性质的能量)的函数曲线。可以看出,三条曲线都表现出图 3.9 所示的量子行为。我们还看到,D-T截面在  $K_D \approx 120 \text{ keV}$  时有一个约为 5 b(靶恩)的峰。就截面大小来说,与 D-D 反应或 D- $^3\text{He}$  反应相比,D-T 反应很明显更加优越。具体比较表明,在  $K_D = 20 \text{ keV}$  时,  $\sigma_{DT} \approx 100 \sigma_{DD}$ 。以后我们会知道,这个值是聚变反应堆的典型值。作为比较的最后一点,这里顺便指出,裂变反应的热中子(即  $K_n \approx 0.025 \text{ keV}$ )与  $^{235}\text{U}$  碰撞截面约为 600 b(靶恩)。因此单就截面而言,裂变远比聚变有优势。

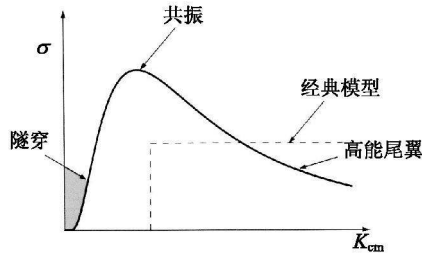


图 3.9 原子核截面的量子力学修正

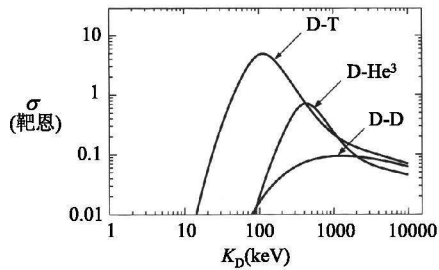


图 3.10 实验测得的 D-T 反应、D- $\text{He}^3$  反应和 D-D 反应的截面与氘原子能量  $K_D = m_D v_D^2/2$  的函数关系 (Glasstone S, Loveberg R. Controlled Thermonuclear Reaction. New York; Robert E. Krieger Publishing, 1975.)

假设  $\sigma(v)$  已知,那么原则上直接由式(3.14)就可计算反应速率。目前已利用等温麦克斯韦分布函数对主要的聚变反应进行了数值计算,结果 ( $\langle\sigma v\rangle$  对温度  $T$  的曲线)如图 3.11 所示。我们看到,对于 D-T 反应,在温度为 70 keV 时有峰值  $9 \times 10^{-22} \text{ m}^3/\text{s}$ ,因此知道了  $\langle\sigma v\rangle$ ,可以很容易由式(3.16)计算聚变功率密度,此处为了方便,我们将这一公式复述如下:

$$S_f = E_f n_1 n_2 \langle\sigma v\rangle \quad (3.23)$$

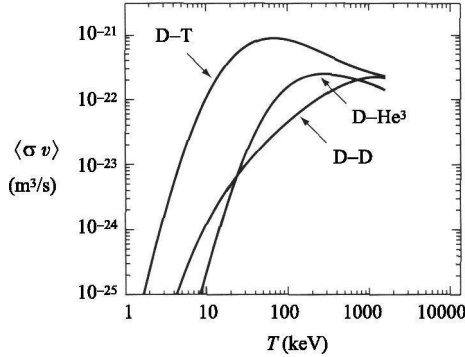


图 3.11 D-T, D- $^3\text{He}$  和 D-D 聚变反应的速度平均截面(即  $\langle\sigma v\rangle = R_{ij}/n_i n_j$ ) 与温度的函数关系

现在考虑 D-T 反应中氘氚的最佳比例问题。为此,令  $n_1 = n_D$ ,  $n_2 = n_T$ 。注意到总体电中性条件要求燃料  $n_e$  中的总电子数必须与所有正电荷的总和相等,即  $n_D + n_T = n_e$  (假设  $\alpha$  粒子很少)。定义  $k$  为氘所占的比重,由此可以写成  $n_D = kn_e$ ,  $n_T = (1-k)n_e$ ,  $n_D \cdot n_T = k(1-k)n_e^2$ 。当  $k = \frac{1}{2}$  时,有最大值  $n_D \cdot n_T = \frac{1}{4}n_e^2$ 。因此,混合燃料的最佳混合是氘氚各占一半,这样,我们就得到了聚变功率密度的最终表达式:

$$S_f = \frac{1}{4} E_f n_e^2 \langle\sigma v\rangle \quad (3.24)$$

式(3.24)反映了在聚变系统中总体功率平衡最主要的能量来源。

#### 4. 关于聚变功率产生的一些说明

值得进一步指出的是,利用低能情形下  $\sigma$  的分析模型可以得到  $\langle\sigma v\rangle$  的解析近似值。由于精确的  $\langle\sigma v\rangle$  曲线已经由图 3.11 给出,因此这一推导对于当前的讨论来说不是必要的。但读者可能对  $\langle\sigma v\rangle$  是怎么从头到尾计算出来的感兴趣。另外,这一推导过程对本章末一些习题也有帮助。由于推导过程冗长且对当前讨论的继续不必要,因此我们将它放在附录 A 中给出。

另外补充两点:第一,触发聚变反应的所需粒子能量为 70 keV 量级,这超出电

离势能的 1000 多倍,结论是燃烧的 D-T 燃料是完全电离的气体,往后称为等离子体;第二,不久我们将给出,库仑碰撞与能量平衡的要求导致最佳反应温度为 15 keV 量级,远低于  $\langle \sigma v \rangle$  曲线的 70 keV 的最大值,这说明对于库仑碰撞引起的麦克斯韦分布函数,绝大多数的聚变反应是由位于分布函数末端的粒子发生的。

## 3.5 辐射损失

### 3.5.1 辐射损失概况

影响聚变反应堆能量平衡的一种重要的能量损失机制是由辐射引起的。事实上,辐射损失有这几种类型:由杂质引起的线辐射、由粒子在磁场中运动引起的回旋辐射和库仑碰撞引起的韧致辐射。这其中致韧辐射造成的损失最大。因此这一小节我们集中讨论如何计算这些损失,这个问题在聚变堆里是不可忽略也是不可避免的。

计算采用式(3.17)给出的反应速率的一般形式。为方便起见,这里复述如下:

$$w = 2\pi \int W(v, b) f_1(v_1) f_2(v_2) v b db dv_1 dv_2 \quad (3.25)$$

回想一下,在式(3.25)中,  $W$  是每个粒子每次碰撞引起的微观改变量。在当前的情况下,  $W$  是指一次库仑碰撞中每个粒子的辐射能量损失。产生这个损失的原因是带电粒子在做加速运动时要辐射能量。一个无加速的带电粒子以一定速度直线运动,当它与另一带电粒子接近时,由于受到库仑相互作用,它将改变运动轨道。库仑碰撞使粒子从直线轨道偏转。运动轨道的改变就相当于做加速运动。在轨道偏离过程中,带电粒子会因辐射而损失一些能量。

我们先来导出  $W$  的近似表达式。一旦  $W$  已知,可以直接代入式(3.25)得到  $w$  值,即由于库仑碰撞产生的每立方米秒的辐射能量损失。换句话说,  $w = S_B$ , 其中,  $S_B$  是韧致辐射功率密度损失,单位是  $\text{W}/\text{m}^3$ 。

在实际聚变反应堆情形下,韧致辐射发射的光子在频率上是连续谱,通常在紫外区或软 X 射线区。它们被再吸收的平均自由程是很大的,这表明一旦一个光子发射出来,它就在系统中消失了。这就意味着这些损失是不可忽略且不可避免的,计算过程如下节所述。

### 3.5.2 单位粒子每次库仑碰撞的能量损失 $W$ 的计算

在聚变物理学中,库仑碰撞对于理解粒子输运、热输运和辐射损失等现象具有重要作用。输运现象由长程、多粒子、小角度偏转碰撞支配,我们将在第 9 章给予详细分析。与此相反,韧致辐射则由短程、单粒子、大角度偏转碰撞支配。这个事实

使我们可以通过设置一系列合理近似来导出辐射损失的简单表达式。这个表达式在对密度和温度的依赖关系上有正确的定标律,能半定量地给出精确的定标系数。值得进一步指出的是,产生韧致辐射的主要原因是电子和离子的碰撞。详细计算(不在此赘述)表明,同种粒子的库仑碰撞结果相互抵消,因此不存在辐射损失。

$W$  的计算需要两步。首先,计算库仑碰撞过程中的辐射功率  $P$ ;其次,近似估计发生辐射的碰撞时间  $\Delta t$ 。 $P\Delta t$  即为要得到的量  $W$ ,表示每次库仑碰撞引起的辐射损失能量。

推导过程由作加速运动的带电粒子的辐射能量公式出发。读者想必对这个来自电磁辐射理论的著名公式都很熟悉。那些对此不熟悉的读者可参看附录 B 给出的推导,其中包含了对辐射电磁场原理的简单讨论。非相对论加速电子的辐射功率公式为:

$$P = \frac{\mu_0 e^2 \dot{v}^2}{6 \pi c} \quad (\text{W}) \quad (3.26)$$

其中  $\dot{v}$  是加速度。现在的任务是把这个方程应用到图 3.12 所示的库仑碰撞中。

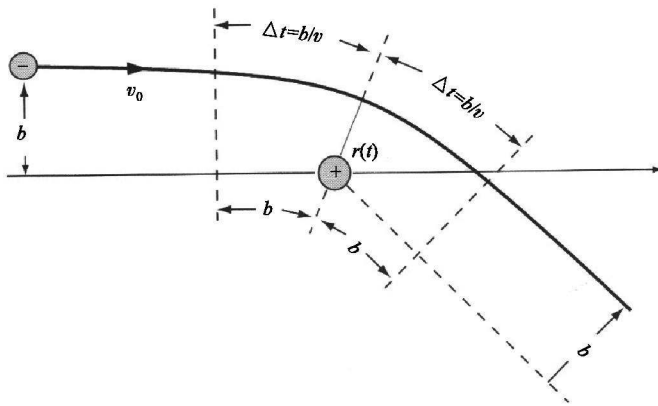


图 3.12 库仑碰撞的几何关系

在碰撞过程中,电子因受到库仑相互作用力  $F_c$  而作加速运动:

$$\dot{v} = \frac{F_c}{m_e} = \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 m_e r^2(t)} \quad (3.27)$$

其中  $Z$  是离子核电荷数。研究图 3.12 可以发现,在库仑相互作用时间内, $r(t)$  相当于原始碰撞参数  $b$ ,即  $r(t) \approx b$ 。在此近似下,

$$\dot{v} = \frac{F_c}{m_e} \approx \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 m_e b^2} \quad (3.28)$$

把式(3.28)代入  $P$  的表达式,得到:

$$P = \left[ \frac{Z^2 e^6}{96 \pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right] \frac{1}{b^4} \quad (\text{W}) \quad (3.29)$$

此处利用了  $c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$ 。

下一步是计算电子实际加速的时间间隔  $\Delta t$ 。如图 3.12 所示,库仑碰撞表明,电子在其运动方向与离子的垂直距离约为  $b$  的时候开始加速,并且一直加速到它离离子足够远,相互作用力可忽略为止。由对称性可知,离开后的这个等效距离也是  $b$ ,只是在轨道的另一边。所以当粒子以速度  $v$  运动时,碰撞时间为:

$$\Delta t \approx \frac{2b}{v} \quad (\text{s}) \quad (3.30)$$

现在可以很容易地给出  $W$  的表达式:

$$W \approx P \Delta t \approx \left[ \frac{Z^2 e^6}{48 \pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right] \frac{1}{v b^3} \quad (\text{J}) \quad (3.31)$$

这就是我们要得到的表达式。

最后,我们对电子的辐射能量与其初始动能做一比较。因为强的、大角散射碰撞的特征是电子在  $r \sim b$  位置的库仑势能与其动能为同一量级,故有:

$$\frac{W}{m_e v^2 / 2} \sim \frac{v^3}{c^3} \ll 1 \quad (3.32)$$

也就是说,电子在库仑碰撞过程中辐射的能量只占其初始动能的很小一部分。

### 3.5.3 $S_B$ 的计算

计算的下一步是把  $W$  的表达式代入确定  $S_B$  的方程[式(3.25)]并算出积分。考虑到离子的质量远大于电子,因此计算过程可以简化。也就是说,在相同温度下:①离子运动比电子慢得多;②在一次碰撞过程中离子轨道的扰动可以忽略不计。因此,如果用下标“1”表示电子,下标“2”表示离子,那么粒子的相对速度  $\mathbf{v} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i| \approx |\mathbf{v}_e|$  是一个很好的近似。这一近似将有关离子的项从积分的被积函数中分离开来。对离子速度进行积分,得到:

$$\int f_i(\mathbf{v}_i) d\mathbf{v}_i = n_i \quad (3.33)$$

对于剩下的电子积分,我们可以再次简化,这是因为相对速度仅取决于  $\mathbf{v}_e$ 。为此引入标准球坐标系下的速度变量。由于被积函数中所有的量都不依赖于角变量,因此三维速度积分可退化为一维积分。具体说就是:



$$dv_e = dv_x dv_y dv_z = v^2 \sin\theta dv d\theta d\phi = 4\pi v^2 dv \quad (3.34)$$

其中对  $\theta$  和  $\phi$  的积分得到因子  $4\pi$ 。在此简化下,同时代入电子的麦克斯韦分布函数,  $S_B$  的表达[式(3.25)]可以简化为:

$$S_B = 8\pi^2 n_i n_e \left[ \frac{Z^2 e^6}{48\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right] \left[ \frac{m_e}{2\pi T_e} \right]^{3/2} \int \frac{v^2 e^{-m_e v^2/2T_e}}{b^2} dv db \quad (3.35)$$

现在考虑对碰撞参数  $b$  的积分。乍一看,似乎是要对所有的  $b$  积分 ( $0 < b < \infty$ ), 这将导致积分发散。发散是因为小的  $b$  值对应于强的大角度碰撞。困难在于,随着  $b$  越来越小,公式中隐含的发射频率连续性假设将不再成立,因此辐射功率  $P$  公式不再有效。这时量子力学效应开始变得重要,辐射只在一些分立的量子化频率出现。也就是说,在小的  $b$  值,辐射功率接近一个有限的常量而不是无限的。量子转变的一个简单的近似是把  $b$  的下限从  $b = 0$  改成  $b = b_{\min}$ , 这里  $b_{\min}$  对应于量子力学效应开始显现的转变碰撞参数。转变在碰撞参数变得小到量子力学不确定性原理开始起作用时发生。要避免这个问题相当于要求  $\Delta x \Delta p \geq h/2\pi$ 。如果令  $\Delta x \longrightarrow b, \Delta p \longrightarrow m_e v$ , 于是有:

$$b_{\min} \approx \frac{h}{2\pi m_e v} \quad (3.36)$$

注意:对应于 1 keV 的电子速度,  $b_{\min}$  比原子直径还小,即  $b_{\min}(1 \text{ keV}) = 6 \times 10^{-12} \text{ m} < 10^{-10} \text{ m}$ 。现在可以直接对  $b$  积分了:

$$\int_{b_{\min}}^{\infty} \frac{db}{b^2} = \frac{1}{b_{\min}} = \frac{2\pi m_e v}{h} \quad (3.37)$$

将此结果代入式(3.35),得到简单的速度积分,由此很容易得到下面的  $S_B$  表达式:

$$S_B = \left[ \frac{2^{1/2}}{6\pi^{3/2}} \right] \left[ \frac{e^6}{\epsilon_0^3 c^3 h m_e} \right] Z^2 n_i n_e T_e^{1/2} \quad (\text{W/m}^3) \quad (3.38)$$

同时考虑了库仑相互作用和量子力学效应的更精确的计算得到的  $S_B$  表达式与式(3.38)完全一样,只是系数数字有所区别。做下述代换即得到更精确的表达式:

$$\frac{2^{1/2}}{6\pi^{3/2}} \longrightarrow \frac{2^{1/2}}{3\pi^{5/2}} \quad (3.39)$$

可见只是数值上稍有不同( $0.0423 \longrightarrow 0.0269$ )。此后,凡涉及韧致辐射的计算,我们将使用这个更精确的系数。

### 3.5.4 多离子种类效应

式(3.38)表示的是电子与一种离子碰撞的韧致辐射功率。但在多数情况下,存在多种离子:氘、氚、 $\alpha$ 粒子和杂质。对各种离子情形进行简单求和即可得到总辐射功率。通常我们将 $S_B$ 的和写成含所有离子的“有效电荷” $Z_{\text{eff}}$ 的形式。 $Z_{\text{eff}}$ 的定义由体系的总体电中性条件给出:

$$\sum_j Z_j n_j = n_e \quad (3.40)$$

其中,求和是对于所有离子种类进行。利用这个关系,定义 $Z_{\text{eff}}$ 如下:

$$Z_{\text{eff}} = \frac{\sum_j Z_j^2 n_j}{\sum_j Z_j n_j} = \frac{\sum_j Z_j^2 n_j}{n_e} \quad (3.41)$$

对于纯D-T等离子体, $Z_{\text{eff}} = 1$ 。这样待求的表达式最后可以写成:

$$S_B = \left[ \frac{2^{1/2}}{3\pi^{5/2}} \right] \left[ \frac{e^6}{\epsilon_0^3 c^3 h m_e^{3/2}} \right] Z_{\text{eff}} n_e^2 T_e^{1/2} \quad (\text{W/m}^3) \quad (3.42)$$

实用单位下为:

$$\left. \begin{aligned} S_B &= C_B Z_{\text{eff}} n_{20}^2 T_k^{1/2} \quad (\text{W/m}^3) \\ C_B &= 5.35 \times 10^3 \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

我们看到,与聚变功率一样,韧致辐射随密度平方增强,但对温度的依赖关系较弱。

## 3.6 本章总结

第3章描述了聚变反应堆设计的前几步。它包含以下计算:①主要加热源和聚变功率;②重要的能量沉积和韧致辐射。这些贡献项对评估聚变堆的总体功率平衡是至关重要的。

聚变功率密度的计算需要引入核物理中的一些微观概念,包括截面、平均自由程和碰撞时间等。D-T反应堆具有最大的聚变截面,在质心动能120 keV情形下约为5 b(靶恩)。需要很大的动能来克服库仑排斥力。库仑碰撞远比聚变碰撞频繁,并使等离子体很快弛豫到麦克斯韦分布函数。将麦克斯韦分布函数和实验测量的D-T截面结合起来,使我们可以估计作为 $T$ 函数的速度平均截面 $\langle \sigma v \rangle$ 。 $\langle \sigma v \rangle$ 的最大值在 $T = 70$  keV时约为 $9 \times 10^{-22} \text{ m}^3/\text{s}$ 。把这些结果结合起来,得到50%-50%的D-T等离子体聚变功率密度的表达式:

$$S_f = \frac{1}{4} E_f n^2 \langle \sigma v \rangle \quad (\text{W/m}^3) \quad (3.44)$$

聚变等离子体最主要的辐射损失源自由电子和离子间的库仑相互作用,即所谓韧致辐射损失。这种损失的起因是电子因轨道偏转而经历加速运动。在这期间,电子由于辐射而损失能量。利用广义的反应速率方程得到下述辐射功率密度损失的表达式:

$$S_B = \left[ \frac{2^{1/2}}{3\pi^{5/2}} \right] \left[ \frac{e^6}{\epsilon_0^3 c^3 h^{3/2} m_e} \right] Z_{\text{eff}} n^2 T_e^{1/2} \quad (\text{W/m}^3) \quad (3.45)$$

聚变功率和韧致辐射损失均有  $n^2$  的定标关系。但是在聚变温度区 ( $T > 10 \text{ keV}$ ), 聚变功率随  $T$  的增加要迅速得多。

## 参考书目

第3章的内容包含聚变反应的基本原子核物理原理和关于韧致辐射的一个实例及其简单推导,这些内容早已为人们熟知。下列参考书目给出了这些内容的早期阐述,有些比本书给出的更严密更详细。哈钦森(I. H. Hutchinson)对韧致辐射的推导尤为严密和完备。

### 1. 聚变反应的原子核物理学

- Dolan, T. J. (1982). *Fusion Research*. New York: Pergamon Press.  
 Glasstone, S., and Loveberg, R. H. (1960). *Controlled Thermonuclear Reactions*. Princeton, New Jersey: Van Nostrand.  
 Gross, R. (1984). *Fusion Energy*. New York: John Wiley & Sons.  
 Kammash, T. (1975). *Fusion Reactor Physics*. Ann Arbor, Michigan: Ann Arbor Science  
 Miyamoto, K. (2001). *Fundamentals of Plasma Physics and Controlled Fusion*, revised edn. Toki City: National Institute for Fusion Science.  
 Rose, D. J., and Clark, M. (1961). *Plasmas and Controlled Fusion*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.  
 Stacey, W. M. (1981). *Fusion Plasma Analysis*. New York: John Wiley & Sons.  
 Stacey, W. M. (2005). *Fusion Plasma Physics*. Weinheim: Wiley-VCH.  
 Wesson, J. (2004). *Tokamaks*, third edn. Oxford: Oxford University Press.

### 2. 韧致辐射

- Dolan, T. J. (1982). *Fusion Research*. New York: Pergamon Press.  
 Glasstone, S. and Loveberg, R. H. (1960). *Controlled Thermonuclear Reactions*. Princeton, New Jersey: Van Nostrand.  
 Hutchinson, I. H. (1987). *Principles of Plasma Diagnostics*. Cambridge, England: Cambridge University Press.  
 Rose, D. J. and Clark, M. (1961). *Plasmas and Controlled Fusion*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.  
 Wesson, J. (2004). *Tokamaks*, third edn. Oxford: Oxford University Press.

## 习 题

3.1 比较不同分布函数下 D-T 聚变的反应速率。作为参考,这里给出在 D-T 同温度麦克斯韦分布下的  $\langle \sigma v \rangle$  的解析近似关系(见 Hively H M. Convenient computational forms for Maxwellian reactivities. Nuclear Fusion, 1977, 17:873):

$$\langle \sigma v \rangle = 10^{-6} \exp \left[ \frac{a_{-1}}{T_i^\alpha} + a_0 + a_1 T_i + a_2 T_i^2 + a_3 T_i^3 + a_4 T_i^4 \right] \quad (\text{m}^3/\text{s})$$

其中  $T_i = T_i$  (keV), 并且有下表:

$\alpha$	$a_{-1}$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
0.2935	-21.38	-25.20	$-7.101 \times 10^{-2}$	$1.938 \times 10^{-4}$	$4.925 \times 10^{-6}$	$-3.984 \times 10^{-8}$

① 假设  $f_T(\mathbf{v}) = n_T \delta(\mathbf{v})$ ,  $f_D(\mathbf{v})$  是麦克斯韦分布, 对于  $T = 5 \text{ keV}, 10 \text{ keV}, 15 \text{ keV}, 20 \text{ keV}$  等几种情形, 计算  $\langle \sigma v \rangle$ , 并与二者都是麦克斯韦分布的结果进行比较。

② 假设  $f_T(\mathbf{v}) = n_T \delta(\mathbf{v})$ ,  $f_D(\mathbf{v}) = n_D \delta(\mathbf{v} - v_0 \mathbf{e}_x)$ 。选取  $v_0$  为  $m_D v_0^2/2 = 3T/2$ , 对于以下情况:  $T = 5 \text{ keV}, 10 \text{ keV}, 15 \text{ keV}, 20 \text{ keV}$ , 计算  $\langle \sigma v \rangle$ 。并与二者都是麦克斯韦分布的结果进行比较。说明束分布函数对聚变是较好还是较劣? 并解释理由。

3.2 在给定的压强下, 通过最大化  $\alpha$  粒子的功率密度来确定最佳运行温度  $T_{pp}$  (keV)。得到表达式  $S_\alpha = C_{pp} p^2$ , 其中,  $S_\alpha$  的单位是瓦特每立方米 ( $\text{W}/\text{m}^3$ ),  $p$  是大气压。现在考虑密度和压强均为常量的情形。利用习题 3.1 给出的  $\langle \sigma v \rangle$  的表达式, 确定最佳温度  $T_m$ , 使得在给定的  $n$  时最大化  $S_\alpha$ , 并计算相应的  $S_\alpha$  值  $S_\alpha = K_m n^2 = K_m (p/2T_n)^2 = C_m p^2$ 。对乘积  $np$  为常量的情形重复这一计算, 相应的  $S_\alpha = K_m n p = K_m p^2/2n = C_m p^2$ 。比较  $C_m, C_{np}$  和  $C_{pp}$  的值。应当指出, 通常保持压强不变在物理上是最有意义的。但在某些情况下, 其他的选择也是可能的。尽管如此, 压强总是受到宏观不稳定性的制约, 这就是为什么通常总是将  $S_\alpha$  写成  $S_\alpha = C p^2$ 。

3.3 本题研究等离子体分布对  $\alpha$  功率密度的影响。目的是要通过对所有物理量进行一维模型下的体积平均来得到关于这些平均值的零维模型, 其中, 密度和温度均为仅随空间位置变化的已知分布。具体来说就是, 对于圆截面的等离子体, 体平均的  $\alpha$  功率密度定义为:

$$\bar{S}_\alpha = \frac{2}{a^2} \int_0^a \left[ \frac{E_\alpha}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle \right] r dr$$

现在假设密度和温度由下式给出:

$$n = (1 + v_n) \bar{n} (1 - r^2/a^2)^{v_n}$$

$$T = (1 + v_T) \bar{T} (1 - r^2/a^2)^{v_T}$$

其中,  $\bar{n}$  和  $\bar{T}$  分别是体平均密度和温度。为了定量确定温度对  $\alpha$  功率密度的影响, 利用习题 3.1 中的  $\langle \sigma v \rangle$ , 估计在  $v_n = 0$  和  $0 \leq v_n \leq 4$  时的  $\bar{S}_\alpha$ 。对每一个  $v_T$ , 求出最佳  $\bar{T}$  值, 使得在给定的平均压强  $\bar{p} = 2[(1 + v_n)(1 + v_T)/(1 + v_n + v_T)] \bar{n} \bar{T}$  = 常量下,  $\bar{S}_\alpha$  达到最大化。画出最佳  $\bar{T}$  (keV) 和相应的  $\bar{S}_\alpha/\bar{p}^2 \equiv C_p$  关于  $v_T$  的函数图像, 参考点取零维极限  $v_n = v_T = 0$ 。为了确定  $\bar{S}_\alpha$  随密度的变化, 对于  $v_T = 2$  和  $0 \leq v_n \leq 4$  情形重复上面的计算。说明峰值分布对于最大化  $\bar{S}_\alpha$  是好, 是坏, 还是无关紧要?

# 第 4 章 聚变反应堆功率平衡

## 4.1 引言

根据第 3 章导出的结果,现在我们可以将所有对聚变反应堆总体功率平衡有贡献的源和汇集合在一起。第 4 章描述这种功率平衡模型的建立和分析。我们的目标是要确定对压强、密度、温度以及对 D-T 燃料的能量约束的定量要求,以便使反应堆达到有利的总体功率平衡,即  $P_{out} \gg P_{in}$ 。

显然,在确定磁约束聚变作为电力来源的可行性方面,功率平衡分析决定了初始聚变反应的难易。具体来说,要产生一定程度上稳态的聚变功率,需要在开始时或不间断地由外部提供多少动力?相对于输出功率,所需的输入功率必须足够低才能保证有大的净功率输出——这是一个动力反应堆的基本要求。

第 4 章讨论的磁约束聚变反应堆的基本功率平衡涉及对流体动力学零维形式能量守恒律的分析。本章的主题是给出零维能量方程的一般推导过程,接下来是对零维模型的详细分析,由此导出关于压强、温度、密度和实现良好功率平衡时能量约束所必须满足的定量条件。功率平衡约束的知识为第 5 章开发简单磁约束聚变反应堆的设计提供了必要的准备。

## 4.2 零维能量守恒关系

本书用来解释聚变等离子体物理行为的方法是基于三维流体模型分析,包括质量、动量和能量的守恒以及麦克斯韦方程组。这些方程构成了一组非线性、耦合的偏微分方程,而且流体方程要求每个不同的种类(如电子、离子、 $\alpha$  粒子等)单独有一套方程组,因此情形变得更加复杂。此外,对某些聚变现象的准确描述还需要用到确定实际粒子分布函数这样更复杂的微观物理知识。当然,微观等离子体物理学已经超出了本书的范围。但即便如此,完整的三维流体模型的复杂性足以对一个人的数学技能构成挑战。

就聚变能介绍来说,我们只需要简单模型就够了,由此给出对聚变反应堆总体功率平衡的概述。这个简单模型就是零维的能量守恒律。该模型的概述有助于我们掌握聚变所需的压强、温度、密度和能量约束等参数区间。

零维模型是通过完整的三维流体方程进行下述一系列简化和近似而得到的。首先,我们假定燃料由 50% -50% 的 DT 混合物组成,  $\alpha$  粒子的含量小到可以忽略不计,这意味着  $2n_D = 2n_T = n_e \equiv n$ ,  $n_\alpha \ll n$ , 这里  $n_j$  是第  $j$  种粒子的数密度;第二,假设每种燃料成分均有同一温度,即  $T_D = T_T = T_e \equiv T$ , 请注意,虽然  $\alpha$  粒子的数密度小,但其能量密度 ( $n_\alpha E_\alpha$ ) 通常并不小,因为  $E_\alpha \gg T$ ;第三,假定燃料处于接近热力学平衡的完全电离的气态等离子体状态,有相应的麦克斯韦分布函数,在这一假定下,等离子体内部能量密度以及相应的每个成分  $j$  的粒子压强分别由  $U_j = (3/2) n_j T_j$  和  $p_j = n_j T_j$  给定。这样,燃料的内部总能量密度和压强很容易计算出来:  $U = U_D + U_T + U_e = 3n T$ ,  $p = p_D + p_T + p_e = 2n T$ 。注意,  $U = (3/2)p$ 。这些假设在聚变反应堆里是充分满足的,并可复杂的多成分模型简化为单一成分的模型。

经过这些简化,我们现在可以写出著名的流体力学能量守恒关系。这一关系有几种标准形式,下面给出的是一种我们目前用起来比较方便的形式:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{3}{2} \nabla \cdot p \mathbf{v} + p \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{q} = S \quad (4.1)$$

这个方程的解释如下:对于实验室参照系下的一个小的固定体积,第一项代表该体积内的内部能量密度的时间变化率;第二项描述因对流引起的流出该体积的能量密度净通量;第三项表示由于流体膨胀引起的能量密度损失(相当于热力学中我们熟悉的“ $p dV$ ”项);第四项代表由于扩散引起的能量密度损失。最常见的扩散过程是热传导  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ 。最后一项  $S$  描述不同的功率密度的源和汇对能源平衡的贡献。重要的有下面这 3 项:

$$S = S_f - S_B + S_h \quad (4.2)$$

其中,  $S_f$  是核反应产生的聚变加热功率密度;  $S_B$  是单位体积内韧致辐射引起的辐射损失;  $S_h$  是供给系统的外部加热功率密度(例如,欧姆加热功率或外部射频加热功率等)。此外,必须提醒的是,对  $S_f$  的评估依具体情况而定,例如,  $\alpha$  粒子功率和中子功率都会对聚变反应堆的功率平衡有影响。关于这一点我们在本章后面再作进一步讨论。

就目前的讨论内容而言,各源项都是已知的。现在我们来推导零维功率平衡关系。对式(4.1)进行整个等离子体体积积分,然后除以等离子体体积  $V$ 。于是得到零维功率平衡关系:

$$\frac{1}{V} \int \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot p \mathbf{v} \right) + p \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{q} - S \right] d\mathbf{r} = 0 \quad (4.3)$$

本章其余部分的重点是简化和分析这个重要方程。

### 4.3 磁约束聚变的一般功率平衡关系

对功率平衡的考查如下。首先,通过对一般零维功率平衡关系的简化,导出直接适用于磁约束聚变反应堆的一个明确形式。其次,对等离子体本身内部的功率平衡进行考查。具体来说就是要确定实现等离子体自持的稳态平衡条件。第三,研究总体功率。一旦等离子体处于稳定的平衡状态,我们就需要考虑如何保证反应堆的总发电量大大超过维持这个反应堆所需的电力投入。第四,也是最后一个课题是:等离子体的动力学行为。这里有两个重要问题:热稳定性和达到稳态所需的最小外部功率。首先,对于热稳定性,我们假定所需的稳态反应堆的运行参数已经达到。重要的是要证明这个工作点是稳定的,能够避免热损失。其次是最低外部加热功率问题,即使是对于完全点燃的、在稳态运行时已不需要这种外部功率的反应堆,也还是有这个问题。因为在启动的瞬态阶段,我们需要通过外部加热功率将等离子体从最初的低温状态加热到理想的点火温度。这种功率对反应堆稳态运行的成本没有影响,但它影响到总的资本投入。由这些动态现象导致的每一种相应的约束对反应堆的设计都具有重要影响。

### 4.4 稳态零维功率平衡

首先我们从一般的零维等离子体的功率平衡关系开始分析,为方便起见,将这一关系复述如下:

$$\frac{1}{V} \int \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot p \mathbf{v} \right) + p \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{q} - S \right] d\mathbf{r} = 0 \quad (4.4)$$

现在引入几项近似,由此可将式(4.4)简化为简单得多的形式。首先,磁约束聚变反应堆几乎可以肯定是一个能流损失很小或可忽略不计的稳态系统,因此时间导数项为零,对流和压缩项可以忽略不计。

下一步简化涉及源项,我们来考虑对聚变功率有贡献的各项。由于式(4.4)适用于等离子体,因此,只有 $\alpha$ 粒子能量应包括在内。 $\alpha$ 粒子是带电粒子,受到磁场的约束,因此仍留在等离子体中并提供热源。中子不带电,从而逃逸出等离子体。它们是包层里的主要热源,并最终以电的形式输出。即便如此,由于它们在等离子体中不受约束,因此对等离子体内部的功率平衡没有贡献。结论是,对聚变功率的贡献变为 $S_f \rightarrow S_\alpha$ ,其中,

$$S_\alpha = \frac{1}{4} E_\alpha n^2 \langle \sigma v \rangle \quad (4.5)$$

其中,  $E_\alpha = 3.5 \text{ MeV}$ 。此外我们还假定所有成分的温度都相等, 燃料是 50% -50% 的 D 和 T 的混合物, 二者的密度均为  $n/2$ 。因此, 我们可以将  $S_\alpha$  写成  $S_\alpha = S_\alpha(n, T)$ 。从物理上说, 将  $S_\alpha$  写成  $S_\alpha = S_\alpha(p, T)$  更有意义。理由是人们往往误以为在实验上通过简单地向系统内注入更多的气体就能够提高  $n$ 。实际上这不是非常有用, 因为密度的提高会造成一定程度的温度下降, 从而减少了聚变反应的次数。这说明起基本作用的不是数密度, 而是能量密度, 而后者正比于压强。在  $S_\alpha$  的表达式里, 对功率平衡有贡献的所有其他各项处理如下: 量  $p$  和  $T$  被视为基本变量。我们知道, 总压强  $p = 2nT$ , 因此可将  $S_\alpha$  改写为:

$$S_\alpha = \frac{1}{16} E_\alpha p^2 \frac{\langle \sigma v \rangle}{T^2} \quad (4.6)$$

下一项要考虑的源项是韧致辐射。其贡献很容易用  $p$  和  $T$  来表达:

$$S_B = C_B Z_{\text{eff}} n^2 T^{1/2} = \frac{1}{4} C_B Z_{\text{eff}} \frac{p^2}{T^{3/2}} \quad (4.7)$$

为简单起见, 假设等离子体的纯度很高, 这意味着  $Z_{\text{eff}} = 1$ 。

对  $S$  有贡献的最后一项是外部加热项, 一般包括欧姆加热和微波加热这样的辅助加热。欧姆加热项是温度、电流和几何尺寸的函数。在稳态聚变功率生产阶段, 这一项的贡献为零, 原因是欧姆等离子体电流是变压器的次级电流, 物理上不可能存在直流变压器。欧姆加热的功率只在最初的瞬态有影响。另一方面, 辅助加热功率则在瞬态和稳态均起作用。它是主要的外部加热功率源, 而且我们假定它在等离子体中的沉积分布是已知的, 独立于  $p$  和  $T$ 。因此, 加热功率可以写为:

$$S_h = S_h(\mathbf{r}, t) \quad (4.8)$$

除了热通量待定之外, 所有各项现在都已经确定。我们暂时撇开热通量, 它是未来对等离子体体积进行积分时要解决的问题。由于不知道  $p$  和  $T$  的分布, 因此我们必须采取一种可能的近似方法。具体做法如下: 一般来说, 压强和温度的分布呈单调递减但始终为正(即没有负值区域, 否则积分时将导致相互抵消), 因此, 定性和半定量的近似是假设  $p$  和  $T$  的整个分布是一常数, 大小等于其平均值。正是这种近似将多维模型转换成有用的零维模型。均匀分布的假设简化了一般积分的贡献如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{V} \int G(p, T) \, d\mathbf{r} &\approx \frac{1}{V} \int G(\bar{p}, \bar{T}) \, d\mathbf{r} = G[\bar{p}(t), \bar{T}(t)] \\ \frac{1}{V} \int S(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{r} &= \bar{S}(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

其中量  $\bar{p}, \bar{T}, \bar{S}$  分别是对空间的平均值。为方便起见, 下面叙述中我们将省略掉字符头上的横线“ $-$ ”。



在这一假设下,零维功率平衡关系简化为:

$$\left[ \frac{E_\alpha}{16} \right] p^2 \frac{\langle \sigma v \rangle}{T^2} - \left[ \frac{C_B}{4} \right] \frac{p^2}{T^{3/2}} + S_h - \frac{1}{V} \int_A \mathbf{q} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (4.10)$$

这一项里包括了热通量,它是由散度定理得到的,面积分是对等离子体表面积进行。推导中的最后一步就是简化这一项。作为一个说明性的例子,我们来考虑一个半径为  $a$  的圆截面等离子体柱,其中热通量由傅里叶定律给定,即  $\mathbf{q} = -\sqrt{\kappa} \nabla T$ , 其中  $\kappa$  是导热率。根据这一假设,热通量对式(4.10)的贡献简化为:

$$\frac{1}{V} \int_A \mathbf{q} \cdot d\mathbf{A} = -2 \left. \frac{\kappa}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (4.11)$$

为了评估这一项,我们需要知道等离子体边缘区的温度梯度。这里均匀分布假设显然是行不通的。同样复杂的还有,聚变等离子体的  $\kappa$  不是精确已知的。聚变等离子体的热导率通常明显高于经典碰撞理论的计算值。原因是大多数情形下等离子体呈现为各种小尺度的湍流,这种湍流导致运输系数变得异常大。聚变研究中通常是通过定义一个零维的能量约束时间  $\tau_E$  来绕过这个问题,这对一般几何是有效的,具体处理如下:

$$\frac{1}{V} \int_A \mathbf{q} \cdot d\mathbf{A} \equiv \frac{3}{2} \frac{p}{\tau_E} \quad (4.12)$$

其中,量  $\tau_E$  代表着等离子体能量由于热传导下降到  $e^{-1}$  的弛豫时间。在实践中它是通过对不同装置上等离子体放电的大型实验数据库数据进行回归分析后确定的。就眼下目的而言,我们可以假设  $\tau_E$  是已知量。请注意,一般来说,  $\tau_E = \tau_E(p, T)$ 。但现在我们将  $\tau_E$  看成独立于  $p$  和  $T$ , 主要是为了简化分析。这一假设将在讨论过等离子体输运现象以后的章节里再行放宽。

将  $\tau_E$  代入简化后的热通量贡献项的表达式里,即得到要求的磁约束聚变反应堆的零维稳态功率平衡关系:

$$\left. \begin{aligned} S_\alpha + S_h &= S_B + S_\kappa \\ \left[ \frac{E_\alpha}{16} \right] p^2 \frac{\langle \sigma v \rangle}{T^2} + S_h &= \left[ \frac{C_B}{4} \right] \frac{p^2}{T^{3/2}} + \frac{3}{2} \frac{p}{\tau_E} \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

现在的目标是分析这个公式,以便确定取得所需功率平衡的  $p, T$  和  $\tau_E$  的条件。

## 4.5 等离子体内的功率平衡

我们感兴趣的第一个问题是如何确定维持等离子体稳态功率平衡的条件。就

目前而言,我们暂不关心反应堆的整体功率平衡。这里有两个相关的子问题,第一个称为“理想点火条件”,它将设定等离子体工作温度的下限;第二个子问题简称为“点火条件”,由此得到在更实际的条件下实现等离子体稳态平衡所需的对  $p$ ,  $\tau_E$  和  $T$  的约束。

#### 4.5.1 理想点火条件

理想点火条件相当于在不考虑热传导损失,也没有外部加热情形下等离子体达到稳态功率平衡的条件。换句话说,聚变产生的  $\alpha$  功率必须大到足以克服不可避免的韧辐射损失:

$$S_\alpha = S_B \quad (4.14)$$

代入  $S_\alpha$  和  $S_B$  的表达式,即得到待求的条件。这个条件只与等离子体温度有关,对  $p$  的依赖关系相互抵消了:

$$\frac{\langle \sigma v \rangle}{T_k^{1/2}} = \frac{4C_B}{E_\alpha} = 3.8 \times 10^{-24} \left[ \frac{\text{m}^3/\text{s}}{\text{keV}^{1/2}} \right] \quad (4.15)$$

这一关系如图 4.1 所示,我们看到,满足理想点火条件的等离子体的温度必须满足

$$T \geq 4.4 \quad (\text{keV}) \quad (4.16)$$

式(4.16)设定了磁约束聚变反应堆等离子体温度的下限。对于 D-D 反应,相应的温度值要高得多,约为 30 keV。还应注意到,一旦温度超出理想点火条件, $\alpha$  功率的增速将远远大于韧致辐射损失的速度。例如,在  $T = 10$  keV 时,对 D-T 反应,有  $S_\alpha/S_B \approx 8$ 。

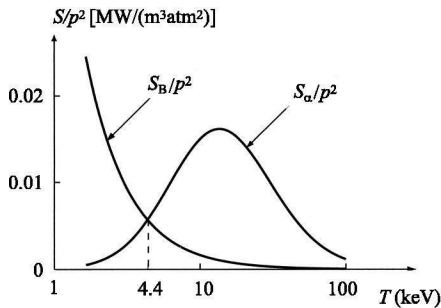


图 4.1  $\alpha$  加热功率和韧致辐射作为温度的函数,交汇点相当于理想点火条件

#### 4.5.2 点火条件

点火条件代表一种更为现实的功率平衡状况。这里假定,在稳态时  $\alpha$  加热功率大到足以平衡韧致辐射损失和热传导损失,因而无需外部加热功率:

$$S_{\alpha} = S_B + S_{\kappa} \quad (4.17)$$

显然,这是一种非常理想的功率平衡的目标,因为一旦等离子体点火成功,无需外部功率来维持,等离子体就可实现所需的稳态聚变功率输出。式(4.17)为  $p, T$  和  $\tau_E$  设置了极限。要定量确定这些极限值,我们不妨用实用单位将各种功率密度表示如下:

$$\left. \begin{aligned} S_{\alpha} &= \frac{E_{\alpha}}{16} \frac{\langle \sigma v \rangle}{T^2} p^2 = K_{\alpha} \frac{\langle \sigma v \rangle}{T_k^2} p^2 \quad (\text{MW}/\text{m}^3) \\ S_B &= \frac{C_B}{4} \frac{p^2}{T^{3/2}} = K_B \frac{p^2}{T_k^{3/2}} \quad (\text{MW}/\text{m}^3) \\ S_{\kappa} &= \frac{3}{2} \frac{p}{\tau_E} = K_{\kappa} \frac{p}{\tau_E} \quad (\text{MW}/\text{m}^3) \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

其中,  $K_{\alpha} = 1.37; K_B = 0.052; K_{\kappa} = 0.15$ 。各物理量的单位分别为  $T_k$  (keV),  $\tau_E$  (s),  $\langle \sigma v \rangle$  ( $10^{-22} \text{ m}^3/\text{s}$ ),  $p$  ( $10^5 \text{ Pa}$ )。压强单位这么选择是因为  $10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar} \approx 1$  个大气压。因此,  $p$  的数值应能够提供读者一些物理上的直观感受。

将这些功率密度定义代入点火功率平衡条件,经过简单的代数运算即可得到作为  $T$  的函数的  $p \tau_E$  乘积条件:

$$p \tau_E \geq \frac{K_{\kappa} T_k^2}{K_{\alpha} \langle \sigma v \rangle - K_B T_k^{1/2}} \approx K_1 \frac{T_k^2}{\langle \sigma v \rangle} \quad (\text{atm s}) \quad (4.19)$$

量  $p \tau_E = 2T(n \tau_E)$ , 其中  $n \tau_E$  是著名的劳森参数。在我们感兴趣的参数区间忽略韧致辐射损失的假定下,即可得到这一近似。在这种情况下,  $K_1 = K_{\kappa}/K_{\alpha} = 0.11$ 。

式(4.19)的准确形式和近似形式的曲线如图4.2所示。我们看到,为使  $p \tau_E$  为正,  $T$  必须大于理想点火温度。更重要的是,  $p \tau_E$  必须大于某个最小值,点火才可能发生。  $T$  的最小值和相应的  $p \tau_E$  值为:

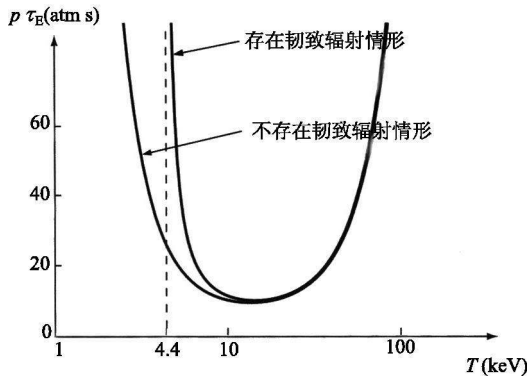


图4.2 点火条件中作为温度函数的临界  $p \tau_E$  值

$$\left. \begin{aligned} T_{\min} &= 15 \quad (\text{keV}) \\ (p\tau_E)_{\min} &= 8.3 \quad (\text{atm s}) \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

对于  $p\tau_E < (p\tau_E)_{\min}$ , 点火是不可能的; 对于  $p\tau_E > (p\tau_E)_{\min}$ , 可能存在两个解, 它们分别对应于两种不同的温度, 稍后我们再来讨论这两个解的意义, 它们与系统的热稳定性有关。请注意, 对于 15 keV 的等离子体, 点火条件要求能量约束时间为 1 s, 压强约为 8 个大气压。也就是说, 这样才能通过聚变  $\alpha$  粒子的自我加热来维持。

存在最小的  $p\tau_E$  值这一点具有非常重要的实际意义。一般来说,  $p$  或  $\tau_E$  的增加要求要么是装置体积增大, 要么是磁场增强, 两者都导致反应堆成本的上升。因此, 满足式 (4.20) 的难易程度对区分各种磁约束聚变位形 (如托卡马克、仿星器等) 具有重要意义。

最后一个问题, 我们来考虑非零外部加热源在等离子体功率平衡上的作用。在两种情况下外部加热功率是必需的。首先, 在现有的 D-T 燃烧聚变装置上,  $p\tau_E$  判据无法满足, 因为这些装置要不就是尺寸太小, 要不就是磁场太弱。在这种情况下, 必须要用额外的外部加热功率才能弥补等离子体的热传导损失。其次, 即使是大的、反应堆规模的装置, 外加功率很可能也是需要的, 原因是许多磁约束聚变装置需要有环向电流来维持等离子体平衡。在稳态运行时, 这种电流是直接由中性束或微波功率等外部功率源来驱动的。驱动这种电流的必不可少的功率也对加热功率有贡献, 并由此设定了  $S_h$  的下限。

外部加热功率对于反应堆的整体功率平衡是非常重要的。当  $S_h > 0$  时, 等离子体处于亚点火状态。这时反应堆成为功率放大器, 其增益 (定义为  $P_{\text{out}}/P_{\text{in}}$ ) 是衡量装置性能的关键。使用外部功率源既有有利的一面, 也有不利的一面。有利的是外部功率的投入降低了对  $p\tau_E$  的要求, 这时较小的  $\alpha$  功率就可以维持等离子体。缺点是过大的外部功率降低了反应堆的总增益。作为一个极端的例子, 我们来考虑一个完全由外部功率来加热的装置, 这时仅需  $p\tau_E = 0$ 。它可以维持低温等离子体, 但生产的聚变功率为零。外部加热功率的定量影响将在下文要谈的等离子体功率平衡情形下讨论, 至于反应堆整体功率平衡的情形, 则放在下一小节进行讨论。

等离子体功率平衡的处理采用如下做法: 假设需要一定量的外部加热功率, 但这里不针对任何特定的应用。我们的目标是要确定这一功率对维持等离子体稳态平衡所需的最小  $p\tau_E$  值的影响, 以及相应的增益降低。引入外部加热功率的一种方便的做法是假设  $\alpha$  功率只提供了总加热功率的一小部分  $f_\alpha$ :

$$f_\alpha \equiv \frac{S_\alpha}{S_\alpha + S_h} \quad (4.21)$$

可见  $f_\alpha = 1$  相当于点火;  $f_\alpha = 1/2$  相当于  $\alpha$  功率和外加功率各占一半;  $f_\alpha = 0$  相当于

$\alpha$  功率为零。

下一步,我们很容易用  $S_\alpha$  和  $f_\alpha$  来表示  $S_h$ :

$$S_h = \frac{1 - f_\alpha}{f_\alpha} S_\alpha \quad (4.22)$$

将这一关系代入全稳态功率平衡关系:

$$S_\alpha + S_h = S_k + S_B \quad (4.23)$$

适当计算后即得到修正后的  $p\tau_E$  条件:

$$p\tau_E \geq \frac{K_\kappa T_k^2}{(1/f_\alpha) K_\alpha \langle \sigma v \rangle - K_B T_k^{1/2}} \approx f_\alpha K_1 \frac{T_k^2}{\langle \sigma v \rangle} \quad (\text{atm s}) \quad (4.24)$$

正如所料,外部加热的投入降低了对维持等离子体所需的  $\alpha$  加热的要求。具体来说就是稳态功率平衡的最小  $p\tau_E$  值减小了一个  $f_\alpha$  因子。即使如此,这也只能算是喜忧参半,因为过多的外部加热功率对反应堆的整体功率平衡将产生不利影响。下面我们就来讨论这个问题。

## 4.6 反应堆功率平衡

假设  $\alpha$  加热功率和外部加热功率组合能在约 15 keV 的温度水平上维持等离子体的稳态平衡。于是问题的关键变成计算输出功率与输入功率的比值(即增益),以确定在何种条件下这种动力反应堆确实是有意义的。为了解决这个问题,我们先引入两个无量纲“增益参数”。聚变界广泛采用的第一个参数  $Q$  主要是基于物理学的考虑;第二个参数  $Q_E$  更为实际,它试图以简单的方式将工程上的一些基本限制也包括进来。分析的目标是要确定在  $p\tau_E$  小于点火值的情形下,  $Q$  和  $Q_E$  对  $p\tau_E$  值的依赖关系。

### 4.6.1 物理增益因子 $Q$

首先,我们根据各种功率密度的源和汇来仔细定义  $Q$ 。经过简单的代数运算,我们可以将  $Q$  定义成  $Q = Q(p\tau_E, T)$ 。

物理增益因子  $Q$  的定义如下:

$$Q = \frac{\text{净热功率输出}}{\text{加热功率输入}} = \frac{\text{总热功率输出} - \text{加热功率输入}}{\text{加热功率输入}} = \frac{P_{\text{out}} - P_{\text{in}}}{P_{\text{in}}} \quad (4.25)$$

这样定义的用意如下:根本上说,反应堆电力是由等离子体的总热能产生的。从热功率输出的净增益来说,总的热功率输出必须超过维持等离子体所需的加热功率输入。因此,在没有聚变反应发生的极限情形下,所有输入的热功率都转换为热传导

和辐射功率等形式损失掉了,也就是说, $P_{\text{out}} = P_{\text{in}}$ ,故  $Q = 0$ 。在相对应的充分燃烧的另一个极端,则无需外部加热功率来维持等离子体( $P_{\text{in}} = 0$ ),因为这个任务交由  $\alpha$  粒子去完成了。在此极限情形下, $Q = \infty$ 。结论是,利用式(4.25)给出的  $Q$  的定义,稳态动力反应堆的范围规定为  $0 < Q < \infty$ 。

将对总的热功率输出和加热功率输入有适当贡献的各项代入式(4.25),我们可以推导出物理增益因子  $Q = Q(p, \tau_E, T)$  的一种更简单明确的形式。首先,注意到输入功率为  $P_{\text{in}} = S_h V$ ,其中  $V$  是等离子体体积。等离子体必须不断吸收这种外部功率,才能持续加热到合适的温度,而且也正是靠这种外部功率才能驱动所需的稳态环向电流。

接下来考虑总的输出热功率。这里必须确切包括哪些贡献项呢?要回答这个问题,我们不妨再对聚变反应堆进行考察。反应堆输出的电力是由热转换系统(例如,热交换器-汽轮机系统)先将等离子体产生的热量转换成蒸汽,然后再进行发电,如图4.3所示。从物理学的观点来看,总的热输出功率应包括所有离开等离子体并可用于热转换的热源。这种热源有三个。首先,从等离子体里逃逸出来的14.1 MeV的聚变中子是主要热源。这种热通过周围的包层转换成蒸汽。其次是逃逸出等离子体的韧致辐射,它的热沉积在第一壁。为了防止辐射引起第一壁材料熔化,必须对壁进行冷却。冷却液带走的热量也可以转换为蒸汽。第三,等离子体能量不断通过热传导传递到第一壁。这里同样是采用第一壁冷却剂对壁进行冷却以防止

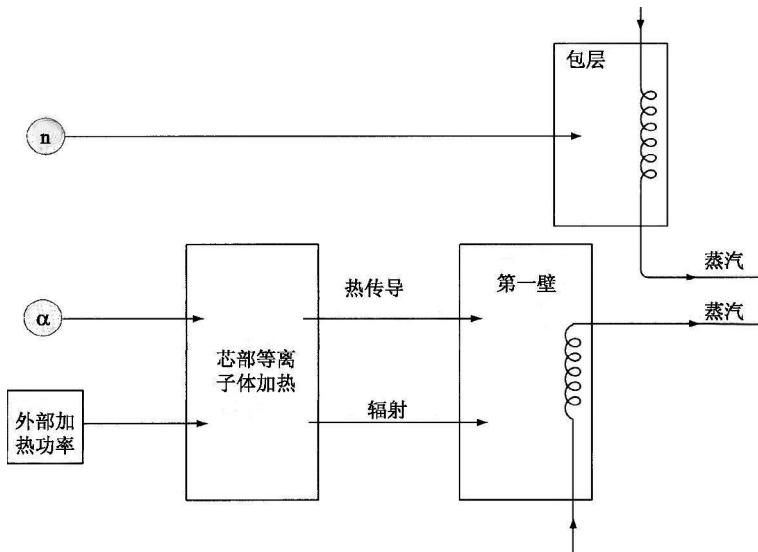


图4.3 聚变反应堆中能流示意图

(图中显示了聚变中子、聚变  $\alpha$  粒子和外部加热功率等输入源最终是如何转化为发电用蒸汽的)

壁材料熔化,因此这些热也转换成蒸汽。至于  $\alpha$  粒子,假定它们扩散出等离子体之前已将热量传递给等离子体,因此它们的能量不能直接用于进行外部加热。 $\alpha$  粒子功率只能间接对等离子体加热。它最终是以辐射和热传导形式出现。类似讨论也适用于外部加热功率。

基于这一推理,输出功率可写为  $P_{\text{out}} = (S_n + S_B + S_\kappa)V$ , 其中,  $S_n = (E_n/E_\alpha)S_\alpha = 4S_\alpha$ 。将这些结果综合起来即得到如下  $Q$  的定义:

$$Q = \frac{4S_\alpha + S_B + S_\kappa - S_h}{S_h} \quad (4.26)$$

将从式(4.23)得到的  $S_h$  代入式(4.26),即可得到  $Q$  的简化形式:

$$Q = \frac{S_f}{S_h} \quad (4.27)$$

其中  $S_f = S_n + S_\alpha = 5S_\alpha$ 。式(4.27)表明, $Q$  其实就是聚变产生的总功率对输入功率的比值。

再利用式(4.23)从式(4.27)里消去  $S_h$ ,并代入各贡献项,即可得到所需的  $Q = Q(p\tau_E, T)$ 。为了简单起见,忽略韧致辐射贡献,经过简单计算可得如下  $Q$  的表达式:

$$\left. \begin{aligned} Q &= 5 \frac{p\tau_E}{(p\tau_E)_1 - p\tau_E} \\ (p\tau_E)_1 &= K_1 \frac{T_k^2}{\langle \sigma v \rangle} \quad (\text{atm s}) \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

注意,  $(p\tau_E)_1$  表示点火所需的  $p\tau_E$  值。 $Q$  对  $p\tau_E$  的曲线如图 4.4 所示。如之前预料,当  $p\tau_E = (p\tau_E)_1$  时,  $Q = \infty$ 。当投入外部加热功率后,所需的  $p\tau_E < (p\tau_E)_1$ , 虽然增益  $Q$  降低了。例如,如果我们希望聚变功率是输入功率的 10 倍(即  $Q = 10$ ), 则  $p\tau_E$  要比纯点火时的值小一个  $2/3$  的因子。

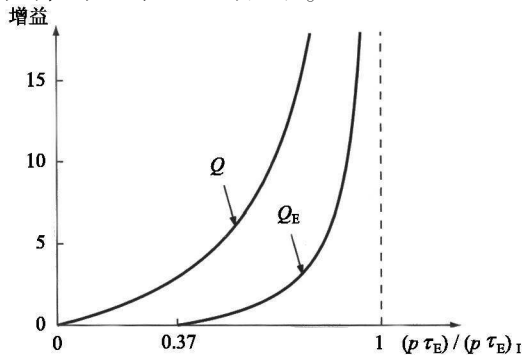


图 4.4 物理增益因子  $Q$  和工程增益因子  $Q_E$  作为  $(p\tau_E)/(p\tau_E)_1$  的函数

最后,比较式(4.24)和式(4.28),知 $f_\alpha$ 和 $Q$ 有以下关系:

$$f_\alpha = \frac{Q}{5 + Q} \quad (4.29)$$

因此,如果把“燃烧等离子体区间”规定为 $\alpha$ 功率正好等于外部功率时等离子体的功率平衡,那么这就相当于 $f_\alpha = \frac{1}{2}$ ,或等效地, $Q = 5$ 。

#### 4.6.2 工程增益因子 $Q_E$

从聚变过程的物理学观点来看,增益因子 $Q$ 提供了对功率平衡有贡献的各种功率源和汇的合理统计。但即便如此,从对 $Q$ 的不同贡献由不同类型的功率来计算这一点来说,并不完全令人满意。例如, $S_n$ 和 $S_\kappa$ 都是热功率密度,而 $S_b$ 却是微波功率密度。这些功率里没有一个是实际的电功率密度。工程增益因子 $Q_E$ 通过引入适当的功率转换系数将各种功率转换成电功率密度,从而弥补了这一不足。 $Q_E$ 的优点是更切合实际,其定义如下:

$$Q = \frac{\text{净电功率输出}}{\text{电功率输入}} = \frac{\text{总电功率输出} - \text{电功率输入}}{\text{电功率输入}} = \frac{P_{\text{out}}^{(E)} - P_{\text{in}}^{(E)}}{P_{\text{in}}^{(E)}} \quad (4.30)$$

式(4.30)中各项解释如下。首先, $P_{\text{in}}^{(E)}$ 是驱动外部加热源所需的实际电功率。这种功率乘上一个因子 $\eta_e$ 即转换成适用于等离子体加热的形式(例如,微波功率)。此外,等离子体本身仅吸收一小部分(用 $\eta_a$ 表征)微波功率,其余的被反射回去。因此,输入的电功率变为等离子体吸收的功率的总体转换系数由这两个因子的乘积 $\eta_e \eta_a$ 给定,这意味着:

$$P_{\text{in}}^{(E)} = S_b V / \eta_e \eta_a \quad (4.31)$$

通常情况下, $\eta_e \approx 0.7$ ;  $\eta_a \approx 0.7$ 。

下一步考虑电力输出。这里关于实际产热的论证与定义 $Q$ 时的论述类似,只是有两点例外。第一,我们应当将锂包层里增殖氦时每个聚变中子产生的热量包括进来。因此,中子除了 $E_n = 14.1$  MeV的贡献外,还有 $E_{Li} = 4.8$  MeV的能量应计入。其次,被等离子体反射的微波功率会被壁吸收产生热,它也应包括在内。这方面的贡献是 $(1 - \eta_a) \eta_e P_{\text{in}}^{(E)}$ 。将所有这些贡献加起来,得到下述的总输出功率表达式: $P_{\text{out}} = (S_n + S_{Li} + S_B + S_\kappa) V + (1 - \eta_a) \eta_e P_{\text{in}}^{(E)}$ ,其中,

$$S_n + S_{Li} = [(E_n + E_{Li}) / E_\alpha] S_\alpha = 5.4 S_\alpha \quad (4.32)$$



假定这部分热通过蒸汽循环和汽轮机转换为电能,转换效率因子为  $\eta_t$ , 通常  $\eta_t \approx 0.4$ 。因此,输出的电功率可以写成:

$$P_{\text{out}}^{(E)} = \eta_t \left[ 5.4S_\alpha + S_B + S_K + \frac{(1 - \eta_a)}{\eta_a} S_h \right] V \quad (4.33)$$

将各项综合起来,得到工程功率增益因子  $Q_E$  的表达式:

$$Q_E = \frac{\eta_t \eta_e \eta_a (5.4S_\alpha + S_B + S_K) - [1 - (1 - \eta_a) \eta_t \eta_e] S_h}{S_h} \quad (4.34)$$

代入不同的源和汇,忽略韧致辐射效应,我们很容易写出待求的表达式:

$$\begin{aligned} Q_E &= \frac{(6.4\eta_t \eta_e \eta_a + 1 - \eta_t \eta_e) p \tau - (1 - \eta_t \eta_e) (p \tau)_i}{(p \tau)_i - p \tau} \\ &\approx 2.0 \frac{p \tau - 0.37(p \tau)_i}{(p \tau)_i - p \tau} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$Q_E$  对  $p \tau_E$  的曲线如图 4.4 所示。可以看到,与  $Q$  一样,当  $p \tau_E = (p \tau_E)_i$  时,  $Q_E$  的值趋向无穷,  $Q_E = \infty$ 。同样,当使用外部加热时,  $p \tau_E$  也较完全点火时的值要小,但减小的幅度不是很大。具体地说,简单计算给出  $Q$  和  $Q_E$  之间的关系为:

$$Q = \frac{E_n + E_\alpha}{E_n + E_\alpha + E_{Li}} \frac{Q_E + 1 - \eta_t \eta_e}{\eta_t \eta_e \eta_a} = 4.0(Q_E + 0.72) \quad (4.36)$$

下面给出一些人们通常感兴趣的数值。对于电力输入输出平衡 ( $P_{\text{out}}^{(E)} = P_{\text{in}}^{(E)}$ ), 相当于  $Q_E = 0$ , 需要  $p \tau_E / (p \tau_E)_i = 0.37$ , 它对应于  $Q = 2.9$ 。如果目标是电力增益因子  $Q_E = 10$ , 则  $p \tau_E = 0.90(p \tau_E)_i$ , 相当于  $Q \approx 43$ 。最后请注意,物理增益因子  $Q = 10$  相当于工程增益因子  $Q_E = 1.8$ 。

由这一分析可以得出什么结论呢? 这些结论可归纳如下。首先,完全自持点火 ( $Q = Q_E = \infty$ ) 要求  $p \tau_E = 8.3 \text{ atm s}$ , 同时要求  $T = 15 \text{ keV}$ ; 第二,如果采用外部加热手段,  $p \tau_E$  的值可以适当减小,因为外部功率减轻了  $\alpha$  粒子加热的负担; 第三,对于合理选择的系数  $\eta_e, \eta_a$  和  $\eta_t$ ,  $p \tau_E$  减小得不是很多,对于  $Q_E = 10$  这一反应堆的合理值,  $p \tau_E$  值大约只降低到原先的 0.9 倍; 第四,即使电力得失相当 ( $Q_E = 0$ ), 所需的  $p \tau_E$  值也约等于点火值的 0.4 倍; 最后,一个典型的  $Q_E = 10$  的聚变反应堆,如果以总加热系数  $\eta_e \eta_a \approx 0.5$  生产 1000 MW 电力,这意味着外部加热和电流驱动所需的微波功率不超过 50 MW。

## 4.7 聚变反应堆的时变功率平衡

上述分析描述了稳态运行的聚变反应堆的重要制约因素。本节我们主要讨论在等离子体从最初的低温加热到最终工作温度这一迅变阶段的另外一些限制。这两个方面:热稳定性和最小外部加热功率。为了阐明这些问题,我们将零维功率平衡关系推广到时变情形。下面我们就先讨论广义的功率平衡关系,然后再将它应用到感兴趣的两个问题上。

### 4.7.1 时变零维功率平衡关系

这里需要将时变条件、对流和压缩项加入到零维稳态功率平衡关系上。一旦完成了这一步,我们就可以用它来对迅变过程进行分析。完成这项改造任务的困难在于出现了速度  $v$ , 尤其是它的空间导数, 它们都是未知量。绕过这个问题的一个办法是利用下述的均匀性假设(空间)。

回想一下, 能量式(4.1)中感兴趣的项是:

$$\frac{3}{2} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot p \mathbf{v} \right] + p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (4.37)$$

这个表达式可以改写为如下更方便的形式:

$$\frac{3}{2} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot p \mathbf{v} \right] + p \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{5}{2} \nabla \cdot p \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla p \quad (4.38)$$

现在将式(4.38)对等离子体体积进行平均, 以得到各项相应的零维形式。假设等离子体边界固定, 也就是说, 假设在等离子体边界上有  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ , 则由散度定理知,  $\nabla \cdot p \mathbf{v}$  项积分为零。接下来, 根据空间均匀分布的假设, 我们可以忽略式(4.38)的最后一项。这虽不是一个好的近似(因为实际分布并不是平坦的), 但这一项通常不是主要贡献项, 而采用这种近似可以大大简化消去  $\mathbf{v}$  的分析。将这些项综合起来, 即得到所需的时变零维功率平衡方程:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{dp}{dt} &= S_\alpha + S_h - S_b - S_k \\ &= \left[ \frac{E_\alpha}{16} \right] p^2 \frac{\langle \sigma v \rangle}{T^2} + S_h - \left[ \frac{C_B}{4} \right] \frac{p^2}{T^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{p}{\tau_E} \end{aligned} \quad (4.39)$$

现在我们可以用这个方程来分析热稳定性和最小的外部加热功率了。

### 4.7.2 热稳定性

考虑在预期工作温度  $T_0$  下处于稳态热平衡的等离子体。 $\alpha$  粒子加热和外部加热功率与热传导和韧致辐射损失达到平衡。现在假定等离子体经历一个小的随机

温度涨落。热稳定性研究要问的是:此时等离子体热动力学是使温度回到其原始值  $T_0$  (稳定), 还是相反, 即温度变得热失控 (不稳定)? 答案是这与加热功率和功率损耗随温度变化的相对速率密切相关, 具体如下。

为了通过式 (4.39) 来描述温度的变化, 我们必须引入一个假设, 即假定压强变化与温度变化有关。这对于将含有两个未知量 ( $T, p$ ) 的单方程简化为仅含一个未知量  $T$  的单方程来说是必要的。一个简单可行的近似是假定温度受到扰动失去平衡时密度保持不变。这个假设将被用于说明热稳定性的基本问题。由于  $p = 2nT$ , 现在又假设了  $n = n_0 = \text{常数}$ , 因此式 (4.39) 可以重写如下:

$$\begin{aligned} 3n_0 \frac{dT}{dt} &= S_H(T) - S_L(T) \\ &= \left[ \frac{E_\alpha}{4} \right] n_0^2 \langle \sigma v \rangle + S_h - C_B n_0^2 T^{1/2} - 3 \frac{n_0 T}{\tau_E} \end{aligned} \quad (4.40)$$

其中,  $S_H = S_\alpha + S_h$  是总热功率密度; 而  $S_L = S_b + S_\kappa$  是总损失功率密度。在热平衡条件下, 由定义知,  $S_H(T_0) = S_L(T_0)$ 。

热稳定性的一个直观图像可由  $T \approx T_0$  附近的  $\dot{T}$  对  $T$  曲线看出, 如图 4.5 所示。我们看到, 加热和能量损失引起的温度变化的相对速率有两种可能性。第一种情形相当于能量损失引起的温度变化要快于加热引起的温度变化, 曲线具有负斜率, 因此具有热稳定性。为了看清这一点, 我们来观察一个小的正温度扰动, 即温度  $T$  相对于  $T_0$  有所提高, 而曲线的负斜率意味着在温度  $T$  上升处有  $\dot{T} < 0$ , 即系统的动力学将使温度降低。换句话说, 由于损失增幅大于加热增幅, 因此净的功率损失将使系统趋于较低的温度, 回到平衡点, 所以这一系统是热稳定的。类似的讨论对负温度扰动也成立。

相反, 曲线的正斜率相当于是说加热引起的温度变化要比损失引起的温度变化更迅速, 这意味着热失控。如果小的正温度扰动发生在具有  $\dot{T} > 0$  性质的曲线上, 那么产热为主的动力学过程将使温度进一步增加。这就是热失控现象, 通常称为热不稳定性。

这种直观图像在数学上可通过熟知的线性稳定性分析进行量化。这种方法也被广泛应用于聚变科学的其他许多方面。其原理如下: 假定温度上有一偏离平衡温度的小扰动,

$$T(t) = T_0 + T_1(t) \quad (4.41)$$

“小扰动”假设意味着  $T_1 \ll T_0$ 。将式 (4.41) 代入关于  $T$  的方程, 然后在  $T_0$  点附近做泰勒展开。由于  $T_0 = \text{常数}$ , 因此展开后的温度方程变为:

$$\begin{aligned}
 3n_0 \frac{dT_1}{dt} &= S_H(T_0) - S_L(T_0) \\
 &+ [S'_H(T_0) - S'_L(T_0)] T_1 \\
 &+ [S''_H(T_0) - S''_L(T_0)] \frac{T_1^2}{2} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

其中  $S$  头上的撇号表示对  $T_0$  的微分。

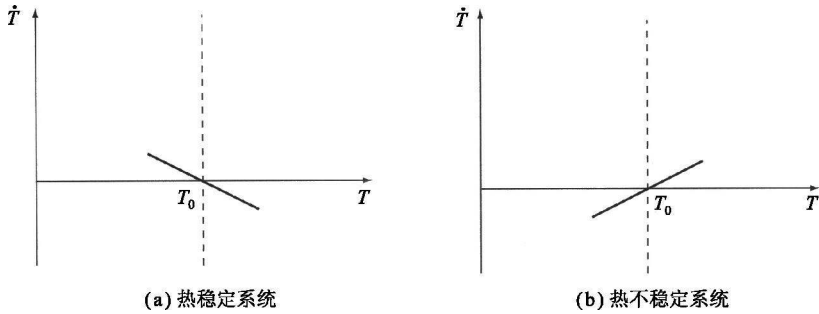


图 4.5  $\dot{T}$  作为  $T$  的函数

方程简化如下。由平衡条件可知,右边前两项正好相互抵消。第三行的所有项均可忽略,因为它们是  $T_1/T_0$  级小量。特别是,如果  $T_1/T_0 \ll 1$ ,则  $T_1/T_0 \gg (T_1/T_0)^2 \ll (T_1/T_0)^3 \dots$  由此将式(4.42)简化为关于  $T_1$  的一阶线性常微分方程:

$$3n_0 \frac{dT_1}{dt} = [S'_H(T_0) - S'_L(T_0)] T_1 \tag{4.43}$$

现在的目标是研究关于  $T_1$  的时间依赖性。如果  $T_1$  衰减到零,则温度回到其初始值  $T_0$ ,等离子体是热稳定的。另一方面,如果  $T_1$  无节制地增长,温度越来越远离其平衡值,则等离子体是热不稳定的。小扰动分析的巨大优势在于稳定性方程是线性的,从而允许有简单的解析解。线性意味着解具有指数性态。因此,式(4.43)的解可以写成:

$$T_1(t) = T_1(0) e^{\gamma t} \tag{4.44}$$

增长率  $\gamma$  可直接代入原方程求得:

$$\gamma = \frac{1}{3n_0} \left[ \frac{dS_H(T_0)}{dT_0} - \frac{dS_L(T_0)}{dT_0} \right] \tag{4.45}$$

如直观预料的那样,当能量损失增长大于加热增长时,增长率为负,这意味着系统具有热稳定性。相反,当加热的增长快于损失时,增长率为正,表明系统呈指数增长,具有热不稳定性。因此热稳定性的条件可以写成:

$$\frac{dS_L(T_0)}{dT_0} > \frac{dS_H(T_0)}{dT_0} \quad (4.46)$$

代入适当的  $S_L$  和  $S_H$  的表达式,式(4.46)可以很容易地应用于磁约束聚变研究。如果忽略韧致辐射,式(4.46)还可以简化。可以证明,在从温度稳定到不稳定的过渡区域,这种忽略是一种好的近似。稍作计算即可得到下列热稳定性条件:

$$3 \frac{n_0}{\tau_E} \geq \frac{1}{4} E_\alpha n_0^2 \frac{d\langle \sigma v \rangle}{dT_0} \quad (4.47)$$

即使存在外部加热,但只要假定  $S_h$  是一个与  $T$  无关的固定的量,那么这个方程仍是有效的。代入  $S_k = S_\alpha + S_h$  并注意到在平衡温度  $T_0$  处有  $S_h(T_0) = [(1 - f_\alpha)/f_\alpha] S_\alpha(T_0)$ , 因此,稳定性条件的最终形式为:

$$\frac{d}{dT_0} \left[ \frac{T_0^{1/f_\alpha}}{\langle \sigma v \rangle} \right] \geq 0 \quad (4.48)$$

稳定性判据对功率平衡的影响可以通过重新审视  $p \tau_E$  对  $T$  的关系曲线来得到。不同  $f_\alpha$  值的情形如图 4.6 所示。曲线较粗的一段对应于稳定的部分。可以看出,对给定的  $p \tau_E$ , 只有在功率平衡的高温解的地方才出现热稳定性。但我们希望的是自然呈现的稳定性,此外还存在其他的等离子体稳定性和工程方面的问题,这些往往都要求聚变反应堆在较低温度下运行。由于低温解是热不稳定的,因此结论是在此区间必须实行反馈控制,这种控制通常称为“燃烧控制”。

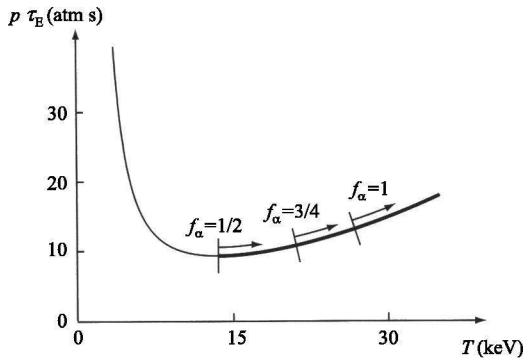


图 4.6 不同  $f_\alpha$  值的  $p \tau_E \sim T$  的热稳定性关系曲线  
(图中不同  $f_\alpha$  值右边的粗曲线段是稳定区间)

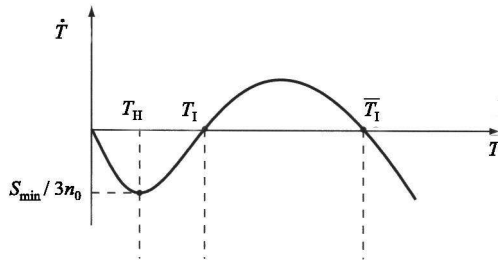
我们在  $\tau_E$  为常数的假定下得出了需要燃烧控制这一结论。基于实验观测的更精确模型,则必须将一种新的关键作用,即  $\tau_E$  的温度依赖关系,包括进来。通常认为,随着温度提高,  $\tau_E$  会变差,这使得功率平衡变得更加困难,但正如我们将在第 14 章看到的,实际上热稳定性状况大大改善了。

具体来说就是,假如燃烧控制的物理定性上保持不变,这时将  $\tau_E = \tau_E(T)$  的实验特性考虑进来之后,则不希望出现的燃烧控制问题就消失了。

### 4.7.3 最小外加功率

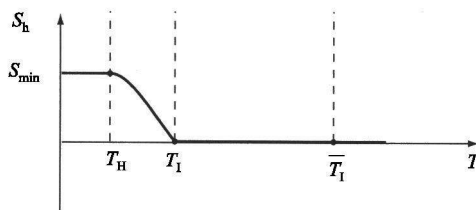
假设有一个优化了的反应堆,它在不需要任何外部加热(维持温度或驱动等离子体电流)的条件下实现了稳态功率平衡。但即使在这种情况下,在短暂的启动阶段,仍需要外部功率将等离子体从最初的低温加热到足够高的温度,才能过渡到以  $\alpha$  粒子加热为主的阶段。我们现在的目标是要计算这种外部加热功率的最小值,并将它与反应堆输出功率进行比较。如前所述,外部功率不影响完全点火的反应堆稳定状态运行的成本。但它毕竟直接提高了投资成本。

我们来研究等离子体从初始的冷状态过渡到最终点火状态的时间演化。通常这需要数值求解非线性时变能量平衡方程。但在这里,我们可以通过考察  $S_h = 0$  (同时忽略韧致辐射)的情形下  $\dot{T}$  对  $T$  的曲线[即式(4.40),见图 4.7(a)]来得到所需的信息。为简单起见,整个时间演化放在固定的  $n = n_0 = \text{常数}$  的背景下来考察。同时假定  $p\tau_E$  沿曲线的值足够大,使得有两个稳态平衡点存在(即在两个温度点上有  $\dot{T} = 0$ )。



(a)  $\dot{T}$  对  $T$  曲线显示了低 ( $T_I$ ) 和高 ( $\bar{T}_I$ ) 平衡点, 以及负的极小点

$$\dot{T} = [S_\alpha(T_H) - S_x(T_H)] / 3n_0 \equiv -S_{\min} / 3n_0$$



(b) 典型的  $S_h(T)$  对  $T$  分布, 它在  $S_h(T_I) = 0$  处为零, 在  $T = T_H$  处的值满足  $S_h(T_H) \geq S_{\min}$

图 4.7  $S_h = 0$  的情形下  $\dot{T}$  对  $T$  的曲线

有几点必须交代。首先,低点火点  $T_I$  处的斜率是正的,表明此处属于热不稳定,需要某种形式的燃烧控制。第二,高点火点  $\bar{T}_I$  的斜率是负的,表明此处具有热稳定性。

由于在  $T_1$  和  $\bar{T}_1$  之间  $\dot{T} > 0$ , 因此  $T = T_1$  处的热不稳定性自动驱动等离子体到较高的稳定温度  $\bar{T}_1$ 。不论哪种情况下, 都有必要将等离子体从最初的低温加热到  $T = T_1$ 。

现在的困难是显而易见的。在  $0 < T < T_1$  区域,  $\dot{T}$  的值满足  $\dot{T} < 0$ 。由于  $\dot{T}$  为负值, 因此等离子体温度不可能提高, 除非有足够强的外部加热源将曲线抬高到横轴的上方, 使  $\dot{T}$  的值处处为正。一个典型的外部加热分布  $S_h(T)$  如图 4.7(b) 所示。该分布必须严格满足两个要求: 首先, 在  $T = T_1$  处,  $S_h(T_1) = 0$ , 对应于完全点火等离子体的初始要求; 其次, 在  $T = T_H$  处, 外部功率  $S_h(T_H)$  必须足够大, 使得  $\dot{T}$  对  $T$  曲线为正。这相当于要求最小外部功率, 即  $S_{\min} \equiv S_h(T_H)$ 。

数学上  $S_{\min}$  定义如下。首先, 在  $T = T_1$  处, 所作的假设意味着  $\dot{T} = 0$ ,  $S_h = 0$ , 且  $S_\alpha = S_\kappa$ 。具体来说, 最后条件由下式给出:

$$\frac{1}{4} E_\alpha n_0^2 \langle \sigma v \rangle_1 = 3 \frac{n_0 T_1}{\tau_E} \quad (4.49)$$

在式(4.49)里, 假设所需的工作温度  $T_1$  是已知的, 反应堆设计成  $n_0 \tau_E$  或等效的  $p \tau_E$  足够大, 使得无需外部加热即可实现等离子体的功率平衡。

其次, 温度  $T_H$  可通过取  $\dot{T}$  对  $T$  曲线的极小值来确定:

$$3n_0 \dot{T} = \frac{1}{4} E_\alpha n_0^2 \langle \sigma v \rangle - 3 \frac{n_0 T}{\tau_E} + S_h \quad (4.50)$$

在  $T = T_H$  附近, 假设  $S_h = \text{常数}$ , 如图 4.7(b) 所示。令  $(\partial \dot{T} / \partial T)_{T_H} = 0$ , 得到

$$\frac{1}{4} E_\alpha n_0^2 \frac{d \langle \sigma v \rangle}{dT_H} = 3 \frac{n_0}{\tau_E} \quad (4.51)$$

这个表达式可通过式(4.49)消去  $n_0 / \tau_E$  来简化:

$$\frac{d \langle \sigma v \rangle}{dT_H} = \frac{\langle \sigma v \rangle_1}{T_1} \quad (4.52)$$

式(4.52)定义了  $T_H$ 。最后一步是计算  $S_{\min}$ 。令  $S_h$  等于加热功率在  $T = T_H$  处的非平衡值, 即  $S_{\min} = (S_\kappa - S_\alpha)_{T_H}$ , 于是有

$$S_{\min} = 3 \frac{n_0 T_H}{\tau_E} - \frac{1}{4} E_\alpha n_0^2 \langle \sigma v \rangle_H \quad (4.53)$$

也许更重要的是计算  $S_{\min}$  对最终点火温度下的功率的比值  $S_{\min} / (S_\alpha)_1$ 。这个比值很容易转换成电功率单位, 然后由此确定输出的总电功率中有多少份额必须用来驱动启动时所需的外部加热功率。这一信息显然具有非常重要的实际意义。简

单计算即可得出比值  $S_{\min} / (S_{\alpha})_1$  为:

$$\frac{S_{\min}}{(S_{\alpha})_1} = \frac{T_H}{T_1} - \frac{\langle \sigma v \rangle_H}{\langle \sigma v \rangle_1} \quad (4.54)$$

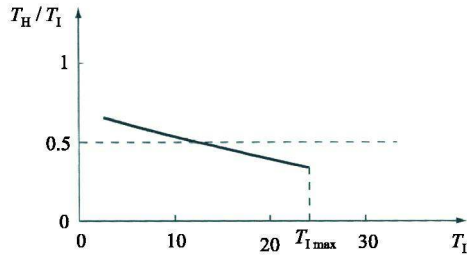
引入 4.6.2 节描述的加热系数和热转换系数,即得到所需的功率比:

$$\frac{P_{\text{in}}^{(E)}}{P_{\text{out}}^{(E)}} = \frac{1}{6.4\eta_i\eta_e\eta_a} \left[ \frac{T_H}{T_1} - \frac{\langle \sigma v \rangle_H}{\langle \sigma v \rangle_1} \right] \approx 0.80 \left[ \frac{T_H}{T_1} - \frac{\langle \sigma v \rangle_H}{\langle \sigma v \rangle_1} \right] \quad (4.55)$$

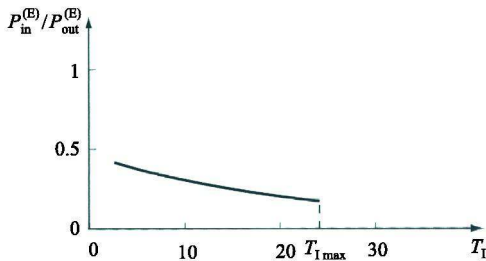
在对结果作图前,我们先给出一些直观的数据。在聚变反应堆的正常温度范围内 ( $6 \text{ keV} < T_1 < 30 \text{ keV}$ ),速度平均截面可合理地近似为  $\langle \sigma v \rangle \approx K_{\sigma} T^2$ 。将这个近似用到式(4.52)、式(4.54)和式(4.55)上,得到:

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_H}{T_1} &= \frac{1}{2} \\ \frac{S_{\min}}{(S_{\alpha})_1} &= \frac{1}{4} \\ \frac{P_{\text{in}}^{(E)}}{P_{\text{out}}^{(E)}} &\approx 0.2 \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

实际的  $T_H/T_1$  和  $P_{\text{in}}^{(E)}/P_{\text{out}}^{(E)}$  对  $T_1$  的函数曲线如图 4.8 所示。



(a) 比值  $T_H/T_1$  对  $T_1$  的曲线



(b) 比值  $P_{\text{in}}^{(E)}/P_{\text{out}}^{(E)}$  对  $T_1$  的函数曲线,

它相当于启动时所需的最小外部加热功率要求

图 4.8  $T_H/T_1$  和  $P_{\text{in}}^{(E)}/P_{\text{out}}^{(E)}$  对  $T_1$  的函数曲线



我们看到,在启动阶段,需要相当大的功率来加热等离子体到点火温度。按简单的零维模型预测,大约需要 20% 的稳态电功率单独用作启动功率。这一结果与模型的选取紧密相关,它是  $\tau_E$  为常数这一假设的直接结果。如果分析中采用实验给出的  $\tau_E = \tau_E(T)$ , 那么情况将大大改善。在第 14 章我们将证明,在这种情况下,最小功率的定性图像不会改变,但所需的辅助加热功率将减小约一个量级,这同样有助于我们避开不理想的问题。

## 4.8 本章总结

对磁约束聚变反应堆的零维功率平衡关系分析得到以下结论:反应堆的运行要求等离子体的工作温度必须达到  $T \approx 15 \text{ keV}$ , 同时  $p\tau_E$  必须达到最低值。要实现完全点火的稳态运行(即不需要外加功率),  $p\tau_E$  需要达到  $p\tau_E \approx 8.3 \text{ atm s}$ 。如果利用外部功率来进行辅助加热或电流驱动,则所需的  $p\tau_E$  值可以适当降低。在这种模式下,反应堆可视为一个具有物理增益因子  $Q$  或等效的工程增益因子  $Q_E$  的放大器。通常出于经济上的考虑,要求  $Q_E \approx 10$ 。在此条件下,所需的  $p\tau_E$  值下降不多,为点火值的 90%。

导向稳态运行的瞬态动力学涉及两个重要的现象。首先是热稳定性的问题。对于  $p\tau_E$  值大于稳态运行所需的极小值的情形,通常有两个平衡解,它们对应于两个不同的温度。温度较低的解具有热不稳定性,需要某种形式的燃烧控制。温度较高的解是热稳定的,但如果  $\tau_E$  为常数,则  $T$  值过高,因此由于物理上的其他原因(尚未讨论)这是不可取的。在第 14 章里我们可以证明,对于实际的  $\tau_E = \tau_E(T)$  情形,高温解出现在  $T$  值较低的地方,热稳定运行变得容易。

第二,即使等离子体在稳态下完全点火( $Q_E = \infty$ ),仍需要可观的外部加热功率来将等离子体加热到点火温度。根据简单的零维模型预计,在  $\tau_E$  为常数情形下,  $P_{\text{in}}^{(E)} \approx 0.2P_{\text{out}}^{(E)}$ 。但实际情形  $\tau_E = \tau_E(T)$  要比模型的估计改善很多。第 14 章中将表明,与  $\tau_E$  为常数的情形相比,实际情形中最小热功率约减少了 10 倍。

## 参考书目

第 4 章描述了聚变反应堆的功率平衡问题。大部分材料是很基本的,这些年在许多教科书中都有描述。描述聚变反应堆功率平衡的几本教科书如下,同时给出著名的劳森判据的原始参考文献。

## 1. 聚变反应堆的功率平衡

Dolan, T. J. (1982). *Fusion Research*. New York: Pergamon Press.

Gross, R. (1984). *Fusion Energy*. New York: John Wiley & Sons.

Rose, D. J. and Clark, M. (1961). *Plasmas and Controlled Fusion*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Stacey, W. M. (1981). *Fusion Plasma Analysis*. New York: John Wiley & Sons.

Stacey, W. M. (2005). *Fusion Plasma Physics*. Weinheim: Wiley-VCH.

Wesson, J. (2004). *Tokamaks*, third edn. Oxford: Oxford University Press.

## 2. 劳森判据

Lawson, J. D. (1957). Some criteria for a power producing thermonuclear reactor, *Proceedings of the Physical Society* **B70**, 6.

## 习 题

4.1 本题涉及广义劳森判据的推导。考虑一个  $S_\alpha < S_\kappa$  的亚点火反应堆。等离子体功率平衡中不仅包含了  $\alpha$  加热功率、外部加热功率和热传导损失等项,而且还包括<sup>6</sup>Li-T 增殖反应产生的功率。这里假定总的  $\alpha$  功率只有一小部分能量  $f$  沉积在等离子体中,其余的  $1-f$  立即流向第一壁并转化为热量。假设热转换系数为  $\eta_t$ , 输入到等离子体用于加热的电热转换效率为  $\eta_h$  ( $\eta_h = \eta_e, \eta_a = 1$ )。

① 推导稳态运行情形下的  $p \tau_E = G(Q_E, f)$  的表达式。

② 假设  $T = 15 \text{ keV}$ ,  $\eta_t = 0.35$ ,  $\eta_h = 0.5$ 。画出  $f = 0, 0.5$  和  $1$  三种情形下  $p \tau_E$  对  $Q_E$  的曲线。将  $Q_E = 20$  时的  $p \tau_E$  值与完全点火时 ( $Q_E = \infty, f = 1$ ) 的值,以及劳森平衡判据 ( $Q_E = 1, f = 0$ ) 时的值进行比较。

4.2 轴对称环形 D-T 聚变反应堆需要环向电流和环向磁场来提供好的约束。在当今大多数实验中,这个电流是靠变压器来驱动的。但在稳态运行的反应堆中,环向电流必须用非感应方法来驱动。其中一种方法是通过“射频电流驱动”来进行的。如果电流驱动的效率定义为  $\eta = n_{20} I R_0 / P_{\text{CD}}$ , 其中,  $P_{\text{CD}}$  是总的射频功率(单位:W),  $I$  是等离子体电流(单位:A)。迄今最高的效率达到  $\eta \approx 0.3 \text{ A} / (\text{m}^2 \text{ W})$ 。现在考虑一个圆截面的等离子体反应堆,其大半径  $R_0 = 8 \text{ m}$ , 小半径  $a = 2.5 \text{ m}$ , 环向磁场  $B_0 = 6 \text{ T}$ 。假设等离子体密度和温度分布均为均匀分布。稳态时的环向  $\beta$  值限定在  $\beta = 2\mu_0 p / B_0^2 = 0.05$ 。环向电流  $I = 20 \text{ MA}$ , 并假定这个电流完全由非感应方法驱动。

① 导出循环功率品质因数  $Q_{\text{CD}} = P_{\text{fusion}} / P_{\text{CD}}$  的表达式。

② 利用习题 3.1 给出的截面解析计算公式计算使  $Q_{\text{CD}}$  取极大值时的  $T_k$  值。

③ 计算相应的  $Q_{\text{CD}}$  的值,对于反应堆来说,电流驱动是一个重要问题还是次要问题?

4.3 对于非催化 D-D 聚变估计点火所需的最小  $p \tau_E$  值以及相应的  $T$  值。对于完全催化 D-D 聚变重复上述计算。 $\langle \sigma v \rangle$  曲线见本书正文。

4.4 本题的目的是要探讨等离子体分布对点火时  $p \tau_E$  的临界值的影响。假定  $\alpha$  功率和热传导损失是功率平衡的两个主要因素。考虑一维圆截面等离子体。 $\alpha$  功率体平均密度和热传导损失分别定义为:

$$\bar{S}_\alpha = \frac{2}{a^2} \int_0^a \left[ \frac{E_\alpha}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle \right] r \, dr$$

$$\bar{S}_1 = \frac{2}{a^2} \int_0^a \left[ 3 \frac{n T}{\tau_E} \right] r \, dr$$

现在假定等离子体的密度和温度分布为:

$$n = (1 + v_n) \bar{n} (1 - r^2/a^2)^{v_n}$$

$$T = (1 + v_T) \bar{T} (1 - r^2/a^2)^{v_T}$$

其中,  $\bar{n}$  和  $\bar{T}$  分别是体平均密度和温度。为了确定温度分布对  $p \bar{\tau}_E$  的影响, 需要利用习题 3.1 给出的  $6 \langle \sigma v \rangle$  来数值估计  $v_n = 0$  和  $0 \leq v_T \leq 4$  情形下的  $\bar{S}_\alpha$  和  $\bar{S}_1$ 。对于每个  $v_T$ , 求出在固定压强  $\bar{p} = 2[(1 + v_n)(1 + v_T)/(1 + v_n + v_T)] \bar{n} \bar{T} = \text{常数}$  的情况下使  $p \bar{\tau}_E$  取极小值的最佳  $\bar{T}$  值。画出最佳  $\bar{T}$  值 (keV) 和相应的  $p \bar{\tau}_E$  作为  $v_T$  函数的曲线, 并给出零维极限  $v_n = v_T = 0$  下的参考值。为了确定  $p \bar{\tau}_E$  随密度的变化, 对于  $v_T = 2$  和  $0 \leq v_n \leq 4$  的情形重复上述计算。在  $p \bar{\tau}_E$  极小化情形下, 说明峰值分布是好还是不好? 抑或不重要?

# 第 5 章 简单磁约束聚变反应堆设计

## 5.1 引言

功率平衡的研究表明,磁约束聚变反应堆的运行条件是温度约为 15 keV,并且  $\rho \tau_E > 8.3 \text{ atm s}$ 。但即便如此,这些考虑既没有阐明  $\rho$  和  $\tau_E$  之间的最佳取值,也没有对聚变反应堆的几何尺寸和磁场大小给出任何建议。第 5 章就来研究这些问题。本章的目标是要通过计算各种约束的几何位形及其磁场大小以及关键的等离子体物理参数,给出一种简单的磁约束聚变反应堆的设计。

值得注意的是,这种设计几乎不需要用到等离子体物理的知识,尽管近半个世纪来等离子体物理研究一直是这个新的科学分支的主要内容。这里的设计实际上主要是由基础工程和核物理方面的约束决定的。这些约束条件确定了反应堆的几何尺寸以及磁场大小。同样重要的是,它们决定了对等离子体参数的“要求”。等离子体物理学家必须学会如何建立起满足这些要求(例如,压强和约束时间等)的等离子体,以便使聚变成为商用上可行的能源。预期的等离子体参数知识至关重要,因为它们规定了聚变等离子体物理研究的最终目标,并引导本书余下部分对等离子体物理学进行讨论。

本章计划如下。首先描述一般的磁约束聚变反应堆;其次确定设计实际上是由哪几部分组成,也就是说,具体需要计算哪些参数;第三,给出基础工程和核物理方面的约束条件以及设计目标;最后,将这些约束条件和目标与功率平衡的考虑结合起来提出设计方案。一般来说,这样计算出来的设计参数与更详细和全面的反应堆设计研究结果相比,误差不会超出 2~3 倍。

## 5.2 一般磁约束聚变反应堆

一般意义上的磁约束聚变反应堆如图 5.1 所示。它具有以下一些特点。一个基本要求是反应堆必须稳态运行,脉冲式反应堆是不太可取的,因为装置结构受到周期性热应力和机械应力的作用,会使得结构组件因疲劳失效而需要频繁更换和更多的维护。反应堆从外形上看像是一个圆环,从工程角度上看,这不是一种理想位

形,因为机械加工非常复杂,柱状或球状或许更理想。但正如我们即将看到的,磁场的基本特性要求约束位形在几何上是环形的。我们假定等离子体截面也是圆形的。虽然实际装置的设计不是这种样子,但从眼下的目的考虑,这是一个有益的假设,在预期的设计精度范围内,数学计算上可以大大简化。

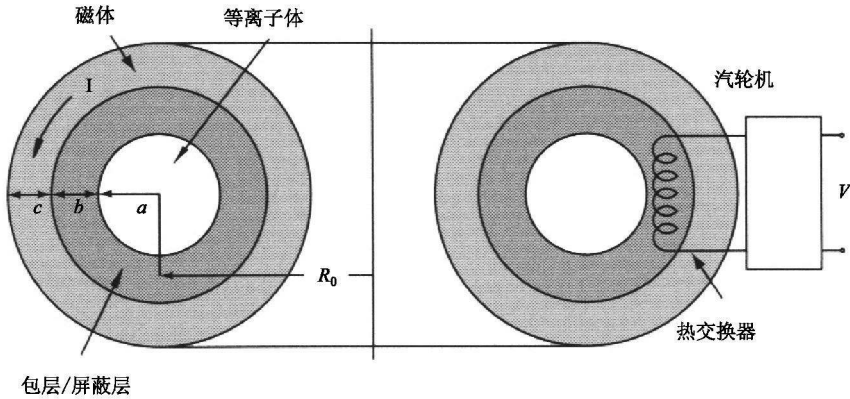


图 5.1 一般意义上的环形磁约束聚变反应堆示意图  
(图中显示了等离子体、包层/屏蔽层和磁体)

磁场的用处是约束热等离子体使之不与“第一壁”接触。第一壁的外面是包层,是进行能量转换的地方。围绕包层的是屏蔽层,用来保护磁体和工厂免受中子和  $\gamma$  射线的辐射。最后,在屏蔽层的外面安装的是产生磁场的线圈。

一般来说,磁体必须由超导材料制作。因为铜磁体会在稳态运行期间耗散掉大量的欧姆功率,即使铜的导电性相当高。这种功率消耗足以严重影响反应堆的总体功率平衡。换句话说,欧姆功率消耗在聚变产生的电力中占有不小的份额。理论上说,超导磁体在稳态运行期间耗散的功率为零,实际只需要(与输出功率相比)很少一点功率用于进行冷却以保持磁体超导性质。磁体的另一个特点是它们必须位于包层与屏蔽层的外面,因为内置的超导磁体将无法承受聚变中子的轰击,不仅材料会受到破坏,而且会很快回复到其非超导状态。

因此,一个一般意义上的聚变反应堆由等离子体、第一壁、包层与屏蔽层以及超导磁体组成,如图 5.1 所示。而作为 ARIES 反应堆计划<sup>1)</sup>一部分的一个更为实际的、详细的设计,则如图 5.2 所示。

1) ARIES, 全称为 Advanced Reactor Innovative Engineering Study (先进反应堆创新性工程研究)。这是美国在 20 世纪 90 年代专为优化商用聚变堆设立的一个研究项目。ARIES-AT, 是指托卡马克型先进运行模式商用聚变堆。——译者

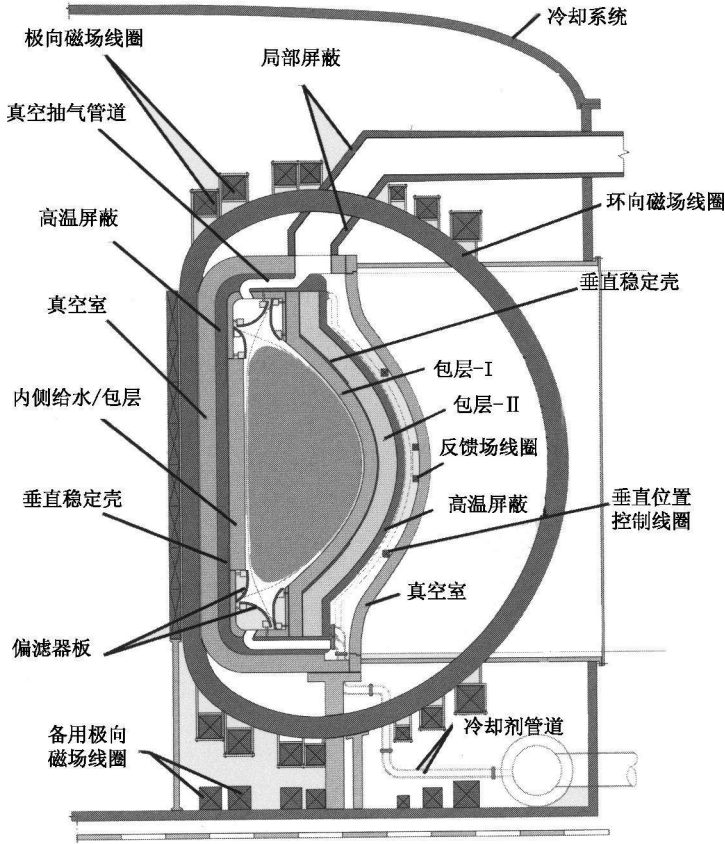


图 5.2 ARIES-AT 反应堆芯部位形的截面图[ 承蒙纳杰马巴迪(F. Najmabadi) 提供]

### 5.3 反应堆关键设计参数计算

本节介绍如何确定反应堆设计的关键参数。这些参数包括反应堆几何、磁场和各种等离子体物理参数。显然,由于模型的简单性,我们只能计算有限个物理量,但这些参数足以提供对一个磁约束聚变反应堆的概述。待定参数列于表 5.1。

所有这些参数,除  $\beta$  之外,此前都已明确定义或是自明的。参数  $\beta$  称为归一化等离子体压强,其定义如下:

$$\beta \equiv \frac{p}{B^2/2\mu_0} \quad (5.1)$$

注意, $\beta$  是等离子体压强与磁压强之比。它衡量的是磁场约束等离子体的效率。从反应堆功率平衡的经济性来说,我们希望高  $\beta$  运行,但由于存在各种等离子体不稳

定性,因此在实验上很难实现。低  $\beta$  比较容易实现,但它代表着较低的约束效率。

聚变研究中有很大一块是研究如何找出高  $\beta$  下具有稳定约束的特定磁场几何结构。就眼下简单反应堆的设计而言,实际磁场几何的细节并不重要,因此我们可以用磁场平均值来表示磁场。但即便如此,工程和经济上对聚变反应堆的制约将“要求” $\beta$  应能达到一定的值,到目前为止,等离子体物理学家一直在寻找满足这一要求的磁场几何。

类似的讨论也适用于能量约束时间  $\tau_E$ 。对于等离子体湍流和由此产生的反常输运必须有足够好的控制才能使  $\tau_E$  值达到技术上的要求。如果等离子体物理无法实现所需的  $\beta$  值或  $\tau_E$  值,那么就会对反应堆的设计造成进一步制约,接受这些缺陷将导致反应堆在经济可行性上缺乏吸引力。本书余下部分的等离子体物理学主要就是针对如何实现这些参数的必要值而展开的。

表 5.1 核聚变反应堆的设计参数

参 数	符 号
等离子体小半径	$a$
等离子体大半径	$R$
包层与屏蔽层的厚度	$b$
磁体厚度	$c$
等离子体温度	$T$
等离子体密度	$n$
等离子体压强	$p$
聚变功率密度	$S_f$
能量约束时间	$\tau_E$
磁场	$B$
归一化等离子体压强	$\beta$

## 5.4 设计目标,工程和核物理方面的基本限制

### 5.4.1 设计目标

这一设计的首要目标是尽量减少核反应堆的建设成本。正如下面我们将看到的,磁约束聚变反应堆本身就是一个大而复杂的设施(例如,与天然气发电厂相比),这造成最初用于设施建设所需的资金相对较高。因此,反应堆设计的关键是要尽可能减少这种资金成本以便使聚变能源具有经济竞争力,通常衡量这种竞争力的指标是由能源生产的资本、燃料和运营成本等方面综合形成的所谓单位电价(CoE)。

只有到了按第13、14章所述内容来进行反应堆设计时才会考虑等离子体物理的因素。第13、14章中支配聚变级等离子体行为的基本物理研究表明,实践中很难实现大 $\tau_E$ 值或高 $\beta$ 值。从等离子体物理的角度得出的二者的可取值范围其实与工程和核物理限定的典型值相比偏离不了多少。因此,只要有可能,设计一个对 $\tau_E$ 值和 $\beta$ 值的要求尽可能低的反应堆是可取的。

因此设计目标可以归纳如下:成本极小化,同时尽可能减少对 $\tau_E$ 或 $\beta$ 的要求。

### 5.4.2 工程约束

有4种工程上的基本约束,它们直接影响到反应堆的设计,现介绍如下。

首先,典型的大型电站产生的电力大约是1000 MW。我们的反应堆就按这个值进行设计,记为 $P_E = 1000 \text{ MW}$ 。

其次,第一壁的壁负荷存在极限。也就是说,为了不对壁材料造成不可接受的损伤,通过第一壁的单位面积功率存在安全上限。壁负荷的来源有两个,一是热传导损失以及小的韧致辐射损失带来的热负荷。已有多种技术(例如,限制器、偏滤器等)用来解决热传导的问题。所有这些技术显然都涉及某种形式的冷却。但目前热损失问题还没有得到完全解决,虽然正在取得进展。在反应堆设计上,我们假定热损失构成的壁负荷不是很严重。

壁的另一类负荷来自通过第一壁的14.1 MeV的中子。它们以角度均匀的功率分布沉积在四周。这种中子通量能够导致各种辐射引起的第一壁材料损伤,包括溅射、脆化、侵蚀、开裂等。我们假定14.1 MeV中子是壁负荷极限最主要的因素。对现有材料的研究表明,负荷极限可以取为 $1 \sim 6 \text{ MW/m}^2$ 。因此在这里,我们将壁的最大中子负荷优化限定值合理地取为 $P_w = 4 \text{ MW/m}^2$ 。

工程上的第三个约束是超导磁体的电性能。为使磁体保持其超导性,它的温度 $T$ 、电流密度 $J$ 以及磁场 $B$ 等值必须位于图5.3所示三维 $(T, J, B)$ 空间曲面的下方。

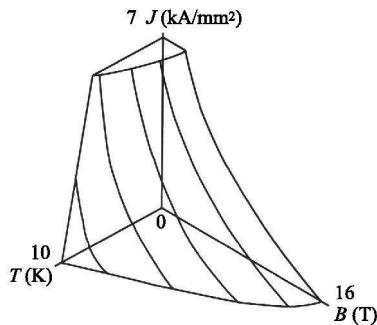


图5.3 铌锡合金的三维 $(T, J, B)$ 半球曲面

[超导磁体的运行参数只有在该曲面下选取才能维持其超导态

(Wilson M N. Superconducting Magnets. Oxford: Clarendon Press, 1983.)]



系统运行一旦越过曲面边界,磁体就回复到通常导电性能相对较低的状态。磁约束聚变,顾名思义,需要强磁场和大电流。目前,具有最强磁场、最大电流密度的磁体是由超导材料铌锡合金制作的。能够产生  $10 \sim 15 \text{ T}$  量级强磁场的大尺寸磁体,譬如日本的“ITER 模型线圈”,已制作成功(图 5.4)。随着高温超导磁体的开发,磁场值还有可能提高。但就目前而言,最大的磁场可以选为  $B_{\max} = 13 \text{ T}$ 。

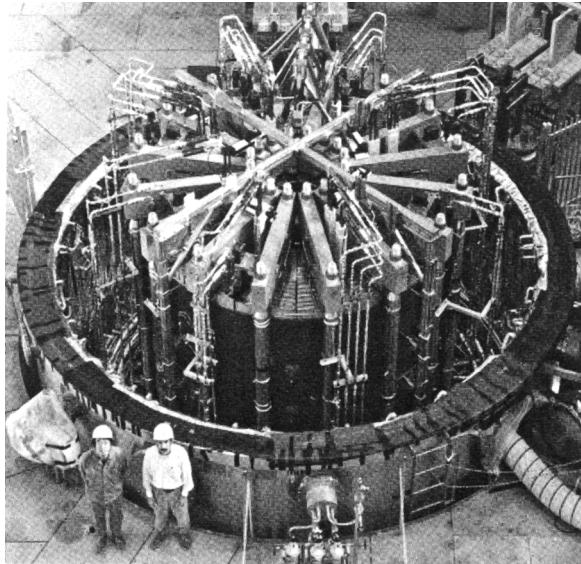


图 5.4 由国际小组在日本建造、组装并测试的 ITER 超导模型线圈(K. Okuno 提供)

第四个工程约束也与磁场有关。那就是强场磁体会因自生磁压产生巨大的力。如果没有足够牢固的结构支撑系统,这种磁力可以令磁体完全解体。事实上,强场超导磁体的规模 and 成本往往受到结构支撑系统的制约。因此磁体设计的关键参数选取取决于支持结构(通常是不锈钢)的最大允许应力。最大应力的实际值则取决于结构材料的选择、线圈的几何形状、线圈周围的应力分布(一般不会是均匀的)以及各种强制性安全规定。就目前的结构材料而言,最大允许平均应力的合理值是  $\sigma_{\max} = 300 \text{ MPa} \approx 3000 \text{ atm}$ 。

因此,磁约束聚变反应堆的基本工程约束涉及所需的输出功率、壁的最大中子负荷、超导磁体的最强磁场以及结构支持系统的最大容许应力。

### 5.4.3 核物理约束

有 3 种基本的核物理约束,它们直接影响着如下所述的核聚变反应堆的设计。

第一个制约因素是 D-T 聚变反应截面的大小。由于反应截面与每秒发生的聚变反应数目有关,因此它最终决定了给定体积内所需的等离子体压强。从第 3 章的分析可知,在温度  $T = 15 \text{ keV}$  的条件下,有关的反应截面约束可以写成  $\langle \sigma v \rangle = 3 \times 10^{-22} \text{ m}^3/\text{s}$ 。

第二个核物理制约因素与包层有关。通过锂-中子反应来获得好的氦增殖,要求将 14.1 MeV 中子减速至热速度。这是通过包层里的锂材料与中子慢化材料相结合来实现的。慢化材料中慢化中子的平均自由程是一个关键参数,它在很大程度上决定了包层的厚度。该平均自由程的值取决于慢化材料和中子的能量。通常情况下,在整个感兴趣的中子能量范围,慢化截面在靶恩(b)量级。就目前的计算来说,为简单计,我们取截面为给定的  $\sigma_{sd} = 1 \text{ b}$ 。

第三个核物理约束也与包层有关。中子一旦被慢化材料慢化,就很容易被<sup>6</sup>Li 捕获来增殖氦。这一过程的截面相当大,从而成为慢化中子的动机。因此这个中子俘获截面成为第三个约束。0.025 eV 热中子的氦增殖截面  $\sigma_{br} = 950 \text{ b}$ 。

这样,我们就完成了对所有约束的描述。所有限定值总结见表 5.2。接下来我们来看看这组表面上看起来不相关的约束是如何确定基本反应堆设计的所有参数的。

表 5.2 工程上和核物理上的基本约束

物理量	符号	限定值
电力输出	$P_E$	1000 MW
最大壁负荷	$P_W$	4 MW/m <sup>2</sup>
最大磁场	$B_{max}$	13 T
最大机械应力	$\sigma_{max}$	300 MPa $\approx$ 3000 atm
速度平均截面	$\langle \sigma v \rangle$	$3 \times 10^{-22} \text{ m}^3/\text{s}$
快中子慢化截面	$\sigma_{sd}$	1 b
慢中子增殖截面(在 <sup>6</sup> Li 中)	$\sigma_{br}$	950 b (对于 0.025 eV 热中子)

## 5.5 反应堆设计

### 5.5.1 设计计算纲要

将上述各种制约因素运用到下列简单磁约束聚变反应堆设计参数的计算上。

- ① 与包层有关的截面大小决定了包层的厚度。
- ② 最低成本约束与磁体限定性条件相结合决定了线圈的厚度和等离子体小半径。
- ③ 输出功率要求和壁负荷极限决定了等离子体大半径。
- ④ D-T 聚变截面和输出功率要求决定了等离子体压强。
- ⑤ 等离子体的功率平衡决定了能量约束时间的值。
- ⑥ 最小归一化压强  $\beta$  决定了磁场的大小和相应的必需的  $\beta$  值。

具体设计介绍如下。

### 5.5.2 包层与屏蔽的厚度

包层与屏蔽是聚变反应堆中一个复杂的、高度工程性的部件,它涉及其中每个

部分的材料选择。它有几个重要的功能,图 5.5 显示的是高度简化了的包层结构示意图。这里之所以可以简化是因为它的每个部分的功能都是相互独立的,实际包层的层数相当多。不管怎么说,简化模型方便地提供了对包层与屏蔽工作原理上的理解。下面我们从第一壁向外,对每个部分的功能进行介绍。

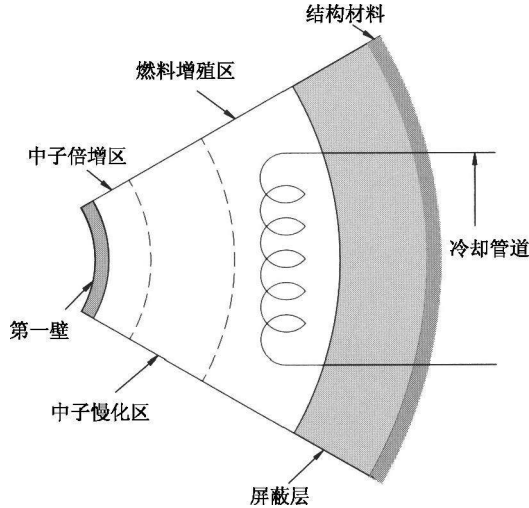


图 5.5 包层与屏蔽各功能区的简单模型

紧邻第一壁的是中子倍增区。中子倍增剂被用来产生中子以补充包层内各种不可避免的中子损失(例如,由于冷却液和结构材料等的吸收引起的损失)。聚变产生的 14.1 MeV 中子穿过相对较薄的中子倍增剂区,其中部分中子将通过倍增反应产生两个新的中子<sup>1)</sup>。

再往外是中子慢化区。慢化剂将快中子慢化为热中子,使它们可以很容易地被<sup>6</sup>Li 俘获。有多种锂化合物可用作慢化剂,它们依包层的具体要求可分为固态、液态金属或熔盐。这里不存在普适的最佳选择,每种选择都涉及一系列工程上的折中。关于这些内容的讨论超出了本书范围。幸运的是,慢化过程对这些选择不是很敏感。但应指出,慢化过程实际上是决定包层厚度的一个主要因素。

第三层是氘增殖区,其中含有大量的<sup>6</sup>Li。天然锂由 7.5%<sup>6</sup>Li 和 92.5%<sup>7</sup>Li 组成。我们知道,<sup>7</sup>Li 可以与聚变中子发生反应,结果是在不损失中子的情形下实现了

1) 这段话较为简略。为使读者更明了中子倍增剂的作用,这里稍加补充。D-T 反应一次只产生一个中子。而要在包层内实现氘增殖(后文有述),仅有  $n-^7\text{Li}$  反应是不够的,因为材料吸收等效应的存在,中子难免会有损失。因此必须有增殖中子的反应存在。例如, $n-^9\text{Be}$  反应就是这样一种中子倍增反应: $^9\text{Be} + n \rightarrow 2^4\text{He} + 2n - 1.573 \text{ MeV}$ ,这里铍(Be)称为中子倍增剂。像这样能起中子倍增反应的元素还有铅(Pb)、铋(Bi)和锌(Zn)等,它们统称为中子倍增剂。——译者

氘增殖,而且这还是个吸热反应:



但 ${}^7\text{Li}$ 的反应截面远远小于 ${}^6\text{Li}$ ,故氘的增殖能力较小,中子能量损失也较小。因此实际上,增殖主要是靠 ${}^6\text{Li}$ 进行,因为它有大的截面和相应的短的平均自由程,反应区域相对较窄。但如果采用浓缩 ${}^6\text{Li}$ 材料来试图改善包层性能(即减少包层厚度),这可能不会产生大的投资回报,原因是增殖区原本就只占整个包层的一小部分。因此这种性能改善取得的收益必须考虑到与浓缩成本相平衡。

第四,包层本身由屏蔽层包裹着。屏蔽层的作用是吸收逃离出包层的中子以及由次级核反应产生的伽马射线。这种吸收必须做到基本上彻底,因为屏蔽层外面就是运行在 $5 \sim 10 \text{ K}$ 温度下的超导线圈。因此,对于通常采用的低温冷却系统,磁体可承受的热负荷很小。

第五,嵌入包层的是一套冷却管道。冷却剂可以是液体或气体,它的作用是带走高能粒子慢化放出的聚变产生的热量。聚变能正是由此通过适当的热转换系统最终转换成电能。这是聚变发电反应堆的一个主要目标。

最后,还有包层与屏蔽层周围的结构材料。这些结构采用模块化形式,工程上这一点很重要。包层与屏蔽层做成模块构件维护起来可以更容易,因为单独的模块可以随时提取、修理并视需要更换。

这样我们就完成了对包层与屏蔽层的定性描述。这里给出的简单设计可以和图5.6所示的ARIES项目中采用的更为实际的设计相比较。

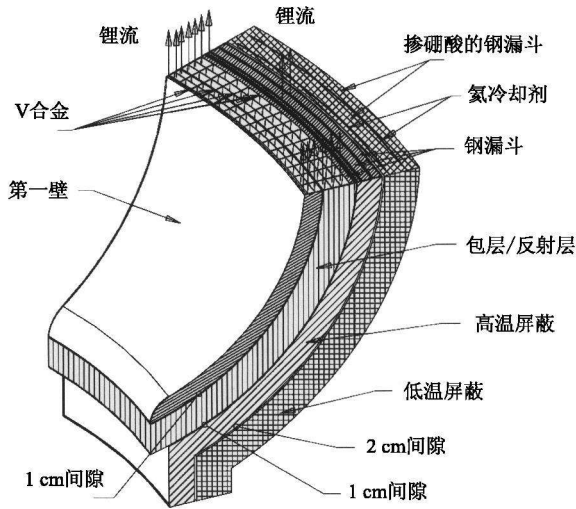


图 5.6 ARIES 设计项目中的包层模块(承蒙 F. Najmabadi 提供)

现在,我们将注意力转向慢化区和增殖区的总厚度的计算,这是包层与屏蔽层的最大的部分。我们利用下述简单模型来进行合理估算。唯一要考虑的是实际发生的两个过程——慢化和增殖。在慢化区内侧,以慢化为主;向外延伸到增殖区,增殖变得越来越重要。

首先考虑快中子的慢化。中子通过一系列非核碰撞损失能量。中子进入慢化-增殖区后,其能量  $E$  随距离的典型衰减规律有如下简单关系:

$$\frac{dE}{dx} + \frac{E}{\lambda_{sd}} = 0 \quad (5.3)$$

平均自由程  $\lambda_{sd}$  的选择与慢化截面有关系,即  $\lambda_{sd} = 1/n_{Li} \sigma_{sd} \approx 0.055$  m, 这里  $n_{Li} = 4.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  是天然锂的数密度,  $\sigma_{sd} = 1$  b(靶恩), 这个约束值前面讨论过。为了简单起见,假定平均自由程对能量至多只有弱的依赖关系,换言之,  $\lambda_{sd}$  对  $E$  的依赖性可忽略。根据这些假设,对式(5.3)积分即可得到:

$$E = E_n e^{-x/\lambda_{sd}} \quad (5.4)$$

其中,  $E_n = 14.1$  MeV。正如所料,能量随距离呈指数衰减。

其次,考虑氚的增殖。这涉及与锂的核反应,每次  ${}^6\text{Li}$  反应失去一个中子。因此,穿透慢化-增殖区的中子通量随穿透距离增加而减少。中子通量的定义为  $\Gamma_n = n_n v_n$ , 它满足如下的衰减型方程:

$$\frac{d\Gamma_n}{dx} + \frac{\Gamma_n}{\lambda} = 0 \quad (5.5)$$

增殖的平均自由程  $\lambda$  与相应的反应截面通常有如下关系:  $\lambda = 1/n \sigma$ 。其中,  $n$  和  $\sigma$  确定如下。从增殖来说,  $n$  相当于  ${}^6\text{Li}$  的密度。由于天然锂中只有 7.5% 的  ${}^6\text{Li}$ , 故必须设  $n = 0.075 n_{Li}$ 。这意味着不进行任何浓缩。增殖截面  $\sigma$  可以与热增殖截面  $\sigma_{br}$  联系起来, 低能实验测量的结果表明,  $\sigma$  反比于中子速度  $v_n \sim E^{1/2}$ 。因此, 在这里讨论的有效能量范围, 增殖截面可合理地假定为:

$$\sigma \approx \sigma_{br} \left[ \frac{E_t}{E} \right]^{1/2} \quad (5.6)$$

其中,  $\sigma_{br} = 950$  b 是约束值;  $E_t = 0.025$  eV。将这些结果结合起来即得到  $\lambda$  的表达式:

$$\lambda = \lambda_{br} \left[ \frac{E}{E_t} \right]^{1/2} \quad (5.7)$$

其中  $\lambda_{br} = 1/(0.075 n_{Li} \sigma_{br}) = 0.0031$  m。

将这个表达式和  $E$  的表达式代入  $\Gamma_n$  的方程, 得到如下简单微分方程:

$$\frac{d\Gamma_n}{dx} + \left[ \frac{E_t}{E_f} \right]^{1/2} \frac{e^{x/2\lambda_{sd}}}{\lambda_{br}} \Gamma_n = 0 \quad (5.8)$$

从式(5.8)很容易解得慢化-增殖区内中子通量与距离的函数关系:

$$\frac{\Gamma_n}{\Gamma_{n0}} = \exp \left[ -2 \left[ \frac{E_t}{E_f} \right]^{1/2} \frac{\lambda_{sd}}{\lambda_{br}} \left( \exp \frac{x}{2\lambda_{sd}} - 1 \right) \right] \quad (5.9)$$

其中  $\Gamma_{n0} = \Gamma_n(0)$ 。可以看到,在  $x \sim 0$  附近(慢化区入口),中子通量下降缓慢,但一旦进入增殖区,通量很快下降。

通过式(5.9)解出使通量减弱到给定通量值所对应的  $\Delta x$ ,我们即得到待求的慢化-增殖区的厚度。例如,当通量减少到  $1/100$ ,那么就有 99% 的聚变中子被慢化并经历了增殖反应。因此所需的慢化-增殖区的厚度为:

$$\Delta x = 2\lambda_{sd} \ln \left[ 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{E_f}{E_t} \right]^{1/2} \frac{\lambda_{br}}{\lambda_{sd}} \ln \left[ \frac{\Gamma_n}{\Gamma_{n0}} \right] \right] \approx 0.88 \quad (\text{m}) \quad (5.10)$$

我们看到,这个厚度约为 0.88 m。这个值对衰减系数(100)的选择不是很敏感。此外我们还注意到,由  $\lambda_{sd} = \lambda_{br} (E/E_t)^{1/2}$  确定的区分慢化区和增殖区的近似边界约为 0.79 m。可见增殖区相当窄。但在这个区域里增殖非常有效,因为平均自由程很短。

慢化-增殖区的厚度  $\Delta x \approx 0.88 \text{ m}$  是一个合理的估计。考虑了中子倍增、慢化、增殖、屏蔽、冷却管道和支撑结构等诸多因素的高度复杂的数值模型计算表明,整个包层-屏蔽系统的厚度通常在  $1 \text{ m} < b < 1.5 \text{ m}$  的范围。因此,从简单核聚变反应堆的设计考虑,我们将厚度  $b$  选为

$$b = 1.2 \quad (\text{m}) \quad (5.11)$$

经过冗长的讨论,我们终于得到了  $b$  的值,不久我们就将看到,这个值在决定反应堆的其他几何尺寸方面将发挥主导作用。

### 5.5.3 等离子体半径和线圈厚度

同时考虑到两个主要设计要求——成本最小化和满足磁应力极限,我们即可确定等离子体半径  $a$  和线圈厚度  $c$ 。对每一个量可以给出一个简单模型,然后将二者耦合起来得到关于  $a$  和  $c$  的代数关系式,这样我们就可以同时解得待求的值。

#### 1. 最低成本

可以想象,计算聚变反应堆的成本是一项相当复杂的任务。一般必须包括资金成本、运行成本、燃料成本以及复杂的融资手段。我们将看到,与化石燃料电厂或裂变反应堆相比,聚变反应堆是一个相当大的设施,这意味着资金成本是一个重要的考虑因素。因此,对资金成本的准确估算是实现总体成本最小化目标的重点。

资金成本包括两个主要组成部分:固定成本和核岛成本,即

$$\text{总资金成本} = \text{固定成本} + \text{核岛成本} \quad (5.12)$$

固定成本是指与热源种类(如聚变、裂变、化石燃料等)无关的基本相同的成本部分。这些成本包括涡轮机组、发电机组、建筑设施等。对聚变堆设计的详细研究表明,固定成本通常占总资金成本的一多半。核岛成本是指与核聚变装置直接相关的成本。它们主要由包层-屏蔽和磁体这样的大工程部件的建设成本决定。第一壁也占有一定成本,但不是主要的,为了简单起见,这里我们予以忽略。

这里采用的资金成本模型基于以下两个简单可行的假设。首先,假定固定成本与电力输出成正比。大功率的输出需要大的建筑、大型涡轮机和大型发电机等,因此如果固定成本用  $K_F$  表示,那么这个假设意味着:

$$K_F = C_F P_E \quad (5.13)$$

其中  $C_F$  是常数。第二个假设是,核岛成本正比于大型工程材料(即包层-屏蔽和磁体)的体积。这些部件越大,那么必然消耗的材料越多,建设规模越大,工程所需费用越高。因此,如果核岛成本用  $K_I$  表示,那么这个假设意味着:

$$K_I = C_I V_I \quad (5.14)$$

其中  $C_I$  是常数;工程体积  $V_I$  由下式给定(图 5.1):

$$V_I = 2\pi^2 R_0 [(a + b + c)^2 - a^2] \quad (5.15)$$

反应堆资金成本最小化不是指其本身的实际成本,而是指每瓦成本。这样就避免出现零功率则零成本的无聊结果。因此,如果每瓦成本定义为  $C = (K_F + K_I) / P_E$ ,则待求最小值可以表示为:

$$C = C_F + C_I \frac{V_I}{P_E} \quad (5.16)$$

由于  $C_F$  和  $C_I$  是常数,因此,成本最小化等价于给定输出功率所需的材料体积的最小化:

$$\frac{V_I}{P_E} = \frac{2\pi^2 R_0 [(a + b + c)^2 - a^2]}{P_E} \quad (5.17)$$

这种形式很方便,因为最小化的量直接表示为反应堆几何尺寸的函数,而不需要指明难以计算的系数。

下一步是将式(5.17)变换成确定  $a$  和  $c$  的更有用的形式。为此我们需要利用  $P_E$  和  $P_w$  之间的关系来消除  $R_0$ ,过程如下。首先,由第 4 章可知,对于完全点火等离子体,输出电力与产生的热核聚变功率的关系为:

$$P_E = \frac{1}{4} \eta_t (E_\alpha + E_n + E_{Li}) n^2 \langle \sigma v \rangle (2\pi^2 R_0 a^2) \quad (5.18)$$

其次,按定义,中子壁负荷与等离子体表面面积的乘积等于等离子体产生的中子总功率,即产生的所有聚变中子功率均穿过第一壁,它可以表示为:

$$P_w (4\pi^2 R_0 a) = \frac{1}{4} E_n n^2 \langle \sigma v \rangle (2\pi^2 R_0 a^2) \quad (5.19)$$

于是可得  $R_0$  为:

$$R_0 = \left[ \frac{1}{4\pi^2 \eta_t} \frac{E_n}{E_\alpha + E_n + E_{Li}} \right] \frac{P_E}{aP_w} = 0.04 \frac{P_E}{aP_w} \quad (\text{m}) \quad (5.20)$$

其中选取的热转换效率值是  $\eta_t = 0.4$ 。

现在将  $R_0$  的表达式代入式(5.17):

$$\frac{V_1}{P_E} = \left[ \frac{1}{2\eta_t} \frac{E_n}{E_\alpha + E_n + E_{Li}} \right] \frac{(a+b+c)^2 - a^2}{aP_w} = 0.79 \frac{(a+b+c)^2 - a^2}{aP_w} \quad (5.21)$$

式(5.21)是确定未知量  $a$  和  $c$  的两个待求关系中的一个。我们看到,  $P_w$  出现在分母上,这证实了我们的直觉,即最低成本反应堆应当运行在最大可能壁负荷的条件下,根据假定的约束,  $P_w = 4 \text{ MW/m}^2$ 。

## 2. 线圈的最小厚度

线圈的最小厚度可通过简单的应力分析来估计。假设线圈由结构均匀的超导材料绕制,这种材料的最大应力极限是由约束值  $\sigma_{\max}$  给定。为了简化计算,我们将环形位形下的磁体等价于长度为  $2\pi R_0$  的直螺线管磁体,几何尺寸如图 5.7 所示。

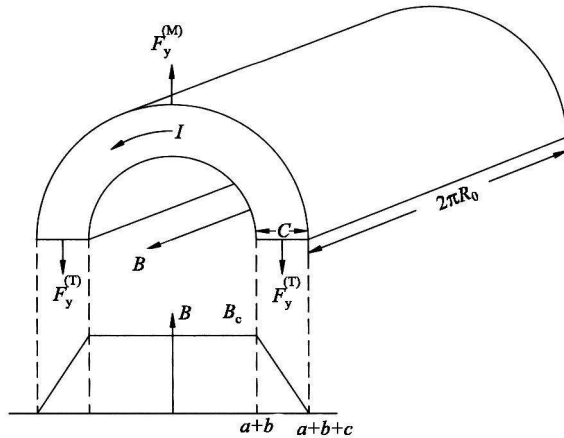


图 5.7 磁场线圈的直线模型显示了磁力  $F_y^{(M)}$  和两端的拉力  $F_y^{(T)}$



通过拉伸力分析即可估计出线圈厚度。基本思路是将线圈拆分为两半,然后计算向上向下拉伸磁体的磁力。这两个拉伸力在中平面必须保持平衡,如图 5.7 所示。

我们先来计算向上的净磁力。作用在线圈电流微元  $dl$  上的向上的径向力微元为  $dF^{(M)} e_r$ 。这个力可表示为  $dF^{(M)} e_r = B I dl e_r$ 。这里,  $B$  是作用于电流的平均磁场。由于磁场从螺线管内侧的  $B_c$  变化到螺线管外的 0,因此我们可以将磁场合理地近似为平均值  $B_c/2$ 。其次,根据安培定律,电流  $I$  可用螺线管磁场表示出来,即  $I = 2\pi R_0 B_c / \mu_0$ 。最后,由图 5.7 所示可知,沿线圈平均半径的微分线元可以写成  $dl = (a + b + c/2) d\theta$ 。将这些结果综合起来,可得:

$$dF^{(M)} e_r = \frac{\pi R_0 B_c^2}{\mu_0} \left[ a + b + \frac{c}{2} \right] d\theta e_r \quad (5.22)$$

这个力的向上分量可由式(5.22)与  $e_y$  点积得到,并注意  $e_r \cdot e_y = \sin\theta$ :

$$dF_y^{(M)} = \frac{\pi R_0 B_c^2}{\mu_0} \left[ a + b + \frac{c}{2} \right] \sin\theta d\theta \quad (5.23)$$

对  $\theta$  进行  $0 \leq \theta \leq \pi$  范围上的积分,即可得到净的向上的力  $F_y^{(M)}$ :

$$F_y^{(M)} = \frac{2\pi R_0 B_c^2}{\mu_0} \left[ a + b + \frac{c}{2} \right] \quad (5.24)$$

这个力代表了拉力平衡中的上半部分。注意,这里  $B_c$  的值尚未被确定为约束值  $B_{\max}$ ,得出这一结论还需要一些巧妙的推理,一会儿我们再来讨论这个问题。就目前而言,重点是要确定力平衡的下半部分,即结构材料内部拉力的计算。回到图 5.7,由对称性可以看出,中平面上受到两个相等的向下的拉力  $F_y^{(T)}$ 。显然,当结构处于最大允许应力极限值  $\sigma_{\max}$  的约束时,线圈厚度最小。根据简化假设,应力在整个线圈厚度上是均匀的,中平面上每半边的拉伸力正是横截面上承受的最大应力:

$$F_y^{(T)} = \sigma_{\max} (2\pi R_0 c) \quad (5.25)$$

这是拉伸力平衡的另一半。磁体平衡要求这两个拉力必须等于向上的磁力:

$$2F_y^{(T)} = F_y^{(M)} \quad (5.26)$$

代入力的适当的表达式,即可解得线圈的厚度:

$$c = \frac{2\xi}{1 - \xi} (a + b) \quad (5.27)$$

其中  $\xi = B_c^2 / 4\mu_0 \sigma_{\max}$ 。如之前预料,磁场越强,线圈越厚。式(5.27)就是求解未知量  $a$  和  $c$  所需的第二个关系式。

推导的下一步是将  $c$  代入  $V_i/P_E$  的表达式,得到:

$$\frac{V_i}{P_E} = \frac{0.79}{P_w(1-\xi)^2} \left[ 4\xi a + (1+\xi)^2 \frac{b^2}{a} + 2(1+\xi)^2 b \right] \quad (5.28)$$

成本参数  $V_i/P_E$  是  $a$  的函数,它有一个最小值,如图 5.8 所示。远小于最佳值的  $a$  值将导致包层不能有效利用(图 5.9)。  $a$  值越大,则装置尺寸越大,功率密度越低,因此成本就越高(图 5.9)。最佳  $a$  值位于中间区域,可通过令  $\partial(V_i/P_E)/\partial a = 0$  获得,结果是:

$$a = \frac{1+\xi}{2\xi^{1/2}} b \quad (5.29)$$

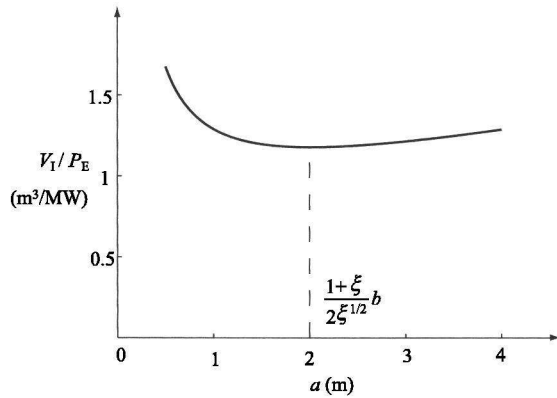


图 5.8  $P_w = 4 \text{ MW/m}^2$  和  $\xi = 0.11$  情形下成本参数  $V_i/P_E$  关于等离子体半径  $a$  的函数曲线

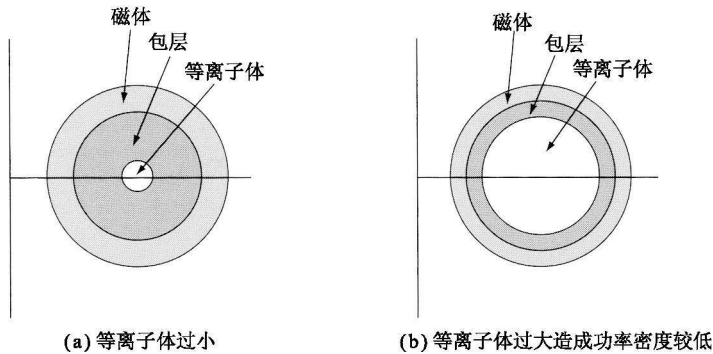


图 5.9 导致包层低效率的原因

代入式(5.29),即得到  $c$  和  $V_i/P_E$  的值:

$$c = \frac{\xi^{1/2}(1+\xi^{1/2})}{1-\xi^{1/2}} b$$

$$\frac{V_1}{P_E} = 1.58 \frac{1 + \xi}{(1 - \xi^{1/2})^2} \frac{b}{P_w} \quad (5.30)$$

在代入数值前,对  $\xi \sim B_c^2$  的选取还要说几句。显然,当  $B_c \rightarrow 0$  时线圈厚度和成本减至最低。但小磁场意味着高  $\beta$ ,从等离子体物理的角度来看这很难实现。有人可能会问,在  $\beta$  和  $B_c$  之间是否存在最佳平衡。事实上,对于大多数聚变位形,在实验上实现高  $\beta$  是非常困难的,因此这种权衡是要求在边界上达到最大的允许磁场,尽管如此,高磁场还是增加了成本。因此结论是,等离子体物理上的考虑要求  $B_c$  设置为等于其最大允许限制值,即  $B_c = B_{\max} = 13 \text{ T}$ ,对应的  $\xi$  值为  $\xi = B_{\max}^2 / 4 \mu_0 \sigma_{\max} = 0.11$ 。

利用这个  $\xi$  值,连同其他约束值,即得到如下的  $a, c$  和  $V_1/P_E$  的值:

$$\left. \begin{aligned} a &= 2.0 \quad (\text{m}) \\ c &= 0.79 \quad (\text{m}) \\ V_1/P_E &= 1.2 \quad (\text{m}^3/\text{MW}) \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

这些值与通过更详细、严谨的研究导出的结果是一致的。作为一个实例,我们再来看一下 ITER 项目设计的模型线圈(图 5.4)。最后,值得指出的是,最大磁场( $\xi = 0.11$ )下的  $V_1/P_E$  的值要比甚小磁场极限( $\xi \rightarrow 0$ )下的值约大 2.5 倍。实现高  $\beta$  带来等离子体物理方面的困难的确需要付出很高的成本代价。

#### 5.5.4 装置大半径和等离子体的表面积、体积

要计算的最后一个几何量是大半径。将  $a$  代入式(5.20)即可得到:

$$R_0 = 0.04 \frac{P_E}{a P_w} = 5.0 \quad (\text{m}) \quad (5.32)$$

现在,装置几何已经完全确定。有关的几个几何量——等离子体环径比、等离子体表面积和等离子体体积——可直接代入算出来:

$$\left. \begin{aligned} R_0/a &= 2.5 \\ A_p &= 4\pi^2 R_0 a \approx 400 \quad (\text{m}^2) \\ V_p &= 2\pi^2 R_0 a^2 \approx 400 \quad (\text{m}^3) \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

现在我们可以将核裂变与核聚变进行一个有用的比较。一个典型的压水反应堆(压水堆)可能载有 65 000 根燃料棒,每根直径 1.3 cm,长 3.7 m。这些燃料棒的总表面积约为  $10\,000 \text{ m}^2$ ,是聚变反应堆的 25 倍。表面积越大,冷却剂就越容易将热量带走,因此裂变反应堆可以在比聚变堆更高的功率密度下运行。同样,燃料棒系统(棒、结构、冷却液)的总体积(相当于等离子体体积)可以装满一个直径约

3.7 m,长4 m的容器,体积相当于大约  $40 \text{ m}^3$ ,要比聚变的体积小10倍。

由此我们得出以下结论:聚变反应堆的热只能通过等离子体周围的环形表面积传递出去。冷却管不能插入到等离子体中,因为那样将使等离子体温度降低并导致冷却管自身被熔化。因此,要产生一定量的功率,聚变堆必须有大的体积,那样才能使热通过相对较小的约束表面积释放出去。大体积意味着聚变堆的建设成本内在地就要比化石燃料电厂或裂变堆高得多。好在这种高成本能够通过以下几方面来平衡:辐射水平较低;废物处理方便;与裂变堆相比,核扩散的风险减少。此外,燃料供应的低成本和高可靠性,以及无温室气体和其他污染物排放等优势使得聚变能与化石燃料相比占有一定优势。

### 5.5.5 功率密度和等离子体压强

我们还记得,功率密度大意味着反应堆堆芯可以较小,单位功率的产生成本可以较低。反之也一样。衡量功率密度的一种方便的指标是用等离子体(从 $\alpha$ 粒子和中子)产生的总功率除以等离子体体积所得的比。这个比值可通过总功率平衡关系来计算:

$$\begin{aligned} P_\alpha + P_n &= \frac{E_\alpha + E_n}{E_\alpha + E_n + E_{Li}} (P_\alpha + P_n + P_{Li}) \\ &= \frac{E_\alpha + E_n}{E_\alpha + E_n + E_{Li}} \frac{P_E}{\eta_t} \end{aligned} \quad (5.34)$$

因此,等离子体的功率密度为:

$$\frac{P_\alpha + P_n}{V_p} = \frac{E_\alpha + E_n}{E_\alpha + E_n + E_{Li}} \frac{P_E}{\eta_t V_p} = 4.9 \quad (\text{MW}/\text{m}^3) \quad (5.35)$$

裂变反应堆的等效值大约为  $100 \text{ MW}/\text{m}^3$ 。正如先前所说,与裂变相比,聚变的表面积与体积比相对较小,因此要求反应堆的功率密度相对较低,体积较大,资金成本较高。

下面来考虑等离子体的压强。回想一下, $\alpha$ 粒子和中子的功率与聚变截面有关:

$$P_\alpha + P_n = \frac{1}{4} (E_\alpha + E_n) n^2 \langle \sigma v \rangle V_p \quad (5.36)$$

由于  $p = 2nT$ ,因此等离子体压强可以写为:

$$P = \left[ \frac{16}{E_\alpha + E_n} \frac{P_\alpha + P_n}{V_p} \right]^{1/2} \left[ \frac{T^2}{\langle \sigma v \rangle} \right]^{1/2} = 8.4 \times 10^{-12} \left[ \frac{T_k^2}{\langle \sigma v \rangle} \right]^{1/2} \quad (\text{atm}) \quad (5.37)$$

其中, $T$ 的单位是 keV; $\langle \sigma v \rangle$ 的单位是  $\text{m}^3/\text{s}$ 。显然,为使所需的 $\beta$ 极小,装置必须运

行在使函数  $T^2/\langle\sigma v\rangle$  最小化的温度,即在 15 keV 上。由这个结果和  $\langle\sigma v\rangle = 3 \times 10^{-22} \text{ m}^3/\text{s}$  得到下述典型聚变反应堆的等离子体参数:

$$\left. \begin{aligned} p &= 7.2 \quad (\text{atm}) \\ T &= 15 \quad (\text{keV}) \\ n &= 1.5 \times 10^{20} \quad (\text{m}^{-3}) \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

我们看到,与室温空气(基本上可用  $\text{N}_2$  代替)相比,聚变等离子体的温度大约要高出 60 万倍,而数密度则低约 170 万倍。因此就数密度而言,等离子体可视为准真空。

### 5.5.6 等离子体物理量 $\beta$ 和 $\tau_E$

设计中最后两个量是等离子体比压  $\beta$  和能量约束时间  $\tau_E$ ,这两个量特别重要,因为它们的值是本书整个第二部分的基础。具体来说,等离子体物理学家的任务就是设法形成能够同时满足聚变堆所需的  $\beta$  和  $\tau_E$  值的等离子体。本书第二部分着重论述实现这些目标的等离子体物理和相应的方法。

首先考虑能量约束时间。由最低点火要求  $p \tau_E = 8.3 \text{ atm s}$  很容易计算出所需的  $\tau_E$  值。对  $p = 7.2 \text{ atm}$ ,这个值为:

$$\tau_E = 1.2 \quad (\text{s}) \quad (5.39)$$

磁场位形必须能够提供对等离子体热能的约束,使得通过热传导自然衰减的时间略大于 1 s。

下一步,通过等离子体压强和最大允许磁场  $B$  即可确定所需的最低等离子体比压  $\beta$ 。需要注意的是,在环形位形下,几何效应使得等离子体中心磁场( $\beta$  据以定义之处)比  $B_{\text{max}}$  要小。为了看清这一点,我们不妨检视一下图 5.10。这里,对积分形式的安培定律可以看出,磁场与大半径  $R$  成反比衰减:

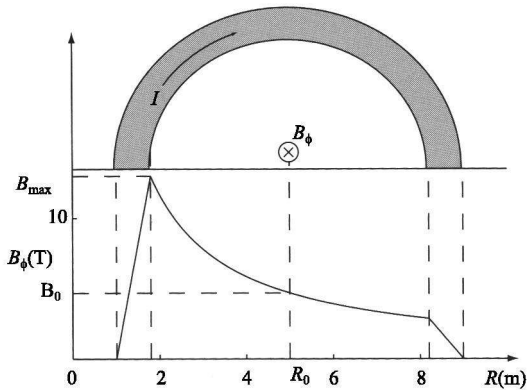


图 5.10 磁场  $B_\phi$  是大半径  $R$  的函数

(图中显示,  $B_\phi$  从线圈内的  $B_\phi = B_{\text{max}}$  向外以  $1/R$  衰减)

$$\mu_0 I_c = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B_\phi R d\phi = 2\pi R B_\phi \quad (5.40)$$

或

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi R} = B_0 \left[ \frac{R_0}{R} \right] \quad (5.41)$$

在这些表达式里,  $I$  是流过环向磁场线圈的总电流;  $B_\phi$  是环向磁场;  $B_0$  是  $B_\phi$  在大半径  $R = R_0$  处的值, 这个位置也是  $\beta$  据以定义的位置。

$1/R$  定标关系意味着最大磁场  $B = B_{\max}$  出现在线圈内  $R = R_0 - a - b$  位置处。因此, 我们有:

$$B_0 = \frac{R_0 - a - b}{R_0} B_{\max} = 4.7 \quad (\text{T}) \quad (5.42)$$

几何效应大幅降低了等离子体中心的磁场。由此可以很容易计算出所需的  $\beta$  值:

$$\beta = \frac{p}{B_0^2/2\mu_0} = 0.082 \quad (5.43)$$

也就是说, 作为现行最成功的聚变装置, 托卡马克能够实现的最大  $\beta$  值约为 8.2%。

## 5.6 本章总结

第5章给出了简单的一般聚变反应堆的设计过程。我们得到了所有感兴趣的几何量以及等离子体关键参数的典型值。设计参数列于表 5.3。有趣的是, 这种设计主要是受到工程上和核物理上的约束, 等离子体物理所起的作用不大。等离子体物理方面的主要贡献是使我们认识到, 实现高  $\beta$  是一项艰巨的任务, 这意味着强磁场是必需的, 尽管这会导致成本上升。

设计审查表明, 磁约束聚变反应堆的特点是有有一个区域较大且功率密度较低的芯部。其根本原因是这种位形的表面积与体积的比较小, 热量只能通过环形等离子体表面传递出去, 冷却管不能插入到等离子体内, 以提高表面积对等离子体体积的比。大尺寸和低功率密度这二者意味着, 聚变反应堆的建设成本会比较高, 这必须依靠燃料供应的低成本和高可靠性以及一些潜在的环境优势来加以平衡。世界能源的消耗、供应和在未来几十年对环境的影响的演变, 将最终决定聚变能的经济竞争力。

最后, 值得指出的是, 反应堆的重要的等离子体物理要求是  $\beta \approx 8\%$ ,  $\tau_E \approx 1 \text{ s}$  和  $T \approx 15 \text{ keV}$  三项指标必须同时实现。这些准则是我们在本书第二部分里要讨论的磁约束聚变等离子体物理的重点。

表 5.3 一般聚变堆参数表

名 称	符 号	数 值
包层-屏蔽厚度	$b$	1.2 m
线圈厚度	$c$	0.79 m
小半径	$a$	2.0 m
大半径	$R_0$	5.0 m
环径比	$R_0/a$	2.5
等离子体表面积	$A_P$	400 m <sup>2</sup>
等离子体体积	$V_P$	400 m <sup>3</sup>
功率密度	$(P_\alpha + P_n)/V_P$	4.9 MW/m <sup>3</sup>
$R = R_0$ 处磁场	$B_0$	4.7 T
等离子体压强	$p$	7.2 atm
等离子体温度	$T$	15 keV
等离子体数密度	$n$	$1.5 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$
能量约束时间	$\tau_E$	1.2 s
归一化等离子体压强	$\beta$	8.2%

## 参考书目

多年来,国际聚变界已经就大规模点火实验和聚变反应堆进行了许多设计。以下这些参考文献提供了反应堆设计的概述以及一些装置的具体工程设计和概念设计方面的有用资料。

### 1. 聚变反应堆设计综述

Dolan, T. J. (1982). *Fusion Research*. New York: Pergamon Press.

Gross, R. (1984). *Fusion Energy*. New York: John Wiley & Sons.

Rose, D. J. and Clark, M. (1961). *Plasmas and Controlled Fusion*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Stacey, W. M. (1981). *Fusion Plasma Analysis*. New York: John Wiley & Sons.

Stacey, W. M. (2005). *Fusion Plasma Physics*. Weinheim: Wiley-VCH.

### 2. 点火实验和聚变反应堆的具体设计

Badger, B., Abdou, M. A., *et al.* (1974). *UWMAK-I - A Wisconsin Toroidal Fusion Reactor Design*, UWFDM-68, University of Wisconsin Report. Madison Wisconsin: University of Wisconsin.

Coppi, B., Airoldi, A., Bombarda, F., Cenacchi, G., Defragiache, P., and Sugiyama, L. E. (2001). Optimal regimes for ignition and the Ignitor Experiment, *Nuclear Fusion* **41**, 1253.

- ITER Team (2002). *ITER Technical Basis*. ITER EDA Documentation Series Number 24. Vienna: IAEA.
- Maisonnier, D., Cook, L., et al. (2005). *A Conceptual Study of Commercial Fusion Power Plants*, EFDA-RP-RE-5.0, EFDA Report.
- Meade, D. M. (2000). Mission and design of the Fusion Ignition Research Experiment (FIRE), *Proceedings of the Eighteenth IAEA International Conference on Fusion Energy, Sorrento, Italy*. Vienna: IAEA.
- Najmabadi, F., Conn, R. W., et al. (1991). *The Aries-I Tokamak Fusion Reactor Study. Fusion Technology*, p. 253 Amsterdam: North Holland.
- Najmabadi, F. and the ARIES Team (1997). *Overview of the ARIES-RS Reverse-Shear Tokamak Power Plant Study*, Fusion Engineering and Design Vol 38, P. 3. Amsterdam, North Holland.
- Najmabadi, F. Jardin, S. C. et al. (2000). ARIES-AT: An advanced Tokamak, advanced technology fusion power plant, *Proceedings of the Eighteenth IAEA International Conference on Fusion Energy, Sorrento, Italy*. Vienna: IAEA.

## 习 题

5.1 电阻性磁体托卡马克中子源如图 5.11 所示。该磁体中央回臂充满了整个环中心区域。为了简单起见,假设磁体消耗的总欧姆功率等于长为  $L$  的回臂消耗的两倍。等离子体密度取最大运行值(即格林沃尔德极限值),就眼下来说可简化为  $n_{20} = 0.8B_0/R_0$ 。

① 证明:对于已知的  $R_0$  和  $b$ ,中子功率对磁损耗功率的比作为小半径  $a$  的函数有最大值。

② 对  $T = 15 \text{ keV}$ ,  $R_0 = 3 \text{ m}$ ,  $b = 1 \text{ m}$  情形,计算最佳  $a$  值,最佳环径比  $R_0/a$ ,以及相应的功率比最大值。如果  $B_{\max} = 15 \text{ T}$ ,这里  $B_{\max}$  是线圈位置磁场的最大值,试计算总的中子功率和中子壁负载。

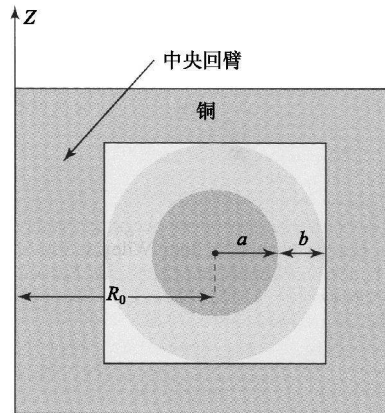


图 5.11

5.2 稳恒磁场由流过金属圆柱体的均匀电流产生。圆柱的内径为  $a/2$ ,外径为  $a$ 。电流沿纵向流动。线圈由流过线圈中心(即  $0 < r < a/2$ )的冷却水冷却,以保持内表面温度均匀  $T(a/2)$ 。线圈外部绝缘良好,使得没有热量从外表面  $r = a$  逸出。假设导热系数  $\kappa$  和电阻率  $\eta$  均为常数。



① 推导内外表面的温差表达式,假定表面磁场为  $B(a)$ 。

② 就  $\kappa = 400 \text{ W}/(\text{mK})$ ,  $\eta = 2 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ , 和  $B(a) = 2 \text{ T}$  情形计算上述温差。

**5.3** 考虑书中讨论的简单超导核聚变反应堆的  $\alpha$  粒子最大功率密度的问题。假定环向磁场磁体的最大允许磁场(TF)为  $B_{\max} = 13 \text{ T}$ 。反应堆在中子最大允许壁负荷  $P_w = 4 \text{ MW}/\text{m}^2$  条件下运行。反应堆的等离子体压强取相当于最大磁流体稳定极限值,即所谓“特鲁瓦永极限”,眼下它可以写成如下简化形式:  $\beta = 0.12(a/R_0)$ 。这里  $\beta = 2\mu_0 p/B_0^2 = 2\mu_0(p_e + p_D + p_T)/B_0^2$ 。此外,假设  $b = 1.2 \text{ m}$ 。

① 试证:存在使  $\alpha$  功率密度最大化的最佳温度,并计算出该温度。

② 试证:存在使  $\alpha$  功率密度最大化的最佳  $R_0$ 。注意:  $R_0 = R_0(a) = R_0[a(S_\alpha)]$ 。

③ 计算这个最佳  $R_0$ 、 $\alpha$  的最大功率密度、中子的最大功率密度,以及相应的  $a$  值。

**5.4** 本题的目的是检验理想等离子体动力堆(PPPR)的经济可行性。这是一种具有最佳等离子体物理性能的装置。具体来说,假设:①无成本的  $\beta \leq 1$  是可能的;②无成本的任意  $I$  是可能的;③无成本的任意  $\tau_E$  是可能的;④可无成本地使用任何辅助加热手段;⑤不需环向磁场;⑥不需极向磁场;⑦不需欧姆变压器;⑧不需电流驱动。从本质上讲,聚变反应堆仅需由包层-屏蔽和第一壁组成。中子学研究表明,包层-屏蔽的厚度约为  $b = 1.5 \text{ m}$ ,第一壁材料限定中子壁负荷为  $P_w = 4 \text{ MW}/\text{m}^2$ 。电功率要求达到  $P_E = 1 \text{ GW}$ ,热转换效率为  $\eta_t = 0.35$ 。假定每次聚变反应最终产生约  $22 \text{ MeV}$  的热能。现在定义质量利用系数  $F$  为  $F = \text{反应堆质量}/\text{电功率}$ 。对于裂变堆,典型的  $F$  值为  $10^3 \text{ kg}/\text{MW}$ 。试就拓扑上自洽的圆截面聚变反应堆计算使  $F$  取极小值(即最经济的)  $R_0$  和  $a$  值。假设包层和屏蔽的平均密度为  $3 \times 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$ 。讨论取得的结果。

**5.5** 本题研究非圆等离子体截面对简单聚变反应堆设计的影响。目的是要在假设等离子体具有椭圆形状截面的情形下重复书中的设计计算过程。这里椭圆的水平直径为  $2a$ ,垂直直径为  $2\kappa a$ ,其中,  $\kappa$  是等离子体拉长比。包层与屏蔽和磁体也呈椭圆形,但其厚度  $b$  和  $c$  均为截面均匀的。假定所有约束不变,试计算  $V_i/P_E$  的最小值,并就  $0.5 \leq \kappa \leq 2$  情形计算表 5.3 中相应的反应堆参数值。基于这个简单模型,关于非圆截面等离子体可以得出什么结论?

提示两点:第一,本题中椭圆的周长可以近似为  $C = 2\pi a(1 + \kappa^2)/2$ ;第二,在计算磁体最大应力时要注意,最大磁力出现在椭圆扁平的一侧。



## 第二部分

# 聚变能等离子体物理学



# 第 6 章 磁约束聚变概述

## 6.1 引言

前面章节的分析让我们对磁约束聚变反应堆中的等离子体特性有了大概的认识。具体来说,工程上和核物理的要求综合起来表明,聚变等离子体必须达到温度  $T$  约 15 keV,压强  $p$  约 7 atm,等离子体比压值  $\beta$  约 8%,能量约束时间  $\tau_E$  约 1 s;而且等离子体必须被约束在小半径  $a$  约 2 m、大半径  $R_0$  约 5 m 的环形系统内。聚变等离子体物理学界面临的挑战就是要寻找出能够同时实现这些参数的途径。

由于聚变等离子体的行为复杂微妙,与我们日常的直觉经验相差甚远,所以由此衍生出“等离子体物理学”这门物理学新的分支也就不奇怪了。只有对这种物质的新形态有了足够深入的了解,才有可能实现聚变反应堆中需要的稳定的等离子体。

让读者掌握等离子体物理学是本书第二部分的目的。本部分各章描述了产生聚变等离子体所需的等离子体物理知识,目标是要为从事核工程的工程师们提供对等离子体物理学领域的较为严格的介绍。因此,这里的选题和叙述顺序均服务于建设具有实用价值的聚变反应堆这个最终目的。这样做的结果有两个:首先,为了让读者对这一领域有较为全面的认识,很多内容被包括进来;其次,大多数理解性内容是基于对一系列复杂程度不一的流体模型的分析。书中还给出了与确定粒子分布函数的动理学描述相关的更精确的模型,但是这些属于高级课题,对于聚变的入门知识来说不是必要的。

经过多年的研究,为进入等离子体物理学和聚变能领域的新科学家介绍该领域知识结构的自然逻辑已经得到充分发展。这一逻辑的基础就是我们需要产生出能够满足点火基本条件并具有大规模聚变能输出的等离子体。这里所说的点火条件是:

$$p \tau_E = \frac{24}{E_\alpha} \left[ \frac{T^2}{\langle \sigma v \rangle} \right] = 0.11 \times 10^{-22} \frac{T_k^2}{\langle \sigma v \rangle} \quad (\text{atm s}) \quad (6.1)$$

本书在内容材料的组织上遵循实现上述目标所要求的自然逻辑,安排如下:第 7 章半定量地叙述等离子体的定义以及聚变等离子体的某些整体行为特征。目的是在普通的入门水平上为读者提供某种视角来考虑等离子体在电场和磁场中的行

为。第8章和第9章描述单个带电粒子在给定电场和磁场中的运动。这里不考虑场的自洽性问题。尽管这种描述很简单,但它深刻阐明了聚变反应堆的结构,尤其是为什么等离子体必须处于环形结构内的问题。

更深入的研究要用到自洽模型,这构成了第10章的内容。如前所述,这些模型是一组复杂程度不一的流体模型。自洽性很重要,因为等离子体中的粒子运动产生的电流和电荷会对原有的场产生很大的影响,这反过来又会影响到带电粒子的运动,等等。

接下来的第11章和第12章,我们用较简单的流体模型,即所谓的磁流体力学(MHD)模型,来分析各种简单聚变位形下等离子体的宏观平衡和稳定性。磁流体力学稳定性的限制规定了点火条件中可能的压强 $p$ 的上限值。第13章运用磁流体力学理论的结果描述了当前正在研究的聚变能途径的主要磁约束概念。虽然这类方法有很多,但目前表现最好的是“托卡马克”。读者将会看到,磁场几何的具体形态对确立稳态约束下 $\beta$ (从而取得 $p$ )的最大值有非常重要的关系。

接下来描述聚变等离子体的输运性质(第14章)。弄清楚等离子体中粒子和能量是如何通过诸如扩散和热传导这样的输运过程而快速损失掉是很重要的。这些损失决定了等离子体的能量约束时间 $\tau_E$ ,它是点火条件中的一个很重要的参数。

第15章讨论等离子体加热和电流驱动问题,其中描述了几种能够将等离子体加热到聚变温度 $T$ (约 $15\text{ keV} \approx 170 \times 10^6\text{ K}$ )的加热方法。实现 $T = 15\text{ keV}$ 对于 $T^2 / \langle \sigma v \rangle$ 的最小化很重要,由此可实现点火条件中 $p \tau_E$ 的最小化。另外,本章中还给出了一种不用变压器来实现稳态环向电流驱动的方法。第16章简要讨论了国际聚变研究计划的未来方向,着重介绍了ITER装置。

概括起来,本部分的内容排列如下:①等离子体的基本描述;②单粒子行为;③自洽模型;④磁流体力学平衡及其稳定性;⑤聚变位形;⑥输运;⑦加热和电流驱动;⑧聚变研究的未来前景。在开始详细讨论之前,我们不妨将此后各章的主要内容和结论综述如下。

## 6.2 等离子体的基本描述

聚变等离子体是完全电离气体,其行为主要受长程的电场和磁场支配(与此相对的是短程的近距离库仑碰撞作用)。这种行为的结果是等离子体成为十分理想的导体,有很高的电导率。这难免令人称奇,因为等离子体中的电子数密度(即电荷携带者的数量)通常要比铜等良导体中的电子的密度小8个量级。即使这样,聚变等离子体的电导率还是要比铜大40倍。原因是在高温、低密度状态下,电子和离子很少发生库仑碰撞,因此对电流的阻碍作用非常微弱。

高电导率意味着等离子体内部对稳恒电场有很强的屏蔽作用。另一方面,稳恒

磁场则可以穿透等离子体,尽管有些缓慢,而正是这些磁场提供了对等离子体的约束。这就是为什么称作“磁约束聚变”而不说“电约束聚变”或者“电磁约束聚变”。

人们已经导出了确定等离子体在长程集体作用支配下成为良导体条件的明确判据。聚变等离子体充分满足这些判据。在聚变反应堆中,正是高电导率使得利用磁场约束成为可能。

## 6.3 单粒子行为

讨论中假定稳恒磁场已渗入等离子体中,它的作用是提供对等离子体的约束。了解磁约束作用是如何起效的最简单方式是利用牛顿运动定律来确定给定磁场中带电粒子的轨迹。这些带电粒子运动引起的电流和电荷密度对给定磁场的影响等问题可以忽略。这里的目的是要在微观层面上考察给定磁场能否约束住等离子体中的单个带电粒子,抑或造成粒子与第一壁的碰撞而损失掉。

分析表明,粒子运动大体上可以分为三种类型。其中最快也是最主要的运动是带电粒子在时间和空间上缓变的磁场中的长程行为,即所谓的“无碰撞行为”。事实表明,带电粒子沿着螺旋状轨道绕着磁场线进行回旋运动。螺旋的垂直半径,也称作回旋半径,通常很小,不足 1 cm。正是在这个意义上,我们说粒子在垂直于磁场的方向上被约束住了。在平行于磁场的方向上,粒子可以自由运动,如果磁场线和第一壁相交,粒子就会迅速损失掉。聚变磁约束位形之所以均采用环形位形,且有磁场线环绕其表面但不与壁相交,犹如理发店的旋转招牌,主要原因就是为了避免粒子沿平行方向的损失。电子和离子除了有垂直方向上的“回旋”运动之外,还具有各种磁场梯度引起的横越磁场线的缓慢漂移速度,但是漂移的方向通常并不会引起粒子损失。从无碰撞行为中我们可以得出结论,很多环形磁场结构都可以约束住所有的粒子——不存在粒子和能量损失。

第二类单粒子运动与两个靠得很近的带电粒子间的静电相互作用即库仑碰撞有关。这类运动出现的机会相对较少,这是因为在高温低密度等离子体中极少出现两个粒子距离足够接近并能持续足够长的时间,以至于明显影响到它们的无碰撞轨道的情形。尽管如此,库仑碰撞还是非常重要的,因为它导致粒子和能量通过扩散及其类似过程而损失。分析的目的是要确定各种与粒子碰撞损失率相似和不相似的动量和能量的损失率。这些损失率将在后述各章中被用来确定自洽流体模型中粒子和能量的宏观输运系数。

最后也是最难发生的一类粒子运动是核聚变碰撞。在前面的章节里我们已经讨论过这些碰撞。具有讽刺意味的是,尽管聚变是核能的来源,但在用于理解当前实验结果的大多数等离子体物理学里,忽略掉所有的核效应反倒是一种很好的近似,或者最多把它们看成是一种扰动。未来具有足够高的  $\alpha$  加热功率的实验装置

建立起来,核作用将在等离子体的总体功率平衡中发挥重要作用。但即使是在这种情形下,发生聚变的碰撞次数比较而言依然较少。

概括起来,单粒子运动的层次结构如下:①支配性运动——长程电磁场中的无碰撞行为;②库仑碰撞——较少发生的粒子间近距库仑势范围内的相互作用;③聚变碰撞——更不经常发生的甚短程核作用势下的相互作用。无碰撞行为提供了近乎完美的单粒子约束,库仑碰撞是造成输运的原因,聚变碰撞产生核能。就聚变反应堆而言,“磁约束聚变”原理基本上就体现在对长程力场中带电粒子的充分约束。输运损失必须保持在足够小的水平上,才能使点火和总体可观的功率平衡成为可能。

## 6.4 自洽模型

为了能定量预言聚变等离子体的行为,我们需要自洽的模型。本书给出的等离子体物理学研究主要是基于流体模型。这些模型可以从各种动理学模型的基本原理中推导出来。然而,这些推导不仅需要具备很多数学知识,而且有些过于一般化。因此,我们在书中给出的流体模型的推导是基于质量、动量和能量等守恒定律以及某些简单的直觉。得出的方程看上去和标准流体力学方程很接近,但二者之间存在本质上的差别。

这些差别可以归纳如下。首先,电子和离子各自需要一组独立的流体方程,两个方程组通过麦克斯韦方程组耦合。其次,除了流体力学中的压强梯度力之外,我们还必须考虑流体元所受的电磁力。最后,尽管这些方程组和流体力学方程组看起来相似,但是模型中包含的物理过程有本质上的差别。这一差别反映了这样一个事实:等离子体的行为主要由宏观电场和磁场所支配的长程集体效应决定,而不是由近距碰撞决定。

为了说明这一点,我们设想在等离子体内的某处聚集了一群电子,由此造成些微的电荷不平衡,这种不平衡将产生宏观电场,这是因为电场力具有的长程性将使得远离这群电子的所有其他带电粒子都受到影响。具体来说,就是远处的那些带电粒子的轨道会因受到电场力而改变(一般是通过运动来屏蔽电场)。这表明,即使所有粒子都在做无碰撞运动,远离粒子团的电场几乎是瞬间就能被感知的(也就是说,电场的传播速度是光速);与此相对照,中性气体的流体行为则完全不同,局部压强扰动只能通过一系列的近距碰撞传递到远处,传播速度是声速。

在研究各种等离子体波加热技术中,双流体方程组非常有用。在此情形下,模型几何可以在不损失太多精度的条件下大大简化。当实际的几何效应变得很重要时,双流体方程组通常会变得复杂难解。在这些情况下,如果我们将注意力集中于长波长低频现象,那么双流体模型可以简化为单流体模型,也就是磁流体力学模



型。各种形式的磁流体力学模型为研究宏观平衡及其稳定性以及输运提供了有用的工具。

综上所述,根据质量、动量和能量等守恒定律,加上麦克斯韦方程组,我们可以得到一组双流体模型和单流体模型。这些模型提供了对等离子体行为的自洽描述。与中性气体的标准流体行为相反,长程集体效应和宏观电场、磁场支配着等离子体的行为。就聚变反应堆来说,自洽的流体模型的发展甚为关键,因为用这些模型可以对所有主要的等离子体物理问题进行较为精确的、易于处理的分析。

## 6.5 磁流体力学平衡及其稳定性

自洽模型首先在研究等离子体的宏观平衡及其稳定性方面得到应用。分析中用到单流体磁流体力学模型。目的是要理解和发现各种可以把高 $\beta$ (或者说高 $p$ )等离子体约束在稳定平衡态的磁场几何结构。确立给定位形的磁体系统主要是基于磁流体力学方面的考虑,换句话说,磁流体力学决定了装置的外观,也就是给人的第一印象。

首先,分析表明,即使聚变等离子体是环状的,但仅有环向磁场是不能达到平衡的,还必须有垂直方向上的磁场,即极向磁场。所以平衡位形需要由环向和极向磁场组合而成。优化的组合是基于对宏观稳定性的分析,这里“优化”是指能够实现最大的稳定 $\beta$ 值。

其次,要注意到优化往往意味着敏感性。举例来说,等离子体表面附近的理想导体壁的存在对某些类型的磁流体力学不稳定性具有很强的致稳作用。但是,如果壁面有电阻(实际情况中无法避免),则不稳定性依然存在,只是增长率被大大减缓。如果我们认为这些慢增长模式可以通过反馈来稳定,那么我们就得到了一组优化了的位形。如果由于技术上的原因,反馈不是一种可行的途径,那么壁稳作用就不适用了,我们需要研究另外的优化位形。

最终的结果是,鉴于不同的致稳限定条件,目前有许多种“优化的”磁场位形正在研究之中,它们都可能最终被用于聚变反应堆。就当前实际取得的实验性能表现来看,“托卡马克”是最成功的途径。尽管其 $\beta$ 值的理论上限比某些位形要低,但仍处于实现聚变堆的适当范围之内。业已证明,托卡马克的高性能与非常低的输运水平密切相关,其磁流体力学性能也已满足实验要求。

## 6.6 磁约束聚变概念

当前研究的主要磁约束聚变概念有托卡马克、球形托卡马克、仿星器、反向场箍缩、球马克、场反位形和悬浮式偶极器等。这里除了仿星器之外,其余的都是二维

环形对称的。仿星器是一种内在的三维位形。

本书主要从宏观磁流体力学平衡及其稳定性的角度对上述每一种概念进行描述,并讨论它们在实验运行中的各种局限性,这些局限性会影响它们的表现,但还无法从基本理论上对其作深入的了解。

各种概念的演化以及相应的进展有很大的差别。托卡马克被研究得最充分,总体表现也最好;其次是仿星器;然后是球形托卡马克,后者实际上是小环径比托卡马克。这些位形都具有较强的环向磁场,输运损失也较小,而且都不需要依赖于靠近等离子体的导体壁来实现磁流体力学的稳定运行, $\beta$ 值也在可以接受的范围内。仿星器的优点在于它是唯一不需要在反应堆中引入环向电流驱动的装置,但是它的磁场位形极为复杂,这增加了装置的复杂性和建设成本。如果要在反应堆规模上实现上述任何一种磁场位形,那么,环向磁场的存在将使得装置的体积变得相当大,造价大大提高。

反向场箍缩、球马克和场反位形的环向磁场很小甚至为零。将它们放大到反应堆的尺寸,那么这种反应堆将会是一种结构紧凑、功率密度高的堆型,其造价会大幅度降低。然而,较弱的环向场削弱了等离子体的约束性能,使得输运损失增大,而且每一种位形都存在宏观不稳定性,除非是在等离子体表面附近放置有理想导体壁。所以,即使输运损失可以减少,但要想在实际的具有有限电阻特性的导体壁条件下实现稳态运行,还需要采用反馈技术,这样就增加了技术上的复杂性。

简言之,几十年来,对各种面向磁约束聚变堆的位形研究表明,托卡马克表现最好。力图取代托卡马克的各种其他位形,要么是物理上有优势但技术上不具吸引力,要么是相反情况。目前还没有一种非托卡马克位形显示出明显超越托卡马克的迹象,这也就是为什么国际上第一个燃烧级等离子体装置 ITER 要采用托卡马克位形的原因。

## 6.7 输 运

就本义来说,取得稳定的磁流体力学平衡态约束的等离子体,不会通过向壁的快速、相干的宏观运动而损失能量。但是,等离子体还会通过各种输运过程来损失能量。虽然粒子和磁场的扩散也起到一定的作用,但主要的输运机制还是热扩散。热损失必须要得到补偿(主要通过 $\alpha$ 粒子功率)才能保持聚变能的稳定输出。显然,输运损失不能太大,否则无法实现总体功率平衡。

约束磁场极大地改变了等离子体的输运特性,特别是使等离子体具有明显的各向异性。例如,垂直于磁场方向的导热系数要比平行于磁场方向的导热系数小10个数量级。这就是为什么聚变等离子体一定要处于环形的、并且磁场线环绕着环面内的原因。只有在这种环形磁场中,平行方向上的大的损失才能被消除。也就是

说,通过磁场线连续地绕环面转动,在几何上杜绝了沿磁场  $B$  方向直接流向第一壁的损失路径。指向第一壁的唯一损失路径是横越磁场造成的,这种运输损失非常小。

精确计算库仑碰撞的运输系数需要高深的数学知识,并要用到复杂的动理学模型。本书采用简单得多的“随机行走”论证方法来克服这些困难。利用这种论证方法,我们可以容易地算出直圆柱几何下的运输系数。这种分析可以推广到环形几何上,结果表明,由于存在一类特殊的粒子,其轨道被限定在环面的外侧,因而使得运输损失显著地增加。

尽管这些计算让我们对聚变等离子体中的运输过程有了一定的基本了解,但是计算结果并不总能带来实际实验中对能量约束的乐观预言。原因在于等离子体的温度和密度梯度会激发起一系列的微观不稳定性,造成异常大的等离子体能量损失。等离子体微观不稳定性理论非常复杂,至今尚不能提供完全准确的预言。为了避免这个问题,聚变研究人员已经根据大量实验数据发展出了一些经验定标关系来估计能量运输,书中讨论了这些定标关系。

概括来说,完全电离的磁化聚变等离子体的特征是:高的电导率和高各向异性的运输系数。横越磁场的运输一般要比平行于磁场的运输小好几个数量级。实际上,实验观察到的横越磁场的运输要比经典库仑碰撞理论预测的要快。针对等离子体微观不稳定性驱动起反常运输,目前主要用经验定标律来建立模型。对聚变反应堆有以下结论:就反常运输的抑制来说,目前托卡马克的表现最好;在反应堆规模上,相应的能量约束时间  $\tau_E$  也足够长。可能除了仿星器,其他位形的表现目前都不大理想。但是,如果技术发展到可以抑制引起微观不稳定性的湍流,那么其他位形可能会变得更具吸引力。

## 6.8 加热和电流驱动

这里首先要讨论的问题是如何把等离子体加热到聚变反应堆所需的极高温度,即  $T = 15 \text{ keV}$ 。为此人们采用了多种有效的方法,包括欧姆加热、中性束加热和射频加热等。最终结果是在大型托卡马克装置实验上实现了接近  $30 \text{ keV}$  的温度。驱动这些加热源所需的外界功率很可观,但是并不意味着在反应堆水平上采用这些加热手段就无法实现可观的总体功率平衡。加热方法如下所述。

加热等离子体的最简单方法是欧姆加热。大多数磁约束位形中存在环向电流,它产生的欧姆效应使得等离子体被加热,这与电流使得导线发热的情形非常类似。然而,与导线情形不同,等离子体的电阻率随着温度的升高而减小,所以随着  $T$  升高,加热效率变差。实际结果表明,欧姆加热仅在几个  $\text{keV}$  的范围内是有效的,此后很难进一步提高。

为了把温度从几个 keV 提高到 15 keV,需要辅助的外部功率源。一种方法是向等离子体内注入高能的中性粒子束。束粒子必须是和等离子体粒子属于同一种类(例如,氘或者氦)。中性粒子和低能等离子体离子发生电荷交换碰撞,也就是说,高能中性粒子把一个电子交给低能离子,从而形成高能离子和低能中性粒子。这种方法在实验中非常有效,但是在反应堆上运用要困难得多,因为这要求粒子束的能量要更高,如此一来技术难度大大增加。

把等离子体加热到高温的第二种方法是采用射频加热。等离子体中存在若干种固有的共振频率,使得这种方法非常有效——这有点类似于用微波炉加热食物。等离子体中的电子和离子都可以通过共振来驱动,但是加热离子的高功率、低成本的外部功率源更容易获得。即使如此,电子共振加热在物理上依然有着诱人的特性,如 15.7 节所述,这种方法可以使热量沉积在等离子体内很窄的局部区域,从而提供了一种控制温度分布的外部手段。

总之,加热手段的不断进步体现着聚变研究的成功。反应堆所需的温度应该在不需要过多外界功率注入的情形下实现。

本章的第二个主题是电流驱动。由于磁约束聚变堆预期应是一种稳态装置,因此实现平衡所需的环向电流的那些方法必定采用某种非感应的电流驱动方式。变压器可以在启动过程中和持续时间有限的脉冲式操作中驱动电流,但是无法稳态运行。与加热一样,人们提出了多种电流驱动方式,并通过实验不断改进。

一种方法是向等离子体内注入切向的中性粒子束,产生平行于注入方向的环向动量。这些动量中的一部分通过碰撞传递给电子。以优势动量沿环向流动的电子构成反方向的电流(因为电子带的是负电荷)。

第二种方法是发射具有合适微波频率的射频波。发射系统(即天线或波导)必须设计成使得微波优先沿环向传播。这样的话,微波就可以带动波谷中的电子。随着微波在环上传播,低速电子被加速,产生与传播方向相反的电流。这种情形类似于冲浪者随着波浪前进的情形。

所有这些方法在目前的实验中都成功地实现了非感应电流驱动,使得具有环向电流的稳态运行成为可能。人们面临的主要困难是电流驱动不如加热那样有效,驱动不大的电流就需要很高的功率。由此形成的结果是,对于一个所有电流均需由非感应驱动提供的反应堆来说,有可能无法实现总体功率平衡。幸运的是,在像托克马克这样的一些位形中,环向输运现象会引起固有的自感环向电流。在所有高性能托卡马克中都已经观察到这种复杂过程,它产生的电流可以占到总电流的 90%。这样的话,如果总电流中只有很小的一部分需要非感应驱动,总体功率平衡还是可以实现的。输运引起的这种电流被称作“自举电流”,我们在第 14 章再予以讨论。

综上所述,我们可以采用中性束和射频功率源等有多种方法来进行聚变实验中的加热和非感应电流驱动,这些方法在这两方面都取得了成功。从反应堆的角度来

看,由于将功率转变成环向电流的效率不高,因此电流驱动是个更为困难的问题。

## 6.9 聚变研究的未来

本书讨论的最终目标是未来的聚变研究计划。这项研究的主要目的是了解当 $\alpha$ 粒子加热功率大大超过外部加热功率时燃烧等离子体的物理特性。研究计划的核心是通过国际合作建造一个大规模的下一代聚变研究装置,这就是 ITER。实验反应堆将采用托卡马克位形,它的体积将会和全尺寸反应堆的真实大小相当。其主要目标是首次实现聚变等离子体的强烈燃烧,功率因子 $Q = 10$ 。ITER 将会开辟聚变等离子体研究的新领域——对 $\alpha$ 粒子加热占主导地位的高温等离子体的研究。

### 参考书目

第 6 章简要介绍了理解和建造聚变反应堆所需的等离子体物理知识。有两本篇幅稍长的专著也做过类似的综述,其中包括历史展望。

#### 聚变综述

Fowler, T. K. (1997). *The Fusion Quest*. Baltimore: John Hopkins University Press.

McCracken, G. and Stott, P. (2005). *Fusion, the Energy of the Universe*. London: Elsevier Academic Press.

# 第 7 章 聚变等离子体定义

## 7.1 引言

在前一章中,等离子体被定性地定义为一种电离气体,其行为由集体效应和很高的电导率所支配。本章的目的是要在定性定义基础上导出可量化的明确判据。具体地说,就是要导出一般等离子体(不限于聚变应用)的三个基本参数:特征空间尺度(德拜长度  $\lambda_D$ )、特征时间尺度的倒数(等离子体频率  $\omega_p$ )和特征碰撞参数(“等离子体参数”  $\Lambda_D$ )。这些参数的大小使我们能够区别某种部分电离或者完全电离气体,例如,电子细束、电离层、荧光灯泡中的气体、闪电、焊接电弧,或是我们特别关心的聚变“等离子体”到底是不是等离子体。

在本章中可以看到,具有类似等离子体行为的电离气体必须满足两类不同的判据。第一类判据包括宏观尺度和频率,这是分别与  $\lambda_D$  和  $\omega_p$  相比较而言的。宏观尺度定义为电离气体的典型几何尺寸( $L \sim a \sim R_0$ ),而宏观频率则定义为粒子穿越等离子体的热传导时间的倒数( $\omega_T = v_T/L$ )。等离子体行为要求满足小的德拜长度( $\lambda_D \ll L$ )和高的等离子体频率( $\omega_p \gg \omega_T$ )。在这种状态下,等离子体可以非常有效地屏蔽外界电场,这意味着高的电导率。

第二类判据包括微观库仑碰撞的影响。这些碰撞决定了电离气体的行为是否由长程集体效应所支配,而不是由短程的库仑相互作用所支配。碰撞还与高电导率特性紧密联系。电离气体只有在碰撞率很低的时候才表现出等离子体行为,研究表明,此时相应的等离子体参数  $\Lambda_D$  很高。这个参数表示的是以德拜长度为半径的球体(通常也称为德拜球)内的带电粒子数目,低碰撞率表示德拜球中有很多的粒子。

只有满足上述判据,电离气体才会具有等离子体行为。对于聚变等离子体,还有额外的必须满足的限制条件,它与磁场的存在有关。新的限制条件如下:当带电粒子被约束于磁场中时,它会以特定频率绕给定的磁场线旋转,这个频率和磁感应强度  $B$  成正比,称作回旋频率( $\omega_c$ )。在聚变等离子体中,电子和离子的回旋频率都必须大于各自的热传导时间的倒数。回旋运动的轨道还具有特征半径,它也与  $B$  成正比,称作回旋半径( $r_L$ )。在聚变等离子体中,电子和离子的回旋半径必须小于等离子体的典型宏观尺度。为了使得等离子体能够被磁场约束住,其频率和尺度条件必须得到满足。

接下来讨论的重点是确定定义聚变等离子体的定量判据。主要结论是,对于 5.5 节中导出的描述聚变反应堆的典型参数,上述判据可以很好地满足。

## 7.2 等离子体对稳恒电场的屏蔽——德拜长度

本节讨论等离子体屏蔽稳恒电场的的能力。等离子体能非常有效地屏蔽稳恒电场,这意味着它具有高电导率。下面的计算利用了简单直观的以集体效应为主的等离子体流体模型。分析的结果是导出了一个称作德拜长度的临界长度。如果等离子体的尺度比德拜长度大很多,屏蔽效果将会非常显著。

### 7.2.1 德拜屏蔽的物理图像

为了理解屏蔽效应,有必要回顾一下等离子体总体上含有相同数目的正负带电粒子这一特点。然而,这些粒子并不像在原子中那样被约束在一起,而是可以自由运动,彼此穿越,其行为要由麦克斯韦方程组来确定。清楚了这一点,我们来考虑图 7.1 所示的理想化等离子体电路。假设等离子体的密度为  $n$ ,温度为  $T_e$  和  $T_i$ ,位于相距为  $L$  的两个电极之间。电源提供稳恒电压。另外假设电阻  $R_1$  的值足够大,使得流经等离子体的电流很小,出于简化考虑,在接下来的简单计算中可以将其忽略。

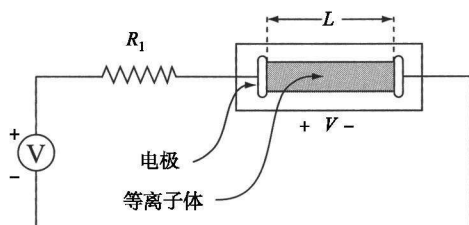


图 7.1 解释德拜屏蔽所用的理想化电路图

通过分析电极上加载电压之后的电子和离子的运动就可以得到德拜屏蔽的物理图像。电子被吸引到正电极,离子被吸引到负电极。先考虑电子,随着电子流向正电极,电极表面形成了一层很薄的面电荷。由于电荷符号和电极电势的符号相反,所以电荷产生的电场和外界电场相反。对负电极附近的离子进行分析可以得到类似的结论。反向的感应电场产生屏蔽效应,称为“德拜屏蔽”。

实际上,表面电荷层并不是无限薄,而是有一定的厚度,这个厚度称作德拜长度。其原因在于粒子的温度不为零。定性说明如下:首先考虑电子,很明显,电子被负电极所排斥,但是因为速度上存在有限的热展宽,某些高能电子可以克服负电势接近负电极。这些电子的存在使得厚度无限小的薄层不能实现完全屏蔽——负电极附近总会有少量的负电荷,它们影响局部电势的值。直观上可以看出,随着温度升高,屏蔽距离亦增大,因为有更多的电子可以接近负电极。

正电极附近也有类似的现象。电子被正电极吸引,正电势俘获了一层负电荷。但是由于能量的有限热展宽,某些电子可以逃脱俘获电位,使得厚度无限小的薄层无法实现完全的屏蔽。所以有限温度效应使得两个电极都不能完全屏蔽,也都具有一定厚度的鞘层。根据对称性,对两个电极附近的离子也可做类似的分析。

有了这个定性的图像,接下来的任务就是推导鞘层厚度  $\lambda_D$  的明确表达式。

### 7.2.2 德拜长度的推导

德拜长度的推导来自对一个简单的等离子体流体模型的分析。这个模型是著名的流体动力学方程组的简单推广。下面我们来推导这个等离子体模型,然后与麦克斯韦方程组耦合。分析这组耦合方程就可以得到德拜长度的明确表达式。

让我们从熟悉的流体动力学动量方程开始:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (7.1)$$

为了把这个方程推广到等离子体情形,需要考虑两种效应。首先,有两类粒子,电子和离子,所以需要两个独立的动量方程。其次,因为电场的存在,等离子体受到额外的力的作用。为了确定这个力,我们假设等离子体的行为类似于流体,即受平滑的长程电场而非短程碰撞的支配。因此小体积  $V$  中的电子感受到的电场力<sup>1)</sup> 为  $\mathbf{F}_E = Q\mathbf{E}$ , 其中,  $Q$  是总电荷量,即  $Q = -en_e V$ 。因为动量方程中包含的是力的密度,所以式(7.1)的添加项可以简单写作  $\mathbf{f}_E = \mathbf{F}_E/V = -en_e \mathbf{E}$ 。离子也有类似的表达式。

我们还可进一步做以下几点近似。首先,因为假设电子电流很小,所以磁场的效应可以忽略。其次,在地面实验室进行的所有实验中,重力引起的效应可以忽略,因为和电场力相比它实在是太小了。根据这些假设,等离子体动量守恒定律的双流体模型为:

$$\left. \begin{aligned} m_e n_e \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \nabla \mathbf{v}_e \right] &= -en_e \mathbf{E} - \nabla p_e \\ m_i n_i \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i \right] &= en_i \mathbf{E} - \nabla p_i \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

现在用这个模型来解释德拜屏蔽。电流可以忽略意味着稳恒态,即  $\mathbf{v}_e \approx \mathbf{v}_i \approx 0$ , 没有电荷的流动。接下来,为了方便起见,假设电子和离子的温度均为常数,即  $T_e = \text{常数}$ ,  $T_i = \text{常数}$ 。另外稳态假设也意味着  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , 所以  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ 。最后,只考虑理想的一维几何条件:所有的物理量都仅是  $x$  的函数。综合这些简化,可以得

1) 原文中误为洛仑兹力。——译者



到下列有关  $n_e$  和  $n_i$  与  $\phi$  的关系的方程式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi}{dx} - \frac{T_e}{en_e} \frac{dn_e}{dx} &= 0 \\ \frac{d\phi}{dx} + \frac{T_i}{en_i} \frac{dn_i}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

它们很容易积分,由此得到:

$$\left. \begin{aligned} n_e &= n_0 \exp(e\phi/T_e) \\ n_i &= n_0 \exp(-e\phi/T_i) \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

其中  $n_0$  是远离电极区域未受扰动的电子和离子的数密度。为了保持电中性,这两个未扰动密度必须相等。为了简单起见,与电势相关的任意常数都可以选择,使得在中点  $x=0$  处  $\phi=0$ 。

将式(7.4)和下述泊松方程联立,可得闭合的方程组。

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n_i) \quad (7.5)$$

将密度表达式代入,可得:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{en_0}{\epsilon_0} [\exp(e\phi/T_e) - \exp(-e\phi/T_i)] \quad (7.6)$$

我们注意到,即使是这种最简单的问题也会得出非线性方程。对它的最简单也是传统的处理方法是假设电压很低,这时有  $|e\phi|/T_{e,i} \ll 1$  成立。由此我们可以把式(7.6)转为线性方程而不失其物理本质。利用泰勒展开式  $\exp(\pm e\phi/T_{e,i}) \approx 1 \pm e\phi/T_{e,i}$  得到:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0} \left[ \frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i} \right] \phi = 0 \quad (7.7)$$

边界条件为:①归一化条件  $\phi(0) = 0$ ;②回路条件  $\phi(-L/2) - \phi(L/2) = V_0$ 。因此答案很容易给出:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\frac{V_0}{2} \frac{\sinh(x/\lambda_D)}{\sinh(L/2\lambda_D)} \\ E &= -\frac{d\phi}{dx} = \frac{V_0}{2\lambda_D} \frac{\cosh(x/\lambda_D)}{\sinh(L/2\lambda_D)} \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

这里,德拜长度的定义为:

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{1}{\lambda_{De}^2} + \frac{1}{\lambda_{Di}^2} = \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 T_e} + \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 T_i} \quad (7.9)$$

图 7.2 画出了  $L/\lambda_D = 20$  时的  $E = -d\phi/dx$  随  $x$  的变化图像。为了比较,图中还画出了真空条件下的结果。由图 7.2 可知,等离子体对电场存在很强的屏蔽。和预期的一样,屏蔽层厚度  $\lambda_D$  随着温度升高而增大,因为高温时有更多的高能粒子使得屏蔽不完全。同时  $\lambda_D$  随密度增大而减小,因为这时有更多的粒子可以参与屏蔽,从而减小了鞘层厚度。

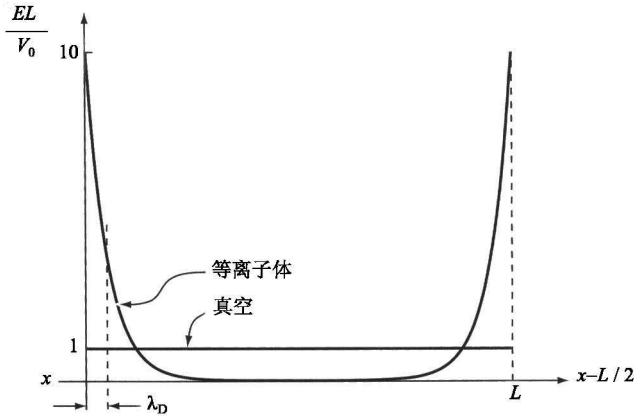


图 7.2  $L/\lambda_D = 20$  时的电场和距离的关系

上述分析可以得出一个重要结论。由于等离子体具有屏蔽稳恒电场的特性,这就意味着能被看成是等离子体的电离气体的几何尺度一定要比德拜长度大很多,即  $L \gg \lambda_D$ 。

要把德拜长度判据应用于聚变等离子体,只需要简单地替换数值就行了。这里需注意,出于数学上的方便,文献中经常仅采用电子德拜长度( $\lambda_D \rightarrow \lambda_{De}$ )。有时这种做法被错误地认为是因为离子的质量很大的缘故。理由是离子很重,很难运动,在问题中仅充当恒定的起中和作用的电荷而已。然而,在我们前述的推导过程中出现的是离子的温度而非其质量,所以从技术上讲,只有当  $T_i \gg T_e$  时,离子德拜长度才可以忽略,但这种情况实际上很难发生。在  $T_i \approx T_e$  的聚变等离子体中,忽略离子德拜长度只会让德拜长度增大几倍,这对目前的实验目的几乎没有影响。为了和传统一致,下面给出电子德拜长度的数值:

$$\lambda_{De} = \left[ \frac{\epsilon_0 T_e}{e^2 n_0} \right]^{1/2} = 2.35 \times 10^{-5} \left[ \frac{T_k}{n_{20}} \right]^{1/2} \quad (\text{m}) \quad (7.10)$$

其中  $T_k$  和  $n_{20}$  的单位分别是 keV 和  $10^{20} \text{ m}^{-3}$ 。对于  $T_k = 15$ ,  $n_{20} = 2$  的聚变等离子体,

可得  $\lambda_{De} = 6.4 \times 10^{-5} \text{ m}$ 。显然,小半径( $a$  约 2 m)的聚变等离子体要比德拜长度判据大 4 个数量级,满足判据的余量很大。

本小节最后一个要点是“准中性”的定义。等离子体内大部分区域的电场被非常有效地屏蔽,这意味着电子和离子的密度很少偏离背景值  $n_0$ 。所以在等离子体内的大部分区域,局部电子密度和局部离子密度几乎完全相等,即  $n_e(x) \approx n_i(x)$ 。举例来说,温度相等时,在距离电极四分之一长度处( $x = \pm L/4$ ),电子和离子的密度差为:

$$\left| \frac{n_e - n_i}{n_0} \right| = \frac{eV_0}{2T} \frac{1}{\cosh(L/4\lambda_D)} \ll 1 \quad (7.11)$$

这个局部的  $n_e(x) \approx n_i(x)$  特性就是准中性,它也是等离子体的基本特征之一。但是请注意:准中性条件并不意味着  $\mathbf{E} = 0$  或者  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ,而仅仅是  $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \ll e n_e$ 。

总之,研究表明,德拜长度是等离子体屏蔽稳恒电场的截止长度。此外,只有在几何尺度远远大于德拜长度时,电离气体才会具有等离子体行为。下面我们来确定与等离子体行为相关的特征频率。

## 7.3 等离子体对振荡电场的屏蔽——等离子体频率

等离子体中存在着称作电子等离子体频率( $\omega_{pe}$ )的特征频率,它定义了判断电离气体是否具有等离子体行为的第二个判据。该判据要求电离气体的宏观振荡频率和时间尺度的倒数都必须远远小于电子等离子体频率。研究表明,这一判据等价于要求等离子体屏蔽掉低频振荡电场和稳恒电场。考虑图 7.1 的电路,振荡电源的频率为  $\omega$ ,幅度为  $V_0$ 。通过分析等离子体对电路的响应,我们可以得到  $\omega_{pe}$  的显性表达式。这个分析是对前述简单流体模型的直接推广。具体来说就是,模型中不仅要加入质量守恒定律,还要求其与时间有关。

### 7.3.1 振荡电场屏蔽的物理图像

等离子体行为中存在一个关键性频率,这一点可以从屏蔽过程的动力学分析中得出。如果我们给图 7.1 所示的电极上突然加上电压,电子和离子就会运动起来以屏蔽电场。因为电子质量很小,其响应要比离子快很多。尽管如此,惯性还是会造成一些延迟。

如果外加频率足够低,可以预期电子将会有充足的时间完成运动屏蔽掉电场。简言之,低频时电子的运动和外加场的时间步调是基本一致的。但是,如果频率足够高,外加场振荡快,以至于电子——尽管它们的质量很小——在场改变方向时仍几乎没有移动,那么在这种情况下,等离子体无法屏蔽电场,也不会产生屏蔽效应,也就无法体现出等离子体的存在。

这里的转变频率就是所谓的电子等离子体频率,下面介绍它的推导过程。

### 7.3.2 电子等离子体频率的推导

电子等离子体频率的推导与稳恒电场下德拜屏蔽的分析过程类似,但有三处修正。首先,因为离子的质量很大,所以在非低频的振荡电场中,它们的运动和电子的运动相比可以忽略,这极大地简化了计算,因此认为离子具有无限大而非有限的质量是一种很好的近似。无限大质量假设意味着离子在计算中仅仅是一种由带正电粒子组成的固定的起中和作用的背景。即使加入振荡电场之后,离子仍以常数密度静止在原地。根据双流体模型,离子的密度和速度可以分别表示为  $n = n_0$  和  $\mathbf{v}_i = 0$ 。

第二点修正再次利用了电子运动产生的电流很小这个假设。这让我们可以忽略感应磁场的影响,也就是说电场的感应部分很小。因此,电场基本是静电场:

$$\mathbf{E}(x, t) = -\nabla\phi(x, t) - \partial\mathbf{A}(x, t)/\partial t \approx -\nabla\phi(x, t)$$

第三点修正考虑到电子在振荡电场的作用下的持续运动,即  $\mathbf{v}_e \neq 0$ 。虽然电子的电流密度可以忽略,但是它对电荷密度有重要影响,必须包括进来。也就是说,现在模型中多了一个未知量( $\mathbf{v}_e = v_e \mathbf{e}_x$ )。为了使方程组闭合,除了动量方程,模型中还需要包含著名的质量守恒关系式。对于一维的  $T_e$  恒定的电子,自洽的振荡屏蔽模型可以表示为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_e v_e) &= 0 \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial n_e}{\partial x} &= \frac{e}{m_e} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{T_e}{m_e n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n_0) \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

其中  $n_e, v_e$  和  $\phi$  是未知量。请注意,模型由三个非线性耦合的偏微分方程组成。为了进一步处理,还需要另外两处简化。首先,这里需要采用与处理稳恒情形下德拜屏蔽时所采用的相同假设,假设电势能远远小于热能,即  $e\phi \ll T_e$ 。由此方程组可以线性化,本底状态为  $n_e = n_0, \phi = v_e = 0$ 。接着可以得到  $n_e(x, t) = n_0 + n_1(x, t)$ , 其中,  $n_1 \ll n_0$ 。类似地,  $\phi$  和  $v_e$  也看作一阶小量。

第二处简化是在计算过程中只考虑等离子体的正弦稳态响应。我们可以设想系统中存在很小的损耗,所有初始的瞬态过程都被阻尼消耗了。基于这个假设,振荡回路的基本分析原理指出,所有的扰动量随时间的演化关系都必须具有以下数学形式:

$$Q_1(x, t) = Q_1(x) \exp(-i\omega t)$$

通过这些简化容易看出,振荡屏蔽模型被简化为:

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= -i \frac{n_0}{\omega} \frac{dv_e}{dx} \\ v_e &= i \frac{T_e}{\omega m_e} \frac{d}{dx} \left[ \frac{e\phi}{T_e} - \frac{n_1}{n_0} \right] \\ \frac{d^2\phi}{dx^2} &= \frac{e}{\epsilon_0} n_1 \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

通过  $\phi$  可以轻易地消去  $n_e$  和  $v_e$ 。消去过程中引入了两个不定积分函数,对于正弦稳态解,它们必定为零。由此,上式最终化简为一个关于  $\phi$  的常微分方程:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{(1 - \omega^2/\omega_{pe}^2)}{\lambda_{De}^2} \phi = 0 \quad (7.14)$$

其中,等离子体频率  $\omega_{pe}$  定义为:

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} \quad (7.15)$$

跟前面一样, $\phi$  的边界条件是  $\phi(-L/2) - \phi(L/2) = V_0$  和  $\phi(0) = 0$ 。我们需要的解为

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, t) &= -\frac{V_0}{2} \frac{\sinh(x/\hat{\lambda}_D)}{\sinh(L/2\hat{\lambda}_D)} \exp(-i\omega t) \\ \frac{n_1(x, t)}{n_0} &= -\frac{eV_0}{2T_e} \left[ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} \right] \frac{\sinh(x/\hat{\lambda}_D)}{\sinh(L/2\hat{\lambda}_D)} \exp(-i\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

其中,  $\hat{\lambda}_D$  是电子的有效德拜长度,定义为:

$$\hat{\lambda}_D^2 = \frac{\lambda_{De}^2}{1 - \omega^2/\omega_{pe}^2} \quad (7.17)$$

仔细研究式(7.16),可以得到如下有关振荡屏蔽的结论。频率低于等离子体频率( $\omega^2 < \omega_{pe}^2$ )时,屏蔽效果和稳恒情形下类似,只是有效德拜长度较长。这是因为电子由于惯性其相位始终落后,从而削弱了屏蔽,导致德拜长度增加。

随着频率接近等离子体频率( $\omega^2 \rightarrow \omega_{pe}^2$ ),有效德拜长度趋于无穷,即  $\hat{\lambda}_D \rightarrow \infty$ 。在这种极限条件下,电势和密度扰动简化为:

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, t) &\approx -V_0 \frac{x}{L} \exp(-i\omega t) \\ \frac{n_1(x, t)}{n_0} &\approx -\frac{eV_0}{2T_e} \left[ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} \right] \frac{x}{L} \exp(-i\omega t) \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

我们看到,电势解趋近于真空情形下的解,密度扰动消失。当频率达到这个临界点

或者变得更高时,屏蔽效应则完全消失了。

上述分析的主要结论是,  $\omega_{pe}$  是等离子体屏蔽振荡电场的临界频率。等离子体对低于等离子体频率的振荡电场将会有很好的屏蔽,对高于等离子体频率的振荡电场则没有屏蔽。所以,电离气体具有等离子体行为的前提是所有的特征频率都必须低于等离子体频率。

实际应用中,等离子体频率在数值上可写为:

$$\omega_{pe} = \left( \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2} = 5.64 \times 10^{11} n_{20}^{1/2} \quad (\text{s}^{-1}) \quad (7.19)$$

对于  $n_{20} = 2$  的聚变等离子体,可得  $\omega_{pe} = 8.0 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ 。这个频率非常高,比所有的碰撞频率、宏观不稳定性频率以及输运和约束时间的倒数都要高很多。如果最短的宏观时间尺度被定义为电子穿越某段宏观长度的极快的热输运时间,也就是说  $\tau_{Te} \equiv 1/\omega_{Te} \sim L/v_{Te}$ , 那么要求  $\omega_{pe} \gg \omega_{Te}$  等价于要求  $\lambda_{De} \ll L$ 。这一等价关系源自德拜长度和等离子体频率之间的基本关系:

$$\omega_{pe} = \sqrt{2} \frac{\lambda_{De}}{v_{Te}} \quad (7.20)$$

因此,可以得出结论,聚变等离子体具有极好的屏蔽振荡电场的特性。

接下来的问题是考虑以低碰撞频率特性和集体效应为主的聚变等离子体。

## 7.4 低碰撞频率和集体效应

在迄今为止的讨论中,等离子体一直是用长程集体效应支配下的双流体模型来处理的,这种集体效应是通过电场的计算方式隐含在模型中的。具体来说就是,引起屏蔽场的电荷密度可以用平滑、连续的电子和离子分布来精确地近似。场的计算并不是对大量单个点电荷的贡献进行相加得到的。

对于远离给定点的电荷,平滑的电荷分布从直观上看是个合理的近似。但是,如果电荷距离该点很近,有人也许会认为粒子间的库仑势是主要的,因为在  $r$  很小时  $\phi_{\text{oul}}$  的  $1/r$  形式具有发散性。然而在等离子体中却并非如此,这是因为等离子体中的粒子密度很低,两个电荷很少有机会靠得足够近,以至于它们之间的库仑势在平滑分布的全体电荷产生的长程电场中起主要作用。

可以有许许多多不同的方法来导出长程集体效应大于短程库仑相互作用的分界判据。每一种方法都具有不同的物理解释,但都会得到同样的判据。下面介绍三种不同方法:第一种基于统计分析;第二种基于对粒子平均距离和库仑作用距离的比较;最后一种基于对库仑碰撞频率和等离子体频率的比较。

每一种推导都会得出同样的结论:以德拜长度为半径的球体中含有的粒子数目是一个临界参数,记作  $\Lambda_D$ 。只有  $\Lambda_D \gg 1$  时,电离气体才会表现出等离子体行为。

### 7.4.1 长程集体效应的统计图像

等离子体行为的统计描述意味着连续流体模型准确揭示了其物理本质。但这一模型要成立,就必须满足两个条件。其一是假定等离子体能够被分成大量的流体元。这些流体元必须足够小,以达到所需的空间分辨率。另一方面,流体元必须足够大,以便包含足够多的粒子。这样做是为了把电荷密度和电流密度“平均”成平滑的函数,这样统计才有意义。只含有一两个粒子的流体元的统计特性显然不好。

对于屏蔽问题,描述等离子体行为的特征长度是德拜长度。理想情形下,我们希望流体元的尺寸(即线性尺度)应该比  $\lambda_{De}$  小很多,这样才能满足空间分辨的要求。可以接受的最大的流体元的线性尺度应和德拜长度可比。

从上面的讨论中可以得出,如果流体统计描述能够精确刻画物理本质,那么线性尺寸等于  $\lambda_{De}$  的流体元中必然含有足够多的粒子。只要数值上在同一量级内,流体元无论是立方的、球形的,还是其他能精确定义其线度的形状,均不会对结果产生什么影响。习惯上,我们总是将流体元取为球形。于是,“德拜球”内的粒子数目(记做  $\Lambda_D$ )很大,这个条件可写为:

$$\Lambda_D \equiv \frac{4\pi}{3} n_e \lambda_{De}^3 = \frac{4\pi}{3} \frac{\epsilon_0^{3/2} T_e^{3/2}}{e^3 n_e^{1/2}} \gg 1 \quad (7.21)$$

可以看出,  $\Lambda_D$  随着温度的升高而增加,因为  $T_e$  增大意味着德拜长度变长。至于  $\Lambda_D$  对  $n_e$  的依赖关系,由于大量粒子时的大粒子密度与大德拜长度时的小粒子密度之间的竞争取决于  $\Lambda_D$  和  $\lambda_{De}$  的三次方关系,因此,粒子密度  $n_e$  处于分母中,也就是说小的  $n_e$  最容易获得大的  $\Lambda_D$ 。最后,我们注意到,  $\Lambda_D$  的表达式与质量无关,这意味着温度相当时,式(7.21)对离子和电子都是适用的。

### 7.4.2 粒子间距和库仑作用距离的比较

第二种判别何时长程集体效应超过短程相互作用的方法,是计算并比较粒子间的平均距离  $b_{part}$  和库仑作用的特征长度  $b_{Coul}$ 。当  $b_{part} \gg b_{Coul}$  时,粒子相距很远,发生库仑作用的机会很少,这时集体效应占优势。

可以容易地计算出  $b_{part}$  和  $b_{Coul}$ 。首先考虑  $b_{part}$ ,假设体积为  $1 \text{ m}^3$  的等离子体中的粒子数目为  $n_e$ ,然后将此空间等分为  $n_e$  个相同的小立方体。根据定义,小立方体的边长为  $n_e^{-1/3}$ 。因为每一个小立方体含有一个粒子,所以粒子的平均距离就是  $b_{part} = n_e^{-1/3}$ 。

接下来考虑库仑作用的特征长度。其定义是粒子间产生强烈库仑作用的最远距离。图 7.3 显示了一个速度为  $v$  的电子向着静止的第二个电子运动的图像。从直观上看,发生强烈相互作用的临界条件是具有间距  $b$  的运动粒子的动能与其库仑

势能可以相比：

$$\frac{1}{2}m_e v^2 \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 b} \quad (7.22)$$

较小的  $b$  意味着相互作用较强,较大的  $b$  意味着相互作用较弱。接下来,注意到电子的典型动能和等离子体的热能相当,即  $m_e v^2 \approx T_e$ 。把这个关系带入式(7.22),即可得到库仑作用距离  $b = b_{\text{Coul}}$  的表达式：

$$b_{\text{Coul}} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 T_e} \quad (7.23)$$

这样,长程集体效应大于短程库仑作用的条件  $b_{\text{part}} \gg b_{\text{Coul}}$ ,现在可以写成：

$$\frac{1}{n_e^{1/3}} \gg \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 T_e} \quad (7.24)$$

简单地移项后,式(7.24)可以写成：

$$\Lambda_D \gg \frac{4\pi}{3(2\pi)^{3/2}} \approx 0.27 \quad (7.25)$$

这个判据和式(7.21)相比,除了一个无理数因子之外,基本相同。

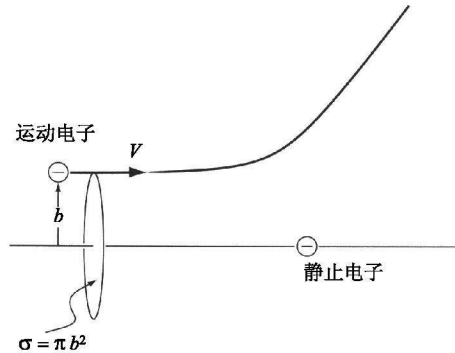


图 7.3 当  $m_e v^2/2 \approx e^2/4\pi\epsilon_0 b$  时,产生强烈的库仑相互作用

### 7.4.3 等离子体频率和库仑碰撞频率的比较

判断等离子体行为中长程集体效应是否大于短程相互作用的第三种方法是:计算出碰撞频率  $\nu_{ee}$  和平均自由程  $\lambda_{ee}$ ,然后将它们分别与等离子体频率和德拜长度直接相比较。从屏蔽的角度来讲,长程集体效应占优势时要求  $\omega_{pe} \gg \nu_{ee}, \lambda_{De} \ll \lambda_{ee}$ 。

为了将这些条件定量化,需要知道  $\nu_{ee}$  和  $\lambda_{ee}$  的表达式。利用  $b_{\text{Coul}}$  的值可以很容易地估算出它们。再次研究图 7.3 可以发现,两个粒子间产生强烈库仑作用的截面为：



$$\sigma_{ee} \approx \pi b_{\text{Coul}}^2 = \frac{e^4}{4\pi\epsilon_0^2 m_e^2 v^4} \quad (7.26)$$

我们从有关碰撞的一般讨论的结果可知,碰撞频率和平均自由程与截面有如下关系:  $\nu_{ee} = n_e \sigma_{ee} v$ ,  $\lambda_{ee} = 1/n_e \sigma_{ee}$ 。再次假设对于电子有典型值  $m_e v^2 \approx T_e$ ,可以得到:

$$\left. \begin{aligned} \nu_{ee} &\approx \frac{n_e e^4}{4\pi\epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}} = \frac{1}{3} \frac{\omega_{pe}}{\Lambda_D} \\ \lambda_{ee} &\approx \frac{4\pi\epsilon_0^2 T_e^2}{n_e e^4} = 3\lambda_{De} \Lambda_D \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

可以看到,长程集体效应大于短程碰撞的判据简化为:

$$\Lambda_D \gg 1/3 \quad (7.28)$$

这和前面的结果本质上是相同的。

最后一步是代入数值,检验聚变等离子体是否满足  $\Lambda_D \gg 1$  这个条件。简单计算得出<sup>1)</sup>:

$$\Lambda_D \equiv \frac{4\pi}{3} n_e \lambda_{De}^3 = \frac{4\pi}{3} \frac{\epsilon_0^{3/2} T_e^{3/2}}{e^3 n_e^{1/2}} = 5.4 \times 10^6 \frac{T_k^{3/2}}{n_{20}^{1/2}} \quad (7.29)$$

对于  $T_k = 15$ ,  $n_{20} = 2$  的聚变等离子体,可得  $\Lambda_D = 2.2 \times 10^8$ 。由此可见,聚变等离子体充分满足长程集体效应占主导这一条件。

## 7.5 对磁约束聚变等离子体的额外约束

聚变等离子体除了一般等离子体的  $\lambda_{De}$ ,  $\omega_{pe}$  和  $\Lambda_D$  的限制条件之外,还有因磁场的存在和磁约束的要求带来的额外限制条件。具体而言,正如在下一章将会看到的,磁场中的带电粒子在垂直于磁场方向的运动具有频率为  $\omega_c$  (回旋频率)、半径为  $r_L$  (回旋半径) 的圆形轨道。为了实现良好的约束,回旋半径必须要比等离子体的小半径小很多,这样粒子才不会与第一壁相碰。

要求回旋半径小,等价于要求回旋频率必须远远大于热传导时间的倒数。这样粒子在与壁碰撞之前已经绕磁场线旋转一周了。

无需太多细节,通过量纲分析我们就可以估算出电子和离子的特征回旋频率和回旋

1) 在有关库仑碰撞的章节中可以证明,这里出现的量不是  $\Lambda_D$ , 而是  $\Lambda = 9\Lambda_D$ , 但是这对判据的数值有效性没有什么影响。分析还表明,库仑相互作用中占主导地位的是多次小角度碰撞,而不是这里考虑的大角度相互作用。最终结果是定标关系可以更精确地写为  $\nu_{ee} \sim (\omega_{pe} \ln \Lambda / \Lambda)$  和  $\lambda_{ee} \sim \lambda_{De} \Lambda / \ln \Lambda$ 。但是,这里新增的对数项的作用很弱,所以对证明长程效应为主导的数值结果没有什么影响。

半径,并进行必要的比较。利用牛顿第二定律分析洛伦兹力作用下的带电粒子的运动,即可直接算出回旋频率。对于已知磁场且没有电场的情形,牛顿第二定律的形式为:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.30)$$

直接通过量纲分析可得电子和离子的回旋频率为:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{ce} &= \frac{eB}{m_e} = 1.76 \times 10^{11} B = 8.8 \times 10^{11} \quad (\text{s}^{-1}) \\ \omega_{ci} &= \frac{eB}{m_i} = 4.79 \times 10^7 B = 2.4 \times 10^8 \quad (\text{s}^{-1}) \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

其中, $B$ 的单位是特斯拉,数值结果对应于 $B=5$ ,离子质量为氦核的质量。

回旋半径可由位移和速度的关系给出:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (7.32)$$

量纲分析表明,回旋半径可以表示为 $r_L = v/\omega_c$ 。对于典型的 $v = v_T$ 的热粒子,可得:

$$\left. \begin{aligned} r_{Le} &= \frac{v_{Te}}{\omega_{ce}} = \frac{(2m_e T_e)^{1/2}}{eB} = 1.07 \times 10^{-4} \frac{T_k^{1/2}}{B} = 8.3 \times 10^{-5} \quad (\text{m}) \\ r_{Li} &= \frac{v_{Ti}}{\omega_{ci}} = \frac{(2m_i T_i)^{1/2}}{eB} = 6.46 \times 10^{-3} \frac{T_k^{1/2}}{B} = 5.0 \times 10^{-3} \quad (\text{m}) \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

其中, $B=5$ ;  $T_k=15$ ; 离子质量为氦核的质量。

现在考虑所需的比较。在微观尺度上,因为与质量有关,所以对离子回旋半径的要求比对电子回旋半径的要求更为严格,因此,聚变等离子体必须满足:

$$r_{Li} \ll L \quad (7.34)$$

这样才能具有较好的粒子约束,典型的反应堆的参数都可以达到这个要求。

等价的频率上的比较要求离子回旋频率比离子的热传导时间的倒数 $\omega_{Ti} = L/v_{Ti}$ 大很多:

$$\omega_{ei} \gg \omega_{Ti} \quad (7.35)$$

这个关系也可以从式(7.34)两边同时除以 $v_{Ti}$ 并移项来得到。因此,对于聚变等离子体,只要式(7.34)成立,式(7.35)就自动满足。从物理上讲,在等离子体出现宏观移动之前,粒子必须经历多次回旋运动。如果不是这样的话,磁场的效应就会微不足道,磁约束也就无从谈起。

## 7.6 宏观行为和碰撞的关系

可以看到,等离子的定义中总是把特征频率和等离子体尺度与宏观频率和尺度相比较。这些比较并未直接涉及碰撞频率和平均自由程,虽然人们有可能认为存在一组类似的不等式条件来作为电离气体是否具有等离子体行为的判据。典型的聚变等离子体参数具有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} a &\ll \lambda_{ce} \approx \lambda_{ii} \\ \omega_{Ti} &\gg \nu_{ii} \\ \omega_{Te} &\gg \nu_{ee} \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

由此可以得出结论,宏观上的要求比碰撞上的要求严格得多。满足宏观上的要求,碰撞上的要求自然会满足,而且满足得非常好。

## 7.7 本章总结

本章推导了描述等离子体行为的特征参数。它们是德拜长度、回旋半径、等离子体频率、回旋频率和等离子体参数。总结如下:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{De} &= \left[ \frac{\epsilon_0 T_e}{e n_0} \right]^{1/2} = 2.35 \times 10^{-5} \left[ \frac{T_k}{n_{20}} \right]^{1/2} \quad (\text{m}) \\ \lambda_{Di} &= \left[ \frac{\epsilon_0 T_i}{e n_0} \right]^{1/2} = 2.35 \times 10^{-5} \left[ \frac{T_k}{n_{20}} \right]^{1/2} \quad (\text{m}) \\ r_{Le} &= \frac{(2m_e T_e)^{1/2}}{eB} = 1.07 \times 10^{-4} \frac{T_k^{1/2}}{B} \quad (\text{m}) \\ r_{Li} &= \frac{(2m_i T_i)^{1/2}}{eB} = 6.46 \times 10^{-3} \frac{T_k^{1/2}}{B} \quad (\text{m}) \\ \omega_{pe} &= \left[ \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} \right]^{1/2} = 5.64 \times 10^{11} n_{20}^{1/2} \quad (\text{s}^{-1}) \\ \omega_{pi} &= \left[ \frac{n_0 e^2}{m_i \epsilon_0} \right]^{1/2} = 9.33 \times 10^9 n_{20}^{1/2} \quad (\text{s}^{-1}) \\ \omega_{ce} &= \frac{eB}{m_e} = 1.76 \times 10^{11} B \quad (\text{s}^{-1}) \\ \omega_{ci} &= \frac{eB}{m_i} = 4.79 \times 10^7 B \quad (\text{s}^{-1}) \\ \Lambda_D &\equiv \frac{4\pi}{3} n_e \lambda_{De}^3 = \frac{4\pi}{3} \frac{\epsilon_0^{3/2} T_e^{3/2}}{e^3 n_e^{1/2}} = 5.4 \times 10^6 \frac{T_k^{3/2}}{n_{20}^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

其中,离子的质量用氘核的质量代替。

通常情况下,等离子体是部分或者完全电离的气体,其行为由长程集体效应支配。它是良导体,能屏蔽稳恒和振荡电场,并表现出局部的准中性,即  $n_e(\mathbf{x}) = n_i(\mathbf{x})$ 。为此等离子体参数需要满足下列要求:

- 屏蔽稳恒电场:  $\lambda_{De} \ll L$ ;
- 屏蔽振荡电场:  $\omega_{pe} \gg v_{Te}/L$ ;
- 集体效应较碰撞占优势:  $\Lambda_D \gg 1$ 。

如果考虑的是与聚变应用有关的特殊类型的等离子体,则还有些额外的限制条件必须得到满足,而且因为质量的关系,对离子的要求比对电子的要求更加严格。

- 轨道的磁约束:  $r_{Li} \ll L$ ;
- 宏观运动前经历多个回旋轨道:  $\omega_{ci} \gg v_{Ti}/L$ 。

因高温而完全电离的聚变等离子体非常好地满足所有这些判据。

## 参考书目

本章根据包括德拜长度和等离子体频率在内的某些基本参数给出了等离子体的实用定义。对于基本的空间和时间尺度,下列书目中提供了多种推导方式:①定性的启发式的讨论;②从流体的角度推导,例如,本书的推导方式;③更严格的基于等离子体动理论的处理。下面列出了一些有用的处理方式。

- Boyd, T. J. M. and Sanderson, J. J. (2003). *The Physics of Plasmas*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Chen, F. F. (1984). *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, second edn. New York: Plenum Press.
- Dendy, R. O. (1990). *Plasma Dynamics*. Oxford: Clarendon Press.
- Goldston, R. J. and Rutherford, P. H. (1995). *Introduction to Plasma Physics*. Bristol, England: Institute of Physics Publishing.
- Hutchinson, I. H. (1987). *Principles of Plasma Diagnostics*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Krall, N. A. and Trivelpiece, A. W. (1973). *Principles of Plasma Physics*. New York: McGraw Hill Book Company.
- Spitzer, L. (1962). *The Physics of Fully Ionized Gases*, second edn. New York: Interscience.
- Wesson, J. (2004). *Tokamaks*, third edn. Oxford: Oxford University Press.

## 习 题

7.1 本题与德拜屏蔽有关。考虑具有如下形式的电子和离子的分布函数:

$$f_j(x, v) = K_j / (1 + E_j / W_j)^2$$

其中,  $j$  代表电子或者离子;  $K_j$  和  $W_j$  是常数;  $E_j = m_j^2 v^2 / 2 + q_j \phi(x)$  是粒子的总能量。

① 选择  $K_j$ , 使得  $\phi = 0$  时  $n_e = n_i \equiv n_0$ , 计算  $n_e(\phi)$  和  $n_i(\phi)$ 。

② 假设  $\phi \ll W_e, W_i$ 。利用  $n_0, W_e$  和  $W_i$  来表示一维的德拜屏蔽长度。

7.2 等离子体中的电子和离子具有相同的温度  $T_e = T_i \equiv T$ 。本底密度为  $n_e = n_i \equiv n_0$ 。相应的描述一维平板几何条件下的德拜屏蔽的非线性方程为:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{en_0}{\epsilon_0} [\exp(e\phi/T) - \exp(-e\phi/T)]$$

边界条件为  $\phi(0) = 0, \phi(-L/2) - \phi(L/2) = V_0$ 。在  $eV_0/T = 0.1, 1, 10$  等条件下求此方程的数值解, 并比较它们的分布。作出  $x_c/\lambda_D$  随  $eV_0/T$  的变化图,  $x_c$  定义为  $\phi(x_c) = V_0/2$  的点。

7.3 一个球形电极被充电到电势  $V_0$ , 假设无穷远处的电势为零。电极位于等离子体中, 远离电极处的电子和离子的温度都是  $T$ , 密度都是  $n_0$ 。在  $eV_0/T \ll 1$  的极限条件下, 求出电势随着  $r$  的变化图像。

7.4 一个发射电子的平面栅极位于两个集电阳极板之间。两个阳极间的距离为  $2a$ 。一维电子分布函数为  $f_e = (n_0/\pi^{1/2} v_{Te}) \exp(-E/T_e)$ , 其中,  $E = m_e v^2/2 - e\phi(x)$ 。离子密度为 0。边界条件为  $\phi(0) = 0$  和  $\phi(\pm a) = V_0$ 。  $V_0$  有一个特定值, 即满足  $x = 0$  处的面电荷为零时的值, 也就是说, 存在某个  $V_0$  可以使得  $\phi'(0) = 0$ 。求出这个值。

7.5 本题展示了如何推导出电子在两个电极之间流动时所遵循的蔡尔德定律 (Child's Law)。假设平面阳极和平面阴极的距离为  $a$ , 各自的横截面积都为  $A$ 。阴极由热发射材料做成, 在  $x = 0$  处源源不断地提供冷电子。假设阴极的电势为零, 即  $\phi(0) = 0$ 。阳极的电势恒定为  $\phi(a) = V$ 。两个电极之间的未知电流记做  $I$ 。

① 利用电流守恒和能量守恒定律, 推导电荷密度  $\sigma$  随着局部电势  $\phi$  和  $I$  的变化关系。忽略碰撞造成的影响。

② 把所得的关系带入一维泊松方程, 解出  $\phi$ 。边界条件为  $\phi(0) = 0$  和  $\phi(a) = V$ 。还有一个额外的限制条件: 即使阴极可以无限制地提供电子, 但这些电子也不可能全都到达阳极, 因为两个电极间的负电荷对新产生的电子有斥力, 这在一定程度上抵消了阳极电压对电子的吸引力。当  $E_x(0) = -\phi'(0) = 0$  时, 电流有最大值。这是因为阴极处的电场不能是正的 (它永远是负的), 否则电子就要从阳极流向阴极了。限制条件  $\phi'(0) = 0$  确定的  $I$  与  $V$  的关系称作蔡尔德定律。推导这个关系式并证明  $I = K V^{3/2}$ 。求出  $K$ 。

7.6 一个圆柱形导电真空腔的半径为  $r = a$ , 其中充满均匀的密度为  $n_0$ 、温度为  $T_0$  的等离子体。一束有一定直径的、沿径向扩散的电子束沿着圆筒轴向射入。本题的目的是研究等离子体对真空腔内的稳恒电势的屏蔽作用。为简单起见, 分析中假设所有物理量只和径向有关, 即  $Q = Q(r)$ , 而且假设电子束的密度分布为  $n_b(r) = n_{b0} J_0(\alpha r/a)$ , 这里  $J_0(\alpha) = 0$ ,  $J_0$  是贝塞尔函数。

① 首先忽略本底等离子体的所有影响。假设真空腔接地, 即  $\phi(a) = 0$ , 计算电势  $\phi(r)$ 。电势的幅度最大值是多少?

② 现在考虑充满整个波导管的等离子体的影响, 也就是等离子体和电子束的重叠。假设离子质量无限大, 因此有  $n_i = n_0 = \text{常数}$ , 而且电子密度由熟悉的关系式给出:  $n_e(r) = n_0 \exp(-e\phi/T_0)$ 。为简单起见, 仅考虑  $e\phi/T_0 \ll 1$  的情形。重新计算电子束和等离子体共同作用下的电势  $\phi(r)$ 。此时电势的幅度最大值是多少? 与没有等离子体的情况有何不同?

# 第 8 章 单粒子运动——导心理论

## 8.1 引言

本书的主要目标是给出对磁场如何约束聚变等离子体中带电粒子的理解。所以,我们需要发展出一套关于自洽磁场中粒子轨道运动具体行为的直观图像。特别是,它必须说明带电粒子能够被约束在等离子体中,并且不会漂移出磁场而打在第一壁上。

作为实现这个目标的第一步,本章主要讲述在给定磁场和电场下带电粒子的运动。这里不考虑自洽——例如,将电流以及带电粒子流动产生的相应的感生磁场包括进来——的问题。同时我们将场简单地规定为已知量。并假定它们是平滑、缓变的函数,以便与等离子体受长程集体作用支配的要求相协调。自洽场的问题将在后面几章建立起适当的模型之后予以论述。

通过对单粒子运动的研究,我们就会清楚刻画可能发生的,不同类型运动的频率之间存在的明显等级差别。最快的并起主要作用的行为是回旋运动,此时沿着磁场方向运动的粒子不受力,而垂直于磁场方向的粒子则在小圆周轨道上做回旋运动。这种运动使带电粒子受到垂直方向的约束,而要避免平行方向的损失,就有必要采用环形几何。

频率等级上的第二层次起因于场在空间和时间上的缓变,这种缓变导致了对基本回旋运动的重要修正。这就是所谓的“引导中心运动”,其中特别重要的是导心横越磁场的漂移( $v_g$ )的发展。总的来说,这些漂移运动与热运动相比尽管很小( $|v_g| \ll v_T$ ),但由于以下一些原因,它们仍很重要。首先,我们必须检查  $v_g$  的方向,确保粒子不会直接漂移到壁上,事实上也不会如此,尽管在开始时这一点不是很明显。其次,等离子体中的电流主要也与这些漂移有关,因此漂移对于自洽模型的最终发展是非常重要的。

本章主要讨论缓变场中的导心运动。这里的关键词是“缓慢”。导心理论假设,场的空间变化从回旋半径尺度上看是缓慢的,而场的时间变化相对于回旋频率的倒数而言也是缓慢的。发展导心理论的主要动机是这种理论能够为理解聚变等离子体中的粒子约束提供基本图像。

接下来,在频率等级上的第三级是库仑碰撞频率  $\nu_{\text{coll}}$ 。尽管这种碰撞很稀少,

但是对于磁约束的理解来讲却是至关重要的。这是因为库仑碰撞是粒子和能量横越磁场弥散的主要机制(这里我们暂不考虑等离子体湍性运动),正是这种机制降低了约束性能。虽然碰撞不频繁, $v_{\text{Coul}} \ll |v_g|/r_L \equiv \omega_g$ ,但是它们代表了导致约束损失的基本物理机制。

在频率等级的最后一级是核聚变碰撞,这类碰撞就更加稀少了。它们基本上属于3.2节讨论的刚体碰撞。聚变碰撞对于粒子运动的直接影响非常小。它们主要是通过 $\alpha$ 粒子加热和D-T燃料消耗间接地影响着等离子体的约束。

总的来说,频率的等级排列是:

$$\omega_c \gg \omega_g \gg v_{\text{Coul}} \gg v_{\text{fus}} \quad (8.1)$$

本章描述回旋运动,然后集中讨论导心理论,这相当于频率等级的前两项。库仑碰撞将在下一章讨论。

本章内容安排如下:首先讨论磁约束聚变的基础——均匀、稳恒磁场中的回旋运动。这种回旋轨道可以通过牛顿定律和洛伦兹力精确地导出。

接着,我们对磁场进行一系列修正,给出更贴近实际的磁场几何。对于每一种修正,主要考虑计算导心漂移的结果。分析中直接运用微扰理论,该理论假设所研究的场随时间和空间均缓慢变化。这使我们能够运用叠加方法来计算导心的每一种漂移。

漂移有很多种。首先要计算的是由相互垂直的电场和磁场产生的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移。尽管乍一看这种漂移似乎有违直觉,因为非零电场非但不破坏等离子体的屏蔽能力,而且事实上它正是这种屏蔽作用能够维持的原因。其次,我们将引入直线磁场的垂直梯度来产生 $\nabla B$ 漂移。接下来我们将直线磁场的假设也取消,由此可以看到磁场的弯曲所导致的一种漂移,即所谓曲率漂移。

下一项修正是令电场和磁场随时间变化。它带来的主要影响就是产生了惯性驱动的漂移,这种漂移称为极化漂移。最后一项修正是平行于磁场方向的梯度。它产生一种平行方向的磁镜力,使得具有很大垂直速度的粒子能够被约束在强磁场之间的区域内,并由此导出磁镜概念。然而,尽管磁镜力改善了平行约束,但终端的碰撞会破坏这种作用,因此我们需要考虑采用环形约束。

以上我们罗列了多种修正,人们可能会怀疑这些情形是否完备。从导心漂移的角度上说,所列情形是完备的,即在这一理论所应用的水平上没有其他更多的导心漂移的情形了。

本章的主要结论是:磁场能够非常有效地约束垂直方向上的带电粒子。在平行于磁场方向上,粒子无法被长时间地约束,由此导致了对环形几何的需要。稳恒、均匀磁场的加入和调整尽管会引起粒子一系列较慢的横越磁场的漂移,但这些漂移的方向不会引起粒子流直接流向第一壁。就聚变来说,导心理论预言,存在各种能

够很好约束带电粒子的环形磁场几何。

## 8.2 单粒子运动的基本性质

导心理论的发展始于对单粒子在磁场和电场中运动的一些基本性质的讨论。这些讨论包括对要求解的精确运动方程的描述和基本守恒关系的推导,这些守恒关系将确认一些严格的运动不变量。

### 8.2.1 精确的运动方程

导心理论的发展始于由牛顿定律决定的精确的运动方程。对于等离子体物理学应用来说,只需要考虑以洛伦兹力形式出现的磁场力和电场力,重力的作用非常小,可以忽略不计。因此,需要求解的方程为:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

通常  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  和  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  是三维空间和时间的函数。因此式(8.2)是一组耦合的非线性常微分方程,其中未知变量  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{r}$  是时间  $t$  的函数。运用导心理论的各种基本假定,这组方程能够得到多种情形下的解。所谓导心理论假定是指  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{E}$  场的空间变化尺度要比回旋半径大,而场的时间变化尺度慢于回旋频率的倒数。

### 8.2.2 基本守恒关系

由式(8.2)可以得到几个基本的守恒关系。这些关系包括能量守恒和动量守恒。运用守恒关系可以导出“严格的运动不变量”,它们强烈制约着粒子的轨道。

首先讨论的是  $\mathbf{E} = 0$  且  $\mathbf{B}$  与时间无关,即  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$  的情形。用  $\mathbf{v}$  点乘式(8.2)得到:

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = 0 \quad (8.3)$$

或

$$\frac{1}{2} m v^2 = \text{常数} \quad (8.4)$$

结论是:在稳恒磁场中粒子的动能是一个常数。换句话说,稳恒磁场不对带电粒子做功。另一个与此相关的基本结论是:稳恒磁场不产生平行于  $\mathbf{B}$  的力,这个结论由关系式  $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$  即可看出。



这一关系可以推广到包含静电场的情形。由于场是稳恒的,因此法拉第定律意味着  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$ 。再用  $\mathbf{v}$  点乘式(8.2),并利用(稳恒场的)恒等式:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi = \mathbf{v} \cdot \nabla\phi \quad (8.5)$$

由此可得,

$$W \equiv \frac{1}{2}mv^2 + q\phi = \text{常数} \quad (8.6)$$

即动能和势能的和是一个常数。

对严格的运动不变量的确定存在一种简单的描述。通常场是  $x, y, z, t$  的函数。我们来考虑一个或多个变量可忽略(也就是场不随着这些变量而变化)的特殊情形。对于每个可忽略的变量,都有一个严格的运动不变量。上面讨论的与时间无关的情形对应于能量守恒。作为另一个例子,我们假定场是  $x, z, t$  的函数,而与  $y$  坐标无关。通常的处理方法是引入标量势和矢量势,即  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 。用  $\mathbf{e}_y$  点乘运动方程,可得:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} mv_y &= q(E_y - v_x B_z + v_z B_x) \\ &= -q \left[ \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \\ &= -q \frac{dA_y}{dt} \end{aligned} \quad (8.7)$$

其中,最后一步的化简使用了  $\partial A_y / \partial y = 0$ 。由此可以得到:

$$p_y \equiv mv_y + qA_y = \text{常数} \quad (8.8)$$

其中,  $p_y$  是正则动量的  $y$  分量。用类似方法可以证明(见习题 8.1),对于轴对称(即  $\partial/\partial\theta = 0$ )的圆柱几何情形,正则角动量的  $\theta$  分量也是一个运动常数:

$$p_\theta \equiv mrv_\theta + qrA_\theta = \text{常数} \quad (8.9)$$

在理解复杂的电场和磁场中的粒子运动行为时,严格的运动不变量的存在通常是很有用的。在下面的讨论中,为了得到粒子轨道的完整解析解,我们选择了相对简单的  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{E}$ ,并且明确说明存在严格的运动不变量。

## 8.3 均匀稳恒磁场中的运动

磁约束的基本内容是带电粒子在均匀、稳恒磁场中的行为。粒子轨道显示,粒

子在垂直于磁场方向上受到很好的约束,但在平行于磁场方向上则不受约束。通过假定  $\mathbf{E} = 0$  和  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$  (其中,  $B$  是常数), 然后解牛顿运动方程, 我们可以清楚地解释这种行为。

牛顿定律的所有分量形式为:

$$\left. \begin{aligned} dv_x/dt &= \omega_c v_y & v_x(0) &= v_{x0} \equiv v_{\perp} \cos\phi \\ dv_y/dt &= -\omega_c v_x & v_y(0) &= v_{y0} \equiv v_{\perp} \sin\phi \\ dv_z/dt &= 0 & v_z(0) &= v_{z0} \equiv v_{\parallel} \\ dx/dt &= v_x & x(0) &= x_0 \\ dy/dt &= v_y & y(0) &= y_0 \\ dz/dt &= v_z & z(0) &= z_0 \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

其中,  $\omega_c = qB/m$  是回旋频率(有时也称作回转频率或者拉莫尔频率);  $v_{\perp}$ ,  $\phi$ ,  $v_{\parallel}$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  均为常数, 分别代表粒子的初始速度和位置。

### 8.3.1 平行方向的运动

首先研究平行于磁场方向的运动。方程相应的部分为:

$$\left. \begin{aligned} dv_z/dt &= 0 & v_z(0) &= v_{z0} \equiv v_{\parallel} \\ dz/dt &= v_z & z(0) &= z_0 \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

容易得出解为:

$$\left. \begin{aligned} v_z(t) &= v_{\parallel} \\ z(t) &= z_0 + v_{\parallel} t \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

这是匀速直线运动。平行力不提供约束, 粒子做简单的无阻尼运动。所以粒子沿给定磁场线的方向上的运动是不受约束的。

### 8.3.2 垂直方向的运动

在  $(x, y)$  平面上, 带电粒子受到的力总是与速度  $\mathbf{v}$  垂直。由经典力学可知, 这会导致一种圆周运动, 实际情形确实是这样。首先考虑与速度有关的方程:

$$\left. \begin{aligned} dv_x/dt &= \omega_c v_y & v_x(0) &= v_{x0} \equiv v_{\perp} \cos\phi \\ dv_y/dt &= -\omega_c v_x & v_y(0) &= v_{y0} \equiv v_{\perp} \sin\phi \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

消去  $v_x$ :

$$\left. \begin{aligned} d^2 v_y/dt^2 + \omega_c^2 v_y &= 0 \\ v_y(0) &= v_{\perp} \sin\phi \\ dv_y(0)/dt &= -\omega_c v_x(0) = -\omega_c v_{\perp} \cos\phi \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

式(8.14)是常系数的线性常微分方程。其通解能很容易得出,加上初始条件,可得:

$$\left. \begin{aligned} v_y(t) &= -v_{\perp} \sin(\omega_c t - \phi) \\ v_x(t) &= v_{\perp} \cos(\omega_c t - \phi) \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

可以看到,粒子以等于回转频率的角频率旋转。同时,对于均匀磁场情形,不仅总动能是守恒量,而且平行方向和垂直方向上的动能分量也分别守恒,即  $v_{\parallel}^2(t) = v_{\parallel}^2 = \text{常数}$ ,  $v_x^2(t) + v_y^2(t) = v_{\perp}^2 = \text{常数}$ 。

通过速度积分即可完成垂直方向上运动的解,由此得到粒子轨道的  $x(t), y(t)$  表达式:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_g + r_L \sin(\omega_c t - \phi) \\ y(t) &= y_g + r_L \cos(\omega_c t - \phi) \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

其中,回旋半径(有时也称作拉莫尔半径)为  $r_L = v_{\perp} / \omega_c = mv_{\perp} / qB$ ;量  $x_g, y_g$  定义为粒子的导心位置:

$$\left. \begin{aligned} x_g &\equiv x_0 + r_L \sin\phi \\ y_g &\equiv y_0 - r_L \cos\phi \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

由这个定义可以得到轨道方程:

$$(x - x_g)^2 + (y - y_g)^2 = r_L^2 \quad (8.18)$$

该轨道如图 8.1 所示。可以看出,粒子的轨道是一个以回旋半径为半径的圆。轨道的中心位置为  $x_g, y_g$ , 因此得名“导心”。由于通常情况下回旋半径与等离子体半径相比非常小,因此得出结论:粒子在垂直磁场方向上存在很好的约束。

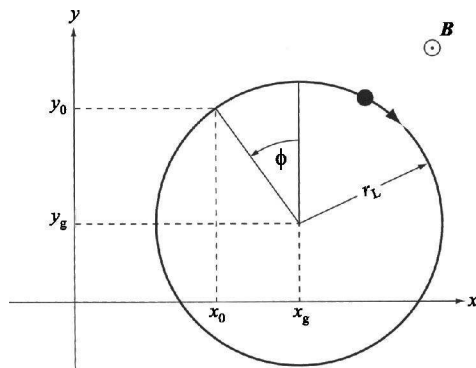


图 8.1 磁场中带正电粒子的回旋轨道  
(图中给出了导心位置  $x_g, y_g$  和初始位置  $x_0, y_0$ )

导心的概念,名副其实,是“导心理论”的基础。通过研究更一般场下导心的速度和位置,我们可以得到粒子平均位置的精确图像,它与实际轨道的偏差仅在回旋半径的量级上。导心运动为理解在缓慢变化的磁场和电场——常见的实际情形——中带电粒子的运动提供了很好的直观图像。

回旋运动的另一个特性是旋转的方向。因为电子和离子的电荷符号相反,故它们的回旋方向相反。实际的回旋方向可以通过计算力( $\pm |q| \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ )的方向来确定,如图 8.2 所示。一种记住回旋方向的简单方法是:回旋粒子电流产生的磁场的方向总是和外磁场的方向相反,也就是说回旋运动是抗磁性的。在描述回旋运动时,我们定义回旋频率和回旋半径始终为正,即  $\omega_c = |q|B/m, r_L = mv_{\perp}/|q|B$ ,这样就很容易考虑电荷的符号了。将前述结果重新写成:

$$\left. \begin{aligned} v_x(t) &= v_{\perp} \cos(\omega_c t \pm \phi) \\ v_y(t) &= \pm v_{\perp} \sin(\omega_c t \pm \phi) \\ x(t) &= x_g + r_L \sin(\omega_c t \pm \phi) \\ y(t) &= y_g \mp r_L \cos(\omega_c t \pm \phi) \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

其中,正负号中,上面的符号对应于负电荷情形。从此往后,这些解的振荡部分就简写为  $\mathbf{v}_{\text{gyro}}(t)$  和  $\mathbf{r}_{\text{gyro}}(t)$ 。

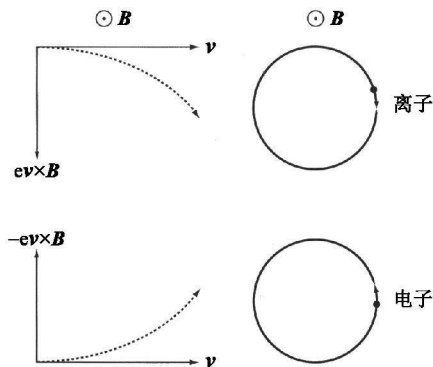


图 8.2 带电粒子的受力表明,回旋方向在逆磁方向上  
(对离子  $q = +e$ , 对电子  $q = -e$ )

最后,我们来考虑回旋运动的定性结果。可以看到,回旋频率随着磁场  $B$  的增强而增大,即强  $B \rightarrow$  高  $\omega_c$ , 并且电子回旋频率比离子回旋频率快  $m_i/m_e$  倍。回旋半径随垂直速度  $v_{\perp}$  的增大而增大,但随磁场  $B$  的增强而减小,即大  $v_{\perp}$ 、小  $B \rightarrow$  大  $r_L$ 。

典型的粒子热速度为  $v_{\perp} = v_T \equiv (2T/m)^{1/2}$ , 因此离子回旋半径要比电子回旋半径大  $(m_i/m_e)^{1/2}$  倍。这些结果的典型值已在第7章中给出, 为方便起见重新罗列如下:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{ce} &= \frac{eB}{m_e} = 1.76 \times 10^{11} B = 8.8 \times 10^{11} \quad (\text{s}^{-1}) \\ \omega_{ci} &= \frac{eB}{m_i} = 4.79 \times 10^7 B = 2.4 \times 10^8 \quad (\text{s}^{-1}) \\ r_{Le} &= \frac{(2m_e T_e)^{1/2}}{eB} = 1.07 \times 10^{-4} \frac{T_k^{1/2}}{B} = 8.3 \times 10^{-5} \quad (\text{m}) \\ r_{Li} &= \frac{(2m_i T_i)^{1/2}}{eB} = 6.46 \times 10^{-3} \frac{T_k^{1/2}}{B} = 5.0 \times 10^{-3} \quad (\text{m}) \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

其中具体数值对应于氦粒子在  $T_k = 15 \text{ keV}$ ,  $B = 5 \text{ T}$  时的值。

### 8.3.3 回旋运动的结果

将带电粒子的垂直方向和平行方向的运动结合起来, 就得到了图 8.3 所示的螺旋轨道。粒子沿着磁场线无阻尼地螺旋前进, 它与磁场线的垂直距离即为回旋半径。这对于磁约束聚变反应堆几何来说有很重要的意义。特别是, 它表明磁场几何必须是环形的, 图 8.4(a) 所示的技术相对简单的直线几何是不可行的。可以看出, 在有限长的直线几何下, 所有的磁场线在离开系统时必定会和第一壁接触, 所以沿磁场线自由流动的粒子在很短的时间里就会撞到壁上。换句话说, 粒子不能被约束, 所以就没有时间来发生聚变反应。这个关键性问题在图 8.4(b) 所示的环形几何下就能够避免。在此情形下, 粒子仍沿磁场线螺旋前进, 但是它们绝不会撞到第一壁上, 因为在环形几何中磁场线不会离开腔室, 而且粒子的垂直方向的偏移很小, 即  $r_{Li} \ll a$ 。

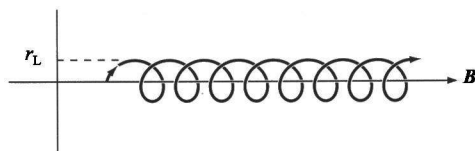


图 8.3 均匀磁场中带电粒子的螺旋轨迹

应当指出, 目前已发明出各种不同的位形来给开端系统“堵漏”。这些位形都是以我们不久就要谈到的“磁镜”效应为基础的。但即便如此, 实际情形中的终端损失仍然大得难以克服。也正因此, 聚变应用中所有领先的磁场几何都是环形的。

总之, 带电粒子在恒定均匀磁场中的回旋运动是聚变等离子体磁约束的基础。

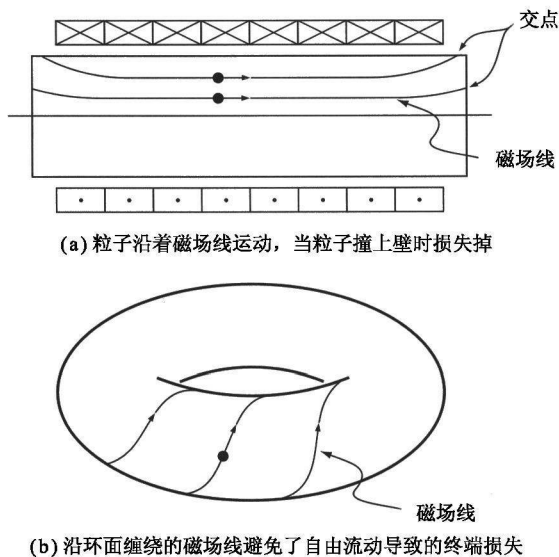


图 8.4

## 8.4 稳恒磁场 $B$ 和电场 $E$ 下的运动: $E \times B$ 漂移

首先考虑在恒定磁场上叠加一个(空间和时间上)恒定电场的情形。从第7章讨论的观点看,你可能会感到有些奇怪,因为在那里我们阐明了等离子体有很强的屏蔽电场的能力。在下面的分析过程中,我们将讨论德拜屏蔽效应和电场之间存在的兼容性,可以证明实际上这其中并没有矛盾。

截至目前,我们采用的都是“单粒子运动”的思想,其中简单假定了均匀恒定的电场和磁场都是已知的。下面我们将确定带电粒子在这二者的复合场下的运动。做出的调整是将粒子原有的回旋运动分成两个部分:一部分是平行于电场的分量;另一部分是与电场垂直的分量。可以证明,粒子的平行分量具有恒定加速度,而垂直分量则具有垂直于  $E$  和  $B$  的漂移,也就是通常所说的  $E \times B$  漂移。

### 8.4.1 平行电场的作用

在稳恒磁场  $B = B e_z$  的基础上,假定等离子体中存在稳恒电场  $E = E_{\perp} + E_{\parallel} e_z$ 。首先考虑平行电场的作用。根据牛顿定律,运动方程的平行分量为:

$$m \frac{dv_z}{dt} = qE_{\parallel} \quad v_z(0) = v_{\parallel} \quad (8.21)$$

可以很容易地解出:

$$v_z(t) = v_{\parallel} + \frac{q}{m} E_{\parallel} t \quad (8.22)$$

就是说,在原来速度为  $v_{\parallel}$  的匀速直线运动上增加了一个由平行电场引起的恒定加速度。假设粒子速度能够持续地线性增加,最终粒子速度将会变成相对论性的。

实际上,由于下述原因,这种情况不会经常发生。电子和离子能够沿着磁场方向自由流动表明,通常情况下在等离子体中产生的平行电场是非常小的,这与德拜屏蔽的原理是一致的。然而,由于存在库仑碰撞,实际的平行电场并不像德拜屏蔽理论预期的那样小。这些碰撞使得平行方向上的运动受到小的摩擦阻力,并由此产生小而有限的等离子体电阻率。这个电阻率产生了小的(但是仍然比德拜值要高)平行电场,这与有限长铜导线两端存在小而有限的电压降的情形类似。这个小电场与摩擦阻力结合在一起,将带电粒子能达到的最大速度限制在非相对论值的水平上。由碰撞引起的摩擦阻力将在下一章中做详细描述。

有关平行方向运动值得关注的最后一点是,在某些条件下,碰撞引起的摩擦阻力太小,以至于不能阻止等离子体中某些种类电子的热化。在这种情况下,这些电子确实能够加速到相对论性速度。这些电子被称为“逃逸电子”,这种现象也将在下一章讨论。

#### 8.4.2 垂直电场的作用

接下来我们关心的问题是垂直电场对回旋运动的作用。首先考虑这个问题的数学结果。为了简化分析,假定  $\mathbf{E}_{\perp} = E_x \mathbf{e}_x$ , 其中,  $E_x$  是常数。运动方程的垂直部分变成:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \omega_c v_y + \frac{q}{m} E_x \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\omega_c v_x \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

将第二个方程带入第一个,以消去  $v_x$ :

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega_c^2 \left( v_y + \frac{E_x}{B} \right) = 0 \quad (8.24)$$

通过引入一个新的速度变量  $v'_y = v_y + E_x/B$ , 很容易得到方程的解。 $v'_y$  的方程简化为:

$$\frac{d^2 v'_y}{dt^2} + \omega_c^2 v'_y = 0 \quad (8.25)$$

这相当于前面讨论的回旋运动。

由此,原先的速度解变为:

$$\mathbf{v}_{\perp}(t) = \mathbf{v}_{\text{gyro}}(t) - (E_x/B)\mathbf{e}_y \quad (8.26)$$

我们注意到,新增的漂移项和  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  都垂直。这个结果可以简单地推广到任意的垂直电场情况  $\mathbf{E}_{\perp} = E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y$ , 其中  $E_x, E_y$  是常数。对于一般情形,我们引入一个新的垂直速度变量:

$$\mathbf{v}'_{\perp} = \mathbf{v}_{\perp} - \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}/B^2 \quad (8.27)$$

垂直平面 ( $x, y$ ) 上的分量的基本运动方程为:

$$m \frac{d\mathbf{v}'_{\perp}}{dt} = q(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}'_{\perp} \times \mathbf{B}) \quad (8.28)$$

可以简化为:

$$\frac{d\mathbf{v}'_{\perp}}{dt} = \omega_c \mathbf{v}'_{\perp} \times \mathbf{e}_z \quad (8.29)$$

式(8.29)相当于均匀磁场下的回旋运动。由此,原始速度的一般形式可以写成:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_{\perp}(t) &= \mathbf{v}_{\text{gyro}}(t) + \mathbf{V}_E \\ V_E &= \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

结论是:均匀垂直电场的引入相当于在回旋运动的基础上叠加了一个恒定的漂移速度 ( $\mathbf{V}_E$ )。它就是所谓的  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移,它垂直于  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$ ,而且与质量、电荷量都无关。换句话说就是,电子和离子都以相同的速度漂移。

下一步是要建立起  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移的物理图像,然后说明垂直电场的存在是如何与德拜屏蔽相互协调的。图 8.5 给出了  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移的物理图像。我们知道,回旋半径随着垂直速度增加而增大,即  $r_L \sim v_{\perp}/B$ 。先考虑图 8.5(a) 所示的带正电的粒子在电场和磁场下的运动。图 8.5(a) 中所示的是不考虑电场时粒子的回旋运动轨道。而考虑到电场作用后,当粒子由位置 1 运动到位置 2 时,电场的作用使得粒子加速。当粒子由位置 2 运动到位置 3 时,粒子运动变慢,又回到原来的速度。注意到在轨道的上半部分,每一点的速度都比不考虑电场时的速度大,也就是说,平均来看,回旋半径是增大的。

轨道的下半部分则相反。从位置 3 到位置 4 的运动中,粒子被减速。从位置 4 回到位置 1,粒子加速到原来的速度。轨道下半部分的平均速度比不考虑电场时要小,也就是说,平均来看,回旋半径较不考虑电场时的要小。

这些效应的综合结果显示在图 8.5(b) 中。轨道上半部分的  $v_{\perp}$  较大而下半部



分的  $v_{\perp}$  较小, 这样, 平均回旋半径的不同导致了垂直于  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  的漂移。图 8.5(c) 和图 8.5(d) 中显示了带负电的电子的类似物理图像。我们注意到, 漂移方向与粒子的电荷符号无关。

最后, 我们来解释垂直电场和德拜屏蔽同时存在的原因。有两种考虑方法。首先, 注意到由于电子和离子具有相同的  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移速度, 这个速度相当于一个不引起电流  $\mathbf{J}_{\perp} = en(\mathbf{u}_{\perp i} - \mathbf{u}_{\perp e}) = 0$  的宏观流体的流速  $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{V}_E$ 。  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移速度的表达式可以写成  $\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u}_{\perp} \times \mathbf{B} = 0$ 。我们知道, 在低频电磁理论里, 在以速度  $\mathbf{u}_{\perp}$  运动的流体中的电场和磁场能够通过关系式  $\mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u}_{\perp} \times \mathbf{B}$  和  $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$  变换到随着流体运动的坐标系。因此, 在流体静止的坐标系中, 有  $\mathbf{E}'_{\perp} = 0$ , 这和德拜屏蔽原理是一致的。

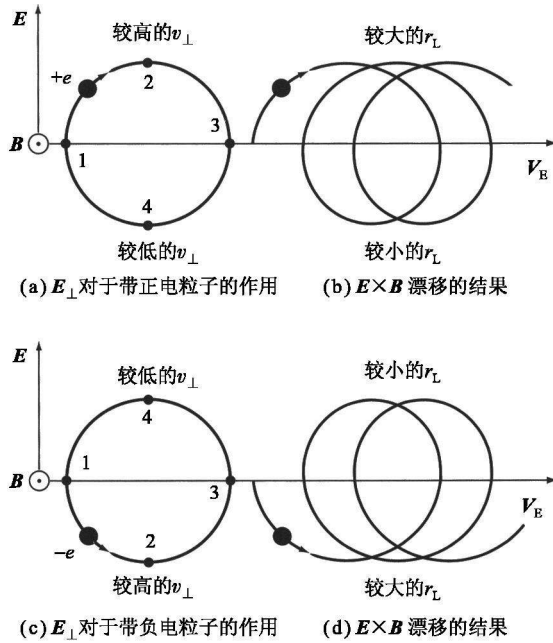


图 8.5

第二种考虑方法稍显微妙。在后面的章节中会说明, 等离子体中能够存在小的垂直电场(该电场值仍比德拜值大)。这将涉及自洽等离子体模型的发展和求解。定性来说, 这种电场的产生是因为垂直于  $\mathbf{B}$  的电子和离子受到磁约束不能自由流动, 不能屏蔽局部可能产生的电荷不平衡。可以证明, 这些不平衡是电子和离子回旋半径不同的结果, 由此最终会产生大小为  $e\phi \sim T$  的静电势。

总的说来, 在带电粒子运动的导心理论中,  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移是横越磁场的基本漂移之一。

## 8.5 垂直梯度的场下的运动： $\nabla B$ 漂移

对回旋运动引入的第二种修正与场的不均匀性有关。具体而言,这一节包括垂直于磁场的  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{E}$  的梯度的作用。虽然磁场  $\mathbf{B}$  是不均匀的,但是它的方向仍然是直线的。也就是说, $\mathbf{B}$  可以设为  $\mathbf{B} = B(x, y) \mathbf{e}_z$  的形式。至于电场的梯度形式,可设为  $\mathbf{E} = E_x(x) \mathbf{e}_x + E_y(y) \mathbf{e}_y$ 。注意到  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , 否则,由法拉第定律知, $\mathbf{B}$  必随时间变化。磁场随时间变化的情形将在 8.7 节中讨论。这里讨论的等离子体中的场的梯度是由长直螺线管线圈产生的。

下面的分析将说明,磁场梯度产生垂直于  $\mathbf{B}$  和  $\nabla B$  的粒子漂移,也就是通常所说的  $\nabla B$  漂移。而电场的梯度使回旋频率产生一个小的偏移,就眼下讨论的目的来说没有大的影响。下面我们直接用微扰展开的方法来分析。展开项中的小参数是回旋半径与场的不均匀性的特征标长的比值,即  $r_L \nabla B/B \sim r_L \nabla E/E \sim r_L/a \ll 1$ 。磁场和电场相对于回旋半径尺度来说变化非常缓慢。微扰展开的具体过程将在下面详细说明。

### 8.5.1 $\mathbf{E} = 0$ , $\mathbf{B}$ 有垂直梯度的情形

为了简化计算,假设初始时  $\mathbf{E} = 0, B(x, y) \rightarrow B(x)$ 。这种假设不久就会取消。运动方程的垂直部分变成:

$$\left. \begin{aligned} m dv_x/dt &= qB(x)v_y \\ m dv_y/dt &= -qB(x)v_x \\ dx/dt &= v_x \\ dy/dt &= v_y \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$

由于  $B$  是  $x$  的函数,因此这些方程是复杂的非线性微分方程。方程可以通过小回旋半径近似来简化。关键步骤是在导心处对  $B$  作泰勒展开。也就是说,弱场梯度只是使粒子的  $x$  位置稍微偏离导心轨道,如图 8.6 所示。在这种情况下,运动方程的垂直部分变成:

$$\left. \begin{aligned} dv_x/dt &\approx \omega_c(x_g) \left[ 1 + \frac{\partial B(x_g)}{\partial x_g} \frac{x - x_g}{B(x_g)} \right] v_y \\ dv_y/dt &\approx -\omega_c(x_g) \left[ 1 + \frac{\partial B(x_g)}{\partial x_g} \frac{x - x_g}{B(x_g)} \right] v_x \\ dx/dt &= v_x \\ dy/dt &= v_y \end{aligned} \right\} \quad (8.32)$$

可以发现,方括号中的第二项是  $r_L/a$  级小量。

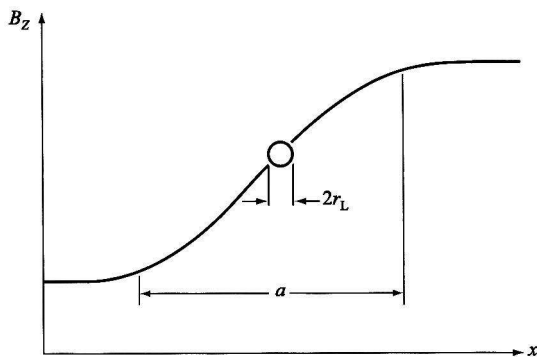


图 8.6 弱磁场梯度下的回旋轨道在  $x$  方向上的宽度满足  $r_L \ll a$

由直接微扰展开得到式 (8.32) 的解为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \cdots \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (8.33)$$

将此展开式带入到运动方程中,并令零阶项为零:

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{v}_0/dt &= \boldsymbol{\omega}_c \mathbf{v}_0 \times \mathbf{e}_z \\ d\mathbf{r}_0/dt &= \mathbf{v}_0 \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

因为  $\boldsymbol{\omega}_c = \boldsymbol{\omega}_c(x_g) = \text{常数}$ , 故式 (8.34) 的解是由式 (8.15) 和式 (8.16) 给出的简单回旋运动。

现在将零阶解带入一阶量的微扰方程中:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_{x1}}{dt} - \omega_c v_{y1} &= -\frac{v_\perp^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial x_g} [1 - \cos 2(\omega_c t - \phi)] \\ \frac{dv_{y1}}{dt} + \omega_c v_{x1} &= -\frac{v_\perp^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial x_g} \sin 2(\omega_c t - \phi) \end{aligned} \right\} \quad (8.35)$$

这是线性非齐次微分方程。可以看到, 方程中有两种驱动项——一种是常数项, 另一种是两倍于回旋频率的振荡项。由于方程是线性的, 因此可用叠加的方法来确定每种驱动项的响应。由习题 8.2 可以看出, 二次谐波项是作为导心位置的小的偏移加上对回旋半径大小的一个小量修正项而出现的。这两种效应都不重要, 因为它们不会导致导心的漂移。所以在目前考虑的情形下可以将它们忽略不计。在这种假设下, 速度分量的方程变成:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_{x1}}{dt} - \omega_c v_{y1} &= -\frac{v_\perp^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial x_g} \\ \frac{dv_{y1}}{dt} + \omega_c v_{x1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

这两个方程形式上与式(8.23)是一样的,而式(8.23)产生了  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移。通过直接比较可知,表示匀加速度  $\mathbf{F}/m \rightarrow q\mathbf{E}/m$  的任何驱动项产生如下形式的等效  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移:

$$\mathbf{V}_F = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (8.37)$$

将这个结果应用到式(8.36),得到  $\nabla B$  漂移表达式:

$$\mathbf{V}_{\nabla B} = \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_c} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x_g} \mathbf{e}_y \quad (8.38)$$

在习题8.2中可以看到,这个结果可以简单地推广到  $B = B(x, y)$  的二维情况。 $\nabla B$  漂移的一般形式是:

$$\mathbf{V}_{\nabla B} = \mp \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_c} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (8.39)$$

其中,正负号中的负号对应于负电荷情形。显然,场是用导心处的值来估算的。

$\nabla B$  漂移有如下特点:①漂移方向与  $\mathbf{B}$  和  $\nabla B$  都垂直;②对于典型的热粒子 ( $v_{\perp} \sim v_T$ ),  $\nabla B$  漂移相对于热速度是小量,即  $|\mathbf{V}_{\nabla B}/v_T| \sim r_L/a$ ;③因为漂移与  $mv_{\perp}^2$  成正比,所以当  $T_e = T_i = T$  时,电子和离子有相同的(平均速度)漂移量;④由于  $\mathbf{V}_{\nabla B}$  与  $1/q$  成正比,电子和离子的漂移方向相反,会产生电流。

观察图8.7可以得到  $\nabla B$  漂移的物理图像。图8.7(a)显示的是具有夸张的磁场梯度的磁场分布,图8.7(b)显示了磁场梯度效应被忽略的情况下带正电粒子的零阶回旋运动。我们知道,回旋半径尺度是  $r_L \sim v_{\perp}/B$ ,因此粒子在运动轨道上从位置1到位置2再到位置3的过程中,回旋半径因磁场减小而变大。类似地,在从位置3到位置4再回到位置1的过程中,回旋半径因磁场增加而变小。图8.7(c)显示了对上述回旋运动的修正,证明了  $\nabla B$  漂移的存在。带负电的情形与此类似。

$\nabla B$  漂移对聚变等离子体中电流的产生和相应的自洽磁场有很重要的贡献。

### 8.5.2 均匀磁场 $\mathbf{B}$ 下电场 $\mathbf{E}$ 的垂直梯度

下面讨论电场存在弱垂直梯度的情形。可以设磁场仍然是均匀的 ( $B = \text{常数}$ ), 因为磁场  $B$  的弱梯度的效应已经计算过了,而且业已证明这些效应可以用叠加的方法结合起来。下面将说明,电场梯度的影响主要是对回旋频率产生小的修正,而且这种修正的意义不大。

假设电场的形式为  $\mathbf{E} = E_x(x)\mathbf{e}_x$ 。它满足  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , 所以磁场不随时间变化。与  $\nabla B$  漂移时的处理一样,运用直接微扰展开方法将电场在粒子导心位置处展开可以得到数学解。相应的速度分量方程变为:

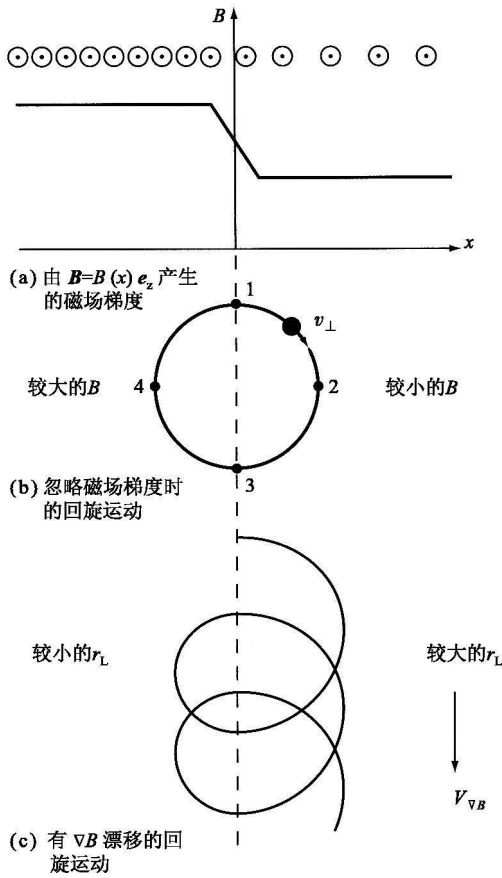


图 8.7

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} - \omega_c \left[ v_y + \frac{E_x(x_g)}{B} \right] &\approx \frac{q}{m} \frac{\partial E_x}{\partial x_g} (x - x_g) \\ \frac{dv_y}{dt} + \omega_c v_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

我们注意到,如果电场没有梯度,这个解可由回旋运动和  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移叠加给出。当存在电场梯度时,将零阶解带入式(8.40)右边的修正项时必须小心,因为这一项可能是按回旋频率的基频在振荡,从而以潜在的共振驱动项形式出现在方程里。众所周知,共振驱动项通常会使得解随时间线性增长。换句话说,解随时间线性发散,微扰处理就不成立了。

然而,对式(8.40)进行更仔细的研究后发现,这种共振增长的情形不会出现,解仍然是有限的。为了看清这一点,我们将式(8.40)中的第一个方程微分,然后将第二个方程中的  $dv_y/dt$  代入,经过简单计算得到:

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_c^2 \left[ 1 - \frac{1}{\omega_c B} \frac{\partial E_x}{\partial x_g} \right] v_x = 0 \quad (8.41)$$

式(8.41)表明,电场垂直梯度的主要作用是对回旋频率产生了一个小的修正,既不存在新的粒子漂移也不存在共振。换句话说,这种作用的意义不大,以后我们将忽略不计。

最后,值得指出的是,如果按比值  $r_L/a$  展开的高阶形式,确实会出现这种漂移,这就是所谓的“有限回旋半径”漂移。电子和离子的这种漂移的方向相同,但是离子漂移的数值较大。然而,由于这种漂移较小(与导心的其他漂移项相比仅为  $r_L/a$  量级),因此对于本书讨论的绝大部分聚变等离子体物理来说,这种漂移均不具有重要影响。虽然在习题 8.3 中讨论了这个问题,但是以后我们将忽略不计。

## 8.6 弯曲磁场中的运动:曲率漂移

截至目前,就磁场的空间特性来说,我们已经讨论了空间分布均匀的磁场和存在垂直梯度的磁场两种情形。然而在这些情形中,场的方向都是沿着  $\mathbf{e}_z$  方向平直的。在本节中,我们将放宽这个限制,引入弯曲磁场。可以证明,磁场线的弯曲会使导心产生新的漂移,其方向既垂直于磁场方向也垂直于曲率矢量的方向。这种漂移是由粒子沿弯曲磁场线不受约束地平行运动时所受到的离心力驱动的,所以这种漂移被称为“曲率漂移”。

首先对简单的曲线几何情形进行分析,假定场的形式为  $\mathbf{B} = B(r) \mathbf{e}_\theta$  和  $\mathbf{E} = E_r(r) \mathbf{e}_r$ ,还是用微扰展开的方法来求解。在计算出漂移后,再将结果推广到一般曲率的情形。推导的第一步是给出柱坐标系下位置、速度和加速度的表示式:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= r(t) \mathbf{e}_r + z(t) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[ \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] \mathbf{e}_r + \left[ \frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{e}_z \end{aligned} \right\} \quad (8.42)$$

其中,两个单位矢量方向随时间  $t$  的变化如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{r} \mathbf{e}_\theta \\ \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{v_\theta}{r} \mathbf{e}_r \end{aligned} \right\} \quad (8.43)$$

运动方程的速度分量能够写成:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} &= \frac{q}{m}(E_r - v_z B) \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{q}{m}v_r B \\ \frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.44)$$

主要行为仍是回旋运动加  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移。这一点可以通过引入类似于  $\mathbf{V}_B$  漂移分析的微扰展开来看清楚,即  $\mathbf{v}(t) \approx \mathbf{v}_0(t) + \mathbf{v}_1(t)$ 。其中,  $\mathbf{v}_0(t)$  由  $\mathbf{v}_{\perp 0}(t) = \mathbf{v}_{gyro} + \mathbf{V}_E$  和  $\mathbf{v}_{\parallel 0}(t) = v_{\parallel} = \text{常数}$  组成。我们注意到,这里的平行方向指的是  $\theta$  方向。下一步就是将这些量带入式(8.44),并且将所有的量在导心位置  $r_g$  处展开。经过简单计算可以得出  $\mathbf{v}_1(t)$  的方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_{\perp 1}}{dt} - \omega_c \mathbf{v}_{\perp 1} \times \mathbf{e}_\theta &= \frac{\omega_c(r - r_g)}{B} \left[ \frac{\partial B}{\partial r_g} \mathbf{v}_{\perp 0} \times \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial E_r}{\partial r_g} \mathbf{e}_r \right] + \frac{v_{\parallel}^2}{r_g} \mathbf{e}_r \\ \frac{dv_{\parallel 1}}{dt} &= -\frac{\mathbf{v}_{r0} \mathbf{v}_{z0}}{r_g} \end{aligned} \right\} \quad (8.45)$$

其中  $\omega_c = qB(r_g)/m$ 。

这个解有以下一些特性。平行速度  $v_{\parallel 1}(t)$  产生一个小的不重要的二次谐波修正,这是  $v_{r0}(t)$  和  $v_{z0}(t)$  都以基频振荡且相位差是  $\pi/2$  的结果。 $v_{\perp 1}$  方程右边的前两项代表了之前讨论的  $\mathbf{V}_B$  漂移和  $\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}_\perp)$  回旋频率修正。只有最后一项代表了新的贡献。因为微扰展开使一阶方程完全线性化,所以这一新增项的作用也可以用叠加的方法来计算。

从物理上讲,这一项代表了作用在沿弯曲磁场线自由平行运动的粒子上的离心力。而从数学上看,这一项具有恒定外力的形式。因此,导心发展起一种与式(8.37)类似的、既垂直于磁场方向又垂直于离心力方向的漂移,即所谓曲率漂移,其形式为:

$$\mathbf{V}_\kappa = \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_c r} \mathbf{e}_z \quad (8.46)$$

其中所有物理量取的都是导心处的值。这种漂移和  $\mathbf{V}_B$  具有相似的量度关系,只是  $v_\perp^2$  被  $2v_{\parallel}^2$  替代。后者的值与热速度相比很小 ( $|\mathbf{V}_\kappa|/v_T \sim r_L/a$ ),而且相近温度下的电子和离子的漂移大小是相当的。但电子和离子的曲率漂移方向相反,因此会产生电流。

通过引入曲率半径矢量  $\mathbf{R}_c$ ,我们可以将  $\mathbf{V}_\kappa$  的表达式扩展到任意曲率的磁场几何中。具体需要以下几步:首先,引入平行于磁场的单位矢量  $\mathbf{b}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{B}/B$ ;其次,将

速度矢量分解成垂直分量和平行分量  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_\perp + v_\parallel \mathbf{b}$ ; 最后, 通过如下运算将运动方程的垂直分量分离出来(为了简化, 假设  $\mathbf{E} = 0$ ):

$$\mathbf{b} \times \left\{ \left[ \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_\perp + v_\parallel \mathbf{b}) - \omega_c(\mathbf{v}_\perp + v_\parallel \mathbf{b}) \times \mathbf{b} \right] \times \mathbf{b} \right\} = 0 \quad (8.47)$$

其中  $\omega_c = qB(\mathbf{r})/m$ 。各项可以简化为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b} \times \left\{ \left[ \omega_c(\mathbf{v}_\perp + v_\parallel \mathbf{b}) \times \mathbf{b} \right] \times \mathbf{b} \right\} &= -\omega_c \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \times \left\{ \left[ \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} \right] \times \mathbf{b} \right\} &= \left[ \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} \right]_\perp \\ \mathbf{b} \times \left\{ \left[ \frac{d}{dt}(v_\parallel \mathbf{b}) \right] \times \mathbf{b} \right\} &= v_\parallel \mathbf{b} \times \left[ \left[ \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right] \times \mathbf{b} \right] \\ &= v_\parallel \left[ (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \frac{d\mathbf{b}}{dt} - \left[ \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right] \mathbf{b} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8.48)$$

注意到单位矢量  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$ , 并且  $\mathbf{b} \cdot d\mathbf{b}/dt = (1/2) d(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})/dt = 0$ , 因此最后一项还可以继续简化。并且  $d\mathbf{b}/dt$  项可以写成:

$$\frac{d\mathbf{b}(\mathbf{r})}{dt} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right] \mathbf{b} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{b} \quad (8.49)$$

将上述结果结合起来, 即可得到垂直方向运动方程的简单形式:

$$\left[ \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} \right]_\perp - \omega_c \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{b} = -v_\parallel \mathbf{v}_\perp \cdot \nabla \mathbf{b} - v_\parallel^2 \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} \quad (8.50)$$

这个方程的左边代表熟悉的回旋运动。方程的右边包含了微扰展开, 代表的是两种不均匀性产生的驱动项, 两项都是  $r_\perp/a$  级小量。包含  $v_\parallel$  和  $v_\perp$  的项以回旋频率振荡, 其平均值为零。因此正如前面讨论过的, 它只是对回旋运动产生小的修正, 但并不引起导心漂移。只有最后一项具有恒定外力的形式, 它表示广义离心力, 并导致了曲率漂移。

分析的最后一步是确定磁场曲率矢量  $\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$  和曲率半径矢量  $\mathbf{R}_c$  之间的关系。从图 8.8 可知, 这种关系很容易建立起来。注意到  $\mathbf{b}$  沿弯曲磁场线的变化为:

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{b} &= \mathbf{b}(\mathbf{r}_\perp, l + dl) - \mathbf{b}(\mathbf{r}_\perp, l) = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial l} dl = (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}) dl \\ |d\mathbf{b}| &= d\theta = \frac{dl}{R_c} \end{aligned} \right\} \quad (8.51)$$

这里运用了沿着磁场的变化等价于取平行梯度  $\partial/\partial l = \mathbf{b} \cdot \nabla$  这一关系。从几何上和曲率半径矢量的定义上可以明显看出,  $\mathbf{R}_c$  反平行于  $\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$ 。因此  $\mathbf{R}_c = -R_c \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$ 。



其中比例因子  $K$  可以通过  $|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}| = |d\mathbf{b}|/dl = 1/R_c$  得出。由此可得：

$$\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} = -\frac{R_c}{R_c^2} \quad (8.52)$$

现在可以得出曲率漂移的一般形式了。将式(8.52)代入到式(8.50)的离心力项,然后,运用式(8.37)中的恒定外力与导心漂移之间的关系,可以得到曲率漂移的普适形式为：

$$\mathbf{V}_{\kappa} = \mp \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_c} \frac{R_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B} \quad (8.53)$$

同样,负号用于电子的结果。

和  $\nabla B$  漂移类似,曲率漂移对等离子体中电流的产生和相应的自洽磁场有很重要的贡献。

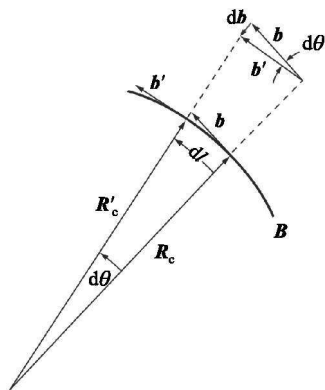


图 8.8 显示  $\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$  与  $R_c$  关系的几何图形  
(其中  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(r_{\perp}, l)$ ,  $\mathbf{b}' = \mathbf{b}(r_{\perp}, l + dl)$ 。  $R_c$  和  $R_c'$  的形式与此类似)

## 8.7 真空磁场中 $V_{\nabla B}$ 漂移和 $V_{\kappa}$ 漂移的综合

在  $\mathbf{E} = 0$  的稳态聚变等离子体中,非均匀弯曲磁场产生两种导心漂移—— $\nabla B$  漂移和曲率漂移。在等离子体电流较小的特定情形下,磁场变成近似于真空磁场,且  $V_{\nabla B}$  和  $V_{\kappa}$  之间存在简单关系。本小节的目的是要导出这个关系。结果表明,真空磁场的  $V_{\nabla B}$  和  $V_{\kappa}$  方向相同,也就是说,它们产生的电流无法相互抵消。

已知矢量恒等式：

$$\nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = 2\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + 2\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \quad (8.54)$$

对于真空磁场,  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ 。用  $\mathbf{b}$  叉乘式(8.54),经过简单计算可得：

$$\mathbf{B} \times \nabla B = B \mathbf{b} \times [\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla B) + B \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}] = -B \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{R}_c}{R_c^2} \quad (8.55)$$

用  $\nabla B$  漂移的表达式[式(8.39)]可以得到  $\mathbf{V}_{\nabla B} + \mathbf{V}_\kappa$  的简单表达式:

$$\mathbf{V}_\kappa + \mathbf{V}_{\nabla B} = \mp \frac{1}{\omega_c} \left( v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2} \right) \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B} \quad (8.56)$$

正如前面所说,很明显,两种漂移在相同的方向上,所以产生的电流不能抵消。这导致了下面的有趣问题。如果导心电流总是增加的,并且  $\mathbf{V}_{\nabla B}$  和  $\mathbf{V}_\kappa$  是仅有的由非均匀弯曲磁场产生的电流驱动型导心漂移,那么  $\mathbf{B}$  如何能与真空场相符合? 答案是,额外的宏观流动,即所谓的“磁化电流”,它的增长正好抵消了  $\mathbf{V}_{\nabla B} + \mathbf{V}_\kappa$  对于  $\mathbf{J}$  的贡献。关于磁化电流的讨论将在第10章进行,那里将建立起自洽的流体模型。

## 8.8 时变电场 $E$ 和磁场 $B$ 中的运动:极化漂移

接下来我们将讨论单粒子导心运动理论中随着时间缓慢变化的电场和磁场的影响。我们将特别关注形为  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_x(\mathbf{r}_\perp, t) \mathbf{e}_x + E_y(\mathbf{r}_\perp, t) \mathbf{e}_y$  的电场和  $\mathbf{B} = B(\mathbf{r}_\perp, t) \mathbf{e}_z$  的磁场。可以证明,时间变化带来的主要结果是产生了新的导心漂移(即所谓的“极化漂移”)和新的近似运动常量(即所谓“绝热不变量”)。

极化漂移是由时变电场中粒子的惯性作用产生的。当  $\mathbf{E}_\perp$  随时间缓慢变化时,粒子的运动随着场的时间变化而变化,然而由于惯性,粒子的运动会稍落后于场的变化。下面的分析将说明,产生的极化漂移在  $\mathbf{E}_\perp$  方向上(注意,不是在  $\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B}$  方向),并且由于离子质量较重,因此离子产生的极化漂移比电子的大。

绝热不变量可以解释带电粒子的垂直能量是如何随时间缓变磁场而变化的。我们将说明,增大的  $\mathbf{B}$  场会导致  $v_\perp^2$  的相应增加。这里的不变量不是严格的运动常数,而是说它的值在回旋周期平均后保持不变。

下面的分析将分成两部分。第一部分中假定磁场在空间和时间上都是均匀的(即  $B = \text{常数}$ ),电场只随时间变化,即  $\mathbf{E} = E_x(t) \mathbf{e}_x + E_y(t) \mathbf{e}_y$ 。这个简单模型能够给出极化漂移的主要特性。数学解通过直接迭代过程得到。

分析的第二部分是假定磁场也是时间的函数。这使得计算变得稍微复杂了,因为根据法拉第定律,时变  $\mathbf{B}$  场将产生空间变化的电场。对此我们在分析中引入一个特殊的数学时间变换来处理这些效应。由此得到两个结果:首先,在极化漂移的基础上增加了一个微小修正;其次,我们得到了新的近似运动常量。这个常量就是绝热不变量  $\mu$ 。

### 8.8.1 $\mathbf{E} = E_x(t) \mathbf{e}_x + E_y(t) \mathbf{e}_y$ 且 $B = \text{常数}$ 的极化漂移

本小节集中研究上述简单形式的场的情形。我们首先进行极化漂移的数学分

析,然后给出简明的物理图像。

### 1. 数学推导

在我们讨论的场中,粒子的垂直速度的运动方程是:

$$\left. \begin{aligned} dv_x/dt - \omega_c v_y &= \omega_c E_x(t)/B \\ dv_y/dt + \omega_c v_x &= \omega_c E_y(t)/B \end{aligned} \right\} \quad (8.57)$$

对于任意的  $E_x, E_y$ ,形式上我们很容易得到这组方程精确的数学解,但这种形式解的意义却不大,因为其中包含很多复杂的积分。我们发现,可以通过时间缓变假设来最终得到这个解,在此假设下可以得出积分的近似值。

就目前而言,从开始就假设时间缓变在数学处理上会更加方便。在这种假设下,我们可以通过直接迭代过程得到较精确的近似解。这种过程的基础是引入一个衡量时间缓变程度的小量。具体来说就是,假定对应于电场时间变化的特征频率  $\omega$  远小于回旋频率,即  $|\dot{\mathbf{E}}_{\perp}|/|\mathbf{E}_{\perp}| \sim \omega \ll \omega_c$ 。低频假设保证了迭代中每一个新的项比它前面的项小  $\omega/\omega_c$  倍。

迭代过程的第一步是通过引入一个新的速度变量  $\mathbf{v}'_{\perp}$  来去掉  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移。

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v'_x + E_y(t)/B \\ v_y &= v'_y - E_x(t)/B \end{aligned} \right\} \quad (8.58)$$

$\mathbf{v}'_{\perp}$  的运动方程变成:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv'_x}{dt} - \omega_c v'_y &= -\frac{1}{B} \frac{dE_y}{dt} \\ \frac{dv'_y}{dt} + \omega_c v'_x &= \frac{1}{B} \frac{dE_x}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (8.59)$$

我们发现式(8.59)的右边项比式(8.57)对应的右边项小  $\omega/\omega_c$  倍。

迭代的第二步是令式(8.59)的右边项为一个新的“不变”(实际上是随时间缓变)的外力。类似于  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移,通过引入新的速度变量  $\mathbf{v}''_{\perp}$ ,能够把这些项从解中清楚地分离出来:

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= v''_x + \frac{1}{\omega_c B} \frac{dE_x}{dt} \\ v'_y &= v''_y + \frac{1}{\omega_c B} \frac{dE_y}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (8.60)$$

$\mathbf{v}''_{\perp}$  的方程是:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x''}{dt} - \omega_c v_y'' &= -\frac{1}{\omega_c B} \frac{d^2 E_x}{dt^2} \approx 0 \\ \frac{dv_y''}{dt} + \omega_c v_x'' &= -\frac{1}{\omega_c B} \frac{d^2 E_x}{dt^2} \approx 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.61)$$

式(8.61)的右边项可以忽略不计,因为它们包含与初始方程右边项一样的电场分量,但却要小 $(\omega/\omega_c)^2$ 倍。原则上,我们能够继续这种迭代过程到更高阶的方程,但由构造过程可以明显看出,每一次新得出的右边项都比前面的迭代项小 $\omega/\omega_c$ 倍。式(8.61)的高阶项忽略不计了,显然我们可以看出 $v''_{\perp}$ 的解是熟悉的回旋运动。

通过分析我们得出的结论是,在稳恒 $B$ 场上叠加了时间缓变的垂直电场后,粒子的组合轨道能够近似表示为下式:

$$v_{\perp}(t) = v_{\text{gyro}} + \frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2} + \mathbf{V}_p \quad (8.62)$$

$$\mathbf{V}_p = \mp \frac{1}{\omega_c B} \frac{d\mathbf{E}_{\perp}}{dt} \quad (8.63)$$

其中负号对应于电子。

可以看出,这个解有如下特性:粒子速度主要由回旋运动加上 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移的瞬时值组成。这正是我们期待的缓变电场中的结果。在电场方向上新增了一项小的漂移速度 $\mathbf{V}_p$ ,这就是极化漂移。电子和离子的漂移方向相反(会在电场方向产生电荷“极化”),由于离子质量大,因此离子的漂移速度也大得多。从幅度大小上看,极化漂移比 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移要小。特别是, $V_p/V_E \sim \omega/\omega_c \ll 1$ 。也许有人会问,既然 $\mathbf{V}_p$ 这么小,为什么还要保留它呢?原因是虽然它很小,但它却是 $\mathbf{E}_{\perp}$ 方向上的第一个非零垂直漂移。显然,在这个方向上, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移是没有贡献的。

方向上的这种区别是重要的。就 $\mathbf{E}_{\perp}$ 方向的电流来说,极化漂移引起的电流要比指向同样方向的位移电流更重要。我们可以通过简单计算来进行这种比较:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}_p &\approx q n \mathbf{V}_{pi} = \frac{n m_i}{B^2} \frac{d\mathbf{E}_{\perp}}{dt} \\ \mathbf{J}_d &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (8.64)$$

因此,极化电流和位移电流的比值为:

$$\frac{\mathbf{J}_p}{\mathbf{J}_d} = \frac{c^2}{v_A^2} \quad (8.65)$$

其中 $v_A = (B^2/\mu_0 n m_i)^{1/2}$ 是所谓的阿尔文速度。对于典型的反应堆参数,这个比值约为 $3 \times 10^3 \gg 1$ 。通过以上比较可知,极化电流是主要的。

## 2. 物理图像

极化漂移的物理根源与粒子的惯性有关。为了解漂移是如何产生的,考虑在稳恒  $B$  场和随着时间线性变化的  $E_y$  中的一个带正电粒子的运动,如图 8.9 所示。为了简明,电场随着时间的变化近似为一系列逐段增加,每一段的时间间隔对应于一个回旋周期。

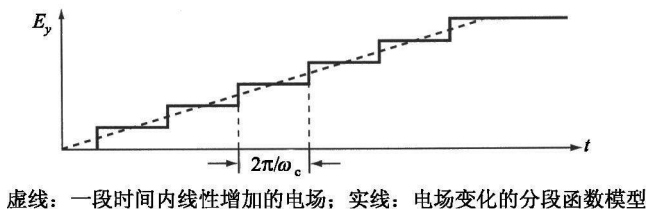


图 8.9

这种场作用下的定性轨道图像如图 8.10 所示。虚线表示没有电场时的圆周回旋轨道,实线表示电场第一阶段的轨道。可以看出,除了向右的导心  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移外,轨道的上下端点(即图 8.10 中 1 点和 2 点)均因平均回旋半径大小的不同而略微上移。轨道半径上的这种差异是粒子的惯性带来的,它使得粒子运动滞后于变化的电场。

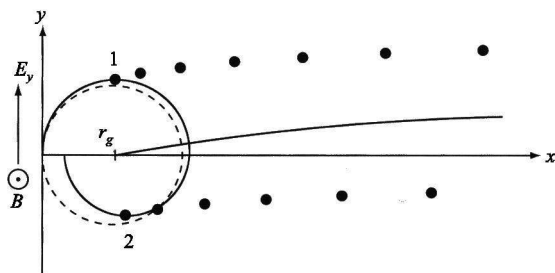


图 8.10 电场分段模型下粒子轨道的上下端点和导心的轨迹

在电场的第二阶段,由于电场持续增大,上述调整过程将重复出现。导心向右的  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移会稍稍变大。类似地,1 点和 2 点的上移也都变大。图 8.10 画出了 1 点、2 点以及导心  $\mathbf{r}_g$  在电场随后各阶段的包络。很明显,当电场随着时间变化时,在  $y$  方向有导心漂移,这就是极化漂移。当电场稳定后,极化漂移变为零,剩下的就是平稳的  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移。

### 8.8.2 $\mathbf{E}_\perp = E_x(\mathbf{r}_\perp, t)\mathbf{e}_x + E_y(\mathbf{r}_\perp, t)\mathbf{e}_y, \mathbf{B} = B(t)\mathbf{e}_z$ 时的极化漂移

在这一小节中,极化漂移的分析扩展到包括随着时间变化的磁场的影。我们还将进一步说明,绝热不变量  $\mu$  是一个近似的运动常数。

为了简明起见,忽略  $B$  在垂直方向上的空间变化,这种情形以前我们已经研究过了。但即使这样,时变磁场仍使问题变得复杂,因为根据法拉第定律,这种磁场

会激发一个随着时间和空间都变化的电场。我们可以通过对时间变量进行数学变换的方法来处理这些效应,这种处理大大简化了分析。

### 1. 数学分析

首先假定垂直电场的形式是  $\mathbf{E}_\perp = E_y(x, t)\mathbf{e}_y$ , 这种简化使得数学上更易处理, 同时又不失主要物理过程。然后通过进一步计算, 我们很容易推广到  $\mathbf{E}_\perp = E_x(\mathbf{r}_\perp, t)\mathbf{e}_x + E_y(\mathbf{r}_\perp, t)\mathbf{e}_y$  的情形。将电场在粒子导心处展开, 得到起始模型对应的运动方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} - \omega_c v_y &= 0 \\ \frac{dv_y}{dt} + \omega_c v_x &= \frac{\omega_c}{B} \left[ E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x_g} (x - x_g) \right] \end{aligned} \right\} \quad (8.66)$$

其中,  $\omega_c(t) = qB(t)/m$ ; 所有的电场项都是  $(x_g, t)$  的函数。可以看出, 在这种方程形式下, 由于回旋频率与时间有关, 因此即使是单纯的回旋运动也很难计算。但通过引入新的时间变量  $\tau$ , 方程能够得到极大的简化,  $\tau$  的定义为:

$$\tau = \int_0^t \omega_c(t') dt' \quad (8.67)$$

也就是  $d\tau = \omega_c dt$ 。通过这种变换, 该模型变为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{d\tau} - v_y &= 0 \\ \frac{dv_y}{d\tau} + v_x &= \frac{1}{B} \left[ E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x_g} (x - x_g) \right] \\ \frac{dx}{d\tau} &= \frac{v_x}{\omega_c} \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{v_y}{\omega_c} \end{aligned} \right\} \quad (8.68)$$

通过引入前一节的迭代过程, 能够得到方程较精确的近似解, 并且在柱坐标系中写出  $v_x$  和  $v_y$ :

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_\perp(\tau) \cos[\tau + \varepsilon(\tau)] + \frac{E_y}{B} \\ v_y &= -v_\perp(\tau) \sin[\tau + \varepsilon(\tau)] + \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{E_y}{B} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8.69)$$

其中变量  $v_x$  和  $v_y$  由新的未知量  $v_\perp(\tau)$  和  $\varepsilon(\tau)$  代替。这里预设了回旋运动的幅值和相位都是时间的函数, 但实际上它们只是随时间缓变的函数。式(8.69)的形式

已显示对极化漂移的微调,其中包含了  $B$  场的时间导数。余下的分析主要是求解  $v_{\perp}(\tau)$ ,并由此导出新的近似运动常数。 $\varepsilon(\tau)$  也能很容易解出,但其中没有什么新的重要信息,因此相关的分析不在此赘述。

为了求出  $v_{\perp}(\tau)$  的解,在将式(8.69)带入式(8.68)之前,还需要进行一步,就是在速度方程中找到  $x - x_g$  的表达式。由于这个表达式只出现在小量展开项中,所以需要保留首项回旋运动的贡献。从式(8.68)中的后两个轨道方程我们可以得出:

$$x - x_g \approx \frac{v_{\perp}(\tau)}{\omega_c(\tau)} \sin[\tau + \varepsilon(\tau)] \quad (8.70)$$

现将式(8.69)和式(8.70)带入式(8.68)中。我们很容易同时解得  $dv_{\perp}/d\tau$  和  $d\varepsilon/d\tau$ 。简单计算即可得出待求的  $v_{\perp}(\tau)$  方程:

$$\frac{dv_{\perp}}{d\tau} + \frac{v_{\perp}}{2\omega_c B} \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x_g} + \frac{\partial E_y}{\partial x_g} \cos 2(\tau + \varepsilon) \right] = \frac{d^2}{d\tau^2} \left[ \frac{E_y}{B} \right] \sin(\tau + \varepsilon) \approx 0 \quad (8.71)$$

正如前一节提到的,方程右边项是高阶迭代修正项,可以忽略不计。

下一步是用法拉第定律代换  $\partial E_y/\partial x_g = -dB/dt = -\omega_c dB/d\tau$  来简化式(8.71)。式(8.71)可简化为:

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\tau} = \frac{1}{B} \frac{dB}{d\tau} \cos 2(\tau + \varepsilon) \quad (8.72)$$

其中,

$$\mu \equiv mv_{\perp}^2/2B \quad (8.73)$$

即所谓磁矩(出于其他考虑我们稍后再讨论它)。这个表达式可进一步简化。将式(8.72)在一个回旋周期( $\tau_0 \leq \tau + \varepsilon \leq \tau_0 + 2\pi$ )内积分,可以发现右边项平均后除了小得可以忽略的  $(\omega/\omega_c)^2$  阶修正外几乎为零。所以,在高精度水平下,可以得到  $\langle d\ln\mu/d\tau \rangle = 0$ 。这说明在一个回旋周期内平均后,  $\mu$  是一个运动常数,即

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2(t)}{2B(t)} = \text{常数} \quad (8.74)$$

## 2. $\mu$ 的意义

$\mu$  是我们所知道的第一个绝热不变量,其大小等于带电粒子的回旋周期平均磁矩。这一点可以从磁矩的通常定义  $\mu = IA$  看出,其中,  $I$  是闭合回路中的电流,  $A$  是回路所围成的面积。对于磁场中旋转的粒子来说,一个回旋周期的平均电流是  $I = q/\tau_c = q\omega_c/2\pi$ , 而面积是  $A = \pi r_L^2 = \pi(mv_{\perp}/qB)^2$ 。由此得出  $IA = mv_{\perp}^2/2B$ , 所以  $\mu$  确实是磁矩。

$\mu$  在一个回旋周期上平均后是一常数的事实可说明如下。粒子回旋轨道所围成的磁通量是  $\Psi = \pi r_{\perp}^2 B = (2\pi m/q^2) \mu \sim \mu$ 。所以,当磁场  $B$  随时间缓变时,垂直方向的速度和相应的回旋半径都以这样一种方式随着时间缓慢变化,即使得环绕轨道的通量是一个常数。

### 3. 结果总结

在时变电场和磁场中运动的带电粒子会附加一项导心漂移,即所谓极化漂移。对于  $\mathbf{B} = B(t)\mathbf{e}_z$  和  $\mathbf{E}_{\perp} = E_x(\mathbf{r}_{\perp}, t)\mathbf{e}_x + E_y(\mathbf{r}_{\perp}, t)\mathbf{e}_y$  的一般情形,根据式(8.69),这种漂移能够写成(负号用于电子):

$$\mathbf{V}_p = \mp \frac{1}{\omega_c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{E}_{\perp}}{B} \right) \quad (8.75)$$

第二个新结果是确认了一个近似运动常数,即所谓的绝热不变量。它只是一个“近似”常量,因为它是在磁场缓变情形下在一个回旋周期上平均得到的。这个绝热不变量写成:

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2(t)}{2B(t)} = \text{常数} \quad (8.76)$$

在聚变应用方面,极化漂移在确定等离子体宏观不稳定性的时间尺度方面起着非常重要的作用。正如描述宏观平衡和稳定性的第12章所表明的,极化漂移所对应的时间尺度和实验时间相比是非常快的。如果给定的磁场位形是不稳定的,那么等离子体会由于这一很短的时间尺度而很快撞到壁上,从而损失掉。由此得出结论:对于聚变来讲,磁场位形的设计必须避免这种不稳定性。

绝热不变量在两个方面起着重要作用。首先,它是磁约束位形“磁镜装置”的基础,后文会予以讨论。其次,磁矩是很多环形磁场几何下导致横越磁场的能量和粒子的碰撞输运大大增强的重要原因。这种行为要用“新经典输运理论”来解释,我们将在第14章中予以讨论。尽管这两种应用都依赖于绝热不变量,但  $\mu$  作为磁场空间缓变下的绝热不变量要比它作为时间缓变下的不变量更为重要。下一节我们就来讨论这种空间缓变下的结果。

## 8.9 平行梯度场下的运动:磁矩和磁镜

关于导心运动的最后一个议题是有关磁场平行梯度的效应,这种效应源自图8.11所示的位形。在回旋半径与场的空间梯度标长相比较小的情形下,能得出两个重要的结果。首先,可再次证明  $\mu = mv_{\perp}^2/2B$  是一个绝热不变量。其次,在平行于磁场梯度的方向上出现回旋平均力,它会对平行于导心运动方向上的运动产生很



大影响。这个力引起“磁镜”效应,并成为早期聚变实验的基础。本节将讨论磁镜效应和简单磁镜装置。

从数学上讲,平行磁场梯度使得分析变得复杂,因为这种几何本质上是二维的。例如,即使是最简单的  $B_z = B_z(z)$  的情形,为了满足  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{B}$  必须附加横向分量。为了使得分析在数学上更易处理,这些横向分量必须选取得使其满足“细长”近似,就是假定平行梯度标长要比横向梯度标长大。尽管这不是必要的,但这种近似可以大大简化计算,并不失基本物理特征。

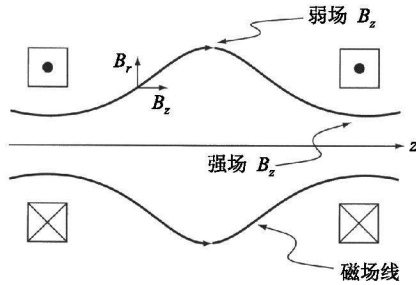


图 8.11 产生  $B$  的平行梯度的线圈位形

### 8.9.1 数学表述

首先给出场的描述。假定电场为零,即  $\mathbf{E} = 0$ 。为了简单起见,磁场几何只考虑图 8.11 所示柱对称的平板断面。这种平板模型如图 8.12 所示。磁场不随时间变化,其空间非零分量为  $\mathbf{B} = B_x(x, z)\mathbf{e}_x + B_z(x, z)\mathbf{e}_z$ 。目前尚不用细长近似,这意味着  $B_x \sim B_z$ 。在这些假定下,粒子速度的运动方程变成:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m} v_y B_z \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{q}{m} (v_x B_z - v_z B_x) \\ \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{q}{m} v_y B_x \end{aligned} \right\} \quad (8.77)$$

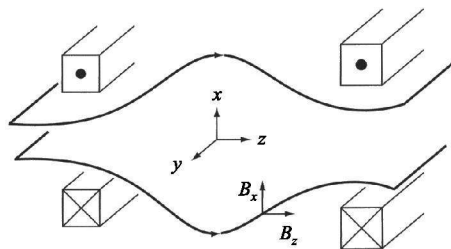


图 8.12 具有平行梯度的磁场几何的平板模型

和前述计算一样,这些方程可以通过级数展开来求解。潜在的困难是  $z$  坐标轴不再对应于平行方向。因此尽管  $v_z$  可能接近于平行速度,  $v_x, v_y$  接近于垂直速度,但它们并不严格相互垂直。这些偏离造成了一系列可与小的回旋半径修正竞争的小的附加项。我们可以通过引入三个正交的单位矢量,以及相应的能够确切区分垂直和平行方向的速度分量,来消除这种几何上的复杂性。新的单位矢量是  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{b}$ , 它们的变换关系为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b} &= b_x \mathbf{e}_x + b_z \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_z &= b_z \mathbf{b} - b_x \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \times \mathbf{b} = b_z \mathbf{e}_x - b_x \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_x &= b_z \mathbf{e}_1 + b_x \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (8.78)$$

其中  $b_x = B_x/B, b_z = B_z/B$ 。可以看出,  $\mathbf{b}$  指向磁场方向,而  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  严格垂直于  $\mathbf{B}$ 。相应的速度分量  $v_1, v_2, v_{\parallel}$  和它们之间的变换关系为:

$$\left. \begin{aligned} v_{\parallel} &= b_z v_z + b_x v_x & v_z &= b_z v_{\parallel} - b_x v_1 \\ v_2 &= v_y & v_y &= v_2 \\ v_1 &= b_z v_x - b_x v_z & v_x &= b_x v_{\parallel} + b_z v_1 \end{aligned} \right\} \quad (8.79)$$

利用这些变换,经过简单计算,运动方程可充分简化成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} - \omega_c v_2 &= K v_{\parallel} \\ \frac{dv_2}{dt} + \omega_c v_1 &= 0 \\ \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= -K v_1 \end{aligned} \right\} \quad (8.80)$$

其中,  $\omega_c = qB/m, B = (B_x^2 + B_z^2)^{1/2}$ , 且

$$K = K[x(t), z(t)] = b_x \frac{db_z}{dt} - b_z \frac{db_x}{dt} \quad (8.81)$$

由此,方程变成了我们希望的形式。

### 8.9.2 方程的解

求这个问题的数学解需要两步。首先,引入一个新的时间变量,它与极化漂移分析中使用的变换类似。其次,引入新的磁场模型,使得“细长”近似被引入到这个模型中。首先,时间变换为:

$$\tau = \int_0^t \omega_c dt \quad (8.82)$$

其中  $\omega_c(t) = \omega_c[x(t), z(t)]$ 。可以看出,这种变换形式上等同于极化漂移中使用的变换[即式(8.67)],但这里  $t$  却是隐含的,因为  $x(t), z(t)$  都是未知函数。即便如此,这并没有带来多少分析上的困难。将变换带入运动方程:

$$\left. \begin{aligned} dv_1/d\tau - v_2 &= \hat{K}v_{\parallel} \\ dv_2/d\tau + v_1 &= 0 \\ dv_{\parallel}/d\tau &= -\hat{K}v_1 \end{aligned} \right\} \quad (8.83)$$

其中,

$$\hat{K} = K/\omega_c = b_x db_z/d\tau - b_z db_x/d\tau \quad (8.84)$$

下一步是引入磁场的显式模型。包含平行磁场梯度的最简单模型是  $B_z = B_z(z)$ 。 $B_z$  的垂直梯度已经讨论过了,因此不必出现在计算中。 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  的条件要求存在一个非零的横向磁场分量。就当前讨论的平板几何而言,这相当于要求有非零的  $B_x(x, z)$ 。通过简单计算,这个磁场的显式模型为:

$$\left. \begin{aligned} B_z &= B_z(z) \\ B_x &= -x dB_z/dz \end{aligned} \right\} \quad (8.85)$$

现在可以在模型中直接引入“细长”近似了。引入这一近似的最初动机是为了得到  $\hat{K}$  的简化表达式。假设位形的横向标长由  $x \sim a$  表征,平行梯度标长由  $B'_z/B_z \sim 1/L$  给出。细长近似要求  $a/L \ll 1$ , 也就是  $B_x/B_z \sim a/L \ll 1$ 。

经过简单计算,我们可以说明磁场模型的替代和“细长”近似使得  $\hat{K}$  的首项具有如下近似结果:

$$\begin{aligned} \hat{K} &= b_x \frac{db_z}{d\tau} - b_z \frac{db_x}{d\tau} = \frac{B_z^2}{B^2} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{x}{B_z} \frac{dB_z}{dz} \right] \approx \frac{dx}{d\tau} \left[ \frac{1}{B_z} \frac{dB_z}{dz} \right] \\ &\approx \frac{v_{\perp}}{\omega_c B_z} \frac{dB_z}{dz} \approx \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel} B_z} \frac{dB_z}{d\tau} \end{aligned} \quad (8.86)$$

在后两个表达式中,  $z$  和  $\tau$  作为独立变量的替换是由一对一的隐式变换关系  $dz = (v_z/\omega_c) d\tau \approx (v_{\parallel}/\omega_c) d\tau$  得出的。对式(8.86)有贡献的还有很多项,但它们都比首项至少小  $a/L$  或是  $r_L/a$  量级。

现在可以直接解方程了。首先考虑绝热不变量。和广义极化漂移分析时一样,引入柱坐标系下具有缓变系数的速度变量:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v_{\perp}(\tau) \cos[\tau + \varepsilon(\tau)] \\ v_2 &= -v_{\perp}(\tau) \sin[\tau + \varepsilon(\tau)] \end{aligned} \right\} \quad (8.87)$$

代入垂直分量的运动方程,得到一组  $v_{\perp}$  和  $\varepsilon$  的联立方程。未知量  $\varepsilon$  可以通过下面的  $v_{\perp}$  方程来消去:

$$\frac{dv_{\perp}}{d\tau} = \frac{v_{\perp}}{2B_z} \frac{dB_z}{d\tau} [1 + \cos 2(\tau + \varepsilon)] \quad (8.88)$$

它可以直接写成:

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\tau} = \left[ \frac{1}{B_z} \frac{dB_z}{d\tau} \right] \cos 2(\tau + \varepsilon) \quad (8.89)$$

通过取一个回旋周期平均,我们再次发现:

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2(z)}{2B(z)} = \text{常数} \quad (8.90)$$

$\mu$  仍是一个绝热不变量,虽然现在的情形是磁场是空间缓变而不是时间缓变。

数学解的第二步是关于运动方程的平行分量,在“细长”近似下它简化为:

$$\frac{dv_{\parallel}}{d\tau} = -\frac{v_{\perp}^2}{\omega_c B_z} \frac{dB_z}{dz} = -\frac{v_{\perp}^2}{2\omega_c B_z} \frac{dB_z}{dz} [1 + \cos(\tau + \varepsilon)] \quad (8.91)$$

对回旋运动进行平均后,变回到真实的时间独立变量,我们可将表达式写成:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{dB_z}{dz} = -\mu \nabla_{\parallel} B \quad (8.92)$$

我们发现,在粒子平行于导心运动的方向上存在一个回旋平均力作用。这个力由磁场的平行梯度产生。我们可以给出这种力的两种形式。第一种是通过直接计算得到的,第二种是不使用“细长”近似得到的普遍结果。

在这一点上,有人也许会认为出现了悖论。在 8.2 节中我们曾指出,作用于带电粒子的平行磁场力确实是瞬时为零的,因此怎么会存在上述式(8.92)得出的平行于磁场的平均力呢? 答案非常精妙,可通过图 8.13 来理解。图 8.13 中显示了具有垂直速度  $v_{\perp}$  的粒子在有平行梯度的磁场中围绕磁场线回旋的情形。其中关键是:当  $v_{\perp} \neq 0$  时,粒子有限的回旋半径在垂直于导心轨道的方向上产生小的轨道偏移。可以看出,在粒子回旋时,轨道顶端(1点)所处的磁场线比导心处的磁场线更陡峭。类似地,轨道底部(2点)粒子则位于较平缓的磁场线上。对于  $B$  场展开的首项(零阶项)来说,不论是陡峭位置还是平缓位置,粒子的平行运动经过一个回旋周期平均后均与导心运动平行。但对于一阶项来讲,这种抵消是不完全的,遗留的小的修正导致了式(8.92)所示的“平行”力。

因此,对这一悖论的解决可以总结如下。具有平行梯度的磁场确实存在一个作

用于粒子导心运动的平均意义上的平行力。要强调的是,这个力作用于导心而不是粒子的瞬时位置。进一步来说,导心处场的方向和粒子沿轨道旋转时实际经历的场的平均方向稍有不同。换句话说,导心的场并不完全平行于粒子实际经历的平均场。所以,尽管导心运动感受到的是沿梯度方向的平行力,但从粒子瞬时位置上,这个力其实是在垂直方向上的。

总的来说,平行磁场梯度产生一个作用于粒子平行于导心运动的力。这个力在粒子上产生重要的磁镜效应,下一节我们就来讨论这一效应。

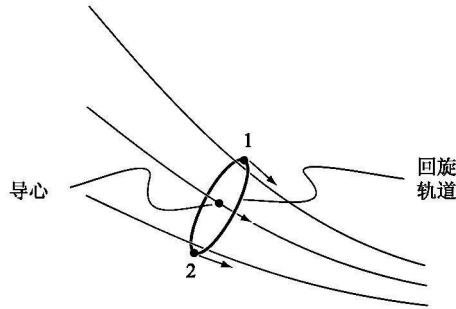


图 8.13 导心和实际粒子轨道之间的  
磁场方向比较(1点的磁场梯度大,2点的磁场梯度小)

### 8.9.3 磁镜效应和磁镜装置

$\mu = \text{常数}$  和  $F_{\parallel} = -\mu \nabla_{\parallel} B$  的结合将对导心的平行运动产生重大影响。具体来说就是,平行运动的方向能够完全反向,因此粒子沿给定磁场线向右运动时,经过一段时间后可能在某个时间点变为向左运动。实际上,粒子轨道上的这个折返点是一个临界点。这个点很自然地被称为“磁镜点”,而整个反射过程则被称为“磁镜效应”。

#### 1. 磁镜效应的定性图像

通过考察图 8.14,我们能够定性地理解磁镜现象。图 8.14(a) 显示了粒子运动到右侧强磁场区域的轨道。粒子从弱场区开始以初速度  $v_{\perp}$  和  $v_{\parallel}$  运动。当粒子回旋地沿着平行于  $B$  的方向运动到强场区时,沿着导心的磁场  $B$  值增大。由于  $\mu = mv_{\perp}^2/2B = \text{常数}$ ,因此  $v_{\perp}$  必然也增大。同时我们知道,在稳恒磁场中粒子的动能是一个确定的常量,即  $W = m(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)/2 = \text{常数}$ 。结果  $v_{\perp}$  的增大必然伴随着  $v_{\parallel}$  的减少。如果  $B$  的增量非常大,粒子最终会在轨道上到达一个  $v_{\parallel} = 0$  的点,这就是图 8.14(b) 所示的反射点。一旦发生反射,粒子的平行速度方向就反向,然后导心就开始向左运动。引起这种平行方向运动行为的力正是  $F_{\parallel} = -\mu \nabla_{\parallel} B$ 。正如图 8.14(c) 所示,当粒子运动到强场区时,它会使得平行方向上的导心运动变慢。

### 2. 产生磁镜效应的定量条件

磁镜效应发生的条件通过运动常数  $\mu$  和  $W$  可以很容易地定量确定。这里计算的目的是要确定粒子在沿平行磁场梯度的给定反射点处  $v_{\perp}$  和  $v_{\parallel}$  之间的关系。首先,考虑图 8.15 所示的沿着磁镜场运动的粒子。假设粒子最初是在中平面磁场最弱的地方开始运动。在这个位置上有  $B = B_{\min}, v_{\perp} = v_{\perp i}, v_{\parallel} = v_{\parallel i}$ 。相应的磁矩和能量分别为  $\mu = m v_{\perp i}^2 / 2B_{\min}$  和  $W = m(v_{\perp i}^2 + v_{\parallel i}^2) / 2$ 。

假定粒子向右运动,并在  $B = B_f > B_{\min}$  点处反射。在该点有  $v_{\perp} = v_{\perp f}$ , 由反射点定义可知  $v_{\parallel} = v_{\parallel f} = 0$ 。相应的能量和磁矩分别为  $W = m v_{\perp f}^2 / 2$  和  $\mu = m v_{\perp f}^2 / 2B_f$ 。

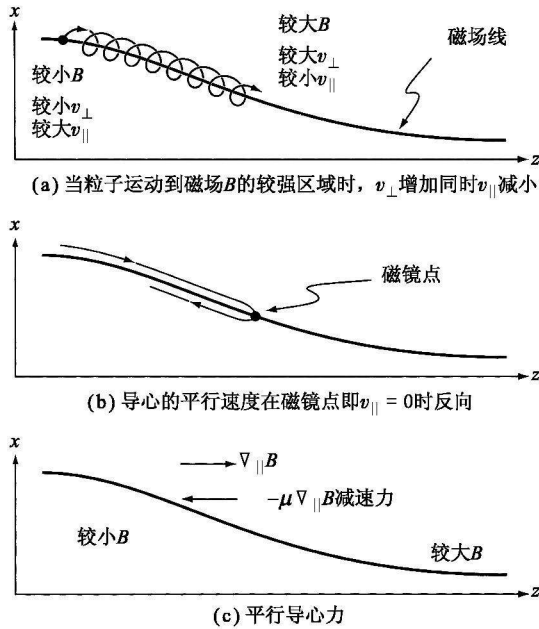


图 8.14 磁镜效应

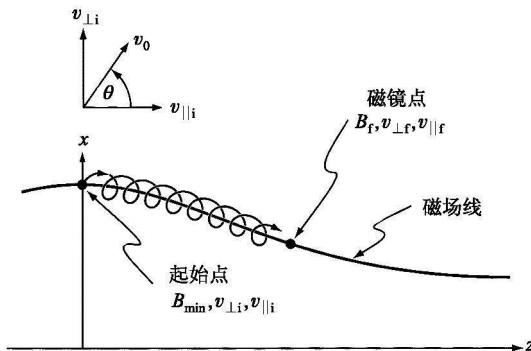


图 8.15 粒子在磁镜点  $B = B_f$  处反射的条件

令  $W$  和  $\mu$  的初值和终值均相等,由此可以简单算出反射条件。进一步定义一个归一化能量  $W = mv_0^2/2$ 。于是初始速度能够用倾角  $\theta$  表示出(图 8.15):

$$\left. \begin{aligned} v_{\perp i} &= v_0 \sin\theta \\ v_{\parallel i} &= v_0 \cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (8.93)$$

能量守恒定律表明:

$$v_{\perp f}^2 = v_{\perp i}^2 + v_{\parallel i}^2 = v_0^2 \quad (8.94)$$

运用  $\mu$  守恒得到:

$$\frac{v_{\perp i}^2}{B_{\min}} = \frac{v_{\perp f}^2}{B_f} \quad (8.95)$$

它可以简化为:

$$\sin^2 \theta_c = \frac{B_{\min}}{B_f} \quad (8.96)$$

其中  $\theta = \theta_c$  是在  $B = B_f$  处发生磁镜反射的临界倾角。有较大初始垂直速度的粒子,相应的倾角  $\theta > \theta_c$ ,将很快被反射;相反,有较小初始垂直速度的粒子的倾角  $\theta < \theta_c$ ,因此会越过  $B = B_f$  的点而不会被反射。能否被反射取决于磁场的变化。

总的来说,分析表明,对于给定平行梯度的磁场,倾角大(也就是大的垂直速度和小的平行速度)的粒子更容易被反射。

### 3. 简单磁镜

前述的磁镜效应构成早期磁约束聚变位形之一即所谓“磁镜”的基础。图8.16展示了这种最简单的位形。通有同向电流的两个线圈产生的磁场在线圈位置处达到最大值,并在两个线圈之间的中平面位置达到最小值。假设初始时等离子体充满线圈之间的空间。然后我们运用磁镜效应的导心理论来确定哪些粒子能够被约束在这种磁场位形中。从理论上说,大部分粒子都能被约束住,这是早期将磁镜列为聚变装置的原因。

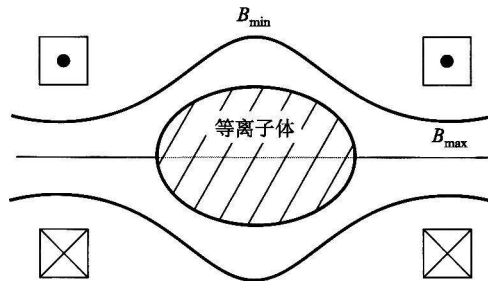


图 8.16 简单磁镜装置的几何

磁镜装置的分析很简单。位形中心处( $B = B_{\min}$ )具有充分大倾角(也就是 $v_{\perp}/v_{\parallel}$ 比值大)的粒子会在梯度方向上某个镜点 $B = B_r$ 处被反射。具有最小初始倾角的粒子则刚好在磁镜喉部 $B = B_{\max}$ 处被反射,相应的临界倾角是:

$$\sin^2 \theta_c = \frac{B_{\min}}{B_{\max}} \equiv \frac{1}{R} \quad (8.97)$$

这里,我们将 $R = B_{\max}/B_{\min} > 1$ 定义为磁镜比。倾角 $\theta > \theta_c$ (即 $v_{\perp}$ 大)的粒子在达到磁镜喉部之前就很快被反射。这些粒子会反向运动并在磁镜中平面的另一端相应位置被反射。粒子就这样不断地在两磁镜反射点之间来回弹跳并被约束在磁镜中。相反,倾角 $\theta < \theta_c$ (即 $v_{\parallel}$ 大)的粒子将穿过磁镜喉部而不被反射。它们会很快打到壁上而损失掉。

上述分析说明,可以用倾角范围来定义磁镜中受约束的粒子部分所占比例:

$$\theta_c \leq \theta \leq \pi - \theta_c \quad (8.98)$$

这个范围以外的倾角构成速度空间“损失锥”,锥中的粒子都将损失掉。损失锥概念的图示见图 8.17,图中描述了 $v_{\perp}, v_{\parallel}, \phi$  坐标空间下的粒子密度。图 8.17(a) 对应于没有损失锥的各向同性的分布函数,如麦克斯韦分布函数。图 8.17(b) 显示的是具有小倾角的损失粒子的影响。粒子锥从球面的对角方向被移去,剩下的阴影区是被磁镜约束的粒子部分。

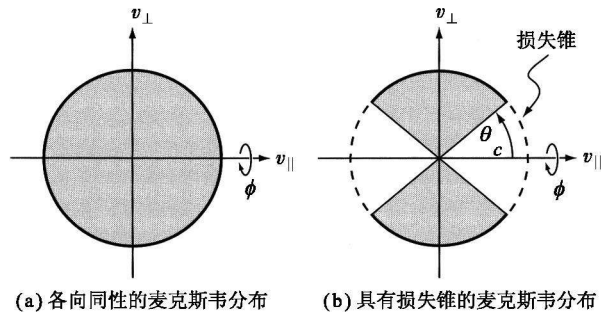


图 8.17 速度相空间

初始时具有麦克斯韦分布函数 $F_M(v)$ 的粒子中,约束粒子所占比例 $f$ 等于损失锥外的粒子数除以总的粒子数。这个比值能以磁镜比的形式简单地计算出:

$$f = \frac{\int_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} v^2 F_M(v) dv}{\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} v^2 F_M(v) dv} = \frac{\int_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} \sin\theta d\theta}{\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta} = \left[ 1 - \frac{1}{R} \right]^{1/2} \quad (8.99)$$

可以看到,对于磁镜比 $R = 2$ 的情形,约有 70% 的粒子被约束,这是一个很大的



比例。

在实际实验中,简单磁镜装置并不像预期的那样有效。人们发现存在宏观和微观不稳定性,它们导致了粒子反常的快速损失。这些影响可以通过仔细分析和一些聪明的方法来缓解,但无法消减的问题仍然存在。库仑碰撞会将约束粒子散射到损失锥中,然后这些粒子很快就会在装置终端损失掉。粒子损失的速度如此之快,使得在磁镜聚变反应堆中无法达到良好的能量平衡。这个问题将在下一章介绍库仑碰撞后再进行详细讨论。

## 8.10 本章总结

本章描述了带电粒子在一系列给定平滑电场和磁场下的运动,研究了包括有空间垂直梯度、平行梯度和随时间变化的各种场。通过假设空间梯度标长大于回旋半径且与时间变化相关的特征频率小于回旋频率,我们建立了有用的直观图像,这也是实际应用中经常遇到的情形。

分析表明,粒子的垂直运动可以分解成两个部分:快速的回旋运动和较慢的、主要由导心漂移构成的导心运动。在平行方向上,只有导心运动是主要的。所以,粒子运动轨道能够精确地近似为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_{\text{gyro}} + \mathbf{v}_g + v_{\parallel} \mathbf{b} \\ \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_{\text{gyro}} + \mathbf{r}_g + l \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (8.100)$$

粒子的速度和位置由磁场和电场确定,这些磁场和电场的形式设定为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= B(\mathbf{r}, t) \mathbf{b} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) + E_{\parallel}(\mathbf{r}, t) \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (8.101)$$

回旋运动可以用坐标轴建立在粒子导心上的局部正交直角坐标系来表示:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{gyro}} &= v_{\perp} \cos \tau \mathbf{e}_x \pm v_{\perp} \sin \tau \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}_{\text{gyro}} &= r_{\perp} \sin \tau \mathbf{e}_x \mp r_{\perp} \cos \tau \mathbf{e}_y \end{aligned} \right\} \quad (8.102)$$

其中,上面的符号对应于电子,  $r_{\perp} = v_{\perp} / \omega_c$ ,  $\omega_c = |q| B(\mathbf{r}_g, l, t) / m$ , 并且,

$$\tau = \int_0^t \omega_c(\mathbf{r}_g, l, t) dt \quad (8.103)$$

在这些表达式中,  $v_{\perp}$ ,  $\mathbf{r}_g$ ,  $l$  都是由导心轨道解确定的随时间缓变的函数。

导心运动由关于未知量  $v_{\perp}$ ,  $\mathbf{v}_g$ ,  $v_{\parallel}$ ,  $\mathbf{r}_g$ ,  $l$  的封闭方程描述。并且,每个导心粒子由磁矩  $\mu$ 、电荷  $q$  和质量  $m$  来刻画,这些量都假定是已知的。首先考虑垂直方向上的导心漂移速度,它由下面几个量组成:

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{V}_E + \mathbf{V}_{\nabla B} + \mathbf{V}_\kappa + \mathbf{V}_p \quad (8.104)$$

每一种漂移速度在局部直角坐标系( $\mathbf{r}_g = x_g \mathbf{e}_x + y_g \mathbf{e}_y$ )中可以写成:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_E &= \frac{\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B}}{B^2} && \mathbf{E} \times \mathbf{B} \text{ 漂移} \\ \mathbf{V}_{\nabla B} &= \mp \frac{v_\perp^2}{2\omega_c} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} && \nabla B \text{ 漂移} \\ \mathbf{V}_\kappa &= \mp \frac{v_\parallel^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B} && \text{曲率漂移} \\ \mathbf{V}_p &= \mp \frac{1}{\omega_c} \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{V}_E}{dt} && \text{极化漂移} \end{aligned} \right\} \quad (8.105)$$

这里和后文所有的场都是指导心处的值。

由绝热不变量表示的垂直速度为:

$$v_\perp^2 = 2\mu B/m \quad (8.106)$$

而平行速度通过解微分方程得出:

$$m \frac{dv_\parallel}{dt} = qE_\parallel - \mu \frac{\partial B}{\partial l} \quad (8.107)$$

最后,导心位置通过解下面的方程得到:

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{r}_g/dt &= \mathbf{v}_g \\ dl/dt &= v_\parallel \end{aligned} \right\} \quad (8.108)$$

式(8.104)~式(8.108)组成一组封闭的确定导心运动的常微分方程组。通常,当场是静止或具有几何对称性时,我们能得到解析解。定性来说,导心运动代表了粒子轨道的回旋平均结果。在垂直方向上,运动由上述各种漂移组成。在平行方向上,速度取决于:①磁场平行梯度和绝热不变量  $\mu$ ;②平行电场(如果有的话)。研究导心运动通常比粒子精确轨道细节研究更能提供等离子体行为的直观图像。正如本章所展示的,这种直观图像对于理解聚变等离子体约束有很大帮助。

## 参考书目

磁场和电场中单粒子运动的应用范围非常广泛,包括聚变、空间等离子体和天体物理学等领域。在文献中出现各式各样的处理方法,有些简单直观,有些正规严谨。但多数都是集中在求解带电粒子的导心运动方面,忽略碰撞,并且假设所涉及场在空间和时间上都是缓变的。下面列出的参考书目可供读者进一步研读。

- Boyd, T. J. M. and Sanderson, J. J. (2003). *The Physics of Plasmas*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Chen, F. F. (1984). *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, second edn. New York: Plenum Press.
- Dolan, T. J. (1982). *Fusion Research*. New York: Pergamon Press.
- Goldston, R. J. and Rutherford, P. H. (1995). *Introduction to Plasma Physics*. Bristol, England: Institute of Physics Publishing.
- Helander, P. and Sigmar, D. J. (2002). *Collisional Transport in Magnetized Plasmas*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Miyamoto, K. (2001). *Fundamentals of Plasma Physics and Controlled Fusion*, revised edn. Toki City: National Institute for Fusion Science.
- Northrup, T. G. (1966). *Adiabatic Charged particle Motion* (Kunkel, W. B. editor). New York: McGraw Hill Book Company.
- Stacey, W. M. (2005). *Fusion Plasma Physics*. Weinheim: Wiley-VCH.
- Wesson, J. (2004). *Tokamaks*. third edn. Oxford: Oxford University Press.

## 习 题

**8.1** 考虑具有角向对称的等离子体,即  $\partial/\partial\theta = 0$ 。磁场用标势  $\phi(r, z, t)$  和矢势  $\mathbf{A}(r, z, t)$  表达。通过单粒子动量方程与矢量  $\mathbf{e}_\theta$  的点乘证明:正则角动量  $p_\theta = mrv_\theta + q\psi$  是严格的运动守恒量。式中,  $\psi = rA_\theta$ 。

**8.2** 本题研究  $\nabla B$  漂移推导中出现的几个问题。具体来说,文中的计算被推广到二维磁场情形,并研究推导中出现的二阶调和项的结果。

① 考虑形如  $\mathbf{B} = B(x, y)\mathbf{e}_z$  的磁场。在导心位置处做  $x$  和  $y$  方向的泰勒展开。按照 8.5.1 节中的推导证明,  $\nabla B$  漂移的一般形式为:

$$\mathbf{V}_{\nabla B} = \mp \frac{v_\perp^2}{2\omega_c} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}$$

② 接下来考虑二阶调和项的贡献。通过求方程的特解并利用适当选取齐次解以满足初始条件等处理,给出粒子速度和位置的一阶修正。证明:修正后的轨迹仍然是圆形的,但导心位置稍有不同,修正后回旋半径(用带撇的量表示)的表达式如下:

$$r_L'^2 = r_L^2 \left[ 1 + \frac{\mathbf{v}_{\perp 0} \cdot \mathbf{B} \times \nabla B}{\omega_c B^2} \right]$$

$$\mathbf{r}'_\perp = \mathbf{r}_\perp - \frac{\mathbf{v}_{\perp 0} \times (\mathbf{v}_{\perp 0} \times \nabla B)}{2\omega_c^2 B}$$

$$\mathbf{v}_{\perp 0} = v_\perp (\mathbf{e}_x \cos\phi + \mathbf{e}_y \sin\phi)$$

提示:②中涉及的代数运算简单但稍显冗繁。

**8.3** 本题是关于在均匀磁场和具有垂直梯度的电场下计算导心运动的二阶修正。重点在二阶“有限回旋半径”漂移的推导。假定磁场为  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ ,  $B$  为常数,且  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi(x, y)$ 。展开方程并保留全部二阶项。

① 计算对回旋频率的一般修正,假定:

$$v_x = -\frac{1}{B} \frac{\partial \Phi}{\partial y_g} + v_{\perp} \cos \Omega t + a_1 \sin \Omega t + v_{2x}(t)$$

$$v_y = +\frac{1}{B} \frac{\partial \Phi}{\partial x_g} + c_1 \sin \Omega t + v_{2y}(t)$$

注意:选择好特定的初始条件将使问题变得较为简单。求出  $a_1$  和  $c_1$  并证明:用回旋频率表示的且修正到  $r_L/a$  的二阶项的一般漂移表达式为:

$$\Omega^2 \approx \omega_c^2 \mp \omega_c \frac{\nabla^2 \Phi}{B} + \frac{1}{B^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \right] + \dots$$

② 证明:对二阶速度  $v_2(t)$  的主要贡献是有限回旋半径漂移。因此总漂移可写成:

$$\mathbf{V}_D = - \left[ 1 + \frac{r_L^2}{4} \right] \frac{\nabla \Phi \times \mathbf{B}}{B^2}$$

8.4 在 origin 反向的一维磁场可用平板几何来建模:  $\mathbf{B} = B_0 \tanh(x/a) \mathbf{e}_z$ , 且  $-\infty < x < \infty$ 。

① 为什么文中推导的粒子漂移导心公式在此无效?

② 画出质子轨道, 初始条件为  $x(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0, \dot{x}(0) = v_{\perp}$ 。

③ 在  $x = 0$  附近展开, 推导轨道转折点  $x_{\max}$  的表达式。证明  $x_{\max} = Cr_L^{\alpha} a^{\beta}$ , 其中,  $r_L = mv_{\perp}/eB_0$ 。

求出  $C, \alpha$  和  $\beta$ 。

8.5 圆柱等离子体处于形为  $\mathbf{B} = B_0 [1 - \beta_0 \exp(-r^2/a^2)] \mathbf{e}_z$  的纵向磁场中。式中,  $B_0 = 6 \text{ T}, \beta_0 = 0.75, T_e = T_i = 1 \text{ keV}$ 。

① 计算电子和离子回旋频率及  $r = a$  处的回旋半径平均值。

② 计算  $r = a$  处电子和离子  $\nabla B$  漂移的大小和符号。

③ 判断导心假设  $r_{Le}/a \ll 1, r_{Li}/a \ll 1, V_{\perp B}/v_{\perp} \ll 1$  是否满足。

④ 计算导致  $B_z$  方向倾斜所需的宏观电流的方向和符号。是否与②一致? 为什么?

8.6 等离子体位于稳恒磁场  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$  中, 此外还叠加了一个形为  $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_z$  的静电场, 其中  $\omega$  和  $k$  是已知常数。假定正电荷离子的初始位置为  $z(0) = 0$ , 其平行速度为  $v_z(0) = v_{\parallel}$ 。证明:在  $E_0$  足够大时, 粒子被捕获在波中。计算  $E_0$  的临界值。

8.7 本题是关于上一题静电捕获问题的归一化。考虑磁场  $\mathbf{B} = B_0 \cos(ky - \omega t) \mathbf{e}_x$  作用下的正电荷粒子。

① 证明:电场表达式为  $\mathbf{E} = -(\omega B_0/k) \cos(ky - \omega t) \mathbf{e}_z$ 。

② 粒子轨道定义为  $\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{e}_x + y(t) \mathbf{e}_y$ 。粒子的初始位置和速度如下:  $\dot{y}(0) = v_0, x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = 0$ 。推导  $x(t)$  和  $y(t)$  互相耦合的两个微分方程, 其中一个方程需要积分后将结果代入另一个方程。最终结果将是仅涉及一个因变量的单一的二阶微分方程。本题的目的就是推导这个方程。

③ 推导用于定义俘获和未俘获粒子之间边界的  $v_0, \omega, k, B_0$  之间的关系式。

8.8 无限长载流为  $I$  的直导线产生的磁场为  $\mathbf{B} = (\mu_0 I / 2\pi R) \mathbf{e}_{\varphi}$ , 其中,  $\varphi$  是环向角。

① 解释为什么这种位形不能将单个电子和离子成功约束在  $(R, Z)$  平面上。

② 以一种极端情形为例, 计算能量为  $10 \text{ keV}$  的离子从小半径为  $b = 0.1 \text{ m}$  的环形室中逃离

所需的时间,离子初始位置为  $R = R_0 = 100 \text{ m}$ ,  $Z = 0$ 。

**8.9** 本题的答案不是很直观。考虑在磁场  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$  和电场  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ , 且  $\varphi(x, y) = Kxy$  联合作用下的带电粒子的运动。目的是求出准确的粒子轨道。

① 写出带正电粒子轨道  $x(t)$ ,  $y(t)$  的精确的运动方程(这些方程将是两个耦合的二阶常微分方程, 为方便起见, 定义  $K = \varepsilon e B_0^2 / m$ , 式中  $\varepsilon$  是表示归一化电场的等效参数)。

② 求出方程的通解。为简单起见, 假定  $\varepsilon$  是有限小量。定性描述轨道的长时间行为。

**8.10** 正离子处于均匀磁场  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$  和时变但空间均匀的电场  $\mathbf{E} = E_0(1 - e^{-t/\tau}) \mathbf{e}_x$  中。

① 计算离子准确的垂直速度, 离子的初始条件为  $v_x(0) = 0, v_y(0) = v_\perp$ 。

② 在极限条件  $\varepsilon \equiv 1/\omega_c \tau \ll 1$  下, 通过回旋周期平均计算导心速度  $\mathbf{v}_g(t')$ :

$$\mathbf{v}_g(t') = \frac{\omega_c}{2\pi} \int_{t'}^{t'+2\pi/\omega_c} \mathbf{v}(t) dt$$

在  $x$  或者  $y$  方向上是否存在任何瞬时或者稳态的导心漂移?

**8.11** 绘制一幅地球及其两极磁场的图片。描述和计算从赤道面出发且  $v_{\parallel} \gg v_\perp$  的电子轨道。在  $v_{\parallel} \ll v_\perp$  情况下重复上述计算。

**8.12** 考虑中空的圆柱形铜管, 沿轴有一根铜导线, 导线携带的电流为  $I$ , 且外加的低频交流电穿过管道和铜线。

① 描绘作为  $r$  函数的电场和磁场(为简单起见, 忽略交流磁场)。

② 描述和计算在电场和磁场联合作用下电子和离子的典型轨道。

**8.13** 正离子放置于形为  $\mathbf{B} = B_0[\mathbf{e}_z + (x/L)\mathbf{e}_y]$  的剪切磁场中。

① 写出描述粒子轨道的精确的运动方程。

② 假定初始条件如下:  $v_y(0) = v_x(0) = x(0) = y(0) = z(0) = 0, v_x(0) = v_0$ , 求出  $v_z(t)$  和  $x(t)$  之间的关系式。

③ 利用②中关系式推导  $x(t)$  的二阶常微分方程。

④ 计算轨道转折点的  $x$  坐标。

**8.14** 直圆柱等离子体中的离子在磁场  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$  和电场  $\varphi = \varphi_0(r/a)^2$  的共同作用下运动。假定  $t = 0$  时, 离子以速度  $\dot{r}(0) = (2T_i/m_i)^{1/2}$  穿过初始点  $r(0) = 0$ 。对于参数  $\alpha = \varphi_0/a^2 B_0 \omega_{ci}$  的各种正值, 计算并绘制出作为时间函数的离子的准确轨道。轨道的径向宽度会比离子回旋半径小很多么? 为什么?

**8.15** 在一个角向对称( $\partial/\partial\theta = 0$ )的简单磁镜中, 轴线附近纵向磁场的大小近似为  $B_z(r, z) \approx B_0(1 + z^2/L^2)$ 。式中,  $L$  为常数,  $z = 0$  是对称的反射面。

① 对于有限小量  $r$  值, 估算作为  $r, z$  函数的曲率矢量  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$  的大小和方向。

② 磁镜中总能量为  $mv^2/2$  的捕获粒子在  $|B| = 2B_0$  被反射。求出在位置  $z = 0, r = r_0$  处的粒子平行速度  $v_{\parallel}$ 。

③ 计算在  $z = 0, r = r_0$  处的导心漂移速度的大小和方向。

# 第 9 章 单粒子运动——库仑碰撞

## 9.1 引言

库仑碰撞是单粒子运动要研究的另一个主要内容。库仑碰撞理论是理解聚变等离子体输运过程的基石。这种认识十分重要,因为能量和粒子的输运直接影响到聚变反应堆的功率平衡。在第 9 章里,我们将概述库仑碰撞理论及其与聚变能的关系。

对库仑碰撞的分析表明,有两类不同性质的输运:速度空间上的输运和物理空间上的输运。在速度空间输运里,库仑碰撞导致在  $(v_{\perp}, v_{\parallel})$  空间下动量和能量在粒子之间转移,这种转移将使得任何初始分布函数都趋于局部麦克斯韦分布。一般来说,这种转移并不伴有能量或粒子直接从等离子体中损失掉(磁镜机制除外)。在物理空间输运的情形下,库仑碰撞导致粒子和能量从等离子体扩散出去。这些直接损失将影响到等离子体的功率平衡,其中能量输运几乎总是显得更为严重。

两种类型输运的比较表明,速度空间的输运几乎总是在更快的时间尺度上发生。通常,速度空间下的输运时间比物理空间下的输运时间短约为  $(r_L/a)^2$  倍。本章重点讨论速度空间的输运。物理空间输运的重要问题放在第 12 章,那时自洽的等离子体模型已经开发出来。

现在考虑速度空间输运的某些一般性质。分析显示,一个有趣的特征是,核聚变碰撞的“库仑截面”不能简单、唯一地定义成近似硬球碰撞那样的截面。其原因与库仑势的长程性质有关(即库仑势特征长度比原子核的线度要长,但仍要比粒子间间距短)。例如,如果我们要计算电子与离子碰撞造成的动量变化,便采用先对不同粒子速度和碰撞参数进行求和,算出单位时间内总碰撞次数,然后再乘以每次碰撞的动量改变量的方法,但这么做是不正确的。由于库仑势的长程性质,每次碰撞的动量改变量本身就是速度和碰撞参数的函数,这种函数性质必须包含在求和过程中。假设这种求和能够正确进行,那么我们就可以(如果需要的话)定义一个等效截面,但这种截面对不同的过程(动量交换、能量交换等)是不同的。也就是说,截面不是唯一的。对于库仑碰撞,通常的做法是定义一组碰撞频率(或等价的碰撞次数),每种过程一个。

我们感兴趣的第二个性质是,描述速度空间输运需要两种不同类型的碰撞频率。第一种对应于“试探粒子”碰撞频率。在这种情况下,我们关注的是典型的单

个试探粒子,例如,一个电子的行为。我们要求的是,这个粒子经过与等离子体中其他电子或离子的库仑碰撞,损失了多少动量或能量。这种碰撞频率是试探粒子的速度  $v$ 、靶粒子的密度  $n$  和温度  $T$  的函数。试探粒子碰撞频率对于了解磁镜装置中的粒子损失、高能离子(如  $\alpha$  粒子)与背景等离子体碰撞造成的能量转移,以及逃逸电子等有趣现象具有重要意义。

第二类速度空间碰撞频率对应于一个“净交换”碰撞频率。这里我们感兴趣的是,电子比离子更热时的净能量交换,或是电子流过离子时的净动量交换。注意,由于库仑碰撞是弹性碰撞,因此同类粒子间碰撞的净能量或动量交换对所有粒子求和后永远是零。净交换碰撞只在不同种粒子之间进行。因此碰撞频率是  $n$  和  $T$  的函数,但不是  $v$  的函数,因为求和是对试探粒子和靶粒子的全体进行的。

净交换碰撞对于描述聚变等离子体行为的自洽流体模型的发展是非常重要的。具体应用包括:当一种粒子成分受到优先加热时电子和离子之间的温度平衡;电子因电场作用穿过离子时的摩擦等。后面这种现象引起电阻率和粒子横越磁场的扩散,我们将在第 10 章和第 12 章中讨论。

分析的另一个有趣的一般性特点是,在对不同粒子的速度和碰撞参数求和时,那些远距离的、小角度的碰撞在决定全速度空间碰撞频率上起着重要作用。库仑势的长程性质表明,尽管每一次远距碰撞造成的偏转角很小,但这样的碰撞次数比近距大角度偏转碰撞的次数要多得多。

本章的具体目标是导出等离子体各种碰撞过程的碰撞频率,并将这些结果应用到对重要的聚变等离子体现象的分析上。我们先给出库仑碰撞引起的粒子轨迹的散射角的数学推导,这个散射角是粒子的速度和碰撞参数的函数。然后将这一重要结果用于推导“试探粒子”的碰撞频率和动量、能量转移的“净交换”碰撞频率。最后将这些结果应用到如下一些聚变问题上:磁镜概念的重新审查;用高能  $\alpha$  粒子或高能中性束加热等离子体,以及逃逸电子现象等。

## 9.2 库仑碰撞——数学推导

### 9.2.1 问题的提出

本节的目的是计算库仑碰撞引起的粒子轨迹的散射角,这个散射角是粒子的速度和碰撞参数的函数。为此,我们需要求解库仑势下两个相互作用粒子的牛顿运动方程。

为了大大简化计算,分析中隐含了几个近似。首先,发生库仑碰撞的粒子间距离很短,回旋运动轨道的曲率可以忽略。换句话说,推导中没有必要考虑磁场效应。第二,由于库仑势的长程性质,人们可能会认为,考虑到一个粒子与附近众多的其他粒子同时都有库仑相互作用,因此必须求解多体问题。其实情况并非如此,

尽管原因稍嫌复杂。虽然现在刚开始这一点不很明显,但后文将表明,影响输运的主要碰撞是小角度偏转的碰撞。由于每一次这样的偏转只是对轨迹的一次小的扰动,因此总的效果可以按两体相互作用的叠加来计算。而且这次扰动对下一次扰动的影响很小,故可忽略。我们需要研究的是为什么将它看成是两体库仑碰撞的叠加是有效的。

首先考虑电荷和质量分别为  $q_1, q_2$  和  $m_1, m_2$  的两个粒子,它们的速度分别为  $v_1, v_2$ 。作用在粒子上的唯一的力是库仑静电力:

$$\left. \begin{aligned} E &= -\nabla\phi \\ \phi &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

相互作用几何如图 9.1 所示。按照牛顿定律,描述粒子轨迹的方程为:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \\ m_2 \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \\ \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} &= \mathbf{v}_1 \\ \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} &= \mathbf{v}_2 \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

也就是说,起始模型由 12 个相互耦合的非线性常微分方程组成。但我们将它变换到质心坐标系,并考虑到几种守恒关系,即可将它简化为单一的微分方程。

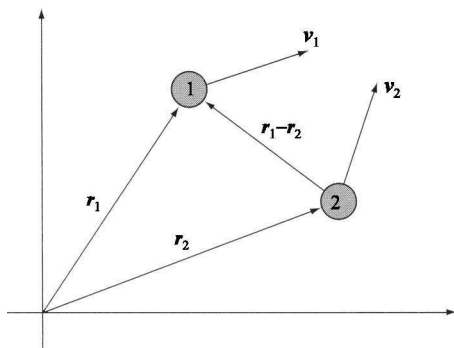


图 9.1 实验室参照系下两体库仑碰撞的几何示意图

简化过程的第一步是利用动量守恒,将两个独立的动量方程相加:

$$\frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = 0 \quad (9.3)$$



这启发我们引入两个新的速度矢量作为因变量:质心速度  $\mathbf{V}$  和相对速度  $\mathbf{v}$ 。其定义和逆变换关系如下:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, & \mathbf{v}_1 &= \mathbf{V} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{V} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

显然,  $d\mathbf{V}/dt = 0$  意味着  $\mathbf{V} = \text{常数}$ , 质心位置由下式给出:

$$\mathbf{R}(t) = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{R}(0) + \mathbf{V}t \quad (9.5)$$

$\mathbf{v}$  的方程和相对位置  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  简化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_r r^3} \mathbf{r} \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

这里,

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (9.7)$$

是约化质量,  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ 。可以看出, 在质心系下, 只有 6 个未知量 ( $\mathbf{v}, \mathbf{r}$ )。现在问题变为质量  $m_r$  的单个等效粒子在力心位于质心位置的中心力场下的运动。质心系几何如图 9.2 所示。

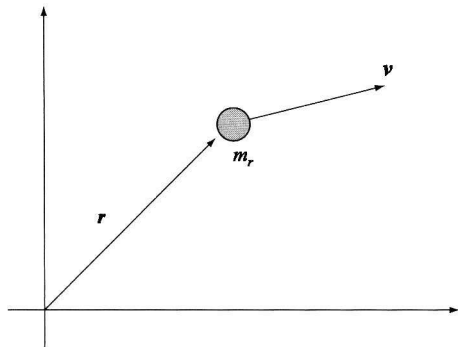


图 9.2 质心系下约化质量  $m_r$  的粒子受到中心力场下的作用

下一步是用  $\mathbf{v}$  点乘动量方程导出能量守恒关系式:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_r v^2 + \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r} \right) = 0 \quad (9.8)$$

或

$$\frac{1}{2}m_r v^2 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = E_0 = \text{常数} \quad (9.9)$$

即动能与势能之和为一常数。类似地,用  $\mathbf{r}$  叉乘动量方程,我们可得到角动量守恒关系:

$$\frac{d}{dt} m_r (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (9.10)$$

或

$$m_r \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{L}_0 = \text{常数} \quad (9.11)$$

角动量守恒意味着,如果质心系下粒子的初始位置和速度分别是  $\mathbf{r}(0)$  和  $\mathbf{v}(0)$ ,那么粒子在整个碰撞过程中的轨道仍在原初的平面上[即该平面垂直于  $\mathbf{r}(0) \times \mathbf{v}(0)$ ]。

因此,通过旋转质心坐标系,可以不失一般性地使问题归结为初始平面[ $\mathbf{r}(0)$ ,  $\mathbf{v}(0)$ ]上仅含4个未知量(相应于位置和速度)的二维平面问题。

利用初始相对速度  $\mathbf{v}(0) \equiv v_0 \mathbf{e}_x$  和图9.3所示的碰撞参数  $b$ ,我们可以得到守恒量  $E_0$  和  $L_0$ ,这样,问题可以进一步简化。同样,为不失一般性,坐标系可取  $\mathbf{v}(0)$  方向为  $x$  轴正方向,取碰撞参数  $b$  的距离沿  $y$  轴方向,初始条件取为  $t = 0$  时刻粒子远离质心,从而  $\phi \rightarrow 0$ 。因此,

$$E_0 = \frac{1}{2} m_r v_0^2 \quad (9.12)$$

类似地,  $\mathbf{L}_0 = L_0 \mathbf{e}_z = m_x y(0) \mathbf{e}_y \times v_0 \mathbf{e}_x$ , 或

$$L_0 = -m_r b v_0 \quad (9.13)$$

引入柱坐标  $x(t) = r(t) \cos\theta(t)$ ,  $y(t) = r(t) \sin\theta(t)$ , 并由  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$  和  $\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$  知,方程可获得最后的简化。能量和角动量的守恒关系可以简化为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{q_1 q_2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} &= v_0^2 \\ r^2 \dot{\theta} &= -b v_0 \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

消去  $\dot{\theta}$ , 得到关于未知量  $r(t)$  的一阶常微分方程:

$$\frac{dr}{dt} = \mp v_0 \left[ 1 - \frac{b^2}{r^2} - 2 \frac{b_{90}}{r} \right]^{1/2} \quad (9.15)$$

其中正负号取决于碰撞前粒子趋近于质心还是碰撞后离开质心。 $b_{90}$ 定义为:

$$b_{90} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_r v_0^2} \quad (9.16)$$

下标“90”的意义不久就会明白。

式(9.15)即我们要求得的关系。

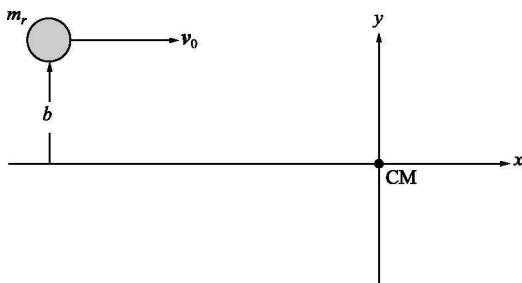
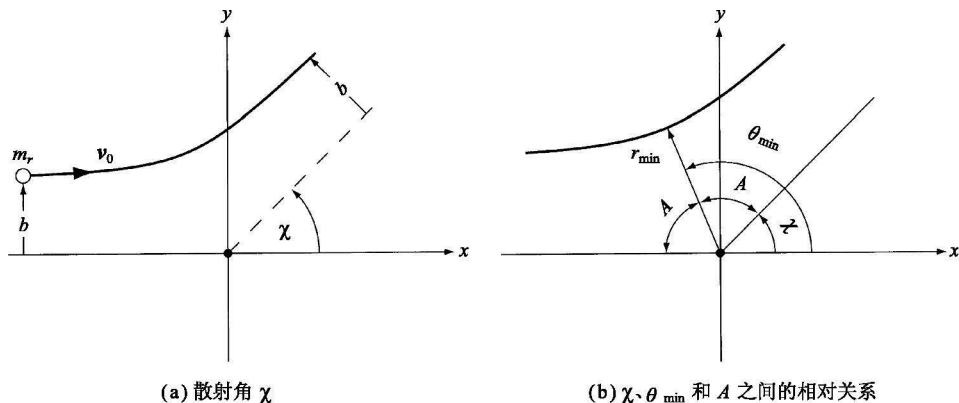


图 9.3 质心系下用  $b$  和  $v_0$  表示  $E_0$  和  $L_0$  的几何关系

### 9.2.2 题 解

现在可以比较直接地求出作为初始速度和碰撞参数函数的散射角的表达式了。计算所需的几何关系如图 9.4 所示。图 9.4 中散射角用  $\chi$  表示。轨道的最短距离用  $r = r_{\min}$  表示,在该位置有  $\dot{r} = 0$  和  $\theta = \theta_{\min}$ 。下面我们来计算  $\chi = \chi(v_0, b)$ 。



(a) 散射角  $\chi$

(b)  $\chi$ 、 $\theta_{\min}$  和  $A$  之间的相对关系

图 9.4 质心系下的散射角  $\chi$  及  $\chi$ 、 $\theta_{\min}$  和  $A$  之间的相对关系

各个角之间的关系可以通过轨道对称性给出,即  $\chi + A = \theta_{\min}$ ,  $\chi + 2A = \pi$ 。消去  $A$  得到  $\chi$  与  $\theta_{\min}$  之间的关系式:

$$\chi = 2\theta_{\min} - \pi \quad (9.17)$$

由式(9.15)即可确定角  $\theta_{\min}$  为:

$$\theta_{\min} \equiv \pi - \int_{\theta_{\min}}^{\pi} d\theta = \pi - \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{d\theta}{dr} dr \quad (9.18)$$

现在,注意到:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} = -\frac{bv_0}{r^2 \dot{r}} \quad (9.19)$$

代入  $\dot{r}$  表达式(这里取负号,因为趋近质心时  $r$  减小),得到:

$$\theta_{\min} = \pi - b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r(r^2 - b^2 - 2b_0 r)^{1/2}} \quad (9.20)$$

为计算这个积分,令

$$\frac{b}{r} = -\frac{b_0}{b} + \left[ 1 + \frac{b_0^2}{b^2} \right]^{1/2} \sin\alpha \quad (9.21)$$

于是式(9.20)变成:

$$\theta_{\min} = \pi - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha = \pi - (\alpha_2 - \alpha_1) \quad (9.22)$$

其中  $\alpha_2 = \pi/2$ , 且

$$\sin\alpha_1 = \frac{b_0}{(b^2 + b_0^2)^{1/2}} \quad (9.23)$$

将  $\theta_{\min}$  的值代入式(9.17),即得到我们求得的关系式  $\chi = \chi(v_0, b)$ :

$$\cot \frac{\chi}{2} = \frac{b}{b_0} = \frac{4\pi \epsilon_0 m_r v_0^2 b}{q_1 q_2} \quad (9.24)$$

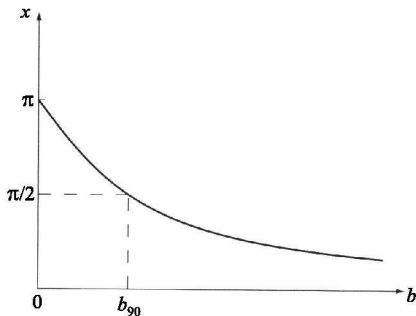


图 9.5 散射角  $\chi$  对碰撞参数  $b$  的曲线  
(注意,当  $b = b_0$  时,  $\chi = \pi/2$ )

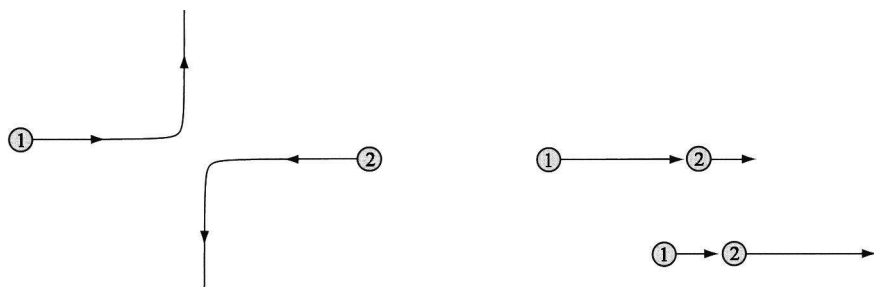
偏转角  $\chi$  对碰撞参数  $b$  的曲线如图 9.5 所示。正如所料,小的碰撞参数(对应于密近碰撞)导致大的散射角。相反,如果碰撞参数很大,即所谓弱的远距离碰撞,则散射角小。此外,当  $b = b_0$  时,偏转角为  $90^\circ$ , 就是这个下标的意义。我们还可看到,随着粒子速度的增加,偏转角减小,这是因为粒子在中心附近所花的时间较少,相当于较弱的碰撞。

式(9.24)就是我们下面一系列应用所需的库仑碰撞的重要特性。

## 9.3 试探粒子碰撞频率

### 9.3.1 一般公式

考虑注入到稳态等离子体的、动量为  $m_e v_e$  的电子的动量改变,这里等离子体仅由电子和离子组成。我们的问题是:平均而言,这个电子(例如)在与等离子体的离子碰撞过程中需要多长时间失去其定向动量(即沿其初始运动方向的动量)?定向动量既可能被转移到横向,也可能变成靶粒子的能量,如图 9.6 所示。具体是哪种情形并不重要,因为在这两种情形下定向动量都损失了。



(a) 粒子 1 损失定向动量(转移到横向上)但不损失能量      (b) 两粒子同向运动, 粒子 1 既损失动量又损失能量

图 9.6

这个弛豫过程可用弛豫时间  $\tau_{ei}(v_e)$  来刻画,或等价地用碰撞频率  $\nu_{ei}(v_e) = 1/\tau_{ei}(v_e)$  来刻画。对于下述过程也存在类似的碰撞频率:试探电子与等离子体电子碰撞而慢化( $\nu_{ee}$ ),或是试探离子与等离子体离子碰撞而慢化( $\nu_{ii}$ ),或与电子碰撞而慢化( $\nu_{ie}$ )。这些碰撞频率提供了对粒子的初始分布弛豫到麦克斯韦分布所需时间的好的估计。也就是说,经过若干次碰撞,粒子基本上失去了其初态的原有性质,成为背景等离子体的一部分。

下面我们着重考虑  $\nu_{ei}$  的计算。但实际上,这里的推导具有一般性,简单置换下标后即可适用于其他碰撞频率。原则上,这种计算相对简单,它采用第 3 章给出的碰撞频率的一般定义,而且要导出的只是  $\chi = \chi(v, b)$  这一重要信息。即便如此,大量的代数运算仍是必要的,微妙之处还涉及“长程”库仑势的实际范围。

我们先来温习一下第 3 章的“硬球碰撞”频率。那里说的是,具有初始定向速度  $\mathbf{v}_e = v_e \mathbf{e}_x$  的典型试探粒子与密度为  $n_i$  的零速度背景离子的碰撞。导出的碰撞频率为  $\nu = n_i \sigma v_e$ 。现在考虑将这一关系推广到目前的情形。假设靶离子的速度不全为零,而是有一个分布函数,于是  $n_i \rightarrow \int f_i(\mathbf{v}_i) d\mathbf{v}_i$ 。接下来,考虑到  $\nu$  的定义式

里的速度实际上是相对速度,因此有  $v_e \rightarrow |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i|$ 。对于长程库仑势情形,硬球碰撞截面代换为  $\sigma \rightarrow 2\pi b db$ 。其实,后面章节里所用的更准确的推广是将  $2\pi$  替换为角对粒子在横向平面初始位置的明确的依赖关系,即  $\sigma \rightarrow 2\pi b db \rightarrow b db d\alpha$ , 如图 9.7 所示。最后,我们引入量  $\Delta m_e v_e$  来表示动量变化,它的意义是电子因单次碰撞损失的初始  $x$  方向上的定向动量。不久我们就会知道,这个量与散射角  $\chi$  有关。

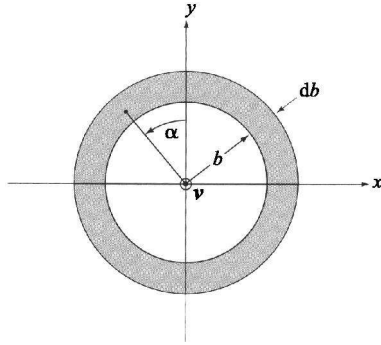


图 9.7 显示角  $\alpha$  的横断面

对所有碰撞损失的动量进行求和,即可得到试探电子在  $x$  方向上损失的总动量。由此得到简单的一般形式:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_e v_e) &= -(\Delta m_e v_e) n_i \sigma v_e \\ &= -\int (\Delta m_e v_e) f_i(\mathbf{v}_i) |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i| b db d\alpha d\mathbf{v}_i \end{aligned} \quad (9.25)$$

下一步是定义引起试探粒子动量变化的碰撞频率:

$$\frac{d}{dt}(m_e v_e) \equiv -\nu_{ei}(m_e v_e) \quad (9.26)$$

于是待求的  $\nu_{ei}$  的表达式为:

$$\nu_{ei}(v_e) = \frac{1}{m_e v_e} \int (\Delta m_e v_e) f_i(\mathbf{v}_i) |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i| b db d\alpha d\mathbf{v}_i \quad (9.27)$$

现在的任务是计算  $\Delta m_e v_e$ , 然后进行五重积分。

### 9.3.2 $\Delta m_e v_e$ 的计算和碰撞参数的积分

$\Delta m_e v_e$  的计算过程如下,电子在质心下任何时刻的速度为[见式(9.4)]:

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{V} + \frac{m_i}{m_i + m_e} \mathbf{v} \quad (9.28)$$

因为  $\mathbf{V} = \text{常数}$ , 故电子因与离子碰撞引起的  $x$  方向上的动量损失可写为:

$$\Delta m_e v_e = m_r \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x = m_r (\mathbf{v}_{\text{initial}} - \mathbf{v}_{\text{final}}) \cdot \mathbf{e}_x \quad (9.29)$$

如果我们将离子的初始速度写成  $\mathbf{v}_i = v'_x \mathbf{e}_x + v'_y \mathbf{e}_y + v'_z \mathbf{e}_z$ , 那么由图 9.3 可知,  $\mathbf{v}_{\text{initial}} = v \mathbf{e}_x$ , 其中,  $v = [(v_e - v'_x)^2 + v'^2_y + v'^2_z]^{1/2}$  是初始相对速度,  $\mathbf{e}_x = [(v_e - v'_x) \mathbf{e}_x - v'_y \mathbf{e}_y - v'_z \mathbf{e}_z] / v$  是沿初始相对速度方向上的单位矢量。类似地,  $\mathbf{v}_{\text{final}} = v \cos \chi \mathbf{e}_x + v \sin \chi \mathbf{e}_\perp$ , 其中  $\mathbf{e}_\perp = \cos \alpha \mathbf{e}_y - \sin \alpha \mathbf{e}_z$  是垂直于初始相对速度方向的单位矢量(图 9.7), 这里运用了能量守恒  $v(t_{\text{final}}) = v(t_{\text{initial}}) \equiv v$ 。因此, 动量损失  $\Delta m_e v_e$  可写成:

$$\Delta m_e v_e = m_r v [(1 - \cos \chi) \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x - \sin \chi \mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{e}_x] \quad (9.30)$$

最后一项可以忽略, 因为它对  $\alpha$  的积分平均为零, 即  $\int (\mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{e}_x) d\alpha = \int (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x \sin \alpha) d\alpha = 0$ 。物理上说, 这是因为对称性, 向上和向下的偏转相等, 即点积  $\mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{e}_x$  有相等的正负概率。余下的非零项的贡献可以改写为:

$$\Delta m_e v_e = m_r (v_e - v'_x) (1 - \cos \chi) \quad (9.31)$$

利用 9.2 节导出的散射角与碰撞参数之间的关系式(9.24), 我们可以将这个表达式最后简化为关于碰撞参数  $b$  的函数形式:

$$\Delta m_e v_e = 2m_r (v_e - v'_x) \frac{b_{90}^2}{b^2 + b_{90}^2} \quad (9.32)$$

现在我们可以对式(9.27)进行关于  $b$  和  $\alpha$  的积分了, 尽管积分上限含有  $b$  会带来些许困难。现在我们将这个上限定义为  $b_{\text{max}}$ , 于是关于  $b$  和  $\alpha$  的积分变为:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{b_{\text{max}}} \frac{b_{90}^2}{b^2 + b_{90}^2} b db = \pi b_{90}^2 \ln \left[ 1 + \frac{b_{\text{max}}^2}{b_{90}^2} \right] \quad (9.33)$$

现在问题已经很明白。名义上, 我们会认为应当将所有可能的离子碰撞包括进来, 因此碰撞参数必须涵盖整个范围,  $0 < b < \infty$ 。但是, 设  $b_{\text{max}} = \infty$  将导致对数发散。

要完全从数学上解决这一困难需要进行大量的分析, 它远远超出目前的讨论范围。但物理上我们可以借助所谓德拜屏蔽的概念来解决这一困难, 思路如下。虽然库仑势弱的  $1/r$  性质意味着其作用可以延伸到很远的距离, 从而随着  $b_{\text{max}} \rightarrow \infty$  是发

散的,但实际上,当粒子间距离超过某个临界值后,试探粒子实际感觉到的靶粒子的势要小得多。原因是在等离子体中,试探粒子受到了德拜长度外所有靶粒子电场的屏蔽。因此我们可以设  $b_{\max} \approx \lambda_{De}$  来消除这种发散性。 $\lambda_{De}$  前的系数值不是很重要,因为发散只出现在不敏感的对数项里。

采用这种解决办法后,我们发现被积函数中的比值  $b_{\max}/b_{90}$  可以写成:

$$\frac{b_{\max}}{b_{90}} \approx \frac{\lambda_{De}}{b_{90}} = \left[ \frac{\epsilon_0 T_e}{n_e e^2} \right]^{1/2} \frac{4\pi \epsilon_0 m_r v^2}{e^2} \quad (9.34)$$

式(9.34)仍有点不能令人满意,因为它将单粒子速度  $v$  与速度平均量  $T_e$  和  $n_e$  混在一起了。但这通过下述假设很容易解决:对于典型的热电子,  $m_r v^2/2 \approx 3T_e/2$ 。同样,对数项的弱依赖性质使得最终结果对近似的具体细节不敏感。 $b_{\max}/b_{90}$  的表达式可以简化为:

$$\frac{b_{\max}}{b_{90}} \equiv \Lambda \approx \frac{12\pi \epsilon_0^{3/2} T_e^{3/2}}{n_e^{1/2} e^3} = 9 \left[ \frac{4\pi n_e \lambda_{De}^3}{3} \right] \quad (9.35)$$

$\ln \Lambda$  称为库伦对数,在实用单位制下,

$$\Lambda = 4.9 \times 10^7 \frac{T_k^{3/2}}{n_{20}^{1/2}} = 2.0 \times 10^9 \quad (9.36)$$

这里后一等式的值对应于取  $T_k = 15$ ,  $n_{20} = 2$ , 故有(对聚变反应堆):

$$\ln \Lambda \approx 20 \quad (9.37)$$

对于所有聚变等离子体,不论是目前实验水平还是未来的聚变堆级,  $\ln \Lambda$  总在 15 ~ 20 之间,可见它对等离子体密度和温度的细微变化是不敏感的。

上述讨论的总结果是,碰撞参数的积分可以简化为:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{b_{\max}} \frac{b_{90}^2}{b^2 + b_{90}^2} b db \approx \pi b_{90}^2 \ln(1 + \Lambda^2) \approx 2\pi b_{90}^2 \ln \Lambda \quad (9.38)$$

这里最后一步的简化是因为  $\Lambda \gg 1$ 。还应注意,对对数项里的  $b_{90}^2$  作近似  $m_r v^2 \approx 3T_e$  是合理的,但对作为系数的  $b_{90}^2$  作此近似则不可以,这种较强的速度依赖性质必须保留。

现在将这一结果代入  $\mathbf{v}_{ei}$  的表达式:

$$\mathbf{v}_{ei}(v_e) = \frac{4\pi m_r}{m_e v_e} \ln \Lambda \int (v_e - v_x') b_{90}^2 f_i(\mathbf{v}_i) | \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i | d\mathbf{v}_i \quad (9.39)$$



### 9.3.3 靶离子速度的积分

为了进行靶离子速度的积分,我们引入如下球坐标系下的速度变量( $v, \theta, \phi$ ):

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= v_e + v \cos\theta \\ v'_y &= v \sin\theta \sin\phi \\ v'_z &= v \sin\theta \cos\phi \end{aligned} \right\} \quad (9.40)$$

由这一变换得到  $dv_i = dv'_x dv'_y dv'_z = v^2 \sin\theta dv d\theta d\phi$ ,  $|\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i| = v$ , 以及  $b_{90}^2 = (e^2/4\pi \epsilon_0 m_r)^2/v^4$ , 对于单一成分离子有  $q_i = -q_e = e$ 。

现在假设  $f_i$  是温度  $T_i$  和密度  $n_i$  下的麦克斯韦分布。将其代入式(9.39), 经过对  $\phi$  的积分等一系列计算, 得到  $v_{ei}$  的简化表达式:

$$\left. \begin{aligned} v_{ei}(v_e) &= \left[ \frac{2^{1/2}}{8\pi^{3/2}} \frac{e^4 n_i}{\epsilon_0^2 T_i^{3/2}} \frac{m_i^{3/2}}{m_e m_r} \ln\Lambda \right] I(w_e) \\ I(w_e) &= -\frac{e^{-w_e^2}}{w_e} \int_0^\infty dw \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos\theta e^{-w^2 - 2w_e w \cos\theta} \end{aligned} \right\} \quad (9.41)$$

其中,  $w = v/v_{Ti}$  和  $w_e = v_e/v_{Ti}$  均为归一化速度;  $v_{Ti} = (2T_i/m_i)^{1/2}$ 。量  $I$  可对  $\theta$  求积分得到:

$$\int_0^\pi e^{-2w_e w \cos\theta} \sin\theta \cos\theta d\theta = -\frac{1}{w_e} \frac{\partial}{\partial w} \left[ \frac{\sinh 2w_e w}{2w_e w} \right] \quad (9.42)$$

通过对  $w$  的分部积分以及一系列代数运算, 可得:

$$I(w_e) = \frac{1}{w_e^2} \left[ \frac{\pi^{1/2}}{2w_e} \Phi(w_e) - e^{-w_e^2} \right] \quad (9.43)$$

其中  $\Phi(w_e)$  是熟悉的概率(或称误差函数)积分:

$$\Phi(w_e) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^{w_e} e^{-w^2} dw \quad (9.44)$$

于是最终可将  $v_{ei}$  的表达式写成:

$$v_{ei}(v_e) = \left[ \frac{2^{1/2}}{8\pi^{3/2}} \frac{e^4 n_i}{\epsilon_0^2 T_i^{3/2}} \frac{m_i^{3/2}}{m_e m_r} \ln\Lambda \right] \left[ \frac{\pi^{1/2}}{2w_e} \Phi(w_e) - \frac{e^{-w_e^2}}{w_e} \right] \quad (9.45)$$

利用  $\Phi(w_e)$  的近似性质:

$$\Phi \approx \begin{cases} 1, & w_e \gg 1 \\ \frac{2}{\pi} e^{-w_e^2} \left[ w_e + \frac{2}{3} w_e^3 \right] & w_e \ll 1 \end{cases} \quad (9.46)$$

对于大的  $w_e$  和小的  $w_e$ ,  $I$  均可以合理地近似为:

$$I(w_e) \approx \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{1}{w_e^3 + 3\pi^{1/2}/4} \quad (9.47)$$

因此,  $\nu_{ei}$  的表达式简化成:

$$\nu_{ei}(v_e) = \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{e^4 n_i}{\epsilon_0^2 m_e m_r} \ln \Lambda \right] \frac{1}{v_e^3 + 1.3 v_{Ti}^3} \quad (9.48)$$

### 9.3.4 $\nu_{ei}$ 和其他碰撞频率的特性

现在我们来研究  $\nu_{ei}$  的特性。首先我们注意到, 对于电子-离子碰撞, 电子的典型速度满足  $v_e \sim v_{Te} \gg v_{Ti}$ 。因此,  $\nu_{ei}$  分母的第二项除了很慢电子的情形之外均可忽略。此外, 对于电子-离子碰撞, 还有  $m_r \approx m_e$ 。因此, 碰撞频率简化为:

$$\nu_{ei}(v_e) \approx \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{e^4 n_i}{\epsilon_0^2 m_e^2} \ln \Lambda \right] \frac{1}{v_e^3} \quad (9.49)$$

我们看到,  $\nu_{ei} \sim 1/v_e^3$ 。也就是说, 高速电子的定向动量的碰撞损失较小, 因为它们运动得非常快, 与靶离子发生相互作用的时间很短。以后我们会看到, 这种  $1/v_e^3$  依赖特性对于逃逸电子现象有着重要影响。

要注意的另一点是, 对  $\nu_{ei}$  的主要贡献来自具有大的碰撞参数, 即小角度碰撞的粒子。事实上, 小角度碰撞将引起  $\nu_{ei}$  的积分发散, 好在物理上的考虑使得我们能够设置一个有限的积分上限  $b_{\max} \approx \lambda_{De}$ 。从物理上说, 虽然每次大  $b$  碰撞只产生一个小角度偏转, 但由于库仑势的长程性质, 这样的碰撞是如此之多, 以至于它们主宰着等离子体的行为。

作为定量比较, 我们来考虑偏转角大于或等于  $90^\circ$  的大角散射截面:  $\sigma_{90} = \pi b_{90}^2$ 。相应的碰撞频率为  $\nu_{90} = n_i \sigma_{90} v_e$ 。比较这个值与式(9.49), 可知:

$$\nu_{ei}(v_e) = (4 \ln \Lambda) \nu_{90}(v_e) \quad (9.50)$$

即实际碰撞频率约为  $90^\circ$  碰撞频率的 80 倍。

现在考虑  $\nu_{ei}$  的典型值。这个值可通过令  $v_e = \hat{v}_e \equiv (3T_e/m_e)^{1/2}$  来获得:

$$\hat{\nu}_{ei} = \nu_{ei}|_{\hat{v}_e} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\omega_{pe}}{\Lambda} \ln \Lambda = 1.33 \times 10^5 \frac{n_{20}}{T_k^{3/2}} \text{ s}^{-1} \quad (9.51)$$

在实用公式里,  $n_e = n_i$  且  $\ln\Lambda = 20$ 。由此可见, 如所预料的那样, 碰撞频率随密度增加但随温度降低。对于  $n_{20} = 2, T_k = 15$  的聚变反应堆, 碰撞频率  $\nu_{ei} \approx 4.6 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ 。此外, 由于  $\Lambda \gg 1$ , 因此,  $\nu_{ei} \ll \omega_{pe} \sim \omega_{ce}$ , 即与聚变等离子体的基本特征频率相比, 库仑碰撞的发生确实是十分罕见的。

通过适当置换成分下标并正确选取约化质量的极限, 我们很容易从式(9.45)得到类似的其他定向动量的碰撞频率表达式。下述这些实用表达式均是在  $n_e = n_i$  且  $\ln\Lambda = 20$  的假定下算得的。典型的粒子速度取为满足  $m_e v_e^2 = 3T_e$  和  $m_i v_i^2 = 3T_i$  条件。经过简单的代数运算, 得到:

$$\left. \begin{aligned} \nu_{ee} &\approx \left[ \frac{1}{2\pi} \frac{n_e e^4}{\epsilon_0^2 m_e^2} \ln\Lambda \right] \frac{1}{v_e^3 + 1.3v_{Te}^3} \approx 1.2 \hat{v}_{ei} \\ \nu_{ii} &\approx \left[ \frac{1}{2\pi} \frac{n_i e^4}{\epsilon_0^2 m_i^2} \ln\Lambda \right] \frac{1}{v_i^3 + 1.3v_{Ti}^3} \approx 1.2 \left[ \frac{m_e}{m_i} \right]^{1/2} \left[ \frac{T_e}{T_i} \right]^{3/2} \hat{v}_{ei} \\ \nu_{ie} &\approx \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{n_e e^4}{\epsilon_0^2 m_e m_i} \ln\Lambda \right] \frac{1}{v_i^3 + 1.3v_{Te}^3} \approx 1.4 \left[ \frac{m_e}{m_i} \right] \hat{v}_{ei} \end{aligned} \right\} \quad (9.52)$$

在这些式子里,  $\hat{v}_{ei}$  的值均为式(9.51)给出的实用值。

如果我们定义质量比  $\mu = m_e/m_i$ , 然后比较三者之间的大小尺度:

$$\left. \begin{aligned} \nu_{ee} &\sim \hat{v}_{ei} \\ \nu_{ii} &\sim \mu^{1/2} \hat{v}_{ei} \\ \nu_{ie} &\sim \mu \hat{v}_{ei} \end{aligned} \right\} \quad (9.53)$$

现解释如下: 对于试探电子, 无论它是与电子还是与离子发生碰撞散射, 失去的动量基本相当。因此,  $\nu_{ee} \sim \hat{v}_{ei}$ 。对于试探离子, 它与其他离子发生碰撞散射时频率类似于  $\nu_{ee}$ , 但与质量很大的离子发生碰撞时, 碰撞频率变低, 相应的运动变慢。因此净结果是碰撞频率减小到  $\nu_{ii} \sim \mu^{1/2} \hat{v}_{ei}$ 。最后, 当离子与电子发生碰撞散射时, 离子几乎不损失什么动量, 因为它们的质量很大。因此碰撞慢化的时间很长, 或者反过来说, 碰撞频率非常低, 即  $\nu_{ie} \sim \mu \hat{v}_{ei}$ 。

最后, 我们来比较库仑碰撞频率与 D-T 聚变碰撞频率的相对大小。我们知道, D-T 聚变反应截面约为 5 靶 (barn), 相当于聚变碰撞频率为  $\nu_{DT} \approx n_i \sigma_{DT} v_{Ti} \approx 0.1 \text{ s}^{-1}$ 。另一方面, 由式(9.53)可知, 对于 D-T 库仑碰撞,  $\nu_{ii} \sim 91 \text{ s}^{-1}$ , 相应的等效截面为  $\sigma_{ii} \approx 3800$  靶。就是说, 等效的库仑碰撞截面差不多要大 1000 倍。因此, 在众多聚变反应发生前, 聚变等离子体的离子 (和电子) 早已弛豫到麦克斯韦分布函数。

上述算得的碰撞频率在本书的其余部分都有用到, 它们有助于我们理解包括宏

观平衡和稳定、输运和加热等各种情形下的等离子体行为。另外值得指出的是,如果愿意的话,我们可以计算试探粒子的其他碰撞频率,例如相应于总能量或横向能量等弛豫过程的频率。然而就目前而言,这些频率不是必需的。为此,我们将注意力集中到运用试探粒子碰撞频率来研究三种情形,这就是磁镜装置、高能离子的慢化和逃逸电子现象。在这三种情形下,碰撞都起着主要作用。

## 9.4 再论磁镜

库仑碰撞的存在对简单磁镜聚变反应堆可实现的最大  $Q$  值(即物理能量增益)设定了不可逾越的限制。这种限制起因于这样一个事实:库仑碰撞使得磁镜约束粒子被散射到损失锥,随后这些粒子几乎瞬间就从等离子体中损失掉。也就是说,试探粒子的库仑碰撞频率直接决定了能量约束时间  $\tau_E$ ,从而设定了等离子体功率平衡的限制。这种限制是不可约化的,也就是说,我们没有办法消除库仑碰撞。下面的分析表明,简单磁镜的最大  $Q$  值太低,很难在聚变能源方面获得应用。

本节分析的目标是导出适用于简单磁镜的  $Q$  的表达式。分析中有两点值得注意:①研究表明, $Q$  与密度无关;②最佳温度不是 15 keV,而是超过 100 keV。我们先作几点略微乐观的假设来简化分析。首先,假设等离子体在宏观上和微观上都没有不稳定性存在,即等离子体不存在粒子或能量的反常输运损失;其次,假定镜比足够大,使得经扩散进入损失锥的粒子基本上失去其垂直( $\perp \mathbf{B}$ )动量。

### 9.4.1 $\tau_E$ 的计算

分析的关键是估计能量损失时间  $\tau_E$ ,方法如下。对试探粒子碰撞的分析表明, $v_{ei} \sim v_{ee} \gg v_{ii}$ 。因此,乍一看,我们会以为电子扩散到损失锥要比离子快得多。但事实并非如此。如果快速扩散使得电子首先损失掉,那么就会使等离子体剩余大量正电荷,由此产生的电场将吸引电子回到等离子体内并驱使离子离开等离子体,但离子因其质量大可以看成是几乎不动的,这样,最终结果是电子被拉回等离子体。因此,电子不可能以与电子间碰撞有关的快速度损失掉。换句话说,电子的损失速率实际上取决于被散射到损失锥的离子,但这些离子的损失速度要慢于  $v_{ii}$ 。一旦损失发生,离子和电子(那些被静电束缚于离子的电子)将一起损失掉。

对  $\tau_E$  的实际估计可以从定义  $v_{ii}$  的微分方程[即离子的式(9.26)的等价方程]求得  $v_i(t)$  来得到。直觉上,人们期望  $\tau_E \sim 1/v_{ii}(v_{Ti})$ 。求解微分方程可以得到对乘积性常数的合理近似。具体来说,我们的目标是计算一个典型试探离子基本上失去其垂直动量(和相应的垂直能量)需要多长时间,假设它开始时具有  $v_{\perp} = \dot{v}_i \equiv$

$(3T_i/m_i)^{1/2}$ ,  $v_{\parallel} = 0$  的速度,如图 9.8 所示。这个时间是典型离子进入损失锥需要的时间。

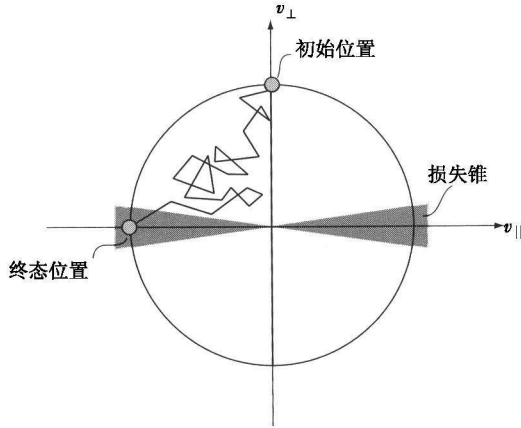


图 9.8 粒子一旦因多次小角散射扩散到损失锥里,就将从速度空间的初始位置损失掉

将  $\hat{v}_{ii}(v_i)$  的简化表达式(9.52)代入  $v_i(t)$  的微分方程,并且引入归一化速度变量  $w_i(t) = v_i(t)/(3T_i/m_i)^{1/2}$ ,即可得到如下方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw_i}{dt} &= -\hat{v}_{ii} \left[ \frac{1+k}{w_i^3+k} \right] w_i \\ w_i(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (9.54)$$

其中,  $\hat{v}_{ii} = \hat{v}_{ii} | \hat{v}_i = 2.3 \times 10^3 n_{20} / T_k^{3/2} \text{ s}^{-1}$ , 离子质量  $m_i = 2.5 m_{\text{proton}}$ , 相当于 50% -50% 的 D-T 燃料,  $k = 1.3 \times (2/3)^{3/2} = 0.71$ 。简单求解式(9.54)即可得到如下  $w_i(t)$  的显式解:

$$w_i^3 + 3k \ln w_i = 1 - 3(1+k) \hat{v}_{ii} t \quad (9.55)$$

解的曲线如图 9.9 所示。我们看到,  $w_i(t)$  是时间的单调递减函数。出于实用上的考虑,我们可以假设,当  $w_i(t)$  减小到其初值的 98%, 即  $w_i(t) = 0.02$  (相当于  $e^{-4}$ ) 时,所有垂直动量均已损失掉。实际上,这个分数选择不是很重要,因为决定小  $w_i$  行为的对数项对它不是很敏感。如上所述,垂直动量损失时间(等于  $\tau_E$ )可通过将  $w_i(t) = 0.02$  代入式(9.55)然后求解时间  $t$  得到。由此解得  $\hat{v}_{ii} \tau_E \approx 1.8$ , 或在实用单位制下:

$$\tau_E = 7.8 \times 10^{-4} \frac{T_k^{3/2}}{n_{20}} \quad (\text{s}) \quad (9.56)$$

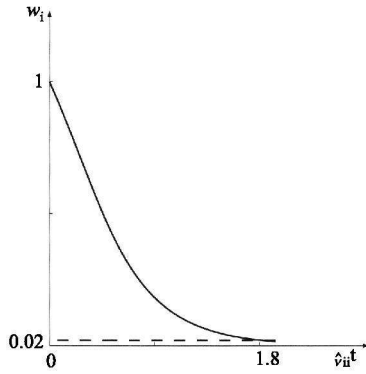


图 9.9 归一化速度  $w_i(t) = v_i(t)/(3T_i/m_i)^{1/2}$  对时间的函数关系

### 9.4.2 简单磁镜的功率平衡

现在我们来计算磁镜装置的功率平衡。按照第 4 章的讨论,可知稳态等离子体的功率平衡(忽略轫致辐射损失)关系为:

$$S_\alpha + S_h - S_\kappa = 0 \quad (9.57)$$

其中,  $S_h$  是外部加热功率密度;  $S_\alpha$  是  $\alpha$  粒子的功率密度;  $S_\kappa$  是热损失功率密度。  $S_\alpha$  和  $S_\kappa$  的显式表达式分别为:

$$\left. \begin{aligned} S_\alpha &= \frac{1}{4} E_\alpha n^2 \langle \sigma v \rangle = K_\alpha n_{20}^2 \langle \sigma v \rangle \quad (\text{W/m}^3) \\ S_\kappa &= \frac{3nT}{\tau_E} = K_\kappa \frac{n_{20}^2}{T_k^{1/2}} \quad (\text{W/m}^3) \end{aligned} \right\} \quad (9.58)$$

其中,  $K_\alpha = 1.4 \times 10^{27}$ ;  $K_\kappa = 6.2 \times 10^7$ 。

下一步,还记得物理学增益因子  $Q$  值定义为:

$$Q = \frac{S_f}{S_h} = \frac{E_n + E_\alpha}{E_\alpha} \frac{S_\alpha}{S_h} \quad (9.59)$$

这里,  $S_f$  是  $\alpha$  粒子和中子的总热核聚变输出功率密度。将式(9.58)代入:

$$Q = 5 \frac{S_\alpha}{S_\kappa - S_\alpha} = \frac{5}{(K_M/T_k^{1/2} \langle \sigma v \rangle) - 1} \quad (9.60)$$

其中  $K_M = K_\kappa/K_\alpha = 4.4 \times 10^{-20}$ 。我们看到,  $Q$  对密度的依赖性已经因碰撞频率对密度的依赖性抵消掉了。因此,对于简单磁镜有  $Q = Q(T)$ 。

对于正的  $Q$ , 函数  $Q(T)$  在  $T_k^{1/2} \langle \sigma v \rangle$  取最大值时有最大值。考察图 3.11 的

$\langle \sigma v \rangle$  曲线可以发现,  $T_k^{1/2} \langle \sigma v \rangle$  在温度略高于 100 keV 时有相对较宽的最大值。在  $T_k = 100$  时, 乘积  $T_k^{1/2} \langle \sigma v \rangle = 8.1 \times 10^{-21}$ 。因此, 对简单磁镜有:

$$Q_{\max} = 1.1 \quad (9.61)$$

比上述分析更复杂的计算表明, 二者的结论是一样的: 简单磁镜可实现的最大的  $Q$  值仅略大于 1。由于动力反应堆所需的  $Q$  值是  $Q \sim 50$ , 因此这对简单磁镜来说是一个很难克服的障碍。最后, 值得指出的是, 人们已经提出一些基于磁镜效应的聪明设想来改善这类装置的  $Q$  值。但是, 我们在前面对于这类装置作出的一些乐观的理想化假设实际上是不成立的, 因此, 结论仍是否定性的。不论哪种方法, 终端损失问题总是如此严重, 使得根本不可能在稳态磁镜反应堆上获得高功率增益。

## 9.5 高能离子的慢化

### 9.5.1 高能离子慢化模型

试探粒子碰撞分析的一个重要应用是背景等离子体下的高能离子束的慢化, 这种情况通常发生在以下两种情形下。第一种情形是, 与背景等离子体 (15 keV) 相比, 聚变反应产生的  $\alpha$  粒子具有非常高的能量 (3.5 MeV)。 $\alpha$  粒子的能量必须转移到等离子体以补充等离子体因热传导造成的输运损失。因此, 我们要了解的就是这种转移所需的时间与能量约束时间相比是长了还是短了, 是优先转移给电子还是离子。

第二种情形是在  $\alpha$  粒子产生之前, 等离子体加热到点火的初始条件。提供这种加热的一种方法是向等离子体注入高能量的 D 或 T 中性束。束粒子在穿过等离子体时通过库仑碰撞而被电离, 并将其能量转移到等离子体上。目前典型的束能量在 100 keV 量级。而反应堆需要的是 1 MeV。我们感兴趣的仍是想知道这种能量转移需要多长时间以及优先加热哪种粒子。

这两种情形下都面临一个如何确定近乎单能的高能粒子将其动量和能量转移到背景等离子体上的问题。严格来说,  $\alpha$  粒子和等离子体之间的动量和能量转移涉及的是净交换碰撞。但因其单能特性, 试探粒子碰撞分析提供了回答这个问题的一个好方法。

具体目标是先计算  $\nu_{be}$  和  $\nu_{bi}$ , 然后分析束离子的慢化轨道。这里, 下标“b”是指束。通过比较这些碰撞频率的大小, 我们能够确定束能量是优先转移给了等离子体中的电子还是离子, 以及这种转移需要多长时间。答案不是一望便知的。与电子碰撞的束离子每次碰撞失去的能量很少。另一方面, 电子的热速度越大, 则

束与电子碰撞的机会就要比束-离子碰撞的机会越多。分析显示,在足够高的束能量下,电子优先得到加热。当束能量低于某个临界值,则优先加热离子。最后,我们通过简单计算来确定束能量转移到电子和离子的实际比例,分析过程如下所示。

支配束离子慢化的基本方程是:

$$m_b \frac{dv_b}{dt} = -m_b(\nu_{be} + \nu_{bi})v_b \quad (9.62)$$

通过对 9.3.4 节中导出的一般结果进行简单改造,并考虑到核电荷数  $Z_b$  的影响,我们很容易求得碰撞频率。所有碰撞频率均与  $e^4$  成正比,而它源自更基本的  $q_1^2 q_2^2$ 。对于等离子体,  $q_1 = -q_2 = e$ 。但对于束-等离子体相互作用过程,等离子体有电荷  $e$ ,而束粒子通常为  $Z_b e$ (例如,对  $\alpha$  粒子,  $Z_b = 2$ )。因此,对于束-等离子体碰撞,必须做代换,即  $e^4 \rightarrow Z_b^2 e^4$ 。

有了这一修正,我们首先着重于计算束-电子碰撞频率。从式(9.48)可得:

$$\nu_{be}(v_b) = \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{Z_b^2 e^4 n_e}{\epsilon_0^2 m_e m_b} \ln \Lambda \right] \frac{1}{v_b^3 + 1.3 v_{Te}^3} \quad (9.63)$$

注意到对 3.5 MeV 的  $\alpha$  粒子,  $v_b = 1.3 \times 10^7$  m/s,而对 15 keV 的电子,  $v_{Te} = 7.3 \times 10^7$  m/s,故有  $v_{Te}^3 \gg v_b^3$ 。这个不等式在中性束加热情形下更甚。因此,对我们要研究的情形,  $\nu_{be}$  可以精确近似为(其中 1.3 由  $3\pi^{1/2}/4$  取代):

$$\nu_{be}(v_b) \approx \frac{1}{3(2\pi)^{3/2}} \frac{Z_b^2 e^4 m_e^{1/2} n_e}{\epsilon_0^2 m_b T_e^{3/2}} \ln \Lambda = 100 \frac{n_{20}}{T_k^{3/2}} \quad (\text{s}^{-1}) \quad (9.64)$$

数值对应于  $\alpha$  粒子加热情形。

下面考虑束-离子碰撞频率。式(9.48)意味着  $\nu_{bi}$  由下式给出:

$$\nu_{bi}(v_b) = \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{Z_b^2 e^4 n_i}{\epsilon_0^2 m_i m_b} \ln \Lambda \right] \frac{1}{v_b^3 + 1.3 v_{Ti}^3} \quad (9.65)$$

对 15 keV 的聚变离子,  $v_{Ti} = 1.1 \times 10^6$  m/s,这表明  $v_{Ti}^3 \ll v_b^3$ 。因此,可以合理地近似为:

$$\nu_{bi}(v_b) \approx \frac{1}{4\pi} \frac{Z_b^2 e^4 n_i}{\epsilon_0^2 m_i m_b v_b} \ln \Lambda = 0.94 \frac{n_{20}}{(m_b v_b / 2)^{3/2}} \quad (\text{s}^{-1}) \quad (9.66)$$

数值对应于  $\alpha$  粒子加热情形,  $m_b v_b / 2$  的单位是 MeV。

### 9.5.2 优先加热的成分

现在我们可以通过作图 9.10 所示的  $\nu_{be}$  和  $\nu_{bi}$  对  $v_b$  的函数曲线来确定束离子



到底是将动量和能量优先转移给了电子还是离子。我们看到,对于  $v_b > v_c$ ,束-电子碰撞频率高于束-离子碰撞频率,即束转移给电子的能量要多于转移给离子的能量。一旦束慢化到  $v_b < v_c$ ,则束-离子碰撞频率占主导,余下的束能量主要转移给离子。当  $v_b = v_c$  时速度出现转换,它对应于  $\nu_{be} = \nu_{bi}$ 。对于  $n_e = n_i$  情形,这个临界速度为:

$$\frac{m_b v_c^2}{2T_e} = \left[ \frac{3\pi^{1/2}}{4} \right]^{2/3} \left[ 1 + \frac{m_b}{m_i} \right]^{2/3} \left[ \frac{m_b}{m_e} \right]^{1/3} = 44 \quad (9.67)$$

数值对应于  $\alpha$  粒子加热情形。

因此结论是,在 15 keV 的等离子体中,  $\alpha$  粒子主要是将能量转移给电子,同时  $\alpha$  粒子开始从最初的 3.5 MeV 慢化到 660 keV。

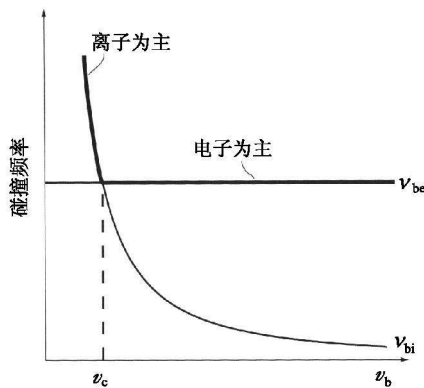


图 9.10 碰撞频率  $\nu_{be}$  和  $\nu_{bi}$  对束速度  $v_b$  的函数曲线

### 9.5.3 $\alpha$ 粒子慢化时间

通过求解确定  $v_b(t)$  的微分方程[式(9.62)],我们可以估算出  $\alpha$  粒子的慢化时间。为此,引入归一化束速度  $w_b = v_b/v_c$ ,并代入前述的碰撞频率的简化形式,于是式(9.62)可以改写为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw_b}{dt} &= -\nu_{be} \left[ 1 + \frac{1}{w_b^3} \right] w_b \\ w_b(0) &\equiv w_0 = \left[ \frac{E_\alpha}{44T} \right]^{1/2} = 2.30 \end{aligned} \right\} \quad (9.68)$$

初始条件中的数值对应于  $E_\alpha = 3.5$  MeV 和  $T = 15$  keV。同样,在  $T = 15$  keV 的束-电子碰撞频率有  $\nu_{be} = 3.45 \text{ s}^{-1}$ 。

该方程的解为：

$$w_b = [(1 + w_0^3)e^{-3\nu_{be}t} - 1]^{1/3} \quad (9.69)$$

函数  $w_b(t)$  曲线如图 9.11 所示。正如预期的那样,束速度随时间单调下降。在早期,束优先加热电子。电子和离子的加热速率相等的临界转换时间  $t_c$  可通过令式(9.69)中  $w_b = 1$  来解得：

$$t_c = \frac{1}{3\nu_{be}} \ln \frac{1 + w_0^3}{2} = 0.18 \quad (\text{s}) \quad (9.70)$$

这个时间明显要比所需的能量约束时间  $\tau_E$  短。这意味着,在等离子体的能量因热传导损失之前, $\alpha$  粒子能够将其大部分能量转移给电子, $\alpha$  粒子的确有足够的时间加热电子。

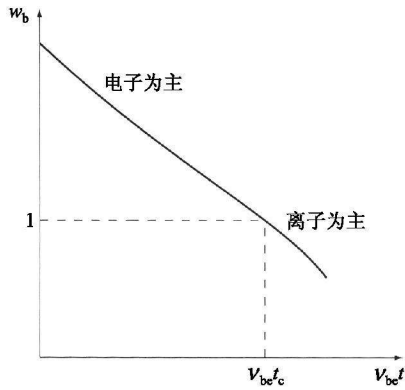


图 9.11 归一化束速度  $w_b = v_b/v_c$  关于时间的函数曲线

对于  $t > t_c$ , 余下的  $\alpha$  粒子的大部分能量将转移给离子。这一转移时间可估计如下。首先,令束能量等于背景等离子体热能,即  $m_b v_b^2/2 \approx T$ , 这相当于  $w_b^2 = 1/44 \ll 1$ 。当这种情况发生时,从实际而言,束已将所有能量转移给了等离子体。相应的时间  $t_f$  为：

$$t_f \approx \frac{1}{3\nu_{be}} \ln(1 + w_0^3) = 0.25 \quad (\text{s}) \quad (9.71)$$

对于离子,这个加热时间仅为  $t_f - t_c = 0.07 \text{ s}$ , 同样小于能量约束时间。

#### 9.5.4 $\alpha$ 能量转移到电子和离子的比例

现在我们知道  $\alpha$  能量实际上是如何在电子和离子之间进行分配的。方法是利用能量守恒,具体如下:用  $v_b$  乘以  $\alpha$  粒子的动量方程[式(9.62)]并引入  $U_b =$

$m_b v_b^2/2$ , 由此可确定  $\alpha$  的能量损失:

$$\frac{dU_b}{dt} = -2(\nu_{be} + \nu_{bi})U_b \quad (9.72)$$

能量守恒意味着  $\alpha$  能量按如下方式转移到电子和离子:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_e}{dt} &= 2\nu_{be}U_b \\ \frac{dU_i}{dt} &= 2\nu_{bi}U_b \end{aligned} \right\} \quad (9.73)$$

其中,  $U_e, U_i$  分别是电子和离子的能量。库仑碰撞将这些能量转化成热能。因此转移到每种成分上的总能量分别为:

$$\left. \begin{aligned} U_e &= 2 \int_0^{t_f} \nu_{be} U_b dt = m_b v_b^2 I_e \\ U_i &= 2 \int_0^{t_f} \nu_{bi} U_b dt = m_b v_b^2 I_i \end{aligned} \right\} \quad (9.74)$$

这里, 积分  $I_e, I_i$  可以写为:

$$\left. \begin{aligned} I_e &= \nu_{be} \int_0^{t_f} w_b^2 dt \\ I_i &= \nu_{be} \int_0^{t_f} \frac{\nu_{bi}}{\nu_{be}} w_b^2 dt = \nu_{be} \int_0^{t_f} \frac{1}{w_b} dt \end{aligned} \right\} \quad (9.75)$$

电子积分项很容易从大束能量重要的限制条件  $w_0^3 \gg 1$  计算出来。引入  $y = \exp(-3\nu_{be}t)$ , 则有:

$$I_e \approx \frac{w_0^2}{3} \int_{1/w_0^3}^1 \frac{(y - 1/w_0^3)^{2/3}}{y} dy \approx \frac{w_0^2}{3} \int_0^1 \frac{1}{y^{1/3}} dy = \frac{w_0^2}{2} \quad (9.76)$$

同样, 离子积分项可由引入  $z = w_0^3 \exp(-3\nu_{be}t)$  来求得:

$$I_i \approx \frac{1}{3} \int_1^{w_0^3} \frac{dz}{z(z-1)^{1/3}} \approx \frac{1}{3} \int_1^\infty \frac{dz}{z(z-1)^{1/3}} = \frac{1}{3} \Gamma(1/3) \Gamma(2/3) = 1.21 \quad (9.77)$$

于是待求的能量份额  $F_e, F_i$  可计算如下:

$$\left. \begin{aligned} F_e &\equiv \frac{I_e}{I_e + I_i} = \frac{T_e}{T_e + T} \\ F_i &\equiv \frac{I_i}{I_e + I_i} = \frac{T}{T_e + T} \end{aligned} \right\} \quad (9.78)$$

其中,  $T_e$  由下式给出:

$$T_e = 0.342 \frac{(m_e/m_b)^{1/3}}{(1 + m_b/m_i)^{2/3}} E_\alpha = 33 \quad (\text{keV}) \quad (9.79)$$

能量配比作为温度的函数曲线如图 9.12 所示。由图 9.12 可见, 对于 D-T 等离子体的  $\alpha$  加热, 如果等离子体温度为 33 keV, 则电子和离子分得的能量相等。在反应堆的典型温度 15 keV 下, 电子获得约 70% 的  $\alpha$  加热能量, 而离子仅获得 30%。在聚变反应堆条件下,  $\alpha$  粒子以 2:1 的比例关系优先加热电子。

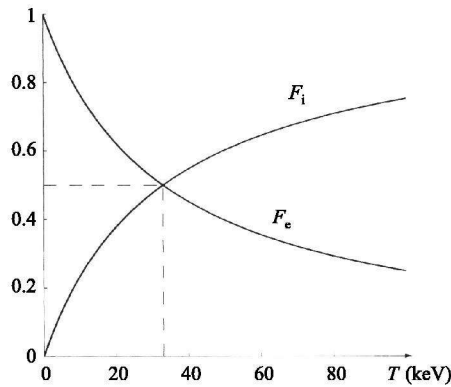


图 9.12  $\alpha$  粒子能量分配到电子 ( $F_e$ ) 和离子 ( $F_i$ ) 的比例对温度的函数曲线

### 9.5.5 束加热讨论

从上述分析得到的结论是, 库仑碰撞使得  $\alpha$  粒子能够在能量因热传导而损失之前将能量转移给等离子体的电子和离子。这里假定不存在任何导致  $\alpha$  粒子反常损失的等离子体不稳定性。由于  $\alpha$  粒子的大部分能量转移到电子, 因此剩下的一个问题是, 电子需要多久才能与离子达到平衡。这是一个重要问题, 因为最终必须是离子被加热到产生聚变反应。电子-离子平衡将在 9.7.3 节讨论, 在那里我们将证明: 相应的平衡时间在 0.4 s 量级。

我们关心的最后一点是等离子体的中性束加热。对  $\alpha$  粒子的类似分析在这里也适用。例如, 如果我们想用 100 keV 的氦离子束来加热  $T = 3$  keV 的 D-T 等离子体, 那么由式 (9.67) 给出的临界束能量应满足  $m_b v_c^2 / 2T = 27.6$ , 它相当于  $m_b v_c^2 / 2 = 83$  keV。在这种情况下, 临界束能量与初始束能量差不多。另外, 从式

(9.79)可知,平等加热电子和离子的相应的临界温度为  $T_c = 1.5 \text{ keV}$ 。因此,与  $\alpha$  加热的情形相比,束能在电子和离子之间的分配几乎是相反的。在中性束加热情形下,离子获得  $2/3$  束能,电子获得  $1/3$ 。最后,对于  $n_{20} = 1$ ,束能量  $100 \text{ keV}$  的情形,束慢化时间约为  $t_f = 0.018 \text{ s}$ ,这要比托卡马克实验的典型的能量约束时间短得多。结论是,从物理学的角度来看,中性束是一种很好的加热等离子体的方式,实验也确实证实了这一结论。

## 9.6 逃逸电子

试探粒子碰撞频率理论的另一项运用是关于逃逸电子现象。逃逸电子是一小群特殊的电子,它们受到直流电场的作用,速度从起初的中等速度被加速到相对论性速度。这种加速即使电场很小也会存在,但库仑碰撞则可能慢化这种运动。一般来说,逃逸电子效应对等离子体的约束是有害的,因此必须懂得如何尽量减少这种粒子成分。

在实验中,逃逸电子通常是这样产生的:在许多聚变等离子体放电的启动和随后的基本稳定阶段,中心螺管作为变压器初级线圈会在等离子体(变压器的次级线圈)中感应出环向电流。此时伴有一个平行于  $\mathbf{B}$  的电场分量。这个缓变的、近乎直流的电场  $E_{\parallel}$  虽然不大但不为零,这是因为库仑碰撞提供了反抗电子流动的摩擦力,它相当于电阻率,即碰撞稍稍降低了德拜屏蔽的效果。

这个小  $E_{\parallel}$  之所以能将电子加速到相对论性速度,是因为在高  $v_e$  情形下有  $\nu_{ei} \sim \nu_{ee} \sim 1/v_e^3$ ,即随着速度提高,碰撞频率迅速下降。因此,具有足够高初始速度的电子在两次碰撞的间隙从电场获得的动量要比在每次碰撞中失去的动量多。电子运动得越快,它就越有时间在下一次碰撞之前从  $E_{\parallel}$  获得动量。正是这种不稳定的局面导致了电子逃逸。最后,逃逸电子①达到相对论速度;②撞到第一壁而损失掉;或③有时因几种可能的等离子体不稳定性而被散射。

在聚变等离子体中,逃逸电子问题之所以如此重要,有几个原因。首先,作为等离子体不稳定性的结果,逃逸电子大多打在第一壁上。由于这些电子具有很高的能量,因此过多的这类电子打在第一壁上就可能造成壁材料的损伤。第二,如果是想要欧姆加热等离子体,那么逃逸电子的大量存在将使这种技术很难奏效,因为大量的输入功率都被逃逸电子吸收去了,它们的碰撞频率太低,无法将能量转移到大部分电子或离子上。

我们将通过下面的计算导出一个简单判据来判定出现逃逸电子的条件。这个条件是  $n, T$  和  $E_{\parallel}$  的函数。有了这种关系我们就可以估计与逃逸电子相关的数密度、能量密度和电流密度。理论表明,逃逸电子成分是数密度的强函数,因此为了尽量减少逃逸,实际工作中采用的是尽量在足够高的密度  $n$  下运行。在聚变堆情形

下,逃逸不是一个很严重的问题,虽然装置启动时一定要十分小心。但它们在某些实验中会是个问题。

### 9.6.1 逃逸电子的阈值条件

在碰撞慢化方程里加入宏观直流电场作用项,我们很容易导出出现逃逸电子的阈值条件。以下我们的注意力主要集中在电子上,因为它们与较重的离子相比更可能逃逸。由于电子-离子碰撞和电子-电子碰撞慢化试探粒子的碰撞频率可比,即  $\nu_{ei} \sim \nu_{ee}$ ,因此这两种碰撞都必须考虑。此外,只有平行于  $\mathbf{B}$  的运动是重要的,因为磁场强烈抑制了垂直方向上的运动。最后,出于数学上方便的考虑,同时又不失一般性,我们假定平行电场是负的,即  $E_{\parallel} = -|E_{\parallel}|$ 。在这些条件下,描述试探电子平行运动的方程是:

$$\frac{dv_e}{dt} = -\frac{e}{m_e} E_{\parallel} - (\nu_{ei} + \nu_{ee}) v_e \quad (9.80)$$

现在的目标是要解这个微分方程,并确定电子速度表现出逃逸行为的条件。

首先,注意到容易逃逸的电子往往是那些恰好在电场加速方向上具有相对较大初速度的电子。在此情形下,碰撞频率可依据大速度下  $1/v_e^3$  极限情形来近似。此外,为方便起见,对速度进行归一化,即  $v_e = (2T_e/m_e)^{1/2} w_e = v_{Te} w_e$ 。于是上述微分方程变为:

$$\frac{dw_e}{dt} = \dot{E}_{\parallel} - \frac{v_R}{w_e^2} \quad (9.81)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{\parallel} &= \frac{e |E_{\parallel}|}{(2m_e T_e)^{1/2}} = 9.4 \times 10^3 \frac{|E_{\parallel}|}{T_k^{1/2}} \quad (\text{s}^{-1}) \\ v_R &= \frac{3}{8} \frac{ne^4 \ln \Lambda}{\sqrt{2\pi} \epsilon_0 m_e^{1/2} T_e^{3/2}} = 7.3 \times 10^5 \frac{n_{20}}{T_k^{3/2}} \quad (\text{s}^{-1}) \end{aligned} \right\} \quad (9.82)$$

这里及以后,  $|E_{\parallel}|$  的单位为伏特每米 (V/m)。

通过检视图 9.13 所示的  $\dot{w}_e$  对  $w_e$  的曲线,我们很容易了解该微分方程的行为。我们看到,  $\dot{w}_e$  的值既可以是负的(即减速)也可以是正的(即加速),转换发生在  $w_e = (v_R/\dot{E}_{\parallel})^{1/2}$  位置处。因此,对于任何一个初速度  $w_e(0) < w_e$  的粒子,有  $\dot{w}_e < 0$ ,这意味着粒子将不断慢化,直到达到一个非常小的速度(这里低速修正时应将碰撞频率包含进来)。显然,这些粒子是不会逃逸的。另一方面,对于初速度  $w_e(0) > w_e$  的粒子,有  $\dot{w}_e > 0$ 。这些粒子将无限期地被加速,直到相对论效应变得重要或是

逃逸出等离子体,这些就是逃逸电子。

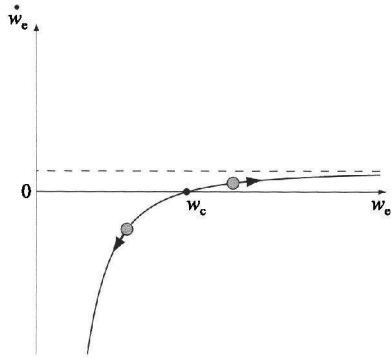


图 9.13  $w_e$  对  $\dot{w}_e$  的曲线显示(初速度  $w_e > w_c$  的粒子有  $dw_e/dt > 0$ , 因此可被加速到相对论性速度)

在此讨论的基础上,我们看到,逃逸电子发生在  $w_e \geq w_c$  的情形下,或按归一化单位写成:

$$\frac{v_e^2}{v_{Te}^2} \geq \frac{v_c^2}{v_{Te}^2} = \frac{3}{8\pi} \frac{ne^3 \ln \Lambda}{|E_{\parallel}| \varepsilon_0^2 T_e} = 78 \frac{n_{20}}{|E_{\parallel}| T_k} \quad (9.83)$$

这就是所要求的关系。接下来的任务是研究逃逸电子的属性,以确定何种情形下它在核聚变实验中才是重要的。

### 9.6.2 逃逸电子的性质

要看清逃逸电子的重要性,我们需要通过计算得到如下这些参数关系:①数密度;②能量密度;③与逃逸成分相关的平行电流密度。一旦这些初始条件已知,问题就很简单了。为了进行这些计算,我们假定,等离子体电子由麦克斯韦分布函数描述。利用背景等离子体与逃逸成分之间的转换点作为初始条件,上述这些量可直接计算出来。应当指出,计算从等离子体中损失的逃逸电子所占比例,以及扩散引起的新逃逸电子的生成速率等问题也是很重要的,但这些问题超出了本书讨论的范围。

推导中进行简化的关键是,认识到对当今的等离子体和不远将来的反应堆而言,有  $n_{20}/|E_{\parallel}|T_k \sim 1$ 。其含义是,初始速度  $v_e/v_{Te} \gg 1$ ,逃逸电子主要由分布函数的高能尾部产生。因此,当不同的量的计算过程中出现概率积分  $\Phi(v_e/v_{Te})$  时,我们可以运用大自变量展开  $\Phi(\zeta) \approx 1 - [\exp(-\zeta^2)/\pi^{1/2}\zeta]$  (其中,  $\zeta \gg 1$ ),来得到足够精确的解析近似。

上述第一个量是逃逸电子的份额  $f_n = n_R/(n_R + n)$ , 其中,  $n_R/n$  的计算如下:

$$\frac{n_R}{n} \frac{1}{\sqrt{\pi} v_{Te}} \int_{v_c}^{\infty} e^{-v_{\parallel}^2/v_{Te}^2} dv_{\parallel} = \frac{1}{2}(1 - \Phi) \approx \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta} \quad (9.84)$$

其中,  $\Phi = \Phi(\zeta)$ ;  $\zeta = v_c/v_{Te} = 8.8(n_{20}/|E_{\parallel}|T_k)^{1/2}$ 。

接下来考虑逃逸电子所携总能量密度的比重。作为一种简单近似,假定所有逃逸电子都被加速到接近相对论性速度,因此,其能量密度为  $U_R = n_R m_e c^2/2$ 。能量密度所占比重  $f_u = U_R/(U_R + 3nT_e/2)$  由下式确定:

$$\frac{U_R}{3nT_e/2} \approx \frac{n_R m_e c^2/2}{3nT_e/2} = \left[ \frac{m_e c^2}{3T_e} \right] \left[ \frac{n_R}{n} \right] \quad (9.85)$$

感兴趣的最后一个量是逃逸电子所携的总电流密度的比重。同样,假定所有逃逸电子都被加速到相对论性速度,故逃逸电子所携的电流密度为  $J_R = -en_R c$ 。相应的电流密度比重  $f_j = |J_R|/(|J_R| + I/\pi a^2)$  由下式确定:

$$\frac{|J_R|}{I/\pi a^2} = \left[ \frac{\pi a^2 e n c}{I} \right] \left[ \frac{n_R}{n} \right] \quad (9.86)$$

我们注意到,所有这些量都正比于  $n_R/n$ 。目前典型实验条件 ( $T_k = 2$ ,  $|E_{\parallel}| = 0.5 \text{ V/m}$ ,  $a = 1 \text{ m}$  和  $I = 1 \text{ MA}$ ) 下的这些量对  $n_{20}$  的函数曲线如图 9.14 所示。图中最显著的特点是所有的量对密度都有很强的依赖性。当密度  $n_{20} \sim 1$  时,逃逸部分可以忽略不计,即  $n_R/n \sim 8 \times 10^{-35}$ ; 当密度  $n_{20} \sim 0.1$  时,逃逸电子开始在电流密度中占据大的份额,并已主宰能量密度; 当密度  $n_{20} \sim 0.01$  时,逃逸也占据了大部分电流密度。

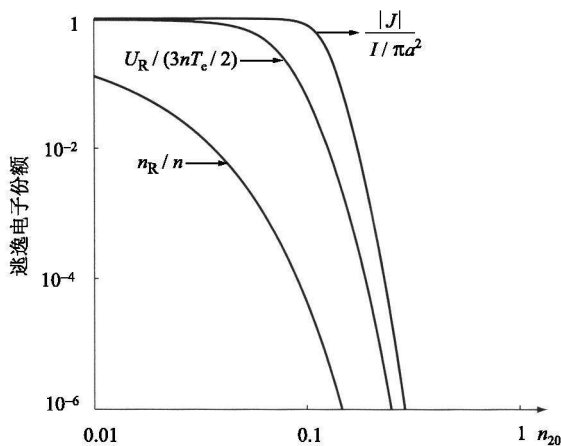


图 9.14 逃逸电子对数密度、能量密度和电流密度的影响



从上述分析可以得出一些结论。首先,逃逸电子是一种产生于库仑碰撞频率具有  $1/v_e^3$  属性的有趣的物理现象;其次,在当前和今后的典型实验参数水平上,逃逸电子对数密度、能量密度和电流密度的影响与背景等离子体的密度有很强的相关性;第三,当  $n_{20} \sim 1$  时,逃逸是不重要的,但当  $n_{20} \sim 0.01$  时,它们的行为起着支配作用;最后,聚变实验和反应堆避免出现逃逸的有效方法是让装置始终运行在高密度下。在稳态放电期间这不是太困难,但在放电启动时的密度较低、电场较高的情形下,需要谨慎从事。

## 9.7 净交换碰撞

到目前为止,我们的注意力一直放在单个试探粒子与一群靶粒子碰撞造成的动量慢化问题上。本节我们来讨论整群试探粒子(不只是一个试探粒子)与整群靶粒子之间碰撞引起的净动量和净能量交换等问题。

这些交换速率方面的知识对于发展自洽的流体模型而言是重要的。例如,平行电场驱动电子穿过离子。库仑碰撞造成的摩擦使电子将动量转移到离子,从而引起电阻率这种宏观输运现象。作为另一个例子,我们来考虑一个优先加热电子的外部加热源。库仑碰撞使得电子将其部分能量转移到离子,从而实现温度平衡。了解这种转移的速度和有效性很重要,因为要实现核聚变反应,最终必须将离子加热到 15 keV。

根据前述分析可知,试探粒子碰撞频率的推导需要对试探粒子速度  $v_e$  和靶粒子总和(即积分)作出规定。其结果是得到形式如  $\nu_{ei}(v_e)$  的碰撞频率。乍一看,似乎净交换碰撞率只需要对所有试探粒子的速度进行某种恰当的平均,也就是说,必须对试探粒子进行加权分布函数的积分。这基本上是对的,只是还有些细微之处需要交代。

① 库仑碰撞是弹性碰撞。这意味着两种相互作用粒子的总动量和总能量在库仑碰撞前后是守恒的(虽然单个粒子并非如此)。因此,如果两种成分具有相同温度下的麦克斯韦分布函数,那么对所有试探粒子和靶粒子求和时就没有动量和能源的净交换;由于对称性,这种交换也没有优先方向。要有净交换,发生碰撞的两种成分必须具有不同的分布函数。分析中我们假定电子和离子分别具有略微不同温度下的平移的麦克斯韦分布函数。这里平移是指  $f(\mathbf{v})$  的峰值位置移动,它使每种成分产生净的宏观动量。

② 净交换碰撞只能出现在不同种成分(如电子和离子)之间。由于库仑碰撞过程中总的动量和能量均守恒,因此,电子与电子的碰撞或离子与离子的碰撞在对所有同种粒子求和时不会产生净交换。

③ 涉及参数设定。出于数学简单性考虑,我们将注意力集中在电子和离子之

间的温差很小的等离子体上,具体说来就是  $(T_e - T_i)/(T_e + T_i) \ll 1$ 。同样,假定宏观平均流速  $\mathbf{u}_e, \mathbf{u}_i$  与热速度相比很小,即  $|\mathbf{u}_e| \ll v_{Te}, |\mathbf{u}_i| \ll v_{Ti}$ 。这一设定是以当今许多实验为特征的。

本节的目的是要计算等离子体中,近麦克斯韦分布的电子和离子之间的库仑碰撞引起的净动量和净能量的碰撞交换频率。

### 9.7.1 问题的公式化

这里的公式化过程类似于 9.3 节试探粒子碰撞频率的情形,也类似于 3.3 节中描述的对广义反应率的讨论。本小节的目的是要给出净动量和净能量交换碰撞频率有意义的定义,以及相应的数学关系,使二者能够计算。

我们先考虑电子-离子碰撞的动量交换碰撞频率。为不失一般性,不妨假设离子为靶粒子,电子为试探粒子(因为求和是对两种成分进行的)。假定电子的初始速度为  $\mathbf{v}_e = v_{ex}\mathbf{e}_x$ ,离子处于静止状态。一如前述,单个试探电子在与单个靶离子库仑碰撞时失去的定向动量定义为  $\Delta m_e v_{ex}$ 。

接下来我们从简单的硬球碰撞模型开始,还记得反应速度(即单位时间单位体积内的总碰撞次数)为  $R_{ei} = n_e n_i \sigma v_e$ 。因此,对于小体积元  $d\mathbf{r} = dx dy dz$ ,电子每秒传递给离子的总动量为  $(\Delta m_e v_{ex}) n_e n_i \sigma v_e d\mathbf{r}$ 。这个表达式很容易推广到库仑碰撞的情形,只是现在需要考虑到电子和离子的分布函数,即作以下替换:  $n_e \rightarrow f_e(\mathbf{v}_e) d\mathbf{v}_e$ ,  $n_i \rightarrow f_i(\mathbf{v}_i) d\mathbf{v}_i$ ,  $v_e \rightarrow |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i|$ , 以及  $\sigma \rightarrow b db d\alpha$ 。

需要比前面多考虑的一步是公式的封闭,这关系到“电子总动量”的定义。我们看到,对于纯麦克斯韦分布的电子,其总动量密度为零,因为被积函数具有奇对称性:  $\int m_e v_e f_e d\mathbf{v}_e = 0$ 。然而,对于平移的麦克斯韦分布,  $d\mathbf{r}$  中所有电子的总动量不为零,事实上,它可根据宏观速度  $\mathbf{u}_e(\mathbf{r}, t)$  定义为  $d\mathbf{r} \int m_e v_e f_e d\mathbf{v}_e \equiv m_e n_e \mathbf{u}_e d\mathbf{r}$ 。因此,当存在电子总动量净损失(转移给了离子)时,减少的量为  $m_e n_e \mathbf{u}_e$ 。

将这些结果综合起来,即得到下列支配电子与离子之间动量交换的关系式:

$$\frac{d}{dt}(m_e n_e \mathbf{u}_e d\mathbf{r}) = - d\mathbf{r} \int (\Delta m_e v_{ex}) f_e(v_e) f_i(v_i) |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i| b db d\alpha d\mathbf{v}_e d\mathbf{v}_i \quad (9.87)$$

其中,出于数学简单性考虑,已假定  $\mathbf{u}_e = u_{ex}\mathbf{e}_x$ 。最终结果很容易推广到任意速度方向上。考虑到碰撞过程的时间很短,空间移动的距离很小(粒子在速度空间里可以跑得很远,但在物理空间不是这样),因此体积  $d\mathbf{r}$  内的总电子数可看成常量,这样式(9.87)可进一步简化。数学上这意味着(下一章将具体证明):

$$\frac{d}{dt}(n_e d\mathbf{r}) = 0 \quad (9.88)$$

于是式(9.87)简化为:

$$m_e n_e \frac{du_e}{dt} = - \int (\Delta m_e v_{ex}) f_e(v_e) f_i(v_i) |v_e - v_i| b db d\alpha dv_e dv_i \quad (9.89)$$

现在我们来定义电子与离子碰撞的净动量交换频率  $\bar{\nu}_{ei}(n, T)$ 。这个频率定义为宏观速度之差:

$$m_e n \frac{du_e}{dt} \equiv - m_e n \bar{\nu}_{ei} (u_e - u_i) \quad (9.90)$$

其中,  $n_e = n_i = n$ 。注意, 只有当电子与离子的宏观速度不同时, 才有净动量交换。反之, 当  $u_e = u_i$  时, 则不存在一种成分向另一种成分转移动量。将式(9.89)和式(9.90)综合起来, 即得到计算  $\bar{\nu}_{ei}(n, T)$  的显性表达式。

对电子和离子之间碰撞的净能量交换也可用类似的分析。在此情形下, 体积  $d\mathbf{r}$  内电子和离子的宏观热能表达式分别为  $U_e = (3/2) n_e T_e d\mathbf{r}$  和  $U_i = (3/2) n_i T_i d\mathbf{r}$ 。仅当两种成分的温度不同时 ( $T_e \neq T_i$ ), 电子和离子之间才有能量交换。类比于动量交换, 可知这种情况下可按如下方式来定义温度平衡时间  $\bar{\tau}_{eq}(n, T)$ , 或等价的温度平衡碰撞频率  $\bar{\nu}_{eq}(n, T) = 1/\bar{\tau}_{eq}(n, T)$  :

$$\frac{dU_e}{dt} \equiv - \bar{\nu}_{eq} (U_e - U_i) \quad (9.91)$$

考虑到  $n_e d\mathbf{r} = \text{常数}$ , 上式可改写为:

$$\frac{3}{2} n \frac{dT_e}{dt} \equiv - \frac{3}{2} n \bar{\nu}_{eq} (T_e - T_i) \quad (9.92)$$

式(9.92)的左边是电子因与离子碰撞而引起的能量密度的时间变化率。如果将单次电子-离子碰撞引起的电子能量损失定义为  $\Delta m_e v_e^2/2$ , 则类似于动量交换情形, 左边可以计算如下:

$$\frac{3}{2} n \frac{dT_e}{dt} = - \int \left[ \Delta \frac{m_e v_e^2}{2} \right] f_e(v_e) f_i(v_i) |v_e - v_i| b db d\alpha dv_e dv_i \quad (9.93)$$

式(9.92)和式(9.93)提供了确定  $\bar{\nu}_{eq}$  的一组明确关系。

还有两点必须确定。首先, 由于库仑碰撞期间电子-离子对的总动量和总能量分别是守恒的, 因此, 离子和电子的宏观动量交换率和能量交换率之间分别有下述关系:

$$\left. \begin{aligned} m_i n \frac{du_i}{dt} &= -m_e n \frac{du_e}{dt} = m_e n \bar{v}_{ei} (u_e - u_i) \\ \frac{3}{2} n \frac{dT_i}{dt} &= -\frac{3}{2} n \frac{dT_e}{dt} = \frac{3}{2} n \bar{v}_{eq} (T_e - T_i) \end{aligned} \right\} \quad (9.94)$$

即一种成分失去的,正是另一种成分得到的。

第二点,是要实际计算净交换碰撞频率,任务显得有点繁重,这涉及八重积分。即便如此,对于小温差下的小平移麦克斯韦分布函数,  $\bar{v}_{ei}$  和  $\bar{v}_{eq}$  仍可得解析解。

### 9.7.2 净动量交换碰撞率

我们采用类似于计算试探粒子碰撞频率的方法来计算净动量交换碰撞频率  $\bar{v}_{ei}$ 。为此先规定分布函数,然后直接进行多重碰撞积分。

#### 1. 分布函数

对于净交换碰撞,适当的分布函数是温度略有差别的平移麦克斯韦分布函数。具体来说,假定  $f_e$  和  $f_i$  具有如下形式:

$$\left. \begin{aligned} f_e(\mathbf{v}_e) &= n_e \left[ \frac{m_e}{2\pi T_e} \right]^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_e}{2T_e} [ (v_{ex} - u_e)^2 + v_{ey}^2 + v_{ez}^2 ] \right\} \\ f_i(\mathbf{v}_i) &= n_i \left[ \frac{m_i}{2\pi T_i} \right]^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_i}{2T_i} [ (v_{ix} - u_i)^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2 ] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9.95)$$

为简单起见,假定宏观速度  $\mathbf{u}_e$  和  $\mathbf{u}_i$  在  $x$  方向,由此不难看出:

$$\left. \begin{aligned} \int \mathbf{v}_e f_e d\mathbf{v}_e &= n_e u_e \mathbf{e}_x \\ \int \mathbf{v}_i f_i d\mathbf{v}_i &= n_i u_i \mathbf{e}_x \end{aligned} \right\} \quad (9.96)$$

为简化计算,引入两个假设。首先,假定与热速度相比每种成分的流速很小:  $u \ll v_T$ ; 其次,假定温差也很小。因此,温度可以写为:

$$\left. \begin{aligned} T_e &= T + \Delta T/2 \\ T_i &= T - \Delta T/2 \end{aligned} \right\} \quad (9.97)$$

其中,  $T = (T_e + T_i)/2$ ,  $\Delta T = T_e - T_i$ , 且  $\Delta T \ll T$ 。目前大多数实验均满足这些假设。

下一步是利用小  $u$ , 小  $\Delta T$  对分布函数进行泰勒展开:

$$\left. \begin{aligned} f_e(\mathbf{v}_e) &\approx n_e \left[ \frac{m_e}{2\pi T} \right]^{3/2} \exp \left[ -\frac{m_e v_e^2}{2T} \right] \left[ 1 + \frac{m_e v_{ex} u_e}{T} - \left[ 3 - \frac{m_e v_e^2}{T} \right] \frac{\Delta T}{4T} \right] \\ f_i(\mathbf{v}_i) &\approx n_i \left[ \frac{m_i}{2\pi T} \right]^{3/2} \exp \left[ -\frac{m_i v_i^2}{2T} \right] \left[ 1 + \frac{m_i v_{ix} u_i}{T} + \left[ 3 - \frac{m_i v_i^2}{T} \right] \frac{\Delta T}{4T} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9.98)$$

## 2. 新的速度变量

确定了分布函数,现在我们可以计算多重碰撞积分了。为此先作变换,即利用前述定义将速度变量  $\mathbf{v}_e$  和  $\mathbf{v}_i$  变换成质心系下的速度变量  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{V}$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{m_e \mathbf{v}_e + m_i \mathbf{v}_i}{m_e + m_i}, & \mathbf{v}_e &= \mathbf{V} + \frac{m_i}{m_e + m_i} \mathbf{v} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i, & \mathbf{v}_i &= \mathbf{V} - \frac{m_e}{m_e + m_i} \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (9.99)$$

为了进一步简化计算,将质心速度  $\mathbf{V}$  和相对速度  $\mathbf{v}$  写成球面速度坐标系下的形式:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= v(\cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \sin\phi \mathbf{e}_y + \sin\theta \cos\phi \mathbf{e}_z) \\ \mathbf{V} &= V(\cos\theta' \mathbf{e}_x + \sin\theta' \sin\phi' \mathbf{e}_y + \sin\theta' \cos\phi' \mathbf{e}_z) \end{aligned} \right\} \quad (9.100)$$

简短的计算结果表明,式(9.89)给出的  $\bar{v}_{ei}$  的碰撞积分现在可以写成:

$$m_e n_e \frac{d u_e}{dt} = - \int (\Delta m_e v_{ex}) f_e f_i v (b db d\alpha) (v^2 \sin\theta dv d\theta d\phi) (V^2 \sin\theta' dV d\theta' d\phi') \quad (9.101)$$

## 3. 计算 $\Delta m_e v_{ex}$ , 并对 $b$ 和 $\alpha$ 积分

现在我们必须计算  $\Delta m_e v_{ex}$ , 并开始进行多重积分。我们在计算试探粒子碰撞频率时就已经给出了量  $\Delta m_e v_{ex}$  的计算结果,出于方便,按现在的符号复述如下:

$$\Delta m_e v_{ex} = m_r v [(1 - \cos\chi) \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x - \sin\chi \mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{e}_x] \quad (9.102)$$

如前所述,第二项对  $\alpha$  积分后平均为零,故可忽略。余下的非零项可以表示为:

$$\Delta m_e v_{ex} = 2m_r v \cos\theta \frac{b_{90}^2}{b^2 + b_{90}^2} \quad (9.103)$$

由于被积函数里的  $b$  和  $\alpha$  只出现在  $\Delta m_e v_{ex}$  里,因此可分离出来单独进行积分:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{b_{\max}} (\Delta m_e v_{ex}) b db = (4\pi m_r \ln\Lambda) b_{90}^2 v \cos\theta \quad (9.104)$$

## 4. 对速度积分

下一步是将速度变换式代入分布函数并对  $d\mathbf{V}$  和  $d\mathbf{v}$  进行积分。具体过程如下,首先,注意到:

$$\left. \begin{aligned} f_e(\mathbf{v}_e) f_i(\mathbf{v}_i) &\approx n_e n_i \left[ \frac{m_e}{2\pi T} \right]^{3/2} \left[ \frac{m_i}{2\pi T} \right]^{3/2} \exp\left[ -\frac{m_e v_e^2 + m_i v_i^2}{2T} \right] F(\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_i) \\ F(\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_i) &= 1 + \frac{m_e v_{ex} u_e + m_i v_{ix} u_i}{T} + \frac{m_e v_e^2 - m_i v_i^2}{T} \frac{\Delta T}{4T} \end{aligned} \right\} \quad (9.105)$$

将指数因子变换为较简单的形式:

$$\exp\left[-\frac{m_e v_e^2 + m_i v_i^2}{2T}\right] = \exp\left[-\frac{(m_e + m_i)V^2 + m_r v^2}{2T}\right] \quad (9.106)$$

泰勒展开后,函数  $F$  有许多项。但注意到  $F$  对  $\theta$  的依赖关系,以及对  $b$  和  $\alpha$  积分后产生的项正比于  $\cos\theta$  [见式(9.104)],代数运算还可以简化。因此,在  $0 \leq \theta \leq \pi$  范围内对  $\theta$  积分后,  $F$  中只有那些形为  $F \cos\theta$  的项平均后不为零,我们可以将这些项挑出来写为:

$$F = \frac{m_r v(u_e - u_i)}{T} \cos\theta \quad (9.107)$$

将上面这些结果结合起来,并引入归一化速度变量  $W$  和  $w$ ,即  $V = [2T/(m_e + m_i)]^{1/2} W$ ,  $v = (2T/m_r)^{1/2} w$ ,则式(9.101)给出的基本动量交换关系可以简化为:

$$m_e n_e \frac{du_e}{dt} = -\frac{\sqrt{2}I}{8\pi^4} \frac{n_e n_i e^4 m_e^{1/2} \ln\Lambda}{\epsilon_0^2 (1 + m_e/m_i)^{3/2} T^{3/2}} (u_e - u_i) \quad (9.108)$$

其中,多重积分  $I$  是 6 重分离积分的积:

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta d\theta \int_0^\infty W^2 e^{-W^2} dW \int_0^\infty w e^{-w^2} dw = \frac{2\pi^{5/2}}{3} \quad (9.109)$$

最后,比较式(9.108)和式(9.90),并由  $m_e \ll m_i$ ,即可得到待求的  $\bar{\nu}_{ei}$  的表达式:

$$\bar{\nu}_{ei} = \frac{\sqrt{2}}{12\pi^{3/2}} \frac{e^4 n_i}{\epsilon_0^2 m_e^{1/2} T^{3/2}} \ln\Lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_{pe}}{\Lambda} \ln\Lambda = 1.8 \times 10^5 \frac{n_{20}}{T_k^{3/2}} \quad (\text{s}^{-1}) \quad (9.110)$$

我们看到  $\bar{\nu}_{ei} \sim \hat{\nu}_{ei}$ ,即在数值系数为 1 的量级上,净动量交换碰撞频率等于试探粒子慢化频率的典型值  $\hat{\nu}_{ei}$ 。对于聚变等离子体,由式(9.110)可知,  $\tau_{ei} = 1/\bar{\nu}_{ei} \sim 0.16 \times 10^{-3} \text{ s}$ ,远远小于所需的能量约束时间。因此动量交换能够在能量损失之前完成。

$\bar{\nu}_{ei}$  主要是应用在描述聚变等离子体动量守恒的自洽的流体方程上。下一章我们将详细讨论这一重要课题。结果表明,  $\bar{\nu}_{ei}$  的存在使得等离子体小而有限的电阻率提高了,从而直接影响到对等离子体的欧姆加热。第 14 章还将表明,  $\bar{\nu}_{ei}$  与物理空间的粒子扩散系数密切相关。

### 9.7.3 净能量交换碰撞频率

净能量交换碰撞频率的计算与前小节的计算非常相似,但有两点必须修正。第一,必须计算单次碰撞造成的电子能量损失  $\Delta m_e v_e^2/2$ ,而不是定向动量损失  $\Delta m_e v_{ex}$ ;其次,式(9.105)中函数  $F$  的不同项对碰撞积分均有非零贡献。

首先考虑每次碰撞的电子能量损失。在质心系下,任意时刻电子能量可表示为:

$$\frac{1}{2}m_e v_e^2 = \frac{m_e}{2} \left[ V^2 + \left( \frac{m_i}{m_e + m_i} \right)^2 v^2 \right] + m_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{v} \quad (9.111)$$

因为  $\mathbf{V}$  和  $v^2$  在碰撞前后守恒,故电子能量损失可以写为:

$$\Delta m_e v_e^2/2 = m_i \mathbf{V} \cdot \Delta \mathbf{v} = m_i \mathbf{V} \cdot (\mathbf{v}_{\text{initial}} - \mathbf{v}_{\text{final}}) \quad (9.112)$$

下一步,还记得  $\mathbf{v}_{\text{initial}} = v \mathbf{e}_X$  和  $\mathbf{v}_{\text{final}} = v(\cos\chi \mathbf{e}_X + \sin\chi \mathbf{e}_\perp)$ ,由此得:

$$\Delta m_e v_e^2/2 = m_i v \mathbf{V} \cdot [(1 - \cos\chi) \mathbf{e}_X - \sin\chi \mathbf{e}_\perp] \quad (9.113)$$

同样,第二项对  $\alpha$  积分后平均为零。其余非零项简化为:

$$\Delta \frac{m_e v_e^2}{2} = m_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{v} (1 - \cos\chi) = \frac{2b_{90}^2}{b^2 + b_{90}^2} m_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{v} \quad (9.114)$$

第二项修正是关于  $F$  内非零项的贡献。注意到不同的项对  $\theta$  和  $\theta'$  的依赖关系,并将它们与式(9.114)相应的依赖关系进行比较,可知非零项贡献可以写成:

$$F = \left[ \frac{m_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}}{T} \right] \frac{\Delta T}{T} \quad (9.115)$$

将各项结合起来并按式(9.93)进行简化,得到确定  $\bar{v}_{eq}$  碰撞积分的方程:

$$\frac{3}{2}n \frac{dT_e}{dt} = - (T_e - T_i) \int f_{M_e} f_{M_i} v \left[ \frac{m_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}}{T} \right]^2 \frac{2b_{90}^2}{b^2 + b_{90}^2} b db d\alpha dV dv \quad (9.116)$$

其中,  $f_{M_e}$  和  $f_{M_i}$  分别是未扰动的(即等温无平移的)麦克斯韦分布函数,在球面坐标系下:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{v} = Vv [\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi - \phi')] \quad (9.117)$$

现在可以直接计算出式(9.116)的积分。考虑到  $m_e \ll m_i$ ,我们有:

$$\frac{3}{2}n \frac{dT_e}{dt} = - \frac{\sqrt{2}}{4\pi^{3/2}} \frac{n_e n_i m_e^{1/2} e^4 \ln\Lambda}{m_i T^{3/2} \epsilon_0} (T_e - T_i) \quad (9.118)$$

比较式(9.116)和式(9.110)即可得  $\bar{\nu}_{eq}$  的表达式:

$$\bar{\nu}_{eq} = 2 \frac{m_e}{m_i} \bar{\nu}_{ei} = 78 \frac{n_{20}}{T_k^{3/2}} \quad (\text{s}^{-1}) \quad (9.119)$$

数值对应于 50% -50% 的 D-T 混合情形。

正如所料,能量交换的碰撞频率远低于动量交换的碰撞频率。前者比后者要小一个质量比  $m_e/m_i$  倍。电子与重离子的碰撞可使其速度方向有大的改变,但它的能量在很大程度上仍然不变——就好比乒乓球与保龄球碰撞后的反弹。对于聚变等离子体,  $\bar{\tau}_{eq} = 1/\bar{\nu}_{eq} \sim 0.4 \text{ s}$ , 时间比所需的能量约束时间更短, 尽管不是短得很多。因此(例如)电子在其能量由热传导损失之前, 同样有时间将能量转移到离子, 并与离子取得热平衡。

能量平衡碰撞频率在电子、离子和粒子的能量守恒关系上起着重要作用。显然,为了产生聚变能,能量必须及时地从电子和  $\alpha$  粒子转移到离子。 $\alpha$  粒子、电子与冷离子之间的能量平衡没有任何物理意义,因为产生聚变反应需要的是离子而不是电子。

## 9.8 本章总结

库仑碰撞引起速度空间和物理空间上的运输。第9章重点讨论速度空间的运输。几乎所有与各类碰撞频率相关的有用结果都是基于两体库仑碰撞的基本性质,即粒子的散射角与相对速度和碰撞参数之间的关系:  $\cot(\chi/2) = b/b_{90}$ , 其中,  $b_{90} = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 m_r v^2$ 。

第一类问题是关于单个试探粒子的碰撞频率。这里我们主要关心是单个试探粒子在与成群等离子体离子和电子碰撞时造成的定向动量损失。结果表明,小角散射碰撞过程是主要损失途径。事实上,我们需要引进德拜屏蔽概念来为碰撞频率的求解设置一个有限的约束。通常,电子-离子慢化时间尺度为  $\nu_{ei} \sim (\omega_{pe}/\Lambda) \ln\Lambda \propto n/T^{3/2}$ , 对聚变等离子体为亚毫秒量级。试探粒子的其他碰撞频率的尺度分别为  $\nu_{ee} \sim \nu_{ei}$ ,  $\nu_{ii} \sim \mu^{1/2} \nu_{ei}$ ,  $\nu_{ie} \sim \mu \nu_{ei}$ , 这里  $\mu = m_e/m_i$  是质量比。

我们将这种试探粒子碰撞分析应用于如下几种情形。首先是对简单磁镜进行再分析。由于库仑碰撞使得其粒子损失速率主要由离子-离子碰撞的时间尺度决定,因此它的  $Q$  值仅在 1 的量级。其次是对  $\alpha$  粒子慢化问题进行研究。结果表明,在  $660 \text{ keV} < m_b v_b^2/2 < 3.5 \text{ MeV}$  的能量范围内, $\alpha$  粒子的慢化主要由电子决定。总体而言,约 70% 的  $\alpha$  粒子能量分摊给了电子,30% 给了离子。然后电子再以电子-离子碰撞的平衡时间尺度将能量转移给离子。整个过程需时约 0.5 s,这要比能量



约束时间(通常取 1 s)快,虽然快得不是很多。最后一项应用是逃逸电子。在出现逃逸时,少数电子可以被小的直流电场加速到相对论性速度,其原因在于在大速度下碰撞频率  $\nu_{ei}$  和  $\nu_{ec}$  对速度  $v_e$  的依赖性呈  $1/v_e^3$ 。逃逸对实验具有破坏性影响,但可以通过让装置运行于高密度  $n_{20} > 0.1$  下来避免。

第二种速度空间输运形式涉及电子和离子之间的动量和能量的净交换。这里,对库仑碰撞的后果进行求和时两类成分都需包括在内。净交换碰撞仅对于不同成分之间的碰撞才是重要的。此外,两种成分必须有不同的分布函数,例如,具有不同温度的平移麦克斯韦分布。研究表明,动量转移的净交换碰撞频率尺度为  $\bar{\nu}_{ei} \sim (\omega_{pe}/\Lambda) \ln \Lambda \propto n/T^{3/2}$ 。类似的计算表明,能量平衡的净交换碰撞频率要低得多:  $\bar{\nu}_{eq} \sim \mu \bar{\nu}_{ei}$ 。净交换碰撞频率的主要应用是自洽的等离子体流体模型的形式化。这是下一章的主题。

## 参考书目

早期的聚变研究者就意识到,库仑碰撞损失代表着等离子体中能量、粒子和通量等各种输运损失的不可避免的最低基本约束。因此,人们在致力于理解库仑碰撞方面付出了极大的努力。由于库仑势的弱衰减性,以及包括德拜屏蔽等效应在内的影响,这一任务的艰巨性超乎人们想象。几种有用的参考资料如下。

- Boyd, T. J. M. and Sanderson, J. J. (2003). *The Physics of Plasmas*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Braginskii, S. I. (1965). *Reviews of Plasma Physics* (Leontovich, M. A. editor) Vol. 1. New York: Consultants Bureau.
- Dolan, T. J. (1982). *Fusion Research*. New York: Pergamon Press.
- Dreicer, H. (1960). Electron and ion runaway in a fully ionized gas, *Physical Review* **117**, 329.
- Goldston, R. J. and Rutherford, P. H. (1995). *Introduction to Plasma Physics*. Bristol, England: Insite of Physics Publishing.
- Helander, P. and Sigmar, D. J. (2002). *Collisional Transport in Magnetized Plasmas*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Krall, N. A. and Trivelpiece, A. W. (1973). *Principles of Plasma Physics*. New York: McGraw Hill Book Company.
- Miyamoto, K. (2001). *Fundamentals of Plasma Physics and Controlled Fusion*, revised edn. Toki City: National Institute for Fusion Science.
- Spitzer, L. (1962). *The Physics of Fully Ionized Gases*, second edn. New York: Interscience.
- Stacey, W. M. (2005). *Fusion Plasma Physics*. Weinheim: Wiley-VCH.
- Wesson, J. (2004). *Tokamaks*, third edn. Oxford: Oxford University Press.

## 习 题

9.1 考虑两个互斥的粒子。其中心力势由  $\phi(r) = \phi_0 (r_0^2/r^2)$  给出。

① 用启发式论证估计  $90^\circ$  散射的动量碰撞截面。

② 用精确的粒子轨道方法计算散射角  $\chi$  与碰撞参数  $b$  之间关系。

③ 通过对整个散射角  $\chi$  积分, 计算定向动量碰撞频率和相应的散射截面(其中有个积分必须进行数值计算)。将这个结果与①得到的结果进行比较。

**9.2** 考虑带等量异号电荷且质量不同的两个粒子在中心力场  $\phi(r) = -\phi_0(r_0/r)^4$  下的二体碰撞。

① 写下粒子在质心系下的运动方程。

② 计算最小碰撞参数, 使其满足质心粒子最终仍能逃脱中心力场。换句话说, 碰撞造成轨道偏转, 但不会将粒子拉向原点  $r(t) \rightarrow 0$ 。将你的答案表示成  $b = b(v_0, \phi_0, r_0, q, m_1, m_2)$ , 其中,  $v_0$  是相对速度。

**9.3** 本题的目标是要确定从各向异性分布函数弛豫到各向同性的麦克斯韦分布所需的时间。考虑这样的等离子体, 其电子分布函数为:

$$f_e = \frac{n_0}{\pi^{3/2}} \left[ \frac{m_e}{2T_\perp} \right] \left[ \frac{m_e}{2T_\parallel} \right]^{1/2} \exp \left[ -\frac{m_e v_\perp^2}{2T_\perp} - \frac{m_e v_\parallel^2}{2T_\parallel} \right]$$

假设  $T_\perp = T + \Delta T/2$  和  $T_\parallel = T - \Delta T/2$ , 其中,  $T = (T_\perp + T_\parallel)/2$ ,  $\Delta T = T_\perp - T_\parallel$ , 且假设  $\Delta T/T \ll 1$ 。按照书中对能量交换碰撞的分析定义:

$$\frac{3}{2} n \frac{dT_\perp}{dt} = -\frac{3}{2} n \bar{v}_\perp (T_\perp - T_\parallel)$$

$$\frac{3}{2} n \frac{dT_\parallel}{dt} = -\frac{3}{2} n \bar{v}_\parallel (T_\parallel - T_\perp)$$

证明:  $\bar{v}_\perp = \bar{v}_\parallel$ , 并由此说明同类粒子碰撞的总能量是守恒的。计算  $\bar{v}_\perp$ , 它是分布函数弛豫到各向异性的特征频率。

**9.4** 100 keV 的氘束与 100 keV 的氚束发生对心碰撞。两种束的分布函数可以分别模拟成:

$$f_D(\mathbf{v}) = n_D \delta(v_x - v_D) \delta(v_y) \delta(v_z)$$

$$f_T(\mathbf{v}) = n_T \delta(v_x - v_T) \delta(v_y) \delta(v_z)$$

其中,  $n_D = n_T = n_e/2$ ;  $m_D v_D^2/2 = m_T v_T^2/2 = 100 \text{ keV}$ 。

① 按照书中计算过程给出动量交换碰撞频率  $\bar{v}_{DT}$  的表达式。

② 假设  $n_e = 2 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ , 计算  $\bar{v}_{DT}$  的值。

③ 假设动量交换时间与分布函数弛豫到麦克斯韦分布的时间可比拟, 试将这一时间与 D-T 聚变碰撞的特征时间进行比较。如果 D 和 T 均为束流, 能否出现聚变碰撞? 或者说, 如果二者已弛豫到麦克斯韦分布, 聚变碰撞能出现在分布函数的尾部吗?

**9.5** 考虑这样一种情形: 回旋加热使得等离子体中的电子发展到高能尾部。此外, 假定所有等离子体电流均由这些热电子携带。这表明电子和离子分布函数可以定义为:

$$f_e(\mathbf{v}) = \frac{n_B}{\pi^{3/2} v_B^3} \exp \left[ -\frac{v^2}{v_B^2} \right] + \frac{n_H}{\pi^{3/2} v_H^3} \exp \left[ -\frac{(v_x - u)^2 + v_y^2 + v_z^2}{v_H^2} \right]$$

$$f_i(\mathbf{v}) = \frac{n_i}{\pi^{3/2} v_i^3} \exp \left[ -\frac{v^2}{v_i^2} \right]$$

其中,  $v_B = (2T/m_e)^{1/2}$ ;  $v_i = (2T/m_i)^{1/2}$ ;  $v_H = (2T_H/m_e)^{1/2}$ 。请注意,  $T$  是大块电子和离子的温度,  $T_H \gg T$  是高能尾巴的温度。此外, 电中性要求  $n_e \equiv n_B + n_H = n_i$ 。电流密度由  $J \equiv -en_e u_e = -en_H u_i$  给出。按照对动量交换碰撞的分析定义:

$$m_e n_e \frac{du_e}{dt} \equiv -m_e n_e \bar{v}_{ei} (u_e - u_i)$$

对上述分布函数计算  $\bar{v}_{ei}$ , 并与书中的结果进行比较。这个结果与你的直觉相符吗? 解释理由。

# 第 10 章 自洽的双流体模型

## 10.1 引言

到目前为止,我们的讨论主要集中在长程电场和磁场下,以及短程库仑碰撞作用下的单粒子运动,因此不涉及自洽性。也就是说,我们没有试图要确定单粒子运动反馈是如何产生电流密度和电荷密度,并改变原有的外加电场和磁场的。第 10 章的目标则是要发展自洽的等离子体模型。

自洽性是一个重要问题。其重要性在于:①提供对约束等离子体的宏观力的物理解;②确定横越等离子体的能量、粒子和磁通量的输运;③了解电磁波是如何在等离子体中传播,从而提供加热和非感应电流驱动的;④了解电流密度和电荷密度的小扰动是如何能够极大地影响等离子体的宏观和微观稳定性的。

在发展自洽模型过程中我们意识到,有可能采用不同水平的模型来描述等离子体。最精确的模型是动理学理论。这些模型力图确定粒子的分布函数  $f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  和  $f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 。动理学模型非常精确,能解释各种物理现象。它们的求解也较复杂,结果较抽象,物理上不是那么直观。因此,从本书的导论性质看,动理学理论属于高级课题,有待将来某个时候再来研究。

次一级的描述水平,即本书重点强调的,是宏观流体模型。这个模型中的基本未知量都是很容易识别的物理量,如密度、温度、压力等。与动理学理论相比,其简单性在于所有这些未知量都只是空间和时间的函数,即  $Q = Q(\mathbf{r}, t)$ 。一般来说,流体模型不如动理学模型准确或完备,但相当简单易解,更易提供物理直观图像。

就聚变研究而言,流体模型提供了对所有重要现象——宏观平衡和稳定、输运、加热和电流驱动——相当准确的描述。虽然偶尔有一些重要的物理性质只有动理学模型才能给出,但流体模型仍不失为一种理想的入门性的聚变研究框架。

应当指出,动理学模型和流体模型不是相互独立的两种描述。流体模型可以通过动理学模型的各阶速度矩严格推导出来,矩处理总是使得系统的未知量数多于方程数,因此必须基于物理上的一些考虑通过某种形式的数学展开来使系统封闭,即方程的数目 = 未知数个数。

在第 10 章里,我们不是采用更为形式上的数学矩处理技术,而是直接运用物理直观和一些基于质量、动量、能量守恒等的简单数学来导出自洽的双流体等离子体

模型。具体来说,就是用这些守恒定律来导出一般的双流体模型,这些守恒定律也是理解本书其余部分描述的所有重要的聚变等离子体现象的基础。

## 10.2 流体模型的性质

我们的讨论从描述流体模型的基本性质开始。这对于建立模型赖以发展的基本框架是重要的。讨论的重点是流体描述的内在假设,以及它们对于聚变等离子体是否有效。

### 10.2.1 宏观平均量

流体模型的基本思想是:取定流体媒质,在此就是等离子体,然后将其划分为图 10.1 所示的小的流动的流体元。假定每个流体元包含大量粒子,流体元的行为由其所包含的粒子的宏观性质的平均值描述。例如,电子数密度  $n_e$  可定义如下。假设在  $t$  时刻以点  $\mathbf{r}$  为中心的流体元有体积  $\Delta V$ ,其中包含的电子总数为  $N_e$ ,则电子的数密度定义为:

$$n_e(\mathbf{r}, t) = \frac{\text{粒子数}}{\text{体积}} = \frac{N_e}{\Delta V} = \int f_e d\mathbf{v} \quad (10.1)$$

其中,后一等号将单个粒子的数目与速度上连续的分布函数积分联系起来。我们看到,数密度表示的是单位体积上的平均粒子数。它不涉及速度分布的细节,只与全部粒子的积分有关。

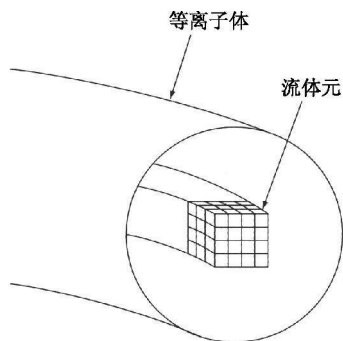


图 10.1 将等离子体分割成小的流体元

类似地,在流体模型里,我们定义一个宏观流速  $\mathbf{u}_e$  作为该流体元所含全部电子的平均速度:

$$\mathbf{u}_e(\mathbf{r}, t) = \frac{\text{粒子速度总和}}{\text{粒子数}} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \cdots + \mathbf{v}_n}{N_e} = \frac{1}{n_e} \int \mathbf{v} f_e d\mathbf{v} \quad (10.2)$$

这里同样只有平均信息,不涉及  $\mathbf{u}_e$  所含的单个速度。

因此,等离子体的流体描述关心的是模型的演化。为此我们需要一组耦合的偏微分方程来描述等离子体重要宏观属性的演化。就目前而言,这些属性包括数密度  $n_e(\mathbf{r}, t)$ 、 $n_i(\mathbf{r}, t)$ , 宏观流速  $\mathbf{u}_e(\mathbf{r}, t)$ 、 $\mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t)$ , 压强  $p_e(\mathbf{r}, t)$ 、 $p_i(\mathbf{r}, t)$  和温度  $T_e(\mathbf{r}, t)$ 、 $T_i(\mathbf{r}, t)$ 。眼下只有宏观压强和温度尚未获得像它们自然出现在分析里那样的定义。

### 10.2.2 流体元的大小

流体模型有效性的另一个属性是流体元的大小。要使流体模型有效,每个流体元大小范围的规定就必须满足两个看似矛盾的要求。一方面,流体元不能太小,如果太小,则流体元内只包含少数粒子,这样的平均从统计学角度看没有什么意义。

另一方面,如果流体元太大,空间分辨率将丧失,降低精确性是不可接受的。事实上,对于聚变等离子体,能满足这两个约束的流体元大小的范围很宽,因此,至少从平均的角度来看,流体模型是行得通的。作为例子,我们来考虑  $n_e = 10^{20} \text{ m}^{-3}$  的聚变等离子体。对于大多数磁流体力学现象,流体元的线性尺度取  $\Delta x = 10^{-5} \text{ m}$  量级就可以给出很好的空间分辨(要知道等离子体的宏观尺度是  $1 \text{ m}$ )。这相当于流体元体积  $\Delta V = (\Delta x)^3 = 10^{-15} \text{ m}^3$ , 其中的总电子数为  $N_e = n_e \Delta V = 10^5 \gg 1$ , 因此,能满足这两点看似矛盾的要求的尺寸范围是很宽的。

### 10.2.3 等离子体流体模型的用途

即使将等离子体细分成小流体元,并算出每个流体元各种属性的平均值这种做法行得通,也仍然不能保证流体模型就一定有用。为了理解这个问题,我们考虑一种非常熟悉的流体——大气压下的空气。大气很容易满足上述两项要求。而且空气还具有另一个重要性质——每个流体元内的分子运动主要是碰撞。碰撞使分子紧紧约束在物理空间内。分子做轨道运动时,其瞬时速度可以有不同的大小和方向,但却不能轻易地远离相邻的分子。多次碰撞使得方向不断发生随机变化,这意味着一个给定粒子或多或少地局限于某个区域,其大小相当于平均自由程距离。结论是,每个流体元内的分子形成一个明确的粒子群,其同一性在系统随时间演化时保持不变。这种由高碰撞率造成的相干性正是流体模型能够用于说明空气的主要原因。每个流体元基本上相当于一个具有质量  $m n \Delta V$  和速度  $\mathbf{u}$  的“超级粒子”。

基于上述讨论,我们很想知道为什么流体模型可以用于研究聚变等离子体,因为已经证明聚变等离子体近乎是无碰撞的。答案有点儿微妙。在垂直于磁场的方向上,小的回旋半径起着维持粒子彼此接近的作用,即使这些粒子的垂直速度千差万别。这里磁场取代了碰撞,为流体元内的粒子提供了垂直方向上的相干性。反之,粒子在平行于磁场的方向上则可以自由移动。同一流体元中的两个具有不同平行速度的粒子很容易沿着磁场  $B$  分离较大的距离,从而阻碍了平行方向上粒子间

相干性的发展。

结论是,等离子体在垂直于磁场的方向上表现出类流体的行为,但在平行方向上则没有。一般来说,平行运动必须用动理学理论来处理,这是一项更艰巨的任务。为了避开动理学的困难,人们往往出于方便考虑而将类流体处理延伸到平行方向上,尽管这么做有点令人担忧,因为这是一个无效的假设。

但实际情形并不像听起来那么坏。后文将表明,对于许多聚变等离子体的现象,平行运动不是主要的,而流体模型只是在平行运动变得重要时才是不合适的。在另一些现象里,流体模型抓住了部分而非全部的物理本质。这时我们获得的是定性上正确的总体物理图像,尽管要准确详细了解需要更复杂的动理学模型。最后,在有些情况下,用流体模型来处理平行运动根本就是错误的,好在这样的现象为数不多。

总之,鉴于本书的入门性质以及流体模型相对于动理学模型的明显的简单性,采用流体模型作为主要分析方法是不言而喻的。因此在本章及本书余下部分里,我们将着重用纯流体模型来描述聚变等离子体。但必须指出,当平行方向运动变得重要时这种处理是不适当的。

现在我们就来质量、动量和能量守恒的基础上着手建立自洽的双流体模型,并用它来描述等离子体流体变量(密度、速度、压强和温度)的演化。一旦完成了这一步,我们就将这一模型与麦克斯韦方程组耦合,构成封闭的描述体系。

## 10.3 质量守恒

首先考虑质量守恒。目的是要导出每种成分的质量守恒方程。一般来说,方程应只涉及基本的未知流体变量以及电场和磁场。虽然读者对最终的守恒关系可能很熟悉,但我们在此给出了计算的详细过程,因为后面对动量和能量守恒关系的推导可能没有这么直观。

另外要指出的是,这些守恒律的推导是在随流体移动的拉格朗日坐标系进行的,最后再转换到由欧拉坐标系表征的实验室参照系。原因是在拉格朗日坐标下推导守恒律较为简单直观,但结果的应用则是在欧拉坐标系下更方便。这种方便性是与  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  的规定,以及固定的欧拉坐标系下边界条件的确定密切关联的。

在推导开始前,我们先给出质量守恒所依据的基本物理假设:等离子体是一种其粒子数既不增加也不减少的电离气体。这一假设忽略了电离和复合等过程,这是因为在聚变温度下,等离子体早已完全电离,电离和复合等过程可忽略不计。这里还忽略了引起聚变反应的碰撞过程,在现有实验条件下,这种碰撞还非常罕见。即使在反应堆情形下,聚变碰撞也只是逐渐耗尽 D-T 等离子体燃料。通过引入第三种粒子成分—— $\alpha$  粒子,并在守恒关系中加入粒子源和汇,我们很容易将这一效应包

括进来。但目前为了简单起见,我们只考虑电子和离子成分,忽略 $\alpha$ 粒子的影响。

有了这些假设,我们可以很容易地在拉格朗日坐标系下来描述质量守恒关系。这种关系对电子和离子均有效,因此为方便起见,下面推导中我们略去了表示成分的下标。假设在 $t=0$ 时刻,体积为 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ 的小流体元含有总数为 $N = n \Delta V$ 的粒子(图 10.2)。与流体图像一致,这些粒子彼此间距离很小且沿平稳轨道运动。由于粒子既不增加也不减少,故质量守恒要求:

$$\text{流体元内粒子数的时间导数} = dN/dt = 0 \quad (10.3)$$

这里时间导数沿轨迹取。稍作变换,式(10.3)可以改写成如下的熟悉形式:

$$\frac{dN}{dt} = \Delta V \frac{dn}{dt} + n \frac{d\Delta V}{dt} \quad (10.4)$$

其中,

$$\frac{d\Delta V}{dt} = \Delta y \Delta z \frac{d\Delta x}{dt} + \Delta x \Delta z \frac{d\Delta y}{dt} + \Delta x \Delta y \frac{d\Delta z}{dt} \quad (10.5)$$

虽然流体元内粒子总数不变,但是数密度和流体元的体积均可变。

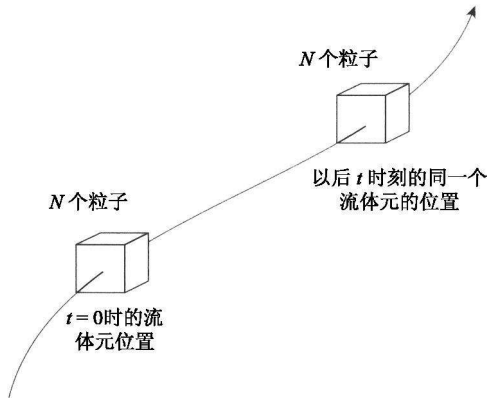


图 10.2 粒子数为常数的流体元的拉格朗日轨道

体积元的变化可以写成一种更方便的形式,如图 10.3 所示。这里为了简单起见,我们只考虑 $x$ 方向的情形。在 $t$ 时刻,流体元左、右侧界面的位置分别为 $x_1 = x - \Delta x/2$ 和 $x_2 = x + \Delta x/2$ 。界面上相应的速度分别是 $u_x(x_1)$ 和 $u_x(x_2)$ 。经过 $\Delta t$ 时间后,界面移动到了新的位置: $x'_1 = x_1 + u_x(x_1) dt$ 和 $x'_2 = x_2 + u_x(x_2) dt$ 。新流体元的宽度为 $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ ,与原流体元宽度 $\Delta x = x_2 - x_1$ 的关系为:

$$\Delta x' = \Delta x + [u_x(x_2) - u_x(x_1)] dt \approx \Delta x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x dt \quad (10.6)$$



其中,最后一步是对小量  $\Delta x$  的泰勒展开。因此,  $\Delta x$  的时间变化率可以表示为:

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \frac{\Delta x' - \Delta x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x \quad (10.7)$$

$y$  和  $z$  方向上的表达式与此类似。

将这些结果综合起来即导出下列  $dN/dt$  的表达式:

$$\frac{dN}{dt} = \Delta V \left[ \frac{dn}{dt} + n \frac{\partial u_x}{\partial x} + n \frac{\partial u_y}{\partial y} + n \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = \Delta V \left[ \frac{dn}{dt} + n \nabla \cdot \mathbf{u} \right] = 0 \quad (10.8)$$

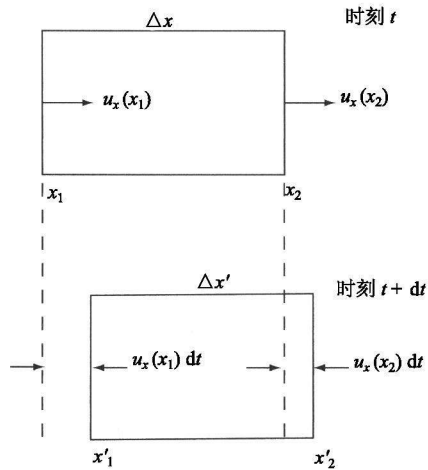


图 10.3 在  $\Delta t$  的时间里流体元线度  $\Delta x$  的变化  
(图中所示运动相当于压缩:  $\Delta x' < \Delta x$ )

利用下述关系,将拉格朗日方程式(10.8)里  $n$  的时间导数变换到欧拉坐标系下:

$$\left[ \frac{dn}{dt} \right]_{\text{拉格朗日}} = \left[ \frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla n \right]_{\text{欧拉}} \quad (10.9)$$

我们就得到了质量守恒的最后形式。分别写出欧拉坐标系下的电子和离子的质量守恒方程,式(10.8)简化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) &= 0 \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

这就是我们要求的质量守恒关系式。

## 10.4 动量守恒

### 10.4.1 基本原理

下一项要推导的是动量守恒关系。所依据的基本物理原理是牛顿运动规律。将这一定律应用到移动的流体元上,可得到动量守恒所要求的如下关系:

$$\frac{d}{dt}(\text{动量}) = \text{流体元上的受力} \quad (10.11)$$

对于等离子体,需要列入的力有:①电场力;②磁场力;③压强梯度力;④净动量交换碰撞力。在此引力可以忽略不计。黏滞力也可以忽略,因为大多数情况下黏滞系数并不很大,而且等离子体也不是运动得非常快或是形成了狭窄的边界层,只有在非常边缘的区域是个例外。因此,黏滞性很少在等离子体中起着主导作用。

现在,我们对电子情形逐项考虑式(10.11)的力,以便求得动量守恒关系。通过简单置换下标就可以得到相应的离子动量守恒方程。

### 10.4.2 惯性力

先考虑含有  $N_e = n_e \Delta V$  个电子的小流体元。单个电子的平均动量为  $m_e \mathbf{u}_e$ , 因此流体元的总动量为合计动量  $m_e \mathbf{u}_e N_e$ 。式(10.11)的左边代表了惯性力,现在可以写成:

$$\frac{d}{dt}(\text{动量}) = \frac{d}{dt}(m_e n_e \Delta V \mathbf{u}_e) \quad (10.12)$$

由质量守恒知,  $n_e \Delta V = \text{常数}$ , 故上式可改写成:

$$\frac{d}{dt}(\text{动量}) = \Delta V m_e n_e \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \right] \mathbf{u}_e \quad (10.13)$$

这里已变换到欧拉坐标系下。

### 10.4.3 电场力

下一步要计算的是式(10.11)右边出现的各种力。其中第一个要考虑的是电场力。由于每个电子具有电荷  $-e$ , 故流体元中的总电荷为  $Q_e = -e N_e$ 。这些电荷受到的电场力为  $Q_e \mathbf{E}$ , 亦可改写成:

$$\text{电场力} = Q_e \mathbf{E} = -\Delta V e n_e \mathbf{E} \quad (10.14)$$

这个表达式隐含这样一个假设:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  是由集体效应产生的长程、平稳电场。与库仑碰撞相关的短程电场将放在碰撞力中处理。

### 10.4.4 磁场力

第二个是磁场力,由于流体元有电荷  $Q_e$ ,平均速度为  $\mathbf{u}_e$ ,故受到的洛伦兹力为  $Q_e \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}$ ,它可以表示为:

$$\text{磁场力} = Q_e \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} = -\Delta V n_e \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} \quad (10.15)$$

### 10.4.5 压强梯度力

对动量守恒有贡献的下一个力是压强梯度力。为了导出这个宏观力,我们必须从微观上考察电子流入流出界面的情形。出现这个力不是因为流体元中电子都以宏观速度  $\mathbf{u}_e$  运动, $\mathbf{u}_e$  只是所有速度的平均值。每个电子的实际速度是  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_e + \mathbf{w}$ ,这里  $\mathbf{w}$  是电子的热速度,它的值对不同的电子是随机分布的。当对分布函数求平均后,依照定义有  $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}_e$ ,  $\langle \mathbf{w} \rangle = 0$ 。

考察图 10.4 所示的热动量流穿过流体元界面的情形,这有助于我们理解压强梯度力。考虑电子在其中静止的参照系(即  $\mathbf{u}_e = 0$  的参照系)下的右侧界面。如果  $\mathbf{w}$  的  $x$  分量是正的( $w_x > 0$ ),则流体元中紧邻界面内侧具有热动量  $m_e \mathbf{w}$  的电子将逃离流体元。这标志着流体元损失了  $x$  方向的定向动量。同样,紧邻界面外侧的具有  $w_x < 0$  的电子将进入流体元。注意,它们也使流体元损失了  $x$  方向的定向动量,因为它们增加的是负动量( $w_x < 0$ )。对左侧界面情形可做类似分析,只是这种情况下进入和退出粒子增加了  $x$  方向的定向动量。如果每个界面得到的和损失的动量不完全平衡,流体元的动量就会有一个净增量(可以为负)。正是动量的这种变化产生了压强梯度力。

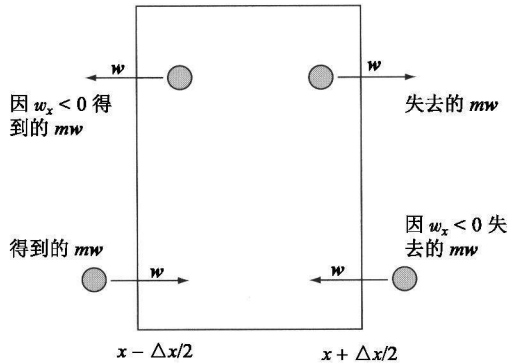


图 10.4  $\mathbf{u} = 0$  参照系下看到的热动量的流动

以下推导我们仍只考虑  $x$  方向上的情形。注意到在  $x + \Delta x/2$  位置单位时间内具有正  $x$  方向定向速度  $w_x$  的电子离开流体元的数目是:

$$\text{离开的电子数/s} = \text{粒子通量} \times \text{截面积} = \{ [(f_e(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t) d\mathbf{w})(w_x)] (\Delta y \Delta z) \}_{x + \Delta x/2} \quad (10.16)$$

如果每个这种电子有动量  $m_e \mathbf{w}$ , 那么右侧界面单位时间的动量损失为: 单位时间离开的粒子数乘以每个粒子的动量, 即(粒子通量)  $\times$  (面积)  $\times$  ( $m_e \mathbf{w}$ )。对所有  $w_x > 0$  的  $\mathbf{w}$  求和(即积分), 即可得到移出粒子带走的总动量:

$$\text{动量损失 /s} = \left[ \Delta y \Delta z \int_{w_x < 0} m_e \mathbf{w} w_x f_e(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t) d\mathbf{w} \right]_{x + \Delta x/2} \quad (10.17)$$

对  $w_x < 0$  的粒子进入流体元的情形进行完全类似的计算, 它们也表示动量损失:

$$\text{动量损失 /s} = \left[ \Delta y \Delta z \int_{w_x < 0} m_e \mathbf{w} w_x f_e(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t) d\mathbf{w} \right]_{x + \Delta x/2} \quad (10.18)$$

假定  $\mathbf{w}$  的分布函数均为麦克斯韦分布( $f_M$ , 即实验室系下平移了的麦氏分布), 则上述积分的和很容易计算出来:

$$\int_{w_x < 0} + \int_{w_x > 0} m_e \mathbf{w} w_x f_e(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t) d\mathbf{w} = \mathbf{e}_x \int m_e w_x^2 f_M d\mathbf{w} = \mathbf{e}_x p_e \quad (10.19)$$

其中  $p_e = n_e T_e$  是电子的压强。这样每秒粒子进入和退出流体元造成的动量总损失可以写成:

$$\text{总动量损失 /s} = \mathbf{e}_x \Delta y \Delta z p_e |_{x + \Delta x/2} \quad (10.20)$$

如所预料, 这个力等于压强乘以面积。对左侧界面进行类似的计算表明, 热运动造成的总动量增量为:

$$\text{总的动量增量 /s} = \mathbf{e}_x \Delta y \Delta z p_e |_{x - \Delta x/2} \quad (10.21)$$

计算每秒得到的净动量增长并对小  $\Delta x$  作泰勒展开, 即得到待求的压强梯度力:

$$\begin{aligned} \text{压强梯度力} &= \Delta y \Delta z (p_e |_{x - \Delta x/2} - p_e |_{x + \Delta x/2}) \mathbf{e}_x \\ &= -\Delta V \frac{\partial p_e}{\partial x} \mathbf{e}_x \\ &= -\Delta V (\nabla p_e) \end{aligned} \quad (10.22)$$

显而易见, 这个最终形式很容易推广到三维情形。

#### 10.4.6 碰撞摩擦力

最后我们来看动量交换碰撞引起的力。如果电子的流体速度比离子大( $\mathbf{u}_e > \mathbf{u}_i$ ), 则电子与离子因库仑碰撞造成的摩擦在电子上产生一个拖曳力。单位体积的

电子和离子受到的这种阻力已经在第9章有过计算,这里只要简单乘以  $\Delta V$  即可得到所要求的结果:

$$\left. \begin{aligned} \text{电子受到的阻力} &= \Delta V m_e n \left. \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} \right|_{\text{碰撞}} = -\Delta V m_e n \bar{\nu}_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \\ \text{离子受到的阻力} &= \Delta V m_i n \left. \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} \right|_{\text{碰撞}} = +\Delta V m_i n \bar{\nu}_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

其中,

$$\bar{\nu}_{ei} = \frac{\sqrt{2}}{12\pi^{3/2}} \frac{e^4 n_i}{\epsilon_0 m_e T^{3/2}} \ln \Lambda = 1.8 \times 10^5 \frac{n_{20}}{T_k^{3/2}} \quad (\text{s}^{-1}) \quad (10.24)$$

### 10.4.7 动量守恒方程

现在所有的力都已计算出来。将这些力综合起来即得到描述电子和离子的动量守恒方程所需的宏观流体组:

$$\left. \begin{aligned} m_e n_e \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \right] \mathbf{u}_e &= -e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e - m_e n_e \bar{\nu}_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \\ m_i n_i \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right] \mathbf{u}_i &= e n_i (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i - m_e n_e \bar{\nu}_{ei} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

物理上还有一点值得讨论。到底在推导过程中的什么地方出现过高碰撞率对低碰撞率的问题?这个问题直接影响到流体描述的有效性。答案是在计算压强梯度力时采用的麦克斯韦分布函数假设。对于那些时间尺度上慢于碰撞时间尺度的等离子体现象,麦克斯韦分布的假设是有效的。碰撞将使得等离子体迅速回到麦克斯韦分布。

然而,许多(也许大多数)等离子体现象都发生在更快的时间尺度上。例如,宏观平衡和稳定、射频加热和电流驱动,以及各种等离子体微观不稳定性等都涉及更快的时间尺度。因此,即使等离子体的初始分布是麦克斯韦分布,它对这些作用的时间响应通常本质上都是非麦克斯韦的,即离子的响应不是像推导中假设的那样是一种在各向同性标量压强下的响应,而是在磁场造成的低碰撞率、固有各向异性情形下的响应。一般来说,正确处理这些效应需要用到动理学模型。但其实,关于等离子体高碰撞率和压强的各向同性的这种不正确假设带来的影响往往并不重要,或至少不是主要的影响。因此,流体描述对于理解聚变等离子体的行为还是能够提供一相当不错的基础。

## 10.5 能量守恒

### 10.5.1 基本原理

本小节我们来考虑等离子体热能。注意到动能守恒可通过式(10.25)点乘  $\mathbf{u}_e$  或  $\mathbf{u}_i$  来得到。但是,这样处理不提供任何新信息。

支配内能的基本原理可概述为如下公式:

$$\frac{d}{dt}(\text{内能}) = \text{净加热功率} \quad (10.26)$$

净加热功率定义为使等离子体温度提高(而不是驱动有序的宏观运动)的净功率。对净加热功率有贡献的有很多项,分别属源项和汇项,罗列如下:①对等离子体流体元进行压缩或扩张的做功功率;②热传导引起的能量损失速率;③欧姆加热功率;④外部辅助加热功率;⑤ $\alpha$ 加热功率;⑥韧致辐射损失;⑦库仑碰撞使得温度趋于平衡的从一种成分到另一种成分的能量损失(或获得)速率。下面我们逐个计算。

### 10.5.2 内能变化率

计算内能最简单的方法是取流体元在其中静止( $\mathbf{u}_e = 0$ )的参照系(和前面一样,仅就电子进行推导,然后更换下标给出离子的关系)。众所周知,实验室参照系下的平移麦克斯韦分布在随机速度  $\mathbf{w}$  的静止参照系下变成了定态麦克斯韦分布。在静系下每个电子只有随机热能( $m_e w^2/2$ )。因此,流体元内每个粒子的平均内能由下式给出:

$$\text{内能} / \text{粒子数} = \frac{1}{n_e} \int \frac{m_e w^2}{2} f_M d\mathbf{w} = \frac{3}{2} T_e \quad (10.27)$$

小流体元的总内能为  $(3T_e/2)n_e \Delta V$ 。这个量的时间变化率对应于功率平衡方程的左边:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{内能}) &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{3}{2} n_e \Delta V T_e \right] \\ &= \frac{3}{2} n_e \Delta V \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \right] T_e \end{aligned} \quad (10.28)$$

### 10.5.3 压缩功

10.4.5节曾表明,微观随机运动引起流体元各个面上的压强。这些压强的不平衡引起宏观压强梯度力。下面我们将证明,即使不存在压强梯度,但只要作用在流体元表面的宏观流体的速度不平衡,外力就会通过压缩流体元而做功。由于没有压强梯

度,这种压缩功不会造成流体元宏观速度( $\mathbf{u}_e$ )和相应的宏观能量( $m_e u_e^2/2$ )的改变,而是完全转化为内能。它在功率平衡方程里表现为热力学里熟悉的“ $p dV$ ”项。

压缩项很容易计算,如图 10.5 所示。先看左侧界面。在静系中  $t$  时刻,左侧界面以宏观速度  $u_x(x_1) - u_x(x)$  运动(其中,  $x_1 = x - \Delta x/2$ )。经过无限小时间  $\Delta t$  后,这个面向右移动到新位置  $x'_1 = x_1 + [u_x(x_1) - u_x(x)] dt$ 。如果  $x_1$  处的压强记为  $p(x_1)$ ,于是移动这个面做的功等于作用在这个面上的力乘以距离:

$$\begin{aligned} \text{左边界做功} &= [p(x_1) \Delta y \Delta z] (x'_1 - x_1) \\ &= [p(x_1) \Delta y \Delta z] [u_x(x_1) - u_x(x)] dt \end{aligned} \quad (10.29)$$

类似地,可以算出流体元右侧界面上的压缩功:

$$\begin{aligned} \text{右边界做功} &= - [p(x_2) \Delta y \Delta z] (x'_2 - x_2) \\ &= - [p(x_2) \Delta y \Delta z] [u_x(x_2) - u_x(x)] dt \end{aligned} \quad (10.30)$$

其中  $x_2 = x + \Delta x/2$ 。注意:负号的存在是由于右侧界面的“压缩”对应于沿负  $x$  方向向左移动。

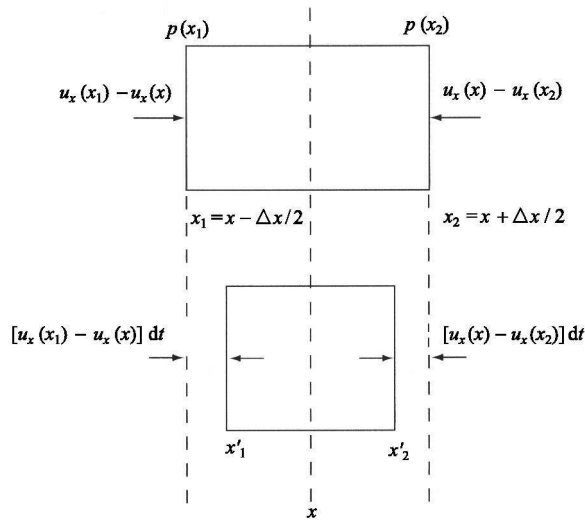


图 10.5 在  $\mathbf{u} = 0$  的静止参照系下,流体元因  $u_x$  的梯度而被压缩

通过压缩加热等离子体的功率等于两表面上所做功之和的时间变化率:

$$\begin{aligned} \text{压缩功} &= \frac{(\text{左面的功} + \text{右面的功})}{dt} \\ &= \Delta y \Delta z [p(x_1)] [u_x(x_1) - u_x(x)] - \Delta y \Delta z [p(x_2)] [u_x(x_2) - u_x(x)] \end{aligned} \quad (10.31)$$

对小量  $\Delta x$  作泰勒展开:

$$\text{压缩功} = -\Delta V \left[ p \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] = -\Delta V (p_e \nabla \cdot \mathbf{u}_e) \quad (10.32)$$

式(10.32)即是待求的表达式,最后这步等号表示的是推广到三维情形。我们看到,如所预料,压缩力取决于流速的不均匀性,而与压力梯度无关。

### 10.5.4 热传导

热传导功率属于功率平衡关系里的微观效应,与动量方程里的压强梯度力好有一比,只是显得更微妙。热导率涉及粒子随机运动引起的穿越流体元界面的热能流动,其静系下的几何图像如图 10.6 所示。

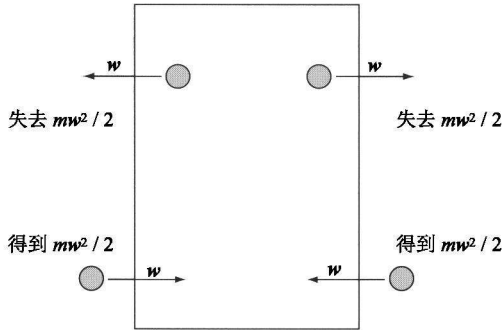


图 10.6  $u = 0$  参照系下看到的热能流动

我们先集中考虑左侧界面。考虑流体元中紧邻界面内侧具有热能  $mw^2/2$  的粒子(出于方便,成分下标暂时均略去)。假设粒子具有负  $x$  方向的随机速度( $w_x < 0$ ),则单位时间内粒子逃离的数目等于通量乘上面积:  $dN_{\text{out}} = (w_x f d\mathbf{w}) \Delta y \Delta z$ 。单位时间内由这些粒子造成的热能损失则为  $(mw^2/2) dN_{\text{out}} = (mw^2/2) (w_x f d\mathbf{w}) \Delta y \Delta z$  (对于  $w_x < 0$  情形)。类似地,单位时间粒子由左侧进入流体元而增加的热能为  $(mw^2/2) dN_{\text{in}} = (mw^2/2) (w_x f d\mathbf{w}) \Delta y \Delta z$  (对于  $w_x > 0$  情形)。注意,与计算压强梯度力时的情形不同,这里对于给定界面的输入输出的热能是相互抵消的。而压强梯度力由于动量具有正负矢量方向因而可以是加大的。

因此,单位时间从左侧进入流体元的净热能增量为所有粒子速度的贡献之和(包括正的和负的  $w_x$ ):

$$\text{能量增量/s} = \Delta y \Delta z \int (mw^2/2) w_x f d\mathbf{w} \Big|_{x-\Delta x/2} \quad (10.33)$$

前面所说的微妙之处正体现在这里。对于麦克斯韦分布函数,由于积分的奇对称性,上述积分严格平均为零。但实际上,热传导效应是大多数聚变等离子体中最



主要的损失机制。这种表观矛盾可以通过如下解释来化解:实际分布函数并非单纯的麦氏分布函数,而是麦氏分布加上速度奇对称的额外贡献。这样, $f$ 的奇对称部分与速度的奇对称性共同产生具有偶对称的被积函数,从而使热传导损失不为零。但这种奇对称部分对压强梯度没有影响,故那里积分平均为0。

定性上解释了数学上的困难,我们仍面临如何计算 $f$ 的奇对称分量的问题。这种计算很复杂,涉及包含库仑碰撞的等离子体动理学模型的求解,它已经超出了本书的范围。较方便的办法是通过引入热通量矢量 $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ ,其 $x$ 分量定义为:

$$q_x(\mathbf{r}, t) = \int (mw^2/2) w_x f d\mathbf{w} \quad (10.34)$$

聚变等离子体的 $q_x(\mathbf{r}, t)$ 的具体形式见第14章。在那里我们通过一种简单的启发式论证消除了复杂计算的必要性。结果表明, $q_x \approx -\kappa_{xx}(\partial T/\partial x)$ ,导热率 $\kappa_{xx}$ 的显性近似关系也一并导出。眼下,热传导对双流体能量方程的贡献仍用尚待计算的热通量矢量 $q_x(\mathbf{r}, t)$ 来表示。

在此讨论的基础上,穿过左侧界面的单位时间热能增量可以改写为:

$$\text{能量增量/s} = \Delta y \Delta z (q_x) |_{x-\Delta x/2} \quad (10.35)$$

类似地,穿过右侧界面的单位时间热能增量为:

$$\text{能量增量/s} = -\Delta y \Delta z (q_x) |_{x+\Delta x/2} \quad (10.36)$$

负号是因为在右侧界面上增益和损失的方向均与左侧的相反, $w_x$ 要变号。

将式(10.35)和式(10.36)结合起来,即得到所需的热传导功率增益表达式:

$$\begin{aligned} \text{热传导功率} &= \Delta y \Delta z [(q_x) |_{x-\Delta x/2} - (q_x) |_{x+\Delta x/2}] \\ &= -\Delta V \frac{\partial q_x}{\partial x} = -\Delta V (\nabla \cdot \mathbf{q}_e) \end{aligned} \quad (10.37)$$

最后这步等号表示的是推广到三维情形。

### 10.5.5 $\alpha$ 粒子功率

我们已经在第3章对 $\alpha$ 功率密度进行了计算,并用于功率平衡的深入讨论。此外,电子和离子之间的功率分配也已在第9章讨论高能离子慢化时给予了推导。将这些结果结合起来即得到如下的 $\alpha$ 功率表达式:

$$\left. \begin{aligned} \text{转移到电子的 } \alpha \text{ 功率} &= \Delta V \left[ \frac{F_e^{(\alpha)}}{4} E_\alpha n_e^2 \langle \sigma v \rangle \right] \\ \text{转移到离子的 } \alpha \text{ 功率} &= \Delta V \left[ \frac{1 - F_e^{(\alpha)}}{4} E_\alpha n_e^2 \langle \sigma v \rangle \right] \end{aligned} \right\} \quad (10.38)$$

其中,  $F_e^{(a)} = T_e / (T_e + T)$  是电子吸收的功率份额,  $T_e = 33 \text{ keV}$ , 在  $F_e^{(a)}$  表达式里,  $T_e \approx T_i \equiv T$ 。

### 10.5.6 外部辅助加热功率

在研究功率平衡关系时我们已经对外部加热功率进行了详细讨论。总的外部辅助加热功率(主要是中性束或微波功率)定义为  $\Delta V S_a$ 。这里  $S_a(\mathbf{r}, t)$  假设为空间和时间的已知函数。电子和离子之间的功率分配用  $F_e^{(a)}$  来表示电子取得的份额。真实的分数  $F_e^{(a)}$  值只有到外部加热源的类型确定后才能确定。这一点我们留待第15章考虑加热和电流驱动问题时再作详细讨论。眼下不妨假定  $S_a(\mathbf{r}, t)$  和  $F_e^{(a)}$  均为已知量。根据这一假设, 外部加热功率的贡献可以写为:

$$\left. \begin{aligned} \text{电子得到的加热功率} &= \Delta V F_e^{(a)} S_a \\ \text{离子得到的加热功率} &= \Delta V (1 - F_e^{(a)}) S_a \end{aligned} \right\} \quad (10.39)$$

### 10.5.7 欧姆加热功率

欧姆功率由作用在电子上的摩擦力引起。当电子在电场作用下经过离子附近与之发生库仑碰撞时, 碰撞摩擦力即对电子做功产生热量, 由此形成欧姆功率。因此直观上理解, 可以认为是优先加热电子, 事实也确实如此。下面, 我们基于简化了的流体动量方程的简单计算证明, 欧姆功率由  $\eta J^2$  给定。计算还将根据碰撞频率给出电阻率的值, 并确定功率在电子和离子之间的分配。

考虑简单的零维双流体模型, 其中力的来源有惯性、动量交换碰撞和  $t=0$  时刻投入的恒定电场。于是模型简化为:

$$\left. \begin{aligned} m_e \frac{du_e}{dt} &= -eE - m_e \bar{\nu}_{ei} (u_e - u_i) \\ m_i \frac{du_i}{dt} &= eE + m_e \bar{\nu}_{ei} (u_e - u_i) \end{aligned} \right\} \quad (10.40)$$

假设电子和离子由静止开始运动。此外, 为数学上简单计, 假定  $\bar{\nu}_{ei} = \text{常数}$ 。考虑到  $m_e/m_i \ll 1$ , 故式(10.40)的解可由下式给出:

$$\left. \begin{aligned} u_e &= -\frac{eE}{m_e \bar{\nu}_{ei}} (1 - e^{-\bar{\nu}_{ei} t}) \rightarrow -\frac{eE}{m_e \bar{\nu}_{ei}} \\ u_i &= \frac{eE}{m_i \bar{\nu}_{ei}} (1 - e^{-\bar{\nu}_{ei} t}) \rightarrow \frac{eE}{m_i \bar{\nu}_{ei}} \end{aligned} \right\} \quad (10.41)$$

第二种形式对应于稳态值。正如所料, 动量守恒导致电子的速度比离子的速度要高得多, 这是因为电子质量很小的缘故。

下一步, 注意到由电场传递给电子流体元的稳态功率等于单位粒子受力乘上粒

子平均速度再乘上流体元内粒子数,即  $(-eE)(u_e)(n_e\Delta V)$ ,这正是转换成热能的功率。对离子也有类似的表达式,但要小  $m_e/m_i$  倍,故可忽略不计,即电场主要是加热电子。因此,稳态欧姆加热功率可写为:

$$\left. \begin{aligned} \text{欧姆加热电子} &= \Delta V m_e n_e \overline{v_{ei} u_e^2} \\ \text{欧姆加热离子} &\approx 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.42)$$

最后一步是依据电流密度  $\mathbf{J}$  的定义:  $\mathbf{J} = e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e)$ 。在目前情形下,  $\mathbf{J} \approx -en_e u_e \mathbf{e}_x$ 。消去  $u_e$  即得到所需的电子的欧姆加热功率表达式:

$$\text{欧姆加热到电子} = \Delta V \eta J^2 \quad (10.43)$$

其中,电阻率  $\eta$  由下式给出:

$$\eta = \frac{m_e \overline{v_{ei}}}{e^2 n_e} \quad (10.44)$$

关于电阻率的更详细的讨论见第 11 章,其中包括一些微妙的考虑,但只影响到式 (10.44) 前面的系数,约增大到 2 倍。眼下主要考虑代入  $\overline{v_{ei}}$  的值,从而得到下式:

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{12\pi^{3/2}} \frac{e^2 m_e^{1/2}}{\epsilon_0^2 T_e^{3/2}} \ln \Lambda = 6.5 \times 10^{-8} \left[ \frac{1}{T_k^{3/2}} \right] \quad (\Omega \cdot \text{m}) \quad (10.45)$$

即电阻率与密度无关,但与  $T^{3/2}$  成反比。对于聚变等离子体,  $\eta \approx 1.1 \times 10^{-9} \Omega \cdot \text{m}$ , 这个值大约比铜的电阻率高 20 倍。

### 10.5.8 韧致辐射

等离子体辐射的主要损失是由韧致辐射引起的,这已在第 3 章计算过。由于这种辐射源自电子的加速,因此韧致辐射在电子能量方程里是作为损失项出现的。在离子能量方程里它的直接影响可以忽略不计。对于小的等离子体流体元,从第 3 章知,其辐射损失可由下式给出:

$$\left. \begin{aligned} \text{电子辐射损失} &= \Delta V \left[ \frac{2^{1/2}}{3\pi^{5/2}} \right] \left[ \frac{e^6}{\epsilon_0^3 c^3 h m_e^{3/2}} \right] Z_{\text{eff}} n_e^2 T_e^{1/2} \\ &= \Delta V C_B n_{20}^2 T_k^{1/2} \quad (\text{W}/\text{m}^3) \\ \text{离子辐射损失} &\approx 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.46)$$

其中,对于  $Z_{\text{eff}} = 1$ ;  $C_B = 5.35 \times 10^3$ 。

### 10.5.9 能量平衡

影响功率平衡的最后一项是能量交换碰撞。如果电子比离子热,则库仑碰撞导致电子失去能量而离子获得能量,直到温度达到平衡。在第 9 章里我们已经计算过

趋向平衡的速率,这里简单乘以  $\Delta V$  即得到待求的结果:

$$\left. \begin{aligned} \text{电子平衡功率} &= -\frac{3}{2}\Delta V n_e \bar{v}_{eq} (T_e - T_i) \\ \text{离子平衡功率} &= +\frac{3}{2}\Delta V n_e \bar{v}_{eq} (T_e - T_i) \end{aligned} \right\} \quad (10.47)$$

其中  $\bar{v}_{eq} = 2(m_e/m_i)\bar{v}_{ei}$ 。

### 10.5.10 能量守恒方程

能量守恒所涉及的各项现在都已经计算完毕。将这些项综合起来即得到所需的描述能量守恒的宏观磁流体方程组:

对电子:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2}n_e \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \right] T_e + p_e \nabla \cdot \mathbf{u}_e + \nabla \cdot \mathbf{q}_e &= S_e \\ S_e &= \frac{F_e^{(a)}}{4} E_a n_e^2 \langle \sigma v \rangle + F_e^{(a)} S_\alpha + \eta J^2 - C_B n_e^2 T_e^{1/2} - \frac{3}{2} n_e \bar{v}_{eq} (T_e - T_i) \end{aligned} \right\} \quad (10.48)$$

对离子:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2}n_i \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right] T_i + p_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i + \nabla \cdot \mathbf{q}_i &= S_i \\ S_i &= \frac{1 - F_e^{(a)}}{4} E_a n_e^2 \langle \sigma v \rangle + (1 - F_e^{(a)}) S_\alpha + \frac{3}{2} n_e \bar{v}_{eq} (T_e - T_i) \end{aligned} \right\} \quad (10.49)$$

## 10.6 本章总结

双流体模型由电子和离子的质量守恒、动量守恒、能量守恒等方程加上麦克斯韦方程组成。流体变量通过有关定义与麦克斯韦方程相耦合。这些定义将数密度 ( $n_e, n_i$ ) 和流速 ( $\mathbf{u}_e, \mathbf{u}_i$ ) 与电流密度  $\mathbf{J}$  和电荷密度  $\sigma$  联系起来。具体来说就是,  $\mathbf{J} = e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e)$  和  $\sigma = e(n_i - n_e)$ 。模型中的基本未知量是  $n_e, n_i, \mathbf{u}_e, \mathbf{u}_i, T_e, T_i, \mathbf{E}, \mathbf{B}$ 。此外,压强与密度和温度有简单关系  $p_e = n_e T_e$  和  $p_i = n_i T_i$ 。完备的双流体模型罗列如下:

### 1. 质量守恒

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) &= 0 \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.50)$$

## 2. 动量守恒

$$\left. \begin{aligned} m_e n_e \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \right] \mathbf{u}_e &= -e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e - m_e n_e \bar{\mathbf{v}}_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \\ m_i n_i \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right] \mathbf{u}_i &= e n_i (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i - m_e n_e \bar{\mathbf{v}}_{ei} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \end{aligned} \right\} \quad (10.51)$$

## 3. 能量守恒

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2} n_e \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \right] T_e + p_e \nabla \cdot \mathbf{u}_e + \nabla \cdot \mathbf{q}_e &= S_e \\ \frac{3}{2} n_i \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right] T_i + p_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i + \nabla \cdot \mathbf{q}_i &= S_i \end{aligned} \right\} \quad (10.52)$$

加上,

$$\left. \begin{aligned} S_e &= \frac{F_e^{(a)}}{4} E_\alpha n_e^2 \langle \sigma v \rangle + F_e^{(a)} S_a + \eta J^2 - C_B n_e^2 T_e^{1/2} - \frac{3}{2} n_e \bar{\mathbf{v}}_{eq} (T_e - T_i) \\ S_i &= \frac{1 - F_e^{(a)}}{4} E_\alpha n_e^2 \langle \sigma v \rangle + (1 - F_e^{(a)}) S_a - \frac{3}{2} n_e \bar{\mathbf{v}}_{eq} (T_i - T_e) \end{aligned} \right\} \quad (10.53)$$

## 4. 麦克斯韦方程组

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 e (n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.54)$$

双流体模型描述聚变等离子体的自洽行为,这些行为包括了所有的主要现象:宏观平衡和稳定、运输、加热以及电流驱动。该模型是一组封闭的方程(即方程数目=未知量数目),但目前尚未定义的热通量矢量  $\mathbf{q}_e$  和  $\mathbf{q}_i$  除外。我们将在第 14 章导出这些量。这一模型提供了对大多数等离子体现象的准确描述,但平行于磁场的行为占主导的情形除外。幸运的是,这种行为对大多数应用不构成严重限制。

虽然双流体模型解题较更一般的动理学模型简单,但它仍然是由一系列复杂的耦合非线性偏微分方程组成。在实践中,根据具体应用上的考虑,我们往往要作进一步简化来大大降低模型的复杂性。这种简化工作在本书中所讨论的所有应用事

例中都有反映。

## 参考书目

通过流体模型我们可获得对等离子体物理基础和聚变能一个好的理解。流体模型虽然不像动理学描述那样完备,但同样能对很多等离子体物理现象进行严格分析。下列参考书大部分给出了由动理学理论导出流体方程的推导过程。唯一例外的是 Bird 等人的著作,它通过对质量、动量和能量守恒关系的应用,直观地推导出流体方程。

- Boyd, T. J. M., and Sanderson, J. J. (2003). *The Physics of Plasmas*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., and Lightfoot, E. W. (1960). *Transport Phenomena*. New York: John Wiley & Sons
- Chen, F. F. (1984). *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, second edn. New York: Plenum Press.
- Freidberg, J. P. (1987). *Ideal Magnetohydrodynamics*. New York: Plenum Press.
- Goedbloed, H., and Poedts, S. (2004). *Principles of Magnetohydrodynamics*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Goldston, R. J., and Rutherford, P. H. (1995). *Introduction to Plasma Physics*. Bristol, England: Insitute of Physics Publishing.
- Hazeltine, R. D., and Meiss, J. D. (1992). *Plasma Confinement*. Redwood City: Addison-Wesley.
- Krall, N. A., and Trivelpiece, A. W. (1973). *Principles of Plasma Physics*. New York: McGraw Hill Book Company.

## 习 题

下列习题涉及双流体模型总体守恒关系的推导。一般来说,要得到这种关系,需要对方程进行不同的组合,然后通过代数演算形成局部守恒的形式。局部守恒的标量和矢量形式的具体关系是:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{标量方程}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}} = 0 \quad \text{矢量方程}$$

其中,  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}} = \mathbf{A}\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  是任意矢量。然后利用适当的边界条件,在等离子体体积上对局部守恒方程进行积分,以获得总体守恒律。下述张量关系很容易推导,且有助于解题:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) &= \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ \mathbf{r} \times \nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) &= \nabla \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{r} \times \mathbf{B})] - \mathbf{A} \times \mathbf{B} \\ \int_V d\mathbf{r} \nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) &= \int_S dS (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} \end{aligned}$$

**10.1** 等离子体由刚性理想导体壁包围。试证明:电子和离子各自满足由下式给定的总体守恒关系,即  $dN_{e,i}/dt = 0$ , 其中,

$$N_{e,i} = \int n_{e,i} d\mathbf{r}$$

陈述并证明推导中使用的边界条件。

**10.2** 等离子体由固定的理想导体壁包围,且满足双流体方程。试证明:如果①碰撞可忽略;②两种成分均满足简单的绝热能量方程,则等离子体满足如下总体能量守恒律: $dW/dt=0$ ,其中,能量为:

$$W = \int \left[ \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{p_e + p_i}{\gamma - 1} + \frac{m_e n_e u_e^2}{2} + \frac{m_i n_i u_i^2}{2} \right] d\mathbf{r}$$

对每一项给予物理解释。陈述并证明推导中使用的边界条件。

**10.3** 本题是习题 10.2 的推广,旨在确定存在耗散项时的总体功率平衡。为了导出功率平衡关系,假设处处满足电中性条件: $n_e = n_i \equiv n$ 。保留动量和能量方程中的所有耗散项和非绝热项。试证明:总体双流体功率平衡关系可以写为:

$$\frac{dW}{dt} = P_f - P_B + P_a - Q_\kappa$$

其中, $W$ 由问题 10.2 给定; $P_f, P_B$ 和 $P_a$ 分别是聚变功率、韧致辐射功率和辅助加热功率;

$$P_f = \int \frac{E_\alpha n^2}{4} \langle \sigma v \rangle d\mathbf{r}$$

$$P_B = \int C_B n^2 T^{1/2} d\mathbf{r}$$

$$P_a = \int S_a d\mathbf{r}$$

$Q_\kappa$ 项代表通过壁的热传导能量损失:

$$Q_\kappa = \int (\mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i) \cdot \mathbf{n} dS$$

为什么没有欧姆加热项?

**10.4** 等离子体由刚性导体壁包围。试证明:在双流体模型下,总体动量守恒律具有 $d\mathbf{P}/dt=0$ 的形式,这里动量为:

$$\mathbf{P} = \int (m_e n_e \mathbf{u}_e + m_i n_i \mathbf{u}_i + \mathbf{S}/c^2) d\mathbf{r}$$

其中, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 是坡印亭矢量。对每一项给予物理解释。陈述并证明推导中使用的边界条件(提示:需要仔细论证表面项为零)。

**10.5** 等离子体由刚性导体壁包围。试证明:在双流体模型下,总体角动量守恒律具有 $d\mathbf{L}/dt=0$ 的形式,这里角动量为:

$$\mathbf{L} = \int (m_e n_e \mathbf{r} \times \mathbf{u}_e + m_i n_i \mathbf{r} \times \mathbf{u}_i + \mathbf{r} \times \mathbf{S}/c^2) d\mathbf{r}$$

其中, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 是坡印亭矢量。对每一项给予物理解释。陈述并证明推导中使用的边界条件(提示:需要仔细论证表面项为零)。

# 第 11 章 磁流体力学——宏观平衡

## 11.1 宏观平衡和稳定性的基本问题

自洽性起关键作用的首要问题是等离子体的宏观平衡和稳定性。我们需要知道如何利用磁场的作用来维持等离子体的稳定的宏观平衡,进而使得聚变反应能够在连续稳态运行模式下进行。本章主要讨论平衡问题,稳定性问题放在第 12、13 章讨论。

宏观平衡和稳定性分析是基于单流体模型即磁流体力学模型来进行的。磁流体力学模型是对双流体模型的简化,由只考虑宏观行为的特征时间和特征空间尺度而导出。具体来说,特征标长  $L$  取等离子体半径 ( $L \sim a$ ), 而特征时间  $\tau$  是指离子以热速度穿过等离子体的穿越时间 ( $\tau \sim a/v_{Ti}$ )。由此得到特征速度  $u \sim L/\tau \sim v_{Ti}$ , 它是等离子体能够达到的最快的宏观速度——离子声速。

本章讨论的第一项内容是从双流体模型出发导出磁流体力学模型,同时通过单粒子导心理论来推导磁流体力学模型。其目的是要表明,直观上导出的磁流体力学模型和单粒子导心运动模型的确是自洽的。

推导中值得注意的一点是电子动量方程到单流体欧姆定律的变换,后者将电场和电流联系在一起。实际上,欧姆定律有三种表达式,具体形式依保留项的数目而定。相应地,磁流体力学模型也有三种表达形式。保留项数最多的形式被称为“广义”欧姆定律。在此基础上,略去关系式中的某些项即得到其简化形式,称为“电阻性”欧姆定律。最后,再略去电阻项,我们就得到了“理想化”欧姆定律,它相当于说等离子体具有理想导电性。有趣的是,对于所有三种欧姆定律形式,力平衡关系式都是一样的。

本章讨论的另一个主题是磁流体力学平衡方程的形式化及其分析。有关结果概述如下:取得磁流体力学平衡的过程涉及两种不同性质的力。第一种是热气体膨胀产生的径向扩张力。事实表明,环向(即长程方向)磁场和极向(即短程方向)磁场都能够平衡径向扩张力。第二种是由于环形几何产生的环向力。这个力将驱使等离子体“环”向更大的大半径方向膨胀。在此情形下,只有极向磁场才能抵消环向扩张力。事实表明,保持环向力平衡的磁场的关键特征就是磁场线连续地缠绕圆环,就像理发店门口转动的条纹。这种性质就是所谓“旋转变换”。我们将通过一些简单的磁场位形讨论来说明如何计算旋转变换。一般来说,轴对称环形聚变装置通过环向等离子体电流来产生旋转变换。但这种变换也能够没有环向电



流的情形下产生,例如在仿星器中,尽管在此情形下磁场位形是内在三维的。

从分析得出的主要结论是,存在多种不同的磁场几何,它们都能提供维持等离子体环向平衡所必需的力。接下来的问题就是检验这些平衡位形的磁流体力学稳定性,从而确定哪一种最具有实现稳定的高比压聚变堆的吸引力。这就是接下来两章所关注的问题。

## 11.2 从双流体模型推导磁流体力学模型

从双流体模型推导磁流体力学模型的过程比较简单,只需几步。首先,需要明确相关的标长和时间尺度,以便为与双流体模型中各项的大小进行比较打下基础;其次,由于磁流体力学只关注宏观尺度行为,因此凡涉及电子质量的小量、等离子体的非相对论速度,以及和德拜长度尺度有关的量将被明显简化掉;最后,双流体模型到磁流体力学模型的转换是通过引入单流体变量和忽略一些小量取得的,这是因为我们只关心与磁流体力学相关的特征长度和时间尺度。推导过程如下。

### 11.2.1 与磁流体力学有关的基本标长

描述磁流体力学的特征长度、特征时间和特征速度分别由  $L \sim a$ ,  $\tau \sim a/v_{Ti}$  和  $u_i \sim v_{Ti}$  给出。为了做进一步处理,我们需要知道如何将双流体模型中的未知量以及其他自然显现的长度、时间和速度等尺度与磁流体力学的尺度进行比较。这将决定哪些项被保留,哪些项被略去。

首先考虑电场。就宏观速度而言,一般认为垂直方向的感应电场比较大,这意味着流体速度主要是  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移速度。为了和假定的磁流体力学特征速度  $v_{Ti}$  相一致,必有  $E_{\perp} \sim v_{Ti} B$ 。更进一步,因为电子和离子都以相同的  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移速度移动,因此有  $u_e \sim u_i \sim E_{\perp}/B \sim v_{Ti} \circ E_{\parallel}$  的尺度较复杂,我们稍后再予以推导。

其次,注意到电子和离子具有相同的  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移速度,因此电流密度  $\mathbf{J} = e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e)$  将只保留首项。这意味着  $|\mathbf{J}|/en v_{Ti} \ll 1$ , 不等式迅速得到量化。此外,与磁压强相比,假定等离子体压强是有限的,即  $\beta \equiv p/(B^2/2\mu_0) \sim 1$ 。最后,为了满足聚变等离子体的定义,另外两个不等式也必须满足:小的离子回旋半径  $r_{Li} \ll a$  和低碰撞频率  $\bar{\nu}_{ei} \ll v_{Ti}/a$ 。目前的实验和聚变堆都能很好地满足这两个条件。

定义磁流体力学的所有不等式归纳和总结如下:

$$\left. \begin{array}{l} \text{长度: } a \gg r_{Li} \gg [r_{Le} \sim \lambda_{De}] \\ \text{频率: } \bar{\nu}_{ei} \ll v_{Ti}/a \ll \omega_{ei} \ll [\omega_{ce} \sim \omega_{pe}] \\ \text{速度: } v_{Ti} \sim v_{\alpha} \ll v_{Te} \ll [c] \end{array} \right\} \quad (11.1)$$

这里,注意到阿尔文速度  $v_a^2 \equiv B^2/\mu_0 n_i m_i \approx 2v_{Ti}^2/\beta$ 。此外,式(11.1)中黑体符号表示磁流体力学的特征尺度。方括号内的项表示,和磁流体力学尺度相比,这些项充

分满足不等式。不等式的等级在后文推导过程中将详细讨论。

这些简单的定标关系使我们能够比较双流体模型中各个项,从而决定哪些项保留,哪些项可忽略。

### 11.2.2 “明显的”简化

对双流体模型的“明显”简化源于式(11.1)的方括号中那些充分满足不等式的项。第一个简化来自这样一个事实:相关的特征时间尺度  $\tau \sim a/v_{Ti}$ , 或者写成相应的磁流体力学频率  $\omega \sim 1/\tau \sim v_{Ti}/a$ 。与电子的固有频率相比,它是一个非常低的频率,即  $\omega \ll \omega_{ce} \sim \omega_{pe}$ 。事实上,这两种频率之间相差几个数量级。这意味着电子动量方程中的电子惯性项可以被忽略,因为比起磁流体力学特征时间,电子的响应时间要快得多。形式上,我们可以令  $m_e \rightarrow 0$  来得到恰当的数学上的极限值。

第二个简化与等离子体宏观流动的非相对论性尺度有关。因为  $v_{Ti}$  要比光速  $c$  小几个数量级,因此我们可以忽略掉麦克斯韦方程组中的位移电流项。类似地,磁流体力学的特征标长很容易满足不等式  $a \gg \lambda_{De}$ 。由此得到第三个简化,即泊松方程中的电场梯度项  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  被忽略,进而得到等离子体准中性条件:  $n_e \approx n_i$  (不要误以为准中性假设即意味着  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , 这是不对的,它仅仅表示  $\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \ll en_e$ )。这些简化使麦克斯韦方程从严格的相对论性洛伦兹不变量形式简化为自洽的低频下的伽利略不变量形式。形式上说,通过取极限  $\epsilon_0 \rightarrow 0$ , 我们就可以从数学上得到低频条件下的麦克斯韦方程组。

在上述简化的基础上,双流体模型简化为:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0 \\
 & \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = 0 \\
 & 0 = -en_e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e - m_e n_e \bar{v}_{ei}(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \\
 & m_i n_i \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right] \mathbf{u}_i = en_i(\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i - m_e n_e \bar{v}_{ei}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \\
 & \frac{3}{2} n_e \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \right] T_e + p_e \nabla \cdot \mathbf{u}_e + \nabla \cdot \mathbf{q}_e = S_e \\
 & \frac{3}{2} n_i \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right] T_i + p_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i + \nabla \cdot \mathbf{q}_i = S_i \\
 & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
 & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e) \\
 & n_i - n_e = 0 \\
 & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

### 11.2.3 单流体变量

下一步是将单流体变量引入到双流体模型中。这些单流体变量分别是质量密度  $\rho$ , 宏观速度  $v$  和压强  $p$ 。它们的定义如下。首先, 因为离子质量远大于电子质量, 因此单流体的质量密度近似为离子质量密度:

$$\rho \equiv m_i n \quad (11.3)$$

其中  $n_e = n_i \equiv n$  是因为满足准中性条件。

第二, 如前所述, 离子和电子的流体速度均近似等于  $E \times B$  漂移速度。因此, 由  $m_i \gg m_e$  可知流体的动量由离子携带:

$$v \equiv u_i \quad (11.4)$$

第三, 电子流体速度是通过重新引入作为方程中基本未知量的电流密度  $J$  来定义的:  $J = en(u_i - u_e)$ , 或者说

$$u_e \equiv v - J/en \quad (11.5)$$

最后, 单流体模型中的压强就是电子和离子压强的简单的和:

$$p \equiv p_e + p_i \quad (11.6)$$

式(11.3) ~ 式(11.6)提供了单流体变量和双流体变量之间的必要联系。

### 11.2.4 质量守恒方程

两个质量守恒方程中所包含的信息可以很方便地通过下述方法得到。首先, 用离子质量  $m_i$  乘以离子守恒方程并引入单流体变量, 得到:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot v = 0 \quad (11.7)$$

式中及后文中,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla \quad (11.8)$$

是随着离子流体一起运动的普通对流导数。

第二个关系式可以通过用电子电量  $e$  乘以两个守恒方程然后化简方程来得到。利用电中性条件, 我们得到:

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (11.9)$$

事实上,式(11.9)是一个冗余关系,因为通过对式(11.2)中安培定律的低频形式求散度也能得到式(11.9): $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}) = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 。因此,式(11.7)是从质量守恒方程中能得到的唯一独立的信息。

### 11.2.5 动量守恒方程

两个动量守恒方程简化如下。首先,我们将两个方程叠加并引入单流体变量,得到如下方程:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (11.10)$$

需要注意的是,这里,电场项由于电中性关系被舍去,碰撞项则由于弹性库仑碰撞中电子和离子的总动量守恒而被舍去。

这个方程是磁流体力学模型中最重要方程,因为它描述了等离子体的基本力平衡关系。式(11.10)的物理解释如下:等号左边表示惯性力,对决定等离子体的动力学行为很重要;等号右边的 $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ 项表示用来约束等离子体的磁场力, $\nabla p$ 项表示引起等离子体热核向外膨胀的压强梯度力。在没有流动的稳态情形下,惯性力为零,平衡由磁场力和压强梯度力相等来实现。根据定标关系我们知道,只有电流密度 $\mathbf{J}$ 满足 $J \sim p/aB$ 时,这两个力才能平衡。这意味着如前所述, $J/evv_{Ti} \sim r_{Li}/a \ll 1$ 。由于其重要性,我们将在11.5节对单流体动量方程做进一步详细讨论。

通过将电子动量方程简单改写为欧姆定律的形式并引入单流体变量,我们可以从动量方程中获得另外一些信息。通过简单计算得到:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{en} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) + \eta \mathbf{J} \quad (11.11)$$

式(11.11)就是所谓的“广义”欧姆定律。公式左边表示随等离子体一起运动的参考系中的电场,右边的 $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ 和 $\nabla p_e$ 项分别表示霍尔效应项和电子逆磁项。这两项在其有重要作用的情形下保留,而在磁流体力学范围内忽略。事实上,通过对这些项的大小做简单估计,可知 $JB/evvB \sim p/avvB \sim r_{Li}/a \ll 1$ 。因此,这些项可以被忽略。最后一项描述等离子体的电阻性,也是小量,因为磁流体力学的定标关系意味着 $\eta J/vB \sim (v_{ei}a/v_{Ti})(r_{Li}^2/a^2) \ll 1$ 。故在此基础上,电阻项也可以忽略。讨论的最终结果就是式(11.11)简化为“理想”欧姆定律:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (11.12)$$

我们注意到,在随等离子体一起运动的参考系中,电场为零。换句话说,等离子体行为类似于理想导体。

最后,需要指出的是,尽管电阻项很小,但在有些时候,欧姆定律还需要保留这一项。这是因为:①电阻项是动量方程中唯一表征耗散效应的项(也就是说,霍尔效应项和电子逆磁项都是非耗散的);②“理想”磁流体力学定标关系仅适用于垂直方向,这是因为  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  的平行分量为零,欧姆定律方程左边唯一可用作比对的项是  $E_{\parallel}$ ,而这一项也没定标。因此,如果我们假设  $E_{\parallel} \sim J_{\parallel}$ ,那么这两项就需要保留,而且电阻项的贡献出于自治上的考虑需作如下改动: $\eta \mathbf{J} \rightarrow \eta \mathbf{J}_{\parallel}$ 。实际上,从数学表示的简明性考虑,通常整个  $\eta \mathbf{J}$  都被保留。由此给出平行于磁场方向的正确表达式,同时也带来了垂直方向上近乎可以忽略的小的不自洽性。保留电阻项即可得到“电阻性”欧姆定律:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J} \quad (11.13)$$

最后还有一点需要提及的是电阻率  $\eta$  的值。有关等离子体动理学模型的更精确计算表明,电阻性欧姆定律的实际表达式是  $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta_{\parallel} \mathbf{J}_{\parallel} + \eta_{\perp} \mathbf{J}_{\perp}$ ,即电阻率是各向异性的,这是因为正确的分布函数要比简单位移了的麦克斯韦分布复杂得多。动理学理论显示,式(11.13)中从简单位移了的麦克斯韦分布导出的  $\eta$  值实际上相当于垂直方向的电阻率,即  $\eta_{\perp} = \eta$ 。然而,正确建构平行方向上欧姆定律模型需要的却是  $\eta_{\parallel}$ 。平行电阻率的更准确的值要比  $\eta$  小一个差不多 1/2 的因子: $\eta_{\parallel} = 0.51\eta$ 。就目前的情形说,这点各向异性是不重要的。因此,出于简单性考虑,通常假设电阻是各向同性的,即  $\eta \rightarrow \eta_{\parallel}$ ,因为耗散影响主要是在平行方向。具体来说,电阻性欧姆定律表达式为:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta_{\parallel} \mathbf{J} \quad (11.14)$$

这里由第 10 章可知:

$$\eta_{\parallel} = (0.51) \frac{\sqrt{2}}{12\pi^{3/2}} \frac{e^2 m_e^{1/2}}{\epsilon_0 T_e^{3/2}} \ln \Lambda = 3.3 \times 10^{-8} \left[ \frac{1}{T_e} \right] \quad (\Omega \cdot \text{m}) \quad (11.15)$$

电阻性主要从两个方面影响到等离子体行为。首先,与理想磁流体力学情形相比,电阻性允许可能出现的不稳定性范围更宽。但这些不稳定性具有更慢的增长率,通常并不导致等离子体的宏观损失,而是增强了的输运损失。其次,即使不存在电阻性不稳定性,电阻项依然是动量方程中唯一的耗散项。这种耗散导致粒子扩散和磁场扩散这两种主要的输运损失。同样,与磁流体力学的特征时间尺度相比,这些现象的时间尺度更慢。因此,我们将有关电阻性磁流体力学的进一步讨论放到关于等离子体输运的第 14 章里。

上述讨论的最终结果是,双流体动量方程转化为单流体动量方程和欧姆定律,其中欧姆定律可以是理想的或者电阻性的。本书中不考虑涉及广义欧姆定律的问题。

### 11.2.6 能量守恒方程

在磁流体力学范围内,能量方程可以大大简化。包括热传导在内的所有源项和汇项都被忽略。等离子体的加热和冷却一般要比理想磁流体具有更慢的时间尺度。为了证明这种说法,我们不妨回想一下零维热传导项(它的贡献总是最大),其形式为  $\nabla \cdot \mathbf{q} \rightarrow 3nT/\tau_E$ , 式中  $\tau_E$  是能量约束时间。由于就目前的大装置或反应堆来看,  $\tau_E$  的取值范围是  $0.1 \sim 1$ , 所以很明显,这个时间要比磁流体力学特征时间长很多:  $\tau_E \gg a/v_{Ti} \sim 1 \mu\text{s}$ 。

基于上述理由,并引入单流体变量,我们将离子能量方程简化为:

$$\frac{3}{2}n \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right] T_i + p_i \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (11.16)$$

利用质量守恒关系消去  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  项,式(11.16)化简为熟悉的绝热形式:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p_i}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (11.17)$$

其中  $\gamma = 5/3$ 。

接下来,由于磁流体力学的定标关系给出  $\mathbf{u}_e = \mathbf{v} - \mathbf{J}/en \approx \mathbf{v}$ , 因此电子满足相同形式的能量方程:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p_e}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (11.18)$$

将两个能量方程叠加,并利用定义  $p = p_i + p_e$ , 我们得到单流体能量方程表达式:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (11.19)$$

注意,在磁流体力学中没有必要区分  $p_e$  和  $p_i$ , 因为式(11.19)仅仅包含二者的和。

### 11.2.7 磁流体力学方程总结

现将上文推导的单流体方程集合在一起,由此构成封闭的磁流体力学模型方程组,归纳如下:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{质量:} \quad & \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\
 \text{动量:} \quad & \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \\
 \text{欧姆定律:} \quad & \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{理想磁流体力学}) \\
 & \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta_{\parallel} \mathbf{J} \quad (\text{电阻性磁流体力学}) \\
 \text{能量:} \quad & \frac{d}{dt} \left[ \frac{p}{\rho} \right] = 0 \\
 \text{麦克斯韦方程组:} \quad & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
 & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \\
 & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (11.20)$$

这就是用来分析聚变等离子体的宏观平衡和稳定性的基本模型。

## 11.3 从导心理论推导磁流体力学模型

本节介绍基于导心理论的理想磁流体力学模型的另一种推导方法。特别是,通过将单粒子导心漂移与所谓磁化电流的新的贡献项结合起来,导出磁流体垂直动量方程和欧姆定律。目的是通过展示微观单粒子行为和宏观流体行为之间的关系,给出另一种物理直观图像。

### 11.3.1 基本思路

推导的基本思路是计算因导心运动而流过等离子体任意开曲面的垂直电流密度,并观察这个电流是如何与等离子体压强梯度和惯性力相联系的。

几何结构如图 11.1(a) 所示。为了便于计算  $\mathbf{J}_{\perp}$ , 我们按其法向矢量与  $\mathbf{B}$  垂直的原则来选取相关曲面。计算电流时还需要仔细考虑回旋半径扩张带来的影响。首先考虑粒子运动的主要贡献项,即对应于圆周回旋运动的项,如图 11.1(b) 所示,因为每个粒子进出曲面的方向相反,所以这种运动对电流没有贡献。换句话说,在一个回旋周期中,没有净电荷流。

垂直电流是由两种不同机制产生的一阶效应。第一种机制对应于导心垂直漂移产生的穿过曲面的电荷流,如图 11.1(c) 所示。第二项贡献源于曲面边界附近的回旋运动,如图 11.1(d) 所示,这个电流就是所谓的磁化电流,它是由于粒子只从一个方向穿过曲面而引起的。其返回路径位于边界外,因而无法抵消曲面内部分对电流的贡献。尽管这个贡献看上去比较小,但其大小却可与同样是一阶小量的导心运动贡献相当。下面计算每一部分的贡献。

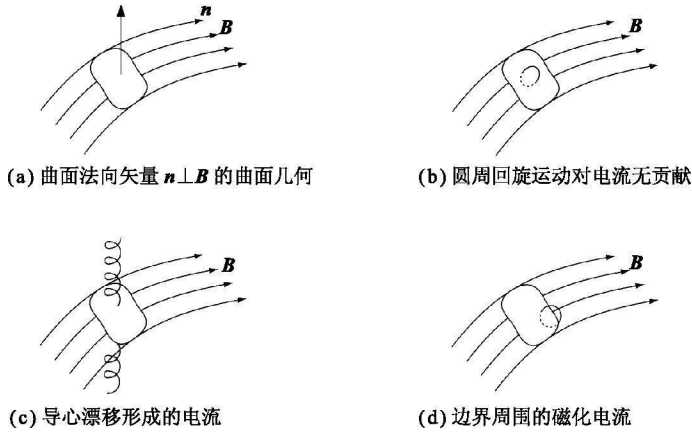


图 11.1

### 11.3.2 导心漂移电流和欧姆定律

粒子的导心漂移速度由  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移、 $\nabla B$  漂移、曲率漂移和极化漂移等组成(忽略电子极化漂移)。根据第8章,我们将这些项罗列如下:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{v}_{gi} &= \mathbf{V}_E + \mathbf{V}_{\nabla B} + \mathbf{V}_{\kappa} + \mathbf{V}_p \\
 &= \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} + \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_{ci}} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} - \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_{ci}} \frac{\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{B}}{B} + \frac{\mathbf{b}}{\omega_{ci}} \times \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \\
 \mathbf{v}_{ge} &= \mathbf{V}_E + \mathbf{V}_{\nabla B} + \mathbf{V}_{\kappa} \\
 &= \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_{ce}} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_{ce}} \frac{\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{B}}{B}
 \end{aligned} \right\} \quad (11.21)$$

其中  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} = -\mathbf{R}_c/R_c^2$  是曲率矢量。

接下来,我们注意到,在磁流体力学尺度范围内,通常  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移比电子和离子的任何其他漂移都要大一个  $a/r_{Li}$  因子,这里,粒子的垂直速度和平行速度均与热速度相当,即  $m_i v_i^2 \sim m_e v_e^2 \sim T$ 。所以在流体模型中,无论是电子还是离子,导心的主要运动都是  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移运动。由于电子和离子以相同的速度漂移,因此可以引入垂直方向上的宏观流体速度,即  $\mathbf{u}_{\perp} \approx \mathbf{v}_{gi} \approx \mathbf{v}_{ge}$ , 式中  $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ 。于是关系式改写为:

$$\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u}_{\perp} \times \mathbf{B} = 0 \quad (11.22)$$

式(11.22)相当于垂直方向的欧姆定律。

现在考虑导心漂移运动产生的垂直电流。尽管  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移对粒子漂移的贡献最大,但是由于电中性条件以及电子和离子的漂移方向相同,它所产生的净电流则为零。计算净电流密度最简单的方法是把电子和离子的所有漂移贡献项直接相减,



然后对所有粒子求和。贡献较大的  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移被自动消去：

$$\mathbf{J}_{\perp g} = e \langle n_i \mathbf{v}_{gi} \rangle - e \langle n_e \mathbf{v}_{ge} \rangle = e \int (\mathbf{v}_{gi} f_i - \mathbf{v}_{ge} f_e) d\mathbf{v} \quad (11.23)$$

代入漂移速度,得到

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\perp g} = e \int & \left[ \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_{ci}} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} - \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_{ci}} \frac{\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{B}}{B} + \frac{\mathbf{b}}{\omega_{ci}} \times \frac{d\mathbf{u}_{\perp}}{dt} \right] f_i d\mathbf{v} \\ & + e \int \left[ \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_{ce}} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} - \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_{ce}} \frac{\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{B}}{B} \right] f_e d\mathbf{v} \end{aligned} \quad (11.24)$$

假设粒子服从稳态的麦克斯韦分布,并采用局域直角速度坐标系,即  $v_{\parallel}^2 = v_z^2$  和  $v_{\perp}^2 = v_x^2 + v_y^2$ ,我们很容易求出这个积分。由此得到导心漂移运动产生的电流表达式为:

$$\mathbf{J}_{\perp g} = p \left[ \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^3} - \frac{\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{B}}{B^2} \right] + \frac{\boldsymbol{\rho}}{B} \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{u}_{\perp}}{dt} \quad (11.25)$$

其中,  $p = p_e + p_i$ ;  $\boldsymbol{\rho} = m_i n_i \mathbf{e}_i$ 。

### 11.3.3 磁化电流

磁化电流源于(边界附近)粒子只穿过曲面一次,如图 11.1(d) 所示。它们对  $\mathbf{J}_{\perp}$  的贡献可通过计算每个单粒子携带的电流乘以所有仅穿过曲面一次的粒子数来估计。计算过程如下。

在一个回旋周期中,带电荷量为  $q$  ( $q = \pm e$ ) 的粒子产生的平均电流为:

$$I_q = -\frac{q}{\tau_c} = -\frac{q\omega_c}{2\pi} \quad (11.26)$$

负号表示电流沿着逆磁方向,趋向于削弱原来的场。

仅穿过一次的粒子数目可以通过图 11.2 所示的几种限定性情形来确定。粒子 1 的轨道刚刚出了所选曲面的边界;粒子 2 的轨道大部分在所选曲面外,但却刚好穿过该曲面。类似地,粒子 3 和粒子 4 显示的是另外两种仅穿越曲面一次的限定性轨道。这些轨道中心的轨迹组成一个半径为回旋半径的圆。因此,任何粒子,只要其导心位于以所选曲面边界上的点为中心、以  $r_L$  为半径的圆内,就都属于仅穿越曲面一次的粒子。包含这些粒子的体积元为  $d\mathbf{r} = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ , 其中,  $\mathbf{A} = \pi r_L^2 \mathbf{b}$ ,  $d\mathbf{l}$  是曲面边界的弧长。注意,一般情况下,回旋轨道的法向量沿  $\mathbf{b}$  方向,并不与  $d\mathbf{l}$  平行,如图 11.3 所示。其投影减少了单次穿过所选曲面的粒子数目。

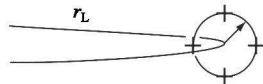
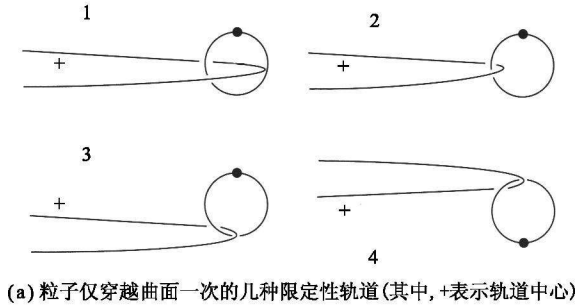
这个体积元内所含的速度为  $\mathbf{v}$  的粒子数为  $dN = (fd\mathbf{v})(d\mathbf{r})$ , 相应的电流为  $dI =$

$I_q(fdv)(dr)$ 。通过对速度空间和沿曲面边界的所有体积元积分,即得到总的磁化电流为:

$$I_M = - \iint \left[ \frac{q \omega_c}{2\pi} \right] \left[ \frac{\pi m^2 v_{\perp}^2}{q^2 B^2} \right] f dv \mathbf{b} \cdot d\mathbf{l} \quad (11.27)$$

对于麦克斯韦分布函数,这个速度积分很容易得到,式(11.27)相应简化为:

$$I_M = - \oint \frac{p}{B} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{l} \quad (11.28)$$



(b) 限定性轨道中心的轨迹是一个中心位于边界、半径为 $r_L$ 的圆

图 11.2

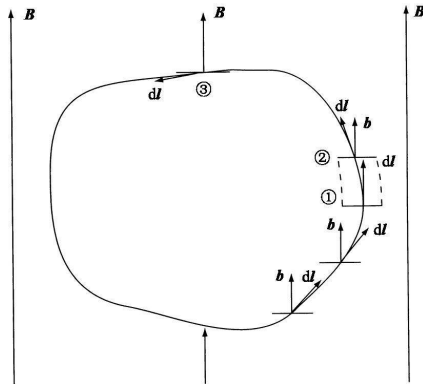


图 11.3  $b$  和  $dI$  的关系

[导心轨道所在的圆的法向沿着  $\mathbf{b}$  并始终指向上,  $dI$  的方向随曲面边界而变化,在位置 1,  $dI$  和  $\mathbf{b}$  平行,单次穿过所选曲面的粒子的体积最大(虚线之间的宽度最大),在位置 2 和 3 处,粒子的体积随着  $dI$  逐渐变得与  $\mathbf{b}$  垂直而减小]

接下来的任务是用磁化电流密度  $\mathbf{J}_M$  这种更简便的方式来改写磁化电流, 结果为:

$$I_M = \int \mathbf{J}_M \cdot d\mathbf{S} \quad (11.29)$$

其中  $S$  为所选曲面。现在我们引入依据  $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$  所定义的磁化因子  $\mathbf{M}$ 。由斯托克斯定理可得:

$$I_M = \int \nabla \times \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad (11.30)$$

比较式(11.30)和式(11.28), 得到  $\mathbf{M} = -(p/B)\mathbf{b}$ 。由此我们得到所需的磁化电流密度表达式:

$$\mathbf{J}_M = -\nabla \times \left[ \frac{p}{B} \mathbf{b} \right] \quad (11.31)$$

从物理观点上看, 你也许会认为沿曲面边界积分一周, 磁化电流会抵消掉, 因为一半粒子的  $\mathbf{b}$  分量和  $d\mathbf{l}$  同向, 而另一半则反向。但是, 这个抵消是不完全的。为了解磁化电流物理机理, 我们考虑不存在导心漂移的情况:  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ , 且  $B_0$  为常数。这种情况下  $\mathbf{J}_M$  简化为:

$$\mathbf{J}_M = \frac{1}{B_0} \nabla p \times \mathbf{e}_z \quad (11.32)$$

式(11.32)意味着, 如果等离子体中存在压强梯度(即  $\nabla n$  和/或  $\nabla T$ ), 就一定存在磁化电流。密度梯度导致的  $\mathbf{J}_M$  如图 11.4 所示。我们注意到, 在所有粒子都做没有导心漂移情形下的回旋运动时, 由于存在密度差, 左侧粒子多于右侧粒子, 因此, 如果在图 11.4 中画一条如图所示的垂线, 显然和垂线相切的左侧向下的轨道要多于右侧向上的轨道。磁化电流就来源于密度梯度产生的这种向下轨道和向上轨道的数目差。温度梯度同样会引起磁化电流, 因为在切点处热粒子比冷粒子具有更快的速度。 $\nabla T$  导致的速度差同样对磁化电流有贡献。由此可知, 即使没有导心漂移, 压强梯度也能导致宏观磁化电流。

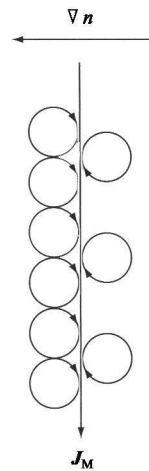


图 11.4 磁化电流的物理机理  
(与垂线相切的高密度侧向下的轨道多于低密度侧向上的轨道, 这个差值导致  $\mathbf{J}_M$ )

### 11.3.4 垂直方向上的磁流体力学动量方程

推导的最后一步是合并导心漂移和磁化电流,得到总电流: $\mathbf{J}_\perp = \mathbf{J}_{\perp g} + \mathbf{J}_M$ 。接着计算叉积 $\mathbf{J}_\perp \times \mathbf{B}$ 得:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\perp \times \mathbf{B} = & \left[ p \left[ \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^3} - \frac{\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{B}}{B^2} \right] + \frac{\rho}{B} \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} \right] \times \mathbf{B} \\ & - \left[ \nabla \times \left[ \frac{p}{B} \mathbf{b} \right] \right] \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (11.33)$$

简化后结果如下:

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{\rho}{B} \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} \right] \times \mathbf{B} &= \rho \left. \frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} \right|_\perp \\ p \frac{(\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{B^2} &= -p \boldsymbol{\kappa} \\ \left[ \nabla \times \left[ \frac{p}{B} \mathbf{b} \right] \right] \times \mathbf{B} &= p(\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} + (\nabla p \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} \\ &\quad - p \left[ \frac{\nabla B}{B^2} \times \mathbf{b} \right] \times \mathbf{B} \\ &= p \boldsymbol{\kappa} - \nabla_\perp p - p \left[ \nabla \frac{B}{B^3} \times \mathbf{B} \right] \times \mathbf{B} \end{aligned} \right\} \quad (11.34)$$

化简过程中用到矢量恒等式: $\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{b} = 0$ 和 $(\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} - \nabla(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})/2 = \boldsymbol{\kappa}$ 。合并并消去某些项后,最终得到由导心理论导出的动量方程:

$$\rho \left. \frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} \right|_\perp = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla_\perp p \quad (11.35)$$

这个形式和由理想磁流体力学模型推得的动量方程是一样的。这说明,流体方法和导心方法两种处理是等价的,只是对宏观磁流体力学行为的自洽描述方法不同。

## 11.4 磁流体力学平衡——定性描述

磁流体力学模型的第一个重要应用与平衡计算有关。如何通过外加磁场和内部感应磁场共同作用提供一个平衡力,使得等离子体维持在真空室内的预想位置?本节给出一个关于产生力平衡基本问题的简明的定性描述。

首先需要指出的是,我们感兴趣的平衡是约束平衡,具体地说,是考虑图11.5(a)所示的真空室中的聚变等离子体的平衡。这里磁场的作用是将等离子体与真空室第一壁隔离,这样才能维持热等离子体和相对冷的壁。虽然物理目标明

确,但磁流体力学方程可以有多种数学解,而我们需要的只是那些与约束平衡有关的解。图 11.5(b) ~ 图 11.5(d) 给出了磁流体方程几组可能的数学解,其中只有一组显示的是好的约束,压强总是正的,且壁上压强为零。

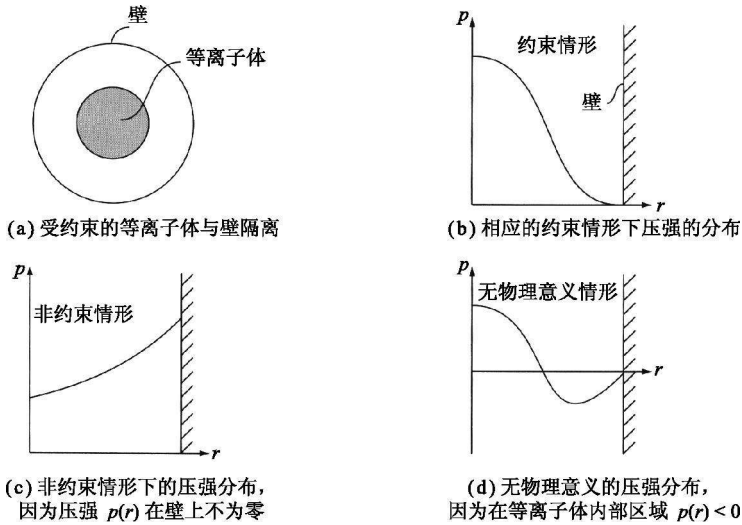


图 11.5

定性来看,环形结构中的磁流体力学平衡可分为两类:径向压强平衡和环向力平衡。径向压强平衡如图 11.6 所示。等离子体是一团芯部炽热的气体,具有沿小半径方向向外膨胀的趋势。为了平衡这种径向扩张力,就必须有磁场和电流。不久我们会看到,有两种最基本的磁场形态(“ $\theta$  箍缩”和“ $Z$  箍缩”以及二者的综合)可以产生平衡所需的径向压强。需要指出的是,径向压强平衡问题对于环形位形和没有环效应的直线形位形都很重要。

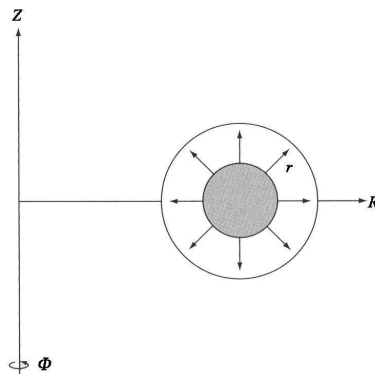


图 11.6 在直线形和环形位形中沿小半径方向的向外的压强扩张力

第二类平衡问题是环向力平衡。正如其名称所暗示的,它完全是由环形几何产生的。这个问题的描述如图 11.7 所示。由于环效应,环向(即以  $R$  为半径绕  $Z$  轴的圆周方向)磁场和极向(即沿小圆截面圆周方向)磁场都不可避免地会产生将等离子体沿大半径  $R$  方向向外推的力。我们将描述一些用来平衡沿环向向外的力的方法,以避免等离子体撞向第一壁。这些方法包括:在等离子体周围放置理想导体壁,外加“垂直场”和利用“环向螺旋”场。

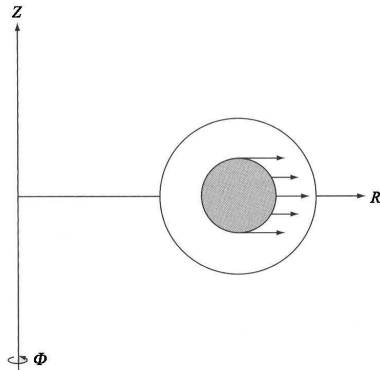


图 11.7 环形效应产生的沿大半径方向向外的力

提醒一下,在本章中,我们将简化理想磁流体力学模型以便应用于平衡问题。讨论从描述磁流体力学平衡的一些基本特征开始,然后以此为背景,在一维圆柱模型下研究径向力平衡问题,接下来再研究环向力平衡问题,并导出一个简单的近似关系式。这个关系式将给出携带环向电流的二维轴对称环面取得环向平衡的条件。最后,通过简单讨论给出在三维环向螺旋位形下实现环向力平衡的条件。这些结果将为下一章的稳定性讨论奠定基础。

## 11.5 磁流体力学平衡模型的基本性质

### 11.5.1 磁流体力学平衡模型

定量分析的第一步是简化磁流体力学模型以便用于处理平衡问题。这里的简化基于两个基本假设,它们定义了有关的磁流体力学平衡:①平衡等离子体中的所有物理量均与时间无关( $\partial/\partial t = 0$ );②假定等离子体是静态的( $\mathbf{v} = 0$ )。稳恒流体( $\mathbf{v} \neq 0$ )静态平衡是可能的,但是在目前和以后的实验中不占主流,因此它不是我们目前讨论的重点。

简化过程如下。基于上述假设,磁流体力学中质量和能量守恒很容易满足。理想欧姆定律要求  $\mathbf{E} = 0$ ,反过来这也意味着法拉第定律自动满足。至于电阻性欧姆

定律,仍然要保留一个小的电场,它产生一种时间尺度比磁流体力学时间尺度要慢的运输,但就眼下来说可以忽略该项。余下的非平庸方程相当于欧姆定律,确定了磁流体力学平衡模型:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= \nabla p \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.36)$$

这些方程描述了与聚变相关的所有磁场位形的平衡性质。

### 11.5.2 一般性质——磁通量面

在进行径向压强平衡与环向力平衡的定量讨论之前,我们可以先导出一些关于磁流体力学平衡的一般性质。第一个特性与磁通量面的概念有关。为了理解磁通量面概念,现在我们来考虑已经取得等离子体约束平衡的等压面,如图 11.8 所示。由定义可知,矢量  $\nabla p$  垂直于  $p$  的等压面。现在,用  $\mathbf{B}$  点乘磁流体力学动量方程的两边,可得:

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0 \quad (11.37)$$

上式表明,磁场线(即  $\mathbf{B}$  的平行线)必须在等压面上,即不存在垂直于等压面的  $\mathbf{B}$  分量。

因此,这些等压面也称为磁通量面<sup>1)</sup>。在约束完好的等离子体中,等压面与磁面重合,形成一组封闭的巢状环向曲面。

### 11.5.3 一般性质——电流面

用  $\mathbf{J}$  点乘磁流体力学动量方程的两边,很容易得到磁流体力学平衡的另一个一般性质:

$$\mathbf{J} \cdot \nabla p = 0 \quad (11.38)$$

即电流线也在等压面上。 $\mathbf{J}$  没有垂直于等压面的分量,如图 11.9 所示,这意味着电流在磁面之间流动而不穿过它们。需要注意的是,尽管  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{J}$  都在磁面上,但这并不意味着  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{J}$  平行。如图 11.10 所示,一般来说, $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{J}$  间的夹角是任意的,当然物理上也存在两者平行或者垂直这样的特殊情况。

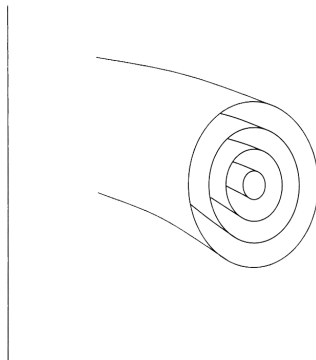


图 11.8 环向约束平衡下的等压面

1) 简称磁面,后文同此。——译者

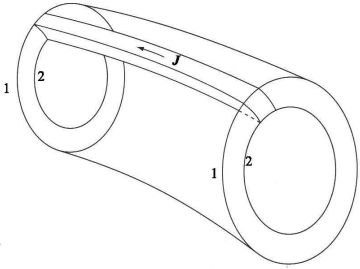


图 11.9 电流在磁面 1 和 2 的两个不同环向位置之间流动而不穿过磁面

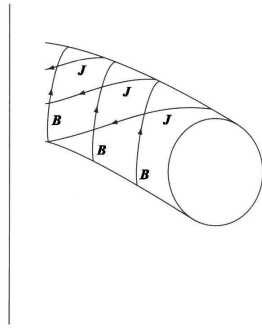


图 11.10 磁面显示,一般情形下  $B$  线和  $J$  线之间的夹角不是平行的

### 11.5.4 一般性质——磁压强和磁张力

最后一个一般性质与磁压强和磁张力有关。磁场以这两种形式来维持等离子体的受力平衡。有关的关系式可以通过安培定律消去动量方程中的  $J$ , 并利用矢量恒等式  $\nabla (B^2/2) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$  得到。经过简单计算得到:

$$\nabla_{\perp} \left[ p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] - \frac{B^2}{\mu_0} \kappa = 0 \quad (11.39)$$

其中,  $\nabla_{\perp} = \nabla - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla)$  是梯度算符的垂直分量;  $\kappa = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$  是曲率矢量。

式(11.39)描述了垂直于磁场方向的压力平衡。各项解释如下:显然  $p$  表示等离子体压强;通过类比,  $B^2/2\mu_0$  表示磁压强;最后一项  $(B^2/\mu_0)\kappa$  表示磁场线弯曲产生的张力。我们可以把磁场线想象成绕在木柱上张紧的橡皮圈来形象地描述这个力。后文在讨论径向压强平衡和环向力平衡时描述的磁压强和磁张力就是这样的范例。

总之,约束完好的聚变等离子体的等压面是一组闭合的嵌套环面。磁场线和电流密度线都在这些面上。等离子体平衡是在磁压强和磁张力两种机制共同作用下来维持的。

## 11.6 径向压强平衡

本节主要研究径向压强平衡问题。通过下述几何变换,分析得以大大简化。对于环形结构,我们可以从数学上将其沿极向剖开,然后将圆环取直,这样环形位形就等效为一直圆柱,如图 11.11 所示。很明显,直圆柱中不存在环向力平衡问题。而且,如果等离子体截面是一个圆,则问题简化为所有物理量仅与小半径  $r$  有关的一维问题。



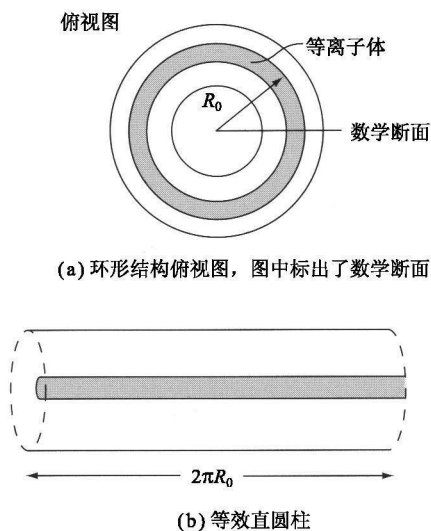


图 11.11

利用这个模型,我们可以研究以下几种简单位形: $\theta$  箍缩、 $Z$  箍缩和螺旋箍缩。这些位形展示了如何利用磁压强和磁张力来实现径向压强平衡。并且,通过分析给出等离子体比压  $\beta$  的准确定义。

### 11.6.1 $\theta$ 箍缩

图 11.12 是  $\theta$  箍缩的几何结构和磁场分量的示意图。线圈中的电流如图中所示。这个电流在线圈内产生所需的外部“环向”磁场  $B_\theta$ 。外加磁场在等离子体中感应出“极向”电流,其方向为:它所产生的磁场抵消外加磁场。问题中涉及的非平庸变量有: $p = p(r)$ ,  $\mathbf{B} = B_z(r)\mathbf{e}_z$  和  $\mathbf{J} = J_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$  (因为这个电流密度沿  $\theta$  方向,故而得名  $\theta$  箍缩)。现在的目标是弄清楚在理想磁流体力学方程约束下,这种几何位形能否实现约束平衡。

分析很简单。首先,由于对称性,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  自动满足。其次,安培定律简化为:

$$\mu_0 J_\theta = -\frac{dB_z}{dr} \quad (11.40)$$

将  $J_\theta$  代入动量方程 ( $p' = J_\theta B_z$ ), 可以得到  $p$  和  $B_z$  之间的一个简单关系:

$$\frac{d}{dr} \left( p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad (11.41)$$

对方程积分可得:

$$p(r) + \frac{B_z^2(r)}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \quad (11.42)$$

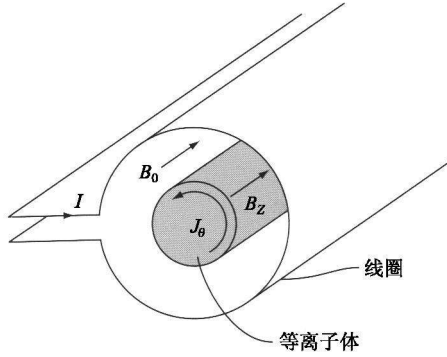


图 11.12  $\theta$  箍缩示意图

式中常量  $B_0^2/2\mu_0$  是外加磁压强。式 (11.42) 即  $\theta$  箍缩的径向压强基本平衡关系式。它表明,在任意半径  $r$  处,局部等离子体压强与内部磁压强之和与外加磁压强相平衡。从  $\theta$  箍缩的受力平衡关系式可知, $\theta$  箍缩的压强平衡关系容许很宽范围的约束平衡,其中压强分布呈中间高向两边单调递减至零的特点。典型例证如图 11.13 所示。需要指出的是,由于  $B_z(0)$  是任意的,因此,比压  $\beta$  的峰值

$$\beta_0 \equiv 2\mu_0 p(0) / [2\mu_0 p(0) + B_z^2(0)]$$

的变化范围是  $0 < \beta_0 < 1$ 。

由此可知, $\theta$  箍缩位形能够实现径向压强平衡。约束机制由磁压强提供。

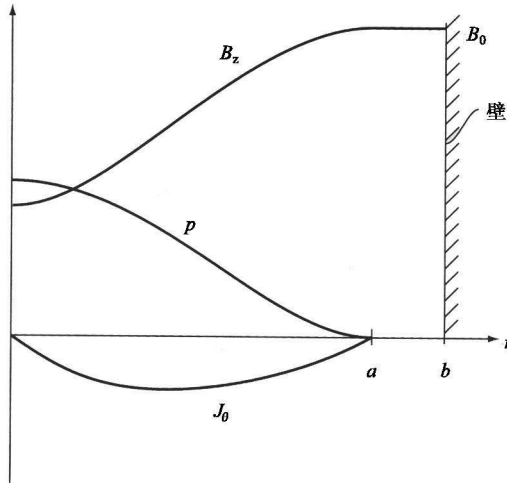


图 11.13 典型的  $\theta$  箍缩参数分布

### 11.6.2 Z 箍缩

Z 箍缩是对  $\theta$  箍缩的一种互补位形,其几何结构如图 11.14 所示。两个理想电极驱动沿 Z 方向的“环向”电流,电流感应出沿  $\theta$  方向的“极向”磁场(因为电流密度沿 Z 方向,故而得名 Z 箍缩)。因此,该位形涉及的非平庸变量是:  $p = p(r)$ ,  $\mathbf{B} = B_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$  和  $\mathbf{J} = J_z(r)\mathbf{e}_z$ 。现在的目标是弄清楚这种几何结构能否维持约束平衡。

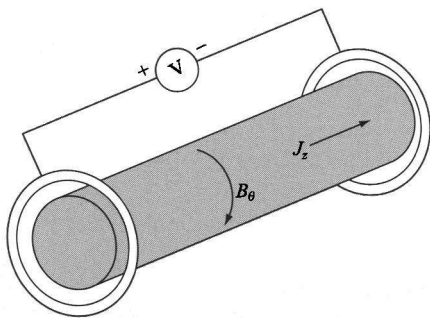


图 11.14 Z 箍缩示意图

分析也很简单。由于对称性,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  自动满足。安培定律简化为含  $J_z$  的关系式:

$$\mu_0 J_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rB_\theta) \quad (11.43)$$

将式(11.43)代入动量方程( $p' = -J_z B_\theta$ )可得压力平衡关系式:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{B_\theta}{\mu_0 r} \frac{d}{dr}(rB_\theta) = 0 \quad (11.44)$$

对  $rB_\theta$  求导后可得更直观的形式。经过简单计算,改写后的 Z 箍缩压强平衡关系式可写成:

$$\frac{d}{dr} \left( p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} = 0 \quad (11.45)$$

上述各项从左至右依次为等离子体压强、磁压强和磁张力。一般来说,Z 箍缩平衡方程并不能像  $\theta$  箍缩平衡方程那样进行简单积分。即使这样,通过下述的一个例子我们可以轻易地阐明这种约束平衡。假设一种物理上合理的电流密度分布为  $J_z(r)$  在轴上最大,并在  $r = a$  处单调递减至零:

$$J_z(r) = \begin{cases} \frac{2I}{\pi a^2} \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} \right] & 0 < r < a \\ 0 & a < r < b \end{cases} \quad (11.46)$$

式(11.46)中,  $J_z(r)$  前面的系数由等离子体中的总电流  $I = \int J_z dS$  确定。对安培定律积分, 很容易得到  $B_\theta(r)$  的表达式:

$$B_\theta(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{\pi a} \left[ \frac{r}{a} - \frac{r^3}{2a^3} \right] & 0 < r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & a < r < b \end{cases} \quad (11.47)$$

最终, 通过对压强平衡关系式积分可得出压强分布。简单计算后得到:

$$p(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I^2}{12\pi^2 a^2} \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} \right]^2 \left[ 5 - 2 \frac{r^2}{a^2} \right] & 0 < r < a \\ 0 & a < r < b \end{cases} \quad (11.48)$$

这些量的分布如图 11.15 所示。很明显, 一种压强分布对应于一种约束平衡。如果在  $Z$  箍缩中将比压  $\beta$  的峰值定义为  $\beta_0 \equiv 2\mu_0 p(0) / [2\mu_0 p(0) + B_\theta^2(0)]$ , 由于  $B_\theta(0) = 0$ , 因此所有分布的零点比压为 1, 即  $\beta_0 = 1$ 。尽管高比压  $\beta_0$  可能较好, 我们知道, 在这方面  $\theta$  箍缩比  $Z$  箍缩更加灵活。

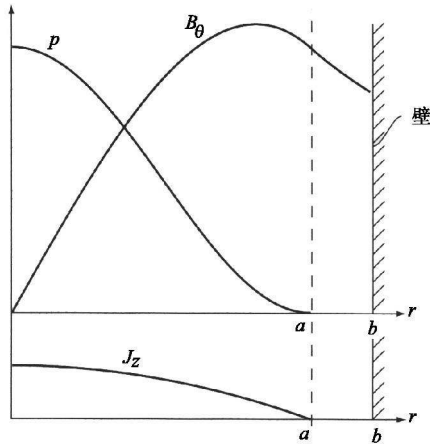


图 11.15 典型的  $Z$  箍缩分布

最后, 我们不妨将  $Z$  箍缩平衡方程中三个力沿径向上的分布绘制在一张图上, 如图 11.16 所示。需要指出的是, 力为负表示方向向内, 对应于约束力。由图 11.16 可知, 等离子体外边界附近, 仅有磁张力产生约束力, 而粒子压强和磁压强均产生方向向外的扩张力。由此可知,  $Z$  箍缩位形能够实现径向压强平衡。等离子体平衡通过磁张力得以维持。

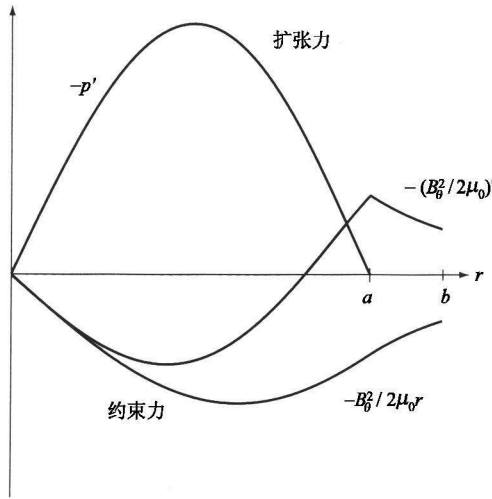


图 11.16  $Z$  箍缩的径向力(在等离子子外侧区域,仅磁张力起约束作用)

### 11.6.3 螺旋箍缩

螺旋箍缩是  $\theta$  箍缩和  $Z$  箍缩的任意组合。在这种位形中,磁场线如螺旋线般缠绕在磁面上,因此得名螺旋箍缩。每一种与聚变相关的磁场位形都对应于螺旋箍缩的一种径向压强平衡方程。

螺旋箍缩的分析也很简单。其非平庸变量是:  $p, \mathbf{B} = B_\theta(r)\mathbf{e}_\theta + B_z(r)\mathbf{e}_z$  和  $\mathbf{J} = J_\theta(r)\mathbf{e}_\theta + J_z(r)\mathbf{e}_z$ 。和前面一样  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  自动满足。包含总电流密度的安培定律为:

$$\mu_0 \mathbf{J} = -\frac{dB_z}{dr} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rB_\theta) \mathbf{e}_z \quad (11.49)$$

将式(11.43)代入动量方程( $p' = J_\theta B_z - J_z B_\theta$ ),可得通用的螺旋箍缩压强平衡关系式:

$$\frac{d}{dr} \left( p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} = 0 \quad (11.50)$$

一般来说,在磁流体力学中,我们可以任意规定两个函数,比如  $B_\theta(r)$  和  $B_z(r)$ , 然后来确定第三个函数,在此情形下就是  $p(r)$ 。由于两个函数的选择是任意的,所以螺旋箍缩能够描述的平衡位形有很多。这两个自由函数有明确的物理意义,因为实验上我们可以对环向磁场线圈和极向场线圈中的电流进行独立设定。有关主要磁约束位形的具体事例见第 13 章中关于磁流体力学稳定性的讨论。一旦磁流体力学稳定性已知,我们就可以为各种位形提供完整的磁流体力学图像。

### 11.6.4 螺旋箍缩中比压的一般定义

本节最后一个任务就是导出通用的径向压强平衡关系,并用它来定义等离子体比压“ $\beta$ ”。这一关系非常有用,因为它只与压强和磁场的积分平均值有关,对二者的具体分布细节不敏感。对压强平衡方程做如下的积分平均即可得到这一关系:

$$\frac{1}{a^2} \int_0^a r^2 dr \left[ \frac{d}{dr} \left( p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} \right] = 0 \quad (11.51)$$

式中,  $a$  是等离子体半径位置,在此处,等离子体压强和电流密度变为零。

对式(11.51)中各项进行分部积分并化简。于是压强项简化为:

$$\frac{1}{a^2} \int_0^a r^2 \frac{dp}{dr} dr = - \frac{2}{a^2} \int_0^a p r dr \equiv - \langle p \rangle \quad (11.52)$$

很明显,这个压强项表示压强平均值。“环向”场项可以改写为:

$$\frac{1}{a^2} \int_0^a r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) dr = \frac{B_{za}^2}{2\mu_0} - \frac{2}{a^2} \int_0^a \left( \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) r dr \equiv - \frac{1}{2\mu_0} (B_{za}^2 - \langle B_z^2 \rangle) \quad (11.53)$$

式中,  $B_{za}^2/2\mu_0$  是外加环向磁压强;  $\langle B_z^2/2\mu_0 \rangle$  是内部环向磁压强的平均值。如果  $\langle B_z^2/2\mu_0 \rangle < B_{za}^2/2\mu_0$ , 此时环向磁场是逆磁的,有助于约束等离子体。 $\theta$  箍缩就是这种情况。另一方面,如果  $\langle B_z^2/2\mu_0 \rangle > B_{za}^2/2\mu_0$ , 此时环向磁场是顺磁的,和压强一样提供径向扩张力。这种情况下,为了平衡这两个扩张力,需要增加极向磁张力。最后,“极向”场的贡献化简如下:

$$\frac{1}{a^2} \int_0^a r^2 dr \left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} \right] = \frac{1}{a^2} \int_0^a dr \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2 B_\theta^2}{2\mu_0} \right) = \frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0} \quad (11.54)$$

式中,  $B_{\theta a}$  和环向等离子体电流  $I$  有关。关系式为:

$$B_{\theta a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (11.55)$$

综上所述可得总的径向压强平衡关系式为:

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2\mu_0} (B_{za}^2 - \langle B_z^2 \rangle + B_{\theta a}^2) \quad (11.56)$$

提醒一下,比压是衡量等离子体约束效率的参数。因此式(11.57)中比压  $\beta$  定义如下:

$$\beta = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_{za}^2 + B_{\theta a}^2} \quad (1.57)$$

在文献中经常出现环向比压  $\beta$  和极向比压  $\beta_p$  概念,它们的定义分别为:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_{za}^2} \\ \beta_p &= \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_{\theta a}^2} \end{aligned} \right\} \quad (11.58)$$

三者之间的关系为:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta_p} \quad (11.59)$$

由上式可知,总比压  $\beta$  由环向比压  $\beta$  和极向比压  $\beta_p$  中较小的那个决定。由定义可知,  $\beta \leq 1$ 。然而,  $\beta$  或者  $\beta_p$  最多有一个能超过 1。在比较不同磁约束位形时,这些概念很重要,并且很容易将它们推广到非圆截面环形位形中。

本节主要介绍了利用环向磁场、极向磁场或者二者的结合来实现磁约束位形中的径向压强平衡。而且,除了明显有  $\beta \leq 1$  之外,比压  $\beta$  的值没有上限。

## 11.7 环向力平衡

### 11.7.1 概述

为了避免终端损失,聚变等离子体必须约束在环形结构中。在这种情况下,将直圆柱结构弯成环状结构将产生三个新的沿大半径方向(即  $R$  方向)向外的环向力,如图 11.7 所示。这些力和受其影响的位形分别如下:

- ① 环力( $Z$  箍缩);
- ② 车胎力( $Z$  箍缩,  $\theta$  箍缩);
- ③  $1/R$  力( $\theta$  箍缩)。

如果要维持等离子体环向力平衡,需要外加的力来平衡这些沿径向  $R$  向外的力。分析显示,  $Z$  箍缩自身能提供所需的平衡力,也就是说,  $Z$  箍缩具有很好的环向平衡性,因此可以很方便地弯成环状结构。但是,在第 12 章里我们将证明,纯粹  $Z$  箍缩的磁流体力学稳定性很差。

而纯粹  $\theta$  箍缩则刚好相反。在  $\theta$  箍缩中很难添加一个沿径向向内的回复力。也就是说,纯粹  $\theta$  箍缩的环向平衡性很差,很难弯成环状结构。但另一方面,在第 12 章里我们将证明,直线型  $\theta$  箍缩具有良好的磁流体力学稳定性。 $\theta$  箍缩和  $Z$  箍缩之间的这种截然不同的特性使得人们考虑开发出具有环向磁场和极向磁场优化组合的位形(即螺旋箍缩)来研究聚变磁流体力学的平衡,这些位形能在环向高比压平衡的条件下稳定约束等离子体。

在接下来的讨论中,我们将定性描述这三种环向力,并尽可能给出相应的对抗力的方法。我们将通过简单计算来对环向力平衡中各项进行半定量评估。讨论主要就二维轴对称平衡进行,同时也简单讨论三维环形螺旋位形中的平衡。

### 11.7.2 环 力

环力(hoop force)类似于圆环导线中电流产生的向外扩张力。本节中电流对应于等离子体中的环向电流。由于涉及环向电流,因此这里的环力是由弯成环状的 $Z$ 箍缩产生的。

环力的来源可以参考图 11.17(a)。图中显示的是环形 $Z$ 箍缩,其中的等离子体被分成两半。内侧部分和外侧部分的曲面面积分别为 $S_1$ 和 $S_2$ 。显然, $S_1 < S_2$ ,因为内侧曲面的大半径的平均值比外侧的要小。

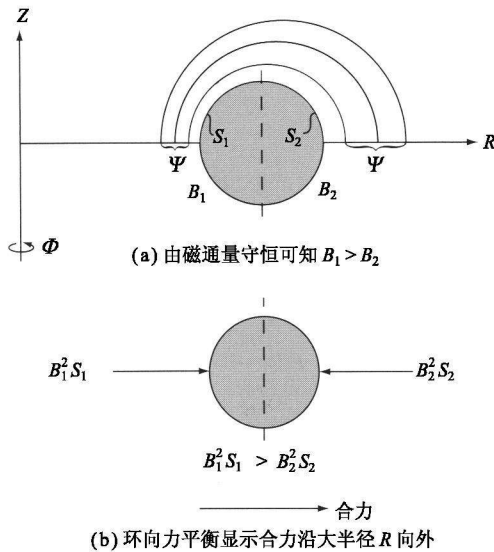


图 11.17 环力定性分析

如图所示,环向电流感应出极向磁场。由磁通量守恒可知,处于环面外侧的给定的极向磁通量 $\Psi$ 在转到环面内侧时将被挤压在较小的截面内。这意味着内侧磁场的磁感应强度要比外侧磁场的大: $B_1 > B_2$ 。磁场线在环面的内侧更紧密。

如图 11.17(b)所示,现在分析每一半等离子体所受的磁张力。作用在内侧曲面的磁张力是: $F_1 = (B_1^2/2\mu_0)S_1$ ,方向沿大半径 $R$ 向外;类似地,作用在外侧曲面的磁张力是: $F_2 = (B_2^2/2\mu_0)S_2$ ,方向沿大半径 $R$ 向内。

$B$ 的二次方关系决定了等离子体的受力大小。由此可知, $F_1 > F_2$ 。环向电流产生一个沿大半径 $R$ 向外的合力,这就是所谓的环力。



### 11.7.3 车胎力

顾名思义,车胎力类似于下述情形:充气车胎内的气压在胎的外侧产生的压力要比内侧的大。联系到等离子体气体压强,可知 $Z$ 箍缩和 $\theta$ 箍缩中均可产生这种车胎力。

这种力的来源可参考图 11.18(a)来理解。图中显示等压面被分成两部分。压强对内半部分表面 $S_1$ 的作用力是 $F_1 = pS_1$ ,方向沿大半径 $R$ 向内;压强作用在外半部分表面 $S_2$ 的力是 $F_2 = pS_2$ ,方向沿大半径 $R$ 向外。

合力示意图如图 11.18(b)所示。很明显, $F_2 > F_1$ 。在等压面上,力的大小由表面积大小决定。所以,车胎力的合力方向沿大半径 $R$ 向外。

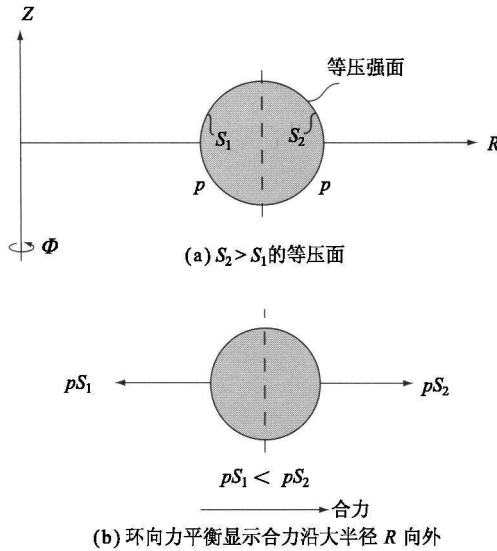


图 11.18 车胎力定性分析

### 11.7.4 $1/R$ 力

顾名思义,“ $1/R$ ”力的出现是由于环形位形而产生的环向磁场的 $1/R$ 依赖关系。由于仅涉及环向磁场,因此这种力只存在于 $\theta$ 箍缩中而不是 $Z$ 箍缩中。

演示 $1/R$ 力的简单模型如图 11.19(a)所示。图中环形 $\theta$ 箍缩由围绕环面的一组电流为 $I_c$ 的线圈产生。为简单起见,假设等离子体电流 $I_p$ 以面电流形式存在。也就是说,所有的电流都在等离子体表面无限薄的层间流动。所需磁场 $B_z$ 具有 $1/R$ 依赖关系,它对沿线圈和等离子体之间的任意闭合环路运用积分的安培定律给出:

$$\left. \begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= 2\pi R B_{\phi a} = \mu_0 I_c \\ B_{\phi a} &= \frac{\mu_0 I_c}{2\pi R} \end{aligned} \right\} \quad (11.60)$$

等离子体电流的作用通常是抗磁性的,即它在等离子体内部感应出的磁场部分抵消了外加磁场。在面电流模型中,通过安培定律可知,等离子体内部净的环向磁场  $B_{\phi i}$  也具有  $1/R$  依赖关系:

$$\left. \begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= 2\pi R B_{\phi i} = \mu_0 (I_c - I_p) \\ B_{\phi i} &= \frac{\mu_0 (I_c - I_p)}{2\pi R} \end{aligned} \right\} \quad (11.61)$$

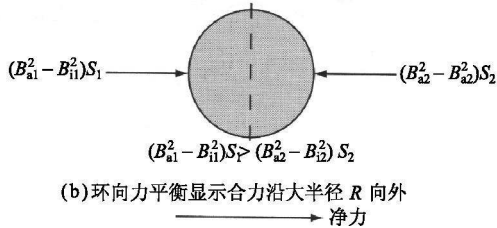
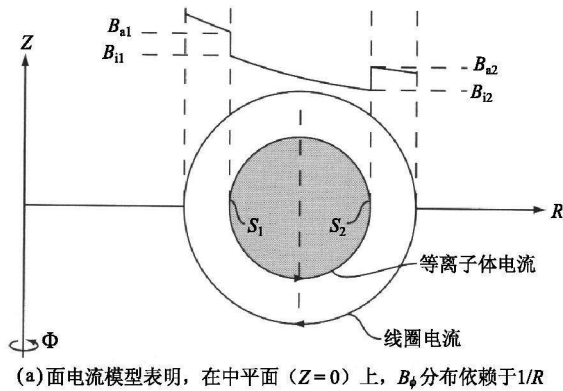


图 11.19  $1/R$  力定性分析

$1/R$  力可按如下方式来理解:将等离子体分成图 11.19(b) 所示的两半,作用在等离子体内侧半边上的力等价于净压强与面积的乘积:  $F_1 = [(B_{\phi a}^2 - B_{\phi i}^2)_{R=R_1} / 2\mu_0] S_1$ 。类似地,等离子体外侧的受力为:  $F_2 = [(B_{\phi a}^2 - B_{\phi i}^2)_{R=R_2} / 2\mu_0] S_2$ 。考虑到  $B$  力的二次方关系以及  $B$  的  $1/R$  效应,  $R_1$  处的磁场要比  $R_2$  处的大,因此  $F_1 > F_2$ 。合力沿大半径  $R$  向外。需要指出的是,这个结果由于抗磁性 ( $B_{\phi a}^2 > B_{\phi i}^2$ ) 而得到的。相反,在顺磁性 ( $B_{\phi a}^2 < B_{\phi i}^2$ ) 情形下,环向力沿大半径  $R$  向内。然而,如前所述,这个力自身不能达到环向力平衡,因为它阻碍了径向压强平衡的建立。

### 11.7.5 理想导体壁提供的回复力

前面的讨论显示,所有的环向等离子体都承受着沿大半径  $R$  向外的环向力。为了实现环向力平衡,我们需要一个沿大半径  $R$  向内的回复力。一般来说,对于存在环向电流(即  $Z$  箍缩和螺旋箍缩)的位形,可以通过两种方法产生回复力:理想导体壁和外加垂直场。但是,这些方法对  $\theta$  箍缩都无效。

本节介绍理想导体壁产生回复力的机理。为了便于理解回复力,考虑位于理想导体壁中心的环向等离子体,如图 11.20(a)所示。等离子体由于受到指向外的几种环向力的合力,很自然地会沿大半径  $R$  方向向外运动。与此同时,导体壁会相应的感应出涡流。这样位于等离子体和导体壁之间的极向磁通量就会被压缩,如图 11.20(b)所示。磁通的压缩意味着等离子体外侧的极向磁场增强。随着等离子体继续向外运动,它最终将会达到这样一个平衡点,在这一点处,等离子体外侧的磁张力大到足以抵消向外的环力、车胎力和  $1/R$  力。由此在该点处环向力平衡得以实现。

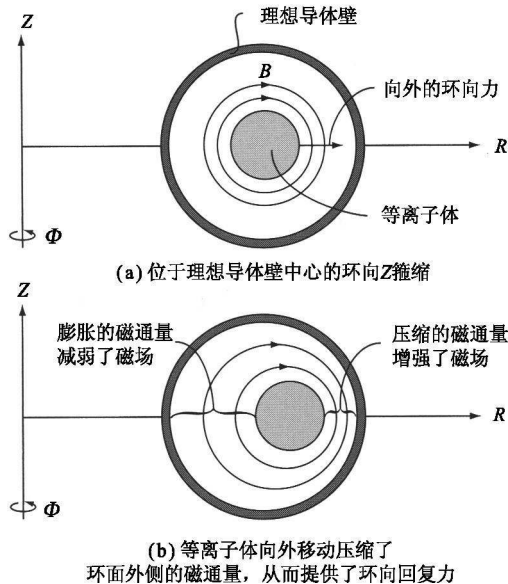


图 11.20

尽管在原理上很好理解,但是利用理想导体壁达到环向力平衡却不太实际。这是因为在实际情况下,聚变等离子体自身的高温,以及聚变反应释放的大量中子都不允许第一壁采用超导材料。如果第一壁的电导率有限,事实也肯定如此,那么随着等离子体向外移动,极向磁通量最终也将通过壁扩散开来。等离子体和壁之间不可能无限制地容纳不断增加的磁通量。

最后需要指出的是,即使是理想导体壁,这种机理也对  $\theta$  箍缩无效。这是因为在  $\theta$  箍缩中不存在极向磁场,如图 11.21 所示。这种位形仅存在环向磁场,且等离子体在向外移动的同时,也推开了移动路径上的磁场线。

### 11.7.6 垂直场提供的回复力

对于存在环向电流的位形,产生回复力更实际的方法是通过外加垂直场,如图 11.22 所示。只要正确选择垂直场的大小和符号,它就能提供一个向内的回复力来实现环向力平衡。

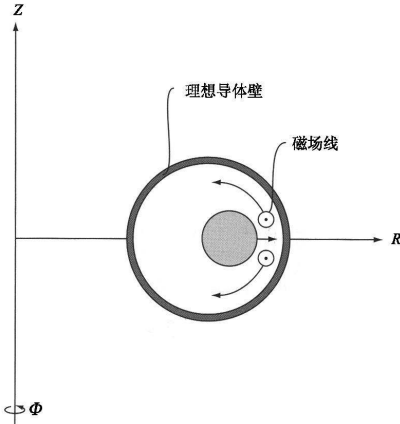


图 11.21 在环向  $\theta$  箍缩中,等离子体向外移动的同时也推开了移动路径上的磁场线,等离子体和导体壁之间不存在捕获的磁通量。

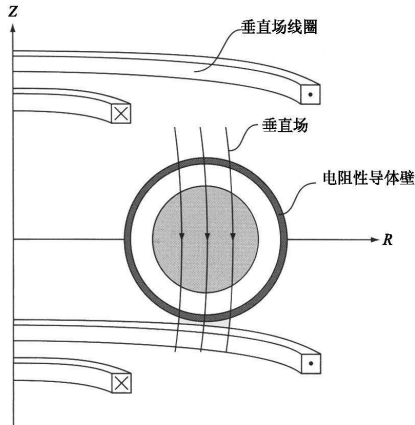


图 11.22 利用外加垂直场实现  $Z$  箍缩或者螺旋箍缩中的环向力平衡

图 11.23 有助于理解它的机理。图 11.23(a) 显示的是在  $Z = 0$  的中平面上等离子体自身的极向磁场的大小和方向。由于  $1/R$  效应,环外侧的极向磁场较小。

现在叠加一个方向如图 11.23(b) 中所示的单一的垂直场。注意到外加垂直场与环外侧场同向而与内侧场反向。适当调整垂直场大小,使得环内侧和外侧最终的极向场平衡,如图 11.23(c) 所示。这样的话,环向力平衡也相应实现。

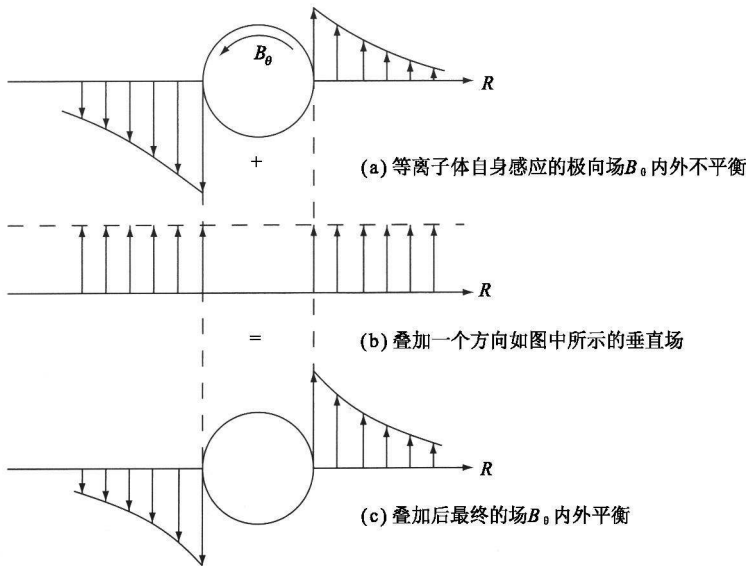


图 11.23 垂直场提供回复力的物理图像

在 Z 箍缩和螺旋箍缩中利用外加垂直场实现环向力平衡已经应用于很多实验。能实际应用的一个主要原因是垂直场线圈可以放置于第一壁外。第一壁能阻止射线对线圈的损伤。外加线圈也需要第一壁具有有限的电导率,只有这样,垂直场才能穿过第一壁而作用于等离子体。如果第一壁是理想导体,由于磁场无法作用于等离子体,外加线圈也无法发挥功用。

最后,需要指出的是,外加线圈对  $\theta$  箍缩也无效。这是因为  $\theta$  箍缩中的电流和垂直场都沿极向,磁场力  $\mathbf{J}_\theta \times \mathbf{B}_V$  没有  $\mathbf{e}_R$  分量,也就无法平衡环向力。

### 11.7.7 环向力平衡的解析推导

在前文定性分析的基础上,本节将通过简单计算定量分析各力对环向力平衡的贡献。主要目的是评估环向力平衡所必需的垂直场的大小,并证明在  $\theta$  箍缩中无法实现环向平衡。

计算所依据的基本思想是利用一般的磁流体力学平衡关系来估计作用在等离子体上的净的  $\mathbf{e}_R$  力。通过假定等离子体具有圆截面和大的环径比 ( $R_0/a \gg 1$ ), 我们可将计算简化。采用能提供对环效应适当精确描述的简单磁场模型,则分析可进一步简化。推导过程如下。

### 1. 模型

基本模型由这样一种环形等离子体组成,其等压面是一组逐层嵌套的准同轴的圆: $p = p(r)$ 。几何结构如图 11.24 所示。现在考虑磁场。在直圆柱情形下,作用在等离子体上的磁场的形式为: $\mathbf{B} = B_\theta(r) \mathbf{e}_\theta + B_z(r) \mathbf{e}_z$ 。在环面情形下,磁场需要进行环效应修正。前文指出,由于环效应,环向场随  $1/R$  变化。综合考虑到径向压强平衡和环向力平衡特征,环向场的好的近似为  $B_\theta \approx B_\theta(r) (R_0/R)$ 。

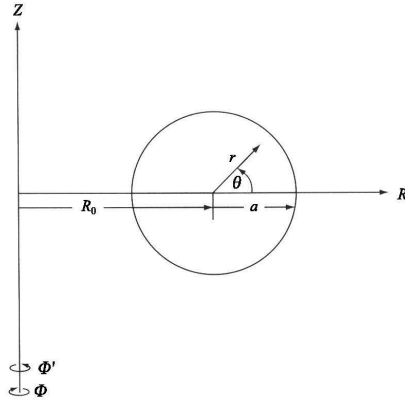


图 11.24 用以计算环向力平衡的环形几何结构

由于极向磁场也沿大半径方向递减,所以对极向场也可采用类似的假定: $B_\theta = B_\theta(r) (R_0/R)$ 。环形结构中的极向场形式实际上相当复杂(例如,它包括  $B_r$  分量以及两极逆磁分量)。然而,上述简化抓住了物理本质,而且对最终结果造成的误差很小。整个极向场还必须包含外加垂直场( $\mathbf{B}_V = B_V \mathbf{e}_z$ ,且  $B_V$  为常量)的贡献。这个场用来维持等离子体环向力平衡。

综上所述,用以决定环向力平衡的压强和磁场的简化形式如下:

$$\left. \begin{aligned} p &= p(r) \\ \mathbf{B} &= \frac{R_0}{R} B_\theta(r) \mathbf{e}_\theta + \frac{R_0}{R} B_\theta(r) \mathbf{e}_\theta + B_z \mathbf{e}_z \end{aligned} \right\} \quad (11.62)$$

将磁场表达式代入一般的磁流体力平衡方程。提取  $\mathbf{e}_R$  分量并对其进行整个等离子体-真空室体积上的空间积分,以确定环向力平衡的条件。对全空间积分比仅对等离子体体积积分更有益,因为这样可以免去进行准确计算等离子体表面极向场的麻烦。这个场比模型中的表达式要复杂得多。具体来说,对于环向力平衡,我们需要计算:

$$\int \mathbf{e}_R \cdot [\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p] d\mathbf{r} = 0 \quad (11.63)$$

为了估计被积函数,引入“准柱形”坐标系 $(r, \theta)$ 代替 $(R, Z)$ :

$$\left. \begin{aligned} R &= R_0 + r\cos\theta \\ Z &= r\sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (11.64)$$

经过简单计算,对简单模型我们有:

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = \frac{R_0}{R} \frac{\partial B_\phi}{\partial r} \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{R_0}{R} r B_\theta \right] \mathbf{e}_\phi \quad (11.65)$$

和

$$\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\cos\theta \left[ \frac{R_0^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{B_\phi^2}{2\mu_0} \right) + \frac{R_0}{R} \frac{B_\theta}{\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{R_0}{R} r B_\theta \right) \right] - \frac{B_\nu}{\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{R_0}{R} r B_\theta \right] \quad (11.66)$$

这个简易模型可用来计算环向力平衡中各部分的贡献。

## 2. 车胎力 $F_p$

车胎力源于式(11.63)中的压强项,表达式如下:

$$F_p = - \int (\mathbf{e}_R \cdot \nabla p) d\mathbf{r} = -2\pi \int \left[ \frac{\partial p}{\partial r} \cos\theta \right] R r dr d\theta \quad (11.67)$$

式中利用了轴对称环中的关系式:  $d\mathbf{r} = 2\pi R r dr d\theta$ 。接下来,利用  $R = R_0 + r\cos\theta$ ,并注意到  $\theta$  积分时,含  $R_0$  项积分为零。对剩余项简单积分可得车胎力表达式:

$$F_p = -2\pi^2 \int_0^a r^2 \frac{\partial p}{\partial r} dr = 2\pi^2 a^2 \langle p \rangle \quad (11.68)$$

由上式可知,车胎力恒为正,这意味着力的方向沿大半径  $R$  向外。

## 3. $1/R$ 力 $F_{B_\phi}$

$1/R$  力源于环向磁场。由环向力平衡方程中  $B_\phi$  项得到  $1/R$  力表达式如下:

$$F_{B_\phi} = - \frac{\pi R_0^2}{\mu_0} \int \left[ \frac{\partial B_\phi^2}{\partial r} \right] \frac{\cos\theta}{R} r dr d\theta \quad (11.69)$$

假设  $r/R_0 \ll 1$ , 然后按大环径比展开,我们很容易得到上述积分。具体展开式为:

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{R_0} \left[ 1 - \frac{r}{R_0} \cos\theta \right] \quad (11.70)$$

通过积分得到  $1/R$  力表达式如下:

$$F_{B_\phi} = \frac{\pi^2}{\mu_0} \int_0^a r^2 \frac{\partial B_\phi^2}{\partial r} dr = 2\pi^2 a^2 \left[ \frac{B_{\phi a}^2}{2\mu_0} - \frac{\langle B_\phi^2 \rangle}{2\mu_0} \right] \quad (11.71)$$

其中,  $B_{\phi a}$  为  $R = R_0$  处(此处没有等离子体)的外加环向场。与定量分析的结论一致,当环向场是逆磁的,即  $B_{\phi a}^2 > \langle B_\phi^2 \rangle$  时,  $1/R$  力方向沿大半径  $R$  向外(即是正的);当环向场是顺磁性时,  $1/R$  力方向沿大半径  $R$  向内。

#### 4. 环力 $F_1$

环力是由环向力平衡方程中与极向场  $B_\theta$  平方相关项引起的。 $F_1$  表达式为:

$$F_1 = -\frac{2\pi R_0}{\mu_0} \int B_\theta \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{R_0}{R} r B_\theta \right] \cos\theta dr d\theta \quad (11.72)$$

和前面的力一样,先按大半径比展开,再对  $\theta$  积分。经过简单计算可得:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{2\pi^2}{\mu_0} \int_0^\infty B_\theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_\theta) dr = \frac{\pi^2}{\mu_0} \left[ r^2 B_\theta^2 \Big|_\infty + 2 \int_0^\infty r B_\theta^2 dr \right] \\ &= \frac{\pi^2 a^2}{\mu_0} \left[ B_{\theta a}^2 + \frac{2}{a^2} \int_0^\infty r B_\theta^2 dr \right] \end{aligned} \quad (11.73)$$

对于约束在  $r < a$  内的电流,上式利用了关系式:  $r B_\theta \Big|_\infty = \mu_0 I / 2\pi = \alpha B_{\theta a}$ 。对  $r$  的积分稍微复杂些。这是因为虽然假定等离子体电流密度在  $r = a$  为零,但是对于  $r > a$  部分,仍然存在正比于  $I/r$  的真空极向磁场。这将使  $r \rightarrow \infty$  时积分出现对数发散。实际上,这个积分是有限的,因为环电流周围真空区域储存的磁场能是有限的。因此,为了得到正确的积分结果,用  $r \rightarrow R_0$  替代  $r \rightarrow \infty$  即可。然而,在这种情况下,按大半径比展开不再适用。

通过引入与环向等离子体电流相关的宏观电路自感,再利用静磁场理论的已知结果,我们就可以绕过这个困难。我们知道,自感的定义为:

$$\frac{1}{2} L I^2 \equiv \int \frac{B^2}{2\mu_0} dr \quad (11.74)$$

为方便起见,将这个积分拆分为两部分:等离子体所含的内电感和周围真空的外电感。等离子体的内电感定义为:

$$\frac{1}{2} L_i I^2 = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dr = 4\pi^2 R_0 \int_0^a \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} r dr \quad (11.75)$$

类似地,外电感定义为:

$$\frac{1}{2} L_e I^2 = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dr = 4\pi^2 R_0 \int_a^\infty \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} r dr \quad (11.76)$$



在聚变研究中,我们更经常使用的是单位长度上无量纲的归一化电感而不是实际电感本身。前者的定义为  $l \equiv (L/2\pi R_0)/(\mu_0/4\pi) = 2L/\mu_0 R_0$ 。

将上述定义代入式(11.73),最终得到:

$$F_l = 2\pi^2 a^2 (l_i + l_e + 1) \frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0} \quad (11.77)$$

对于典型等离子体,  $l_i \leq 1/2$ , 具体数值取决于等离子体中电流密度的实际分布。 $l_e$  的值需要经过经典静磁学的冗长计算方可确定。不过结果已知, 为  $l_e = 2\ln(8R_0/a) - 4 \sim 2.4$ 。

作为参考,我们有必要指出,在大环径比极限情形下,环力可以精确地计算出来。尽管计算过程也很复杂。然而,大环径比极限下的精确结果也仅仅是对上文中的简单的值略加微调。后文中我们将用到下面给出的更精确的关系式:

$$\begin{aligned} F_l &= \frac{I^2}{2} \frac{\partial}{\partial R_0} (L_i + L_e) \\ &= 2\pi^2 a^2 \left[ \frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0} \right] \frac{\partial}{\partial R_0} [R_0 (l_i + l_e)] \\ &= 2\pi^2 a^2 (l_i + l_e + 2) \frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0} \end{aligned} \quad (11.78)$$

最后,需要注意的是,  $F_l > 0$  意味着环力方向沿大半径  $R$  向外。

### 5. 垂直场力 $F_v$

最后我们来计算由垂直场引起的力。相关表达式为:

$$F_v = - \frac{2\pi R_0 B_v}{\mu_0} \int R \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r B_\theta}{R} \right] dr d\theta \quad (11.79)$$

引入大环径比展开,并对  $\theta$  积分,式(11.79)的主要贡献项可简化为:

$$F_v = - \frac{4\pi^2 R_0 B_v}{\mu_0} (r B_\theta) \Big|_{r \rightarrow \infty} \quad (11.80)$$

因为当  $r \rightarrow \infty$  时,  $B_\theta \sim I/r$ , 于是表达式改写为:

$$F_v = - 2\pi^2 a^2 \left[ \frac{2R_0 B_v B_{\theta a}}{\alpha \mu_0} \right] = - B_v I (2\pi R_0) \quad (11.81)$$

这第二种表达式表示的是我们熟悉的结果:长为  $2\pi R_0$ 、载流  $I$  的“直导线”在均匀磁场  $B_v$  中受到的力,即长度乘以电流乘以磁场。注意,如果电流和磁场都取正的,则垂直场产生的力是负的(即方向向内)。

## 6. 环向力平衡所需的垂直场

通过合并各种力,可以很方便地计算出环向力平衡所需的垂直场:

$$\frac{B_v}{B_{\theta a}} = \frac{1}{4} \frac{a}{R_0} \left[ \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_{\theta a}^2} + \frac{B_{\phi a}^2 - \langle B_{\phi}^2 \rangle}{B_{\theta a}^2} + l_i + l_e + 2 \right] \quad (11.82)$$

式(11.82)提供了一种物理直观理解。这个相对简单的公式最先是由沙夫拉诺夫推导出来的,它为早期托卡马克实验中的垂直场电路设计提供了非常有用的指导。从那以后,人们已开发了包含有限环效应和非圆截面效应的高级数值代码。这些代码已成为电流实验设计的基础。但是,简易模型所描述的力仍被用来表示对环向力平衡的基本贡献。

从聚变堆的平衡  $\beta$  极限方面来看,按照式(11.82),似乎不存在此类极限。因为随着压强的增加,只需相应增加垂直场即可维持平衡。但事实证明,对于确定的位形,这个结论是错误的。这个问题很微妙,而且与稳定性考虑所设定的额外平衡限定条件有关。这些方面,包括平衡  $\beta$  极限,将在第13章中讨论。

## 7. 为什么 $\theta$ 箍缩无法在环形条件下实现

可以直接证明环形  $\theta$  箍缩平衡是不存在的。证据来自于对  $B_{\theta a} = 0$  的情形下(相当于纯  $\theta$  箍缩)要求同时满足径向压强平衡和环向力平衡条件的检验。这些关系式可简化为:

$$\left. \begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} [B_{\phi a}^2 - \langle B_{\phi}^2 \rangle] \text{ 径向压强平衡} \\ \langle p \rangle &= -\frac{1}{2\mu_0} [B_{\phi a}^2 - \langle B_{\phi}^2 \rangle] \text{ 环向力平衡} \end{aligned} \right\} \quad (11.83)$$

很明显,唯一可能的结果就是  $\langle p \rangle = 0$ 。

### 11.7.8 环向力平衡的单粒子图像

前面的讨论说明了如何利用单流体磁流体力学模型来计算  $Z$  箍缩或者螺旋箍缩中的环向力平衡,以及为什么在  $\theta$  箍缩中无法实现这个平衡等问题。本节通过环向力平衡的单粒子导心图像来进一步展现其中的物理直观。特别地,这种处理将说明出现在  $\theta$  箍缩中的困难,以及如果通过增加环向电流来解决这些困难。

#### 1. 环向 $\theta$ 箍缩

首先考虑单纯的环向  $\theta$  箍缩。为了简单起见,假定所研究的等离子体是低  $\beta$  等离子体,在此情形下,磁场近似为  $\mathbf{B} = B_0 (R_0/R) \mathbf{e}_{\phi}$ 。几何图像如图 11.25 (a) 所示。根据导心运动,并注意到环向场的  $1/R$  依赖性产生如下的曲率漂移和  $\nabla B$  漂移:

$$\mathbf{v}_g = \mp \frac{1}{\omega_c} \left[ v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right] \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B} = \frac{q}{m R_0 B_0} \left[ v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right] \mathbf{e}_z \quad (11.84)$$

这使得离子垂直向上漂移而电子垂直向下漂移,如图 11.25(b)所示。

导心的这些漂移导致正电荷在等离子体上部积累而负电荷在等离子体下部积累。电荷分离反过来产生一个穿越等离子体柱方向的垂直向下的电场,如图 11.25(c)所示。此时等离子体中的每一个带电粒子都将受到外加环向场和导心感生的电场共同作用。由于  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  相互垂直,因此电子和离子都会发生  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移。这种漂移对所有粒子都是一样的,且方向沿大半径  $R$  向外,如图 11.25(d)所示。结果,整个等离子体像单流体一样沿着大半径  $R$  向第一壁移动。因此,在单纯的环向  $\theta$  箍缩中无法实现环向力平衡。

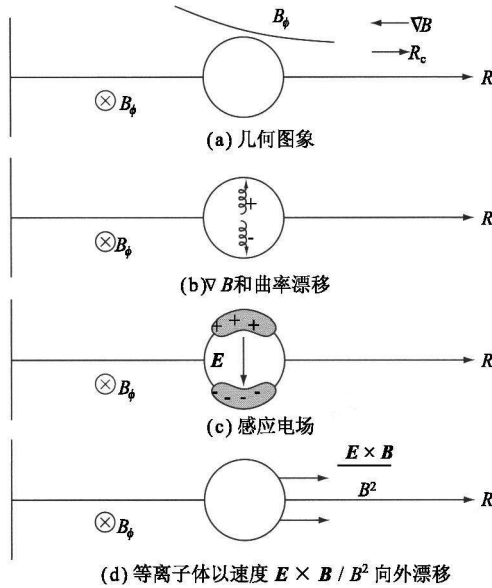


图 11.25  $\theta$  箍缩无法实现环向力平衡

## 2. Z 箍缩和螺旋箍缩

在轴对称环形系统中, $\theta$  箍缩中遇到的困难可以通过外加一个垂直场来克服,例如,在 Z 箍缩和螺旋箍缩中的情形就是这样。对于一般的螺旋箍缩情形, $B_\theta$  和  $B_z$  的结合产生所谓旋转变换的磁场性质。正是这一性质避免了纯粹  $\theta$  箍缩中出现的电荷在等离子体上下端累积的情况。

要理解这是如何实现的,我们首先必须弄懂旋转变换。旋转变换性质与下述事实有关:在约束平衡中,环向场和极向场的结合使得磁场线缠绕在等离子体周围,形如理发店门口立杆上的彩带。等离子体极向截面如图 11.26 所示,磁场线沿环向每转过一周就会落到圆周的不同极向位置上。经过沿环向的许许多多转动后,磁场线在极向上的落点就会形成磁通面的形状(即图 11.26 中虚线所示)。现在,若

记磁场线在第  $j$  次到第  $j+1$  次环向转动过程中在极向上的夹角为  $\Delta\theta_j$ , 则我们可将旋转变换角  $\iota$  定义为无穷多次环向转动后这些极向夹角  $\Delta\theta_j$  的平均值:  $\iota = \langle \Delta\theta \rangle$ 。

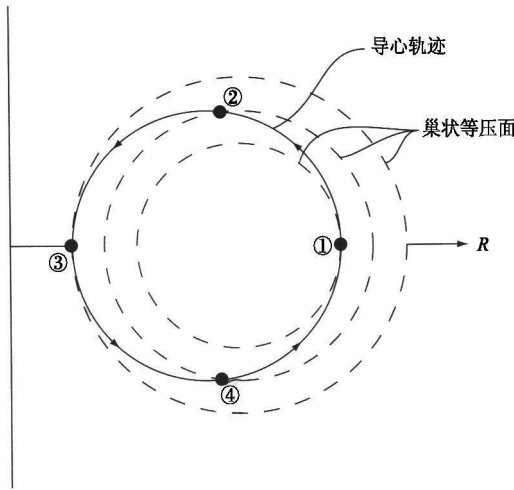


图 11.26 通过旋转变换平均掉垂直漂移

假定存在旋转变换, 那它对解决环向力平衡有什么帮助呢? 答案是, 当粒子沿磁场线以速度  $v$  自由运动时, 旋转变换平均掉了垂直  $\nabla B$  漂移和曲率漂移。不再出现电荷累积, 因此也就不再发生径向向外的  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移。即使粒子仍会有垂直  $\nabla B$  漂移和曲率漂移, 但这个平均过程依然有效。看上去有些荒谬的结论是: 总向上漂移的粒子却逃不出等离子体。

平均效应的物理机制如图 11.26 所示。图中显示了三个巢状等压面。假设带电粒子从最内磁面点 1 位置出发。由于它有  $v_{\parallel}$  的初速度, 因此将沿着环面运动。如果没有垂直漂移, 它将被约束在这个磁面上。然而, 如果粒子存在垂直向上的漂移, 其导心将偏离该磁面, 并在极向运动  $\pi/2$  后到达位于中间磁面的点 2 位置处。粒子沿极向再转过  $\pi/2$  时, 将运动到偏离原始磁面更远的外磁面的点 3 位置处。漂移过程在极向转过第三个  $\pi/2$  时继续存在, 但此时向上漂移却使得粒子回到中间磁面上, 到达点 4 位置处。最后, 在极向转过第四个  $\pi/2$  时, 粒子导心的向上漂移使得粒子回到最初的出发点。这一过程不断重复, 我们可以看到, 在等离子体上部或者下部都没有电荷累积。

由此得到如下结论: 尽管带电粒子总是向上漂移, 但旋转变换的存在却使得粒子在前半个周期内漂离等离子体中心, 在后半周期内漂向等离子体中心。

### 11.7.9 旋转变换角的计算

上述讨论显示, 旋转变换是用于约束聚变等离子体的磁场位形的重要基本特

征。本节介绍在两种情况下如何计算旋转变换角：一种是长为  $2\pi R_0$  的直圆柱，另一种是轴对称环面。旋转变换的知识对于理解平衡和稳定  $\beta$  极限也很重要。

### 1. 直圆柱中的旋转变换

为了估计旋转变换角，我们必须能计算缠绕在等离子体磁面上的磁场线的轨迹。在直圆柱情形下，描述平行于已知磁场线的几何线坐标的方程是：

$$\left. \begin{aligned} dr/dz &= B_r/B_z & r(z=0) &= r_0 \\ d\theta/dz &= B_\theta/rB_z & \theta(z=0) &= \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (11.85)$$

在直线螺旋箍缩中， $B_r = 0$ ， $B_\theta = B_\theta(r)$  和  $B_z = B_z(r)$ 。由于轴对称，轨迹方程经过简单积分可得：

$$\left. \begin{aligned} r(z) &= r_0 \\ \theta(z) &= \theta_0 + \left[ \frac{B_\theta(r_0)}{r_0 B_z(r_0)} \right] z \end{aligned} \right\} \quad (11.86)$$

从上式看出，磁场线沿着螺旋轨迹环绕于磁面上。

旋转变换角的定义是绕环向旋转一周时极向角度变化  $\Delta\theta$  的平均值。对于直圆柱，由于对称性，我们很容易进行这种平均处理。任意给定磁场线绕环向一周引起的角度  $\Delta\theta$  的变化和任意其他磁场线绕环向旋转一周引起的角度  $\Delta\theta$  的变化完全相同。因此，等价于周长为  $2\pi R_0$  的环面的直圆柱的旋转变换角为  $\iota(r_0) \equiv \Delta\theta = \theta(z + 2\pi R_0) - \theta(z)$ ，或写成（去掉下标 0）：

$$\tau(r) = 2\pi \frac{R_0 B_\theta(r)}{r B_z(r)} \quad (11.87)$$

$\iota(r)$  分布是区分不同磁约束聚变位形的关键特征之一。第 13 章将介绍一些具体事例。

还应当指出，对于大多数轴对称环形位形下的聚变研究来说，通常引入所谓的安全因子  $q(r)$  来代替  $\iota(r)$ 。二者呈如下的反比关系：

$$q(r) \equiv \frac{2\pi}{\iota(r)} = \frac{r B_z(r)}{R_0 B_\theta(r)} \quad (11.88)$$

使用“安全”一词与磁流体力学稳定性有关，高  $q(r)$  的位形趋于更稳定（即更安全）。安全因子的影响将在第 13 章讨论磁流体力学稳定性时研究。

### 2. 轴对称环面上的旋转变换

对轴对称环面的旋转变换的估计和直圆柱中的概念类似，但有两点微小差别：第一，在环面上，磁场是  $r$  和  $\theta$  的函数，这增加了磁场线轨迹推导的技术难度；第二，

计算  $\iota$  的平均过程不再像直圆柱情形下的那样简单,原因是绕环向一周引起的角度  $\Delta\theta$  的变化对磁场线的极向初始位置的依赖关系不同。例如,始于环面外侧 ( $\theta_0 = 0$ ) 的磁场线绕环向一周引起的角度  $\Delta\theta$  的变化不同于始于环面内侧 ( $\theta_0 = \pi$ ) 的磁场线绕环向一周引起的角度  $\Delta\theta$  的变化。下面的推导克服了这些困难。尽管最终结果是必须用数值求解的积分形式,但采用基于环向力平衡方程的简单模型,可以得到解析解。

推导由环面上磁场线的轨迹方程开始:

$$\left. \begin{aligned} dr/d\phi &= RB_r(r, \theta)/B_\phi(r, \theta) & r(\phi = 0) &= r_0 \\ d\theta/d\phi &= RB_\theta(r, \theta)/rB_\phi(r, \theta) & \theta(\phi = 0) &= \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (11.89)$$

式中,  $R = R_0 + r\cos\theta$ 。假定磁场各分量  $B_r(r, \theta)$ 、 $B_\theta(r, \theta)$  和  $B_\phi(r, \theta)$  已分别从磁流体力学平衡条件下独立解得(一般都是数值解)。在这个假定基础上,式(11.89)变成耦合的非线性常微分方程组,原则上很容易得到其数值解。但即便如此,事实上也没有必要解这些方程。对估计旋转变换来说,我们只需要知道磁面的形状,通常它是非圆的。有很多方法可以用来确定磁面的形状。最直接的方法是将上述两方程相除:

$$dr/d\theta = rB_r(r, \theta)/B_\theta(r, \theta) \quad r(\theta_0) = r_0 \quad (11.90)$$

这也是一个很容易数值求解的方程。此后,假定式(11.90)的解为  $r = r(\theta; r_0, \theta_0)$ 。

下一步是计算  $\Delta\theta$  并取其对环向转动次数的平均。最有效的做法是计算磁场线沿极向转动一周 ( $\delta\theta = 2\pi$ ) 时环向转过的角度大小 ( $\delta\phi = 2\pi$ )。由于轴对称性,磁场线的这种运动形式无限重复,因此简单利用比例关系就可以确定  $\iota$ 。由式(11.89)易得角  $\delta\phi$ :

$$\delta\phi = \int_0^{2\pi} \frac{rB_\phi}{RB_\theta} d\theta \quad (11.91)$$

注意,式(11.91)是对磁面的积分,也就是说,被积函数  $I(r, \theta) = I(r(\theta), \theta)$ 。看清  $\delta\phi = \delta\phi(r_0)$  也同样重要。由于对称性以及沿极向积分一周,因此它不是  $\theta_0$  的函数。这样,通常令  $\theta_0 = 0$  不会带来任何损失。

通过采用简单比例关系,旋转变换现在表示成:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\phi} = \frac{2\pi}{\delta\phi} = \frac{\langle \Delta\theta \rangle}{2\pi} \quad (11.92)$$

式中,  $\langle \Delta\theta \rangle$  是环向旋转一周  $\Delta\phi = 2\pi$  时极向平均旋转角:  $\langle \Delta\theta \rangle \equiv \iota$ 。 $\iota$  和  $q$  的表达式分别为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{v}(r_0)}{2\pi} &= \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{rB_\phi}{RB_\theta} d\theta \right]^{-1} \\ q(r_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{rB_\phi}{RB_\theta} d\theta \end{aligned} \right\} \quad (11.93)$$

式(11.93)中,  $r_0$  可以作为识别计算磁面上旋转变换的标签。具体来说, 它对应于小截面上  $\theta_0 = 0$  的中平面外侧的磁面半径。

一般来说, 旋转变换角必须通过数值计算来得到, 我们可以利用基于环向力平衡方程的简单模型场来演示这一过程。由于模型场有  $B_r = 0$ , 这意味着磁面方程的解就是  $r = r_0$ 。磁面是圆的。于是安全因子可以表示为:

$$\begin{aligned} q(r_0) &= \frac{1}{2\pi} \frac{r_0 B_\phi(r_0)}{B_\theta(r_0)} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R_0 + r_0 \cos\theta} \\ &= \frac{r_0 B_\phi(r_0)}{R_0 B_\theta(r_0)} \frac{1}{(1 - r_0^2/R_0^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (11.94)$$

这个表达形式类似于直圆柱中的表达式, 但对环形效应进行了小的修正。在第13章讨论聚变位形时, 我们将说明, 当压强增加时, 对于  $q(r_0)$  必须做很大的环向修正。在这种情况下, 简单模型场不再能准确表达出其中的物理平衡。

### 11.7.10 没有环向电流时位形的环向力平衡

到目前为止, 分析主要集中于轴对称的环形位形。参量均不随环向角  $\phi$  变化。这些位形需要环向电流和外加垂直场来维持环向力平衡。从聚变堆的观点来看, 引入环向电流增加了设计的复杂性。由于稳态的环向直流电流无法由变压器提供, 因此需要采用某种无感应电流驱动来提供。通常这会涉及复杂的物理过程和大量昂贵的辅助电流驱动设备。

显然, 我们很希望能够找到某种无需环向直流电流来维持环向力平衡的环形磁位形。这类装置确实存在, 这就是“仿星器”。世界上作为聚变项目进行研究的仿星器有几种不同类型, 它们都有一个共同特征, 就是所有的仿星器都是三维环状螺旋结构, 因此需要通过外加螺旋磁场来实现环向力平衡所需的旋转变换。图 11.27 展示了三种仿星器的简单示意图。尽管原理上等离子体可以携带净直流电流, 但是对于仿星器平衡这不是必需的。

可以预料, 三维位形的分析一般需要大规模分析手段, 这已超出了本书讨论的范围。然而, 通过某些简单的螺旋位形的旋转变换计算, 我们可对其特点略知一二。下面我们将说明, 环向净电流为零的螺旋位形能够通过外部来产生旋转变换, 尽管乍一看来, 由于螺旋对称性, 这种变换平均值可能为零。

计算的关键问题是将对磁面形状的螺旋调整效应包括进来。正如前文指出的,

由于对称性,螺旋场中对旋转变换的主要贡献项在整个螺旋周期内平均确实为零。然而,考虑到磁面螺旋修正的更仔细的高阶计算显示,这种平均是不完全的,仍然存在一个小的净旋转变换,并最终导致环向力平衡。推导过程如下。

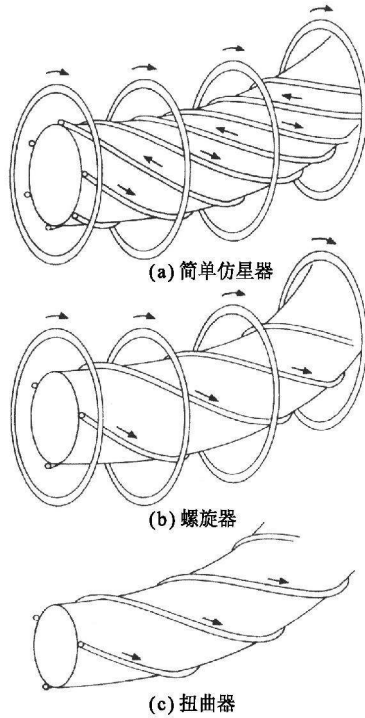


图 11.27 三种仿星器示意图

### 1. 模型磁场

旋转变换的存在不依赖于环形效应或者有限压强。即使在有真空磁场的直螺旋系统中也能产生旋转变换。因此模型磁场由两部分组成:均匀的轴向(即环向)磁场  $B_z = B_0 = \text{常数}$ ,另加真空螺旋场  $\mathbf{B}_h$ 。由于对真空场有  $\nabla \times \mathbf{B}_h = 0$ ,因此可以用势函数来替代:  $\mathbf{B}_h = \nabla V$ ,且  $V$  满足  $\nabla^2 V = 0$ 。假定螺旋场具有螺旋波长  $\lambda_h$  和单螺旋多极性  $l$ 。这意味着  $V(r, \theta, z) = V(r) \sin(l\theta - hz)$ , 式中  $\lambda_h = 2\pi/h$ 。拉普拉斯方程的解为:

$$V(r) = CI_l(hr) \approx Cr^l \quad (11.95)$$

当  $ha \ll 1$  时,修正的贝塞尔函数近似有效,这使得代数的复杂性大大简化,尽管并非必要。常数  $C$  可通过假定等离子体边界处极向螺旋场的幅度为  $B_h$  来确定。由此可得:  $V(r) = (aB_h/l)(r/a)^l$ 。因此模型场可以写成:



$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{B}_h \quad (11.96)$$

式中,

$$\mathbf{B}_h = \nabla V = B_h \left[ \frac{r}{a} \right]^{l-1} \left[ \mathbf{e}_r \sin \zeta + \mathbf{e}_\theta \cos \zeta - \mathbf{e}_z h a \left[ \frac{r}{a} \right] \cos \zeta \right] \quad (11.97)$$

式中,  $\zeta = l\theta - hz$ 。注意, 对于等价的环面, 有  $\zeta = l\theta - N\phi$ , 且  $z = R_0\phi$ 。因此,  $N = hR_0$  等于环方向螺旋周期的数目。为了简化旋转变换角的计算, 假定  $N \ll 1$ , 即环向上有很多螺旋周期。

现在我们来计算每个螺旋周期的旋转变换角, 然后乘以  $N$ , 得到整个变换角。假定螺旋场比起环向场要小得多, 即  $B_h \ll B_0$ , 由此分析可以大大简化。在此假设条件下将描述磁场线的轨迹坐标展开:

$$\left. \begin{aligned} r(z) &= r_0 + r_1(z) + r_2(z) + \cdots \\ \theta(z) &= \theta_0 + \theta_1(z) + \theta_2(z) + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (11.98)$$

为方便起见, 在此将轨迹方程复述如下:

$$\left. \begin{aligned} dr/dz &= B_r/B_z & r(z=0) &= r_0 \\ d\theta/dz &= B_\theta/rB_z & \theta(z=0) &= \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (11.99)$$

解这个轨迹方程到包含二阶项即可确定旋转变换角。

## 2. 一阶解

一阶非平凡的轨迹方程组以一阶形式出现:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr_1}{dz} &= \frac{B_{hr}(r_0, \theta_0, z)}{B_0} & r_1(z=0) &= 0 \\ \frac{d\theta_1}{dz} &= \frac{B_{h\theta}(r_0, \theta_0, z)}{r_0 B_0} & \theta_1(z=0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.100)$$

这个方程很容易积分, 得到

$$\left. \begin{aligned} r_1(z) &= \frac{B_h}{hB_0} \left[ \frac{r_0}{\alpha} \right]^{l-1} (\cos \zeta - \cos \zeta_0) \\ \theta_1(z) &= -\frac{B_h}{hr_0 B_0} \left[ \frac{r_0}{\alpha} \right]^{l-1} (\sin \zeta - \sin \zeta_0) \end{aligned} \right\} \quad (11.101)$$

式中,  $\zeta = l\theta_0 - hz$ ;  $\zeta_0 = l\theta_0$ 。物理上, 这个解相当于对磁面的小的螺旋修正。注意到  $\theta_1$  是  $z$  的周期函数。特别地,  $\theta_1(2\pi/h) - \theta_1(0) = 0$ 。也就是说, 由螺旋场造成对  $\theta$  的一阶非零贡献项的平均值为零, 即对旋转变换没有贡献。

## 3. 二阶解

通过简单的泰勒展开可以得到轨迹的二阶方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr_2}{dz} &= \frac{1}{B_0} \left[ \frac{\partial B_{hr}}{\partial r_0} r_1 + \frac{\partial B_{hr}}{\partial \theta_0} \theta_1 - \frac{B_{hr} B_{hz}}{B_0} \right] & r_2(0) &= 0 \\ \frac{d\theta_2}{dz} &= \frac{1}{r_0 B_0} \left[ \frac{\partial B_{h\theta}}{\partial r_0} r_1 + \frac{\partial B_{h\theta}}{\partial \theta_0} \theta_1 - B_{\theta 1} \frac{r_1}{r_0} - \frac{B_{h\theta} B_{hz}}{B_0} \right] & \theta_2(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.102)$$

事实上,要得到单个螺旋周期的旋转变换角,并不需要得到这些方程的完全解。因为单个螺旋周期的变换角定义为  $\delta \iota = \theta(2\pi/h) - \theta(0) = \theta_2(2\pi/h) - \theta_2(0)$ ,所需条件即为:

$$\delta \iota = \int_0^{2\pi/h} \frac{d\theta_2}{dz} dz = \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{dz} d\zeta \quad (11.103)$$

利用一阶方程的解,经过简单而稍显枯燥的计算后发现,  $d\theta_2/dz$  对  $\zeta$  平均的非零结果部分为:

$$\frac{d\theta_2}{dz} = \frac{1}{h a^2} \frac{B_h^2}{B_0^2} \left[ \frac{r_0}{a} \right]^{2l-4} [ (l-2 + h^2 r_0^2) \cos^2 \zeta + l \sin^2 \zeta ] \quad (11.104)$$

于是进一步得到:

$$\delta \iota(r_0) = \frac{\pi}{h^2 a^2} \frac{B_h^2}{B_0^2} [2(l-1) + h^2 r_0^2] \left[ \frac{r_0}{a} \right]^{l-2} \approx 2\pi \frac{l-1}{h^2 a^2} \frac{B_h^2}{B_0^2} \left[ \frac{r_0}{a} \right]^{l-2} \quad (11.105)$$

在第二个更简单的形式中,我们用了假定  $h^2 r_0^2 \ll 1$ 。

最终,整个变换角等于单个螺旋周期上的变换角乘以周期数:  $\iota = N \delta \iota$ 。所要得到的关系式形式为:

$$\iota(r_0) = 2\pi \frac{l-1}{N} \left[ \frac{R_0 B_h}{a B_0} \right]^2 \left[ \frac{r_0}{a} \right]^{2l-4} \quad (11.106)$$

注意,对于  $l=2$  的仿星器,变换角的空间分布是均匀的。事实上,当考虑到  $h^2 r_0^2$  修正时,变换角随半径增加得较慢。对于  $l \geq 3$ ,变换角在轴上为零,并随半径单调增加。对于  $l=1$ ,变换角似乎为零,但更仔细的计算显示,存在幅度减弱  $h^2 a^2$  倍的有限变换角。

主要结论是,单纯环向场与附加的螺旋场的组合产生外部旋转变换。这种旋转变换能够提供环向力平衡,而无需净的环向直流向流。这正是为什么尽管仿星器总技术上非常复杂,但仍受到聚变界青睐的主要原因之一。

## 11.8 本章总结

聚变等离子体的宏观平衡由磁流体力学模型描述。一般来说,我们感兴趣的环形位形平衡可用一系列巢状、具有类圆截面的环向等压面来描述。磁场线和电流密度线都在这些等压面上。

要实现环向平衡,需要解决两个性质不同的问题。第一个问题涉及径向压强平衡,这是由于等离子体热的芯部趋向于沿小半径  $r$  向外扩张。 $\theta$  箍缩、 $Z$  箍缩和二者结合的螺旋箍缩都能在径向压强平衡的条件下约束高比压等离子体。

第二个问题与环向力平衡有关。这是因为环效应导致一个使等离子体沿大半径  $R$  方向向外扩张的力。单纯  $\theta$  箍缩无法抵消这个力,因此无法实现环向平衡。在  $Z$  箍缩或者螺旋箍缩中,由于存在净的环向直流电流,它们产生的旋转变换平均掉了垂直  $\nabla B$  漂移和曲率漂移,从而能够实现环向平衡。从流体观点看,平衡这个力需要理想导体壁或者外加垂直场。一旦达到平衡,压强面和磁面就会形成闭合曲面,并可以通过旋转变换来抵消垂直漂移。

最后,三维仿星器位形也可以实现环向力平衡。仿星器磁场位形是由单纯的环向场叠加螺旋场而实现的。螺旋场产生外部生成的旋转变换,并由此最终实现环向力平衡。虽然这种几何结构比二维轴对称系统复杂得多,但是仿星器不需要净的直流电流,这从聚变堆方面来看具有明显优势。

## 参考书目

磁流体力学模型描述维持等离子体宏观平衡的基本力。几乎所有的等离子体物理学教材都包含描述磁流体力学平衡和稳定性的部分。下面列出的参考书目有的几乎完全介绍磁流体力学,有的至少用很多篇幅来介绍这个主题。

- Bateman, G. (1978). *MHD Instabilities*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- Biskamp, D. (1993). *Nonlinear Magnetohydrodynamics*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Freidberg, J. P. (1987). *Ideal Magnetohydrodynamics*. New York: Plenum Press.
- Goedbloed, H. and Poedts, S. (2004). *Principles of Magnetohydrodynamics*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Lifschitz, A. E. (1989). *Magnetohydrodynamics and Spectral Theory*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Shafranov, V. D. (1966). *Plasma Equilibrium in a Magnetic Field* (Leontovich, M. A., editor), Vol. 2. New York: Consultants Bureau.
- Solov'ev, L. S. and Shafranov, V. D. (1967). *Plasma Confinement in Closed Magnetic Systems* (Leontovich, M. A., editor), Vol. 5. New York: Consultants Bureau.
- Wesson, J. (2004). *Tokamaks*, third edn. Oxford: Oxford University Press.
- White, R. B. (2001). *Theory of Toroidally Confined Plasmas*. London: Imperial College Press.

## 习 题

11.1 考虑由固定的理想导体壁包围的等离子体,它的行为受电阻性磁流体力学方程限制。

① 通过估算  $dW/dt$  来推导体积分的能量平衡关系,其中,

$$W = \int \left[ \frac{\rho v^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{p}{\gamma - 1} \right] dr$$

② 等离子体螺旋性定义为  $K = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dr$ , 其中,  $\mathbf{A}$  是矢势;  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 。计算  $dK/dt$ , 并证明: 在理想磁流体力学极限(即  $\eta = 0$ )情形下,  $K$  是守恒量。

11.2 圆柱  $Z$  箍缩的分布满足关系式  $p(r) = (p_0/J_0^2)J^2(r)$ , 其中,  $p_0$  和  $J_0$  分别是轴上的压强和电流密度。假定  $J(a) = 0$ , 计算  $B_\theta(r)$  并给出  $\beta_0 = 2\mu_0 p_0 / B_0^2(a)$  的值。

11.3 考虑一维圆柱对称螺旋箍缩。电流密度分布的关系式通常可近似为  $J_\theta(r) = (\alpha/a)rJ_z(r)$ , 其中,  $\alpha < 1$ , 且是常量。假定  $J_z = K/(a^2 + r^2)^2$ 。如果等离子体中  $z$  方向上总电流为  $I$  且  $B_z(\infty) = 0$ , 试计算压强分布。等离子体分布于  $0 < r < \infty$  区间内。答案应为  $p = p(r, a, \alpha, I)$ 。估计  $B_z(0)$ 。

11.4 本题是关于如何在表面电流模型下处理  $\theta$  箍缩绝热压缩的问题。考虑图 11.28 所示的简单模型。图中,  $n_i, p_i, B_i, a_i$  和  $B_0$  表示已知的等离子体初态。  $r = b$  处的外加场从  $t = 0$  时初始值  $B_0$  绝热增加至  $\lambda B_0$ , 且  $\lambda > 1$ 。等离子体还满足绝热状态方程。

① 利用绝热守恒定律推导等离子体最终比压  $\beta_f$  和初始比压  $\beta_i$  间的数学表达式。答案应为  $F(\beta_f, \beta_i, \lambda, \gamma) = 0$ 。

② 当  $\beta_i = 0.5, \lambda = 2, \gamma = 5/3$  时, 解①中导出的方程。

③ 如果解题正确, 你会发现  $\beta_f < \beta_i$ 。解释为何尽管等离子体被压缩,  $\beta_f$  仍减小。

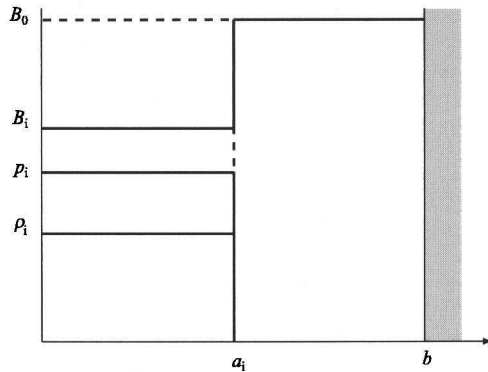


图 11.28

11.5 考虑长为  $2\pi R_0$  的无力 ( $p = 0$ ) 螺旋箍缩。用安全因子  $q(r)$  推导  $B_z$  的分布方程。计算当  $q(r) = q_0 = \text{常数}$ , 且  $B_z(0) = B_0$  时的  $B_z(r)$  和  $B_\theta(r)$ 。

11.6 本题的目的是计算由外场  $B_0$  实现直线  $\theta$  箍缩的  $B_z(r)$ 。然而, 这里的压强分布是以磁通  $\psi$

的函数形式给出而不是  $p(r)$ :  $p(\psi) = p_0 [1 - (\psi/\psi_a)^2]$ 。式中,  $p_0$  是磁轴处压强;  $\psi = rA_\theta$ ;  $A_\theta$  是矢势;  $\psi_a$  是等离子体边界  $r = a$  处的磁通。计算  $B_z(r)$  分布并得到  $\psi_a = \psi(\psi_a, B_0, p_0, a)$  的值。

**11.7** 考虑一维圆柱螺旋箍缩中的径向压强平衡。纵向电流为  $\mu_0 J_z(\psi) = -(\alpha^2/R_0 a^2)(\psi - \psi_a)$ , 式中极向磁通  $\psi$  定义为:  $B_\theta(r) = (1/R_0) d\psi/dr$ 。  $2\pi R_0$  是箍缩长度;  $a$  是小半径;  $\alpha$  是常量,  $\psi_a = \psi(a)$  是等离子体边界处的磁通。磁通是归一化的, 故有  $\psi(0) = 0$ 。

① 如果等离子体中总电流为  $I$ , 且假定  $J_z(a) = 0$ , 计算  $B_\theta(r)$ ,  $\alpha$ ,  $\psi_a$ 。

② 假定压强和纵向磁场间关系式为  $p(r) = p_0 [B_z^2(r) - B_z^2(a)] / [B_z^2(0) - B_z^2(a)]$ , 式中,  $p_0$  是轴处的压强。计算  $B_z(r)$ 。在特殊边界条件下,  $B_z(a)$  能否反号?

**11.8** 二维直线型等离子体具有椭圆截面, 且水平宽度为  $2a$ , 垂直高度为  $2\kappa a$ , 其中,  $\kappa$  为拉长比。等离子体被半径为  $r = 2\kappa b$  的闭合圆壁包围, 且  $b \approx a$ 。为简单计算, 假定“环向”场  $B_z = B_0 =$  常数。现在, 注意到  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  意味着等离子体中磁场可以写成  $\mathbf{B} = \nabla A \times \mathbf{e}_z + B_0 \mathbf{e}_z$ , 其中,  $A(r, \theta)$  是矢势。

① 利用磁流体力学平衡方程和麦克斯韦方程组证明  $p = p(A)$ , 且导出  $A$  所满足的偏微分方程。

② 假定  $\mu_0 p(A) = (C^2/2)(A_{\max}^2 - A^2)$ , 解有关  $A$  的方程, 其中,  $C$  和  $A_{\max}$  都是常数。假定  $C\kappa a \ll 1$  并作展开, 求方程的解析解。

③ 在壁表面上的磁测量显示  $B_\theta(\kappa a, \theta) = (\mu_0 I / 2\pi \kappa a)(1 + \alpha \cos 2\theta)$ , 式中,  $I$  和  $\alpha$  是测量常数。解壁与等离子体之间真空区域 ( $p = 0$ ) 上关于  $A$  的方程。在等离子体-真空交界处使解匹配, 进而推导  $\kappa = \kappa(\alpha)$  的表达式。

**11.9** 本题的目的是推导格拉德-沙夫拉诺夫方程, 它是描述环向对称位形 ( $Q(R, Z, \phi) \rightarrow Q(R, Z)$ ) 下磁流体力学平衡的著名偏微分方程。

① 利用  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  证明磁场可以写成磁通函数的表达式:  $\mathbf{B} = \nabla \psi \times \mathbf{e}_\phi / R + B_\phi(R, Z) \mathbf{e}_\phi$ 。

② 从安培定律导出  $\mu_0 J_\phi$  关于  $\psi$  的表达式。

③ 从动量方程出发证明  $p(R, Z) = p(\psi)$ , 其中,  $p(\psi)$  是任意函数。

④ 从动量方程出发证明  $B_\phi(R, Z) \rightarrow F(\psi)/R$ , 其中,  $F(\psi)$  是任意函数。

⑤ 从动量方程出发导出格拉德-沙夫拉诺夫方程:

$$R^2 \nabla \cdot (\nabla \psi / R^2) = -\mu_0 R^2 (dp/d\psi) - F(dF/d\psi)$$

**11.10** 证明: 在圆截面等离子体的大半径比极限下, 格拉德-沙夫拉诺夫方程可简化为一维径向压强平衡关系式。

# 第 12 章 磁流体力学——宏观稳定性

## 12.1 引言

磁流体力学第二个主要应用和宏观稳定性有关。首先,假设自洽的磁流体力学平衡能很好约束等离子体。稳定性问题是要问,当等离子体受到偏离平衡的初始扰动时,能否随时间演化回到原来的平衡位置。如果可以,或者起码可以在平衡位置附近振荡,那么我们就认为等离子体是稳定的;反之,如果小的初始扰动持续增长,并导致等离子体向远离平衡位置的方向运动,则我们认为等离子体是不稳定的。

对聚变反应堆来说,磁流体力学稳定性,特别是理想磁流体力学稳定性,是至关重要的。原因是理想磁流体力学不稳定性经常导致等离子体灾难性的损失。最严重的是等离子体快速、整体移向第一壁。对等离子体约束的破坏以及对第一壁的潜在损害已使聚变界达成共识:聚变反应堆必须避免理想磁流体力学不稳定性。

如何才能避免这些不稳定性呢?一般情况下,限定压强或者环电流的大小能改善等离子体稳定性。然而,高压强是实现反应堆中高  $p \tau_E$  所需要的;大电流(以后将说明)则是增加  $\tau_E$  所必需的。因此磁流体力学稳定性理论要解决两个基本问题:第一,对任意给定的磁场位形,如何计算满足磁流体力学稳定性的压强和电流的实际极限值?第二,如何优化磁位形,使得压强和电流极限尽可能高?

本章主要讨论第一个问题——对于给定位形发展一套用以计算理想磁流体力学模型下稳定性极限的方法。讨论的主要内容集中在理解基本问题,拓宽物理直观,以及推导稳定性问题的通用公式等方面,并通过几个简单的应用来演示计算稳定性的步骤。第二个也是更实际的问题,即计算、比较和优化聚变,有关位形下压强和电流极限的问题,将在第 13 章中讨论。

本章讨论的具体内容如下。首先,描述稳定性的一般特征,包括物理系统中各种不同类型不稳定性的图像,这些不稳定性最适于用理想磁流体力学来描述。此外,我们还要导出理想模型的一个重要的一般特征,这就是,在垂直于磁场方向上,等离子体总是和磁场线一起运动。这个特征一般称为“磁场线冻结”,它对于各种不稳定性的发展起着很强的约束作用。

第二个主题是对各种磁场几何特征的定性讨论。这些磁场特征对稳定性或有利或不利。我们将通过简单物理图像来演示,在一定条件下,等离子体的平行电流或者垂直电流是如何驱动起各种磁流体力学不稳定性的。这些图像构成了发展聚变有关位形的物理直观的基础。文中还将从单粒子导心理论的观点出发来补充解释磁流体力学稳定性。

第三个主题是磁流体力学稳定性问题一般公式的推导,包括对一些基本分析工具,诸如线性化以及确定稳定性的特征值的计算方法等的描述。最后给出描述稳定性问题简洁的公式。模型尽管简洁,但仍很难求解,因为它通常涉及三维偏微分方程的求解。

最后,为了获得有关磁流体力学稳定性分析的实际数学经验,我们对一些简单的特例进行了分析。这些例子有无限大均匀等离子体、纯粹  $\theta$  箍缩以及  $Z$  箍缩的一个亚类。结果表明,直线  $\theta$  箍缩具有很好的稳定性特性,而  $Z$  箍缩则具有强的磁流体力学不稳定性。

利用一般公式来检验更多令人感兴趣的与反应堆有关的位形需要大量的分析和计算,这已超出了本书的范围。进一步研究需要引入一个既非常简单又非常精确的平衡模型,即所谓面电流模型。这是下一章的主要内容。

## 12.2 稳定性的一般概念

首先要讨论的是理想磁流体力学稳定性的概念,包括对物理系统中各种类型稳定性的描述和哪一类最适合用磁流体力学来计算等问题。接着,我们将进行理想模型中磁场线冻结特性的推导,包括对稳定性的重要结果的讨论。最后提出一些分类系统,用以区分发生在聚变等离子体中磁流体力学不稳定性的不同类型。

### 12.2.1 物理系统中的不稳定性

为了理解理想磁流体力学稳定性,有必要考虑物理系统中发生的各类不稳定性。我们可以将等离子体的各种稳定特性与力学里的情形进行简单类比,如图 12.1 所示。假定球代表等离子体,曲线形状代表磁场结构。

图 12.1(a) 中的小球被认为处于稳定平衡。任何使球离开平衡位置的扰动都将导致小球围绕平衡位置振荡(假定井中没有摩擦)。相应地,图 12.1(b) 中的小球处于不稳定平衡,因为任何小的扰动将导致小球持续运动而越来越远离平衡位置。图 12.1(c) 中的小球处于临界稳定,即处于稳定和不安定的边界上。

在图 12.1(d) 中,稳定性问题没有意义,因为球一开始就不在平衡位置。图 12.1(e) 和 12.1(f) 定性说明能量耗散如何可能影响稳定性。设想在两种情况,小球淹没在黏性液体(如油)中。与无摩擦情形相比,稳定性边界条件不改变;井依然

是井,山依然是山。然而,移动速度由于黏性而大大减缓。图 12.1(g) 显示小球处于线性不稳定而非线性稳定的状态(也就是说,小扰动使小球移动有限距离后,从初始的不稳定位置变动到新的稳定平衡位置)。类似地,图 12.1(h) 显示小球处于线性稳定而非线性不稳定的状态(即对于小扰动,小球的状态是稳定的;而对于较大的扰动,小球将失稳滚过山顶掉下去)。

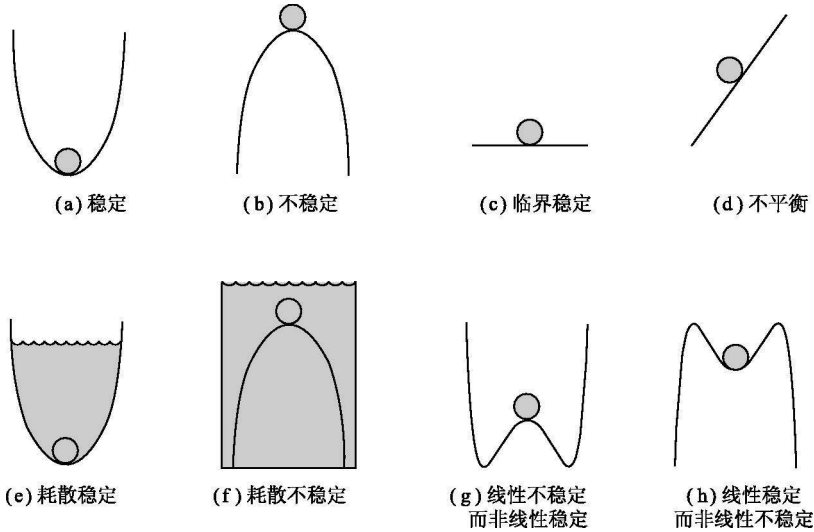


图 12.1 稳定性的力学类比

这些类比中的哪些对应于理想磁流体力学? 对于存在或者不存在理想导体壁的等离子体情形,图 12.1(a) ~ 图 12.1(c) 的例子代表着对理想磁流体力学模型的准确类比。稳定性分析的目的是要计算与图 12.1(c) 所示的临界稳定相对应的临界压强和电流。随着比压和电流的增加,井变得越来越浅,最后变平,进而演变成山峰。临界稳定性<sup>1)</sup>的比压和电流的值确定了稳定极限。存在电阻壁的等离子体的情形定性类似于图 12.1(e) ~ 图 12.1(f)。我们注意到,尽管不稳定的无壁(即无油)等离子体在有电阻壁(即有油)时同样是不稳定的。但壁仍然很重要,因为它显著地减缓了等离子体的运动,有利于实际反馈系统的设计。

### 12.2.2 磁场线冻结

磁场线冻结的概念是指,对于理想磁流体,磁场线的垂直运动与等离子体的垂直运动是绑定的。磁场线被“冻结”在等离子体中。下面我们来推导这个结果,并将它用于理想磁流体力学稳定性的讨论。

对任意位形下磁场线冻结概念的一般性证明需要用到如下定义的磁通  $\psi(t)$  的

1) Marginal Stability 亦作“边缘稳定性”。——译者



(尽管不是非常熟悉)积分关系式:

$$\psi(t) = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (12.1)$$

式中,积分是在开放曲面  $S$  上进行的; $\mathbf{n}$  是曲面的法向矢量,如图 12.2(a)所示。当  $\mathbf{B}$  是时间的函数,且开放曲面的边界以任意速度  $\mathbf{u}_\perp$  ( $\mathbf{u}_\perp$  一般不等于等离子体速度  $\mathbf{v}_\perp$ ) 移动时,通过这一积分关系式可以给出如何计算  $\psi(t)$  的时间变化率:

$$\frac{d\psi}{dt} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \oint \mathbf{B} \times \mathbf{u}_\perp \cdot d\mathbf{l} \quad (12.2)$$

现在,通过法拉第定律消去  $\partial \mathbf{B} / \partial t$ :

$$\frac{d\psi}{dt} = - \int \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS - \oint \mathbf{u}_\perp \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (12.3)$$

由斯托克斯定理,等号右边第一项面积分很容易转化为线积分。然后对理想磁流体学等离子体,令  $\mathbf{E} = -\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}$ ,即得到所期望的磁通守恒定律:

$$\frac{d\psi}{dt} = \oint [(\mathbf{v}_\perp - \mathbf{u}_\perp) \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{l} \quad (12.4)$$

式(12.4)表明,在一般磁场位形下,当磁通管的截面区域随等离子体一起运动时 ( $\mathbf{u}_\perp = \mathbf{v}_\perp$ ),穿过任意截面的磁通是守恒的。

接下来考虑将这个结果应用到图 12.2(b)所示的细长的磁通管上。这一管道可看作由一系列具有小截面的连续微元组成。作为理想磁流体,当管道中的等离子体移动时,每个截面上的磁通一定随着等离子体移动。换句话说,磁场线被“冻结”在等离子体中。

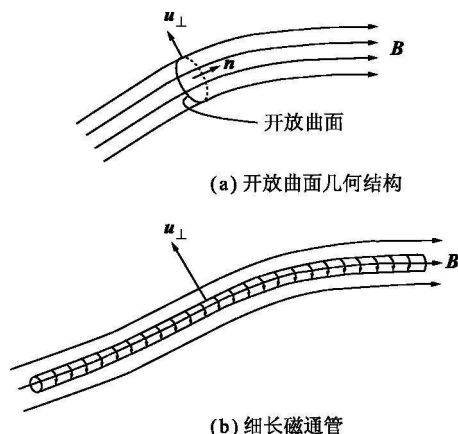


图 12.2 磁场线冻结概念

磁通守恒方程对等离子体稳定性具有重要意义。原因如下。考虑使等离子体偏离平衡的扰动。对于物理上真实的流体扰动速度,我们要求相邻等离子体流体元必须保持连续,流体元不允许分离或者破成单独小块。这样,在理想磁流体力学模型下,由于磁场线随等离子体一起移动,因此,在任何物理运动情形下,磁场线的拓扑结构一定能够维持不变。这对有可能出现的各类不稳定性的增长是一个很强的约束。

很多磁场位形直观上就可以清晰地看出磁场线很容易撕裂和重联形成低能态。然而,在理想磁流体力学模型下,由于磁场线的拓扑约束,这类转变在等离子体中是不可能的。磁场线的断裂要求流体元被撕裂,而这种运动在物理上是不允许的。正是这个原因,使得电阻率即使很低也会对等离子体的稳定性产生很大影响。电阻率允许磁场线在等离子体中扩散,使得磁场线冻结的拓扑约束被解除。这样,可实现的等离子体运动类型就更宽了,并出现与等离子体电阻率有关的新的不稳定性,尽管一般认为它们的影响比较弱,并且增长的时间尺度更慢。电阻性磁流体力学不稳定性经常(尽管不是总是)引起不希望出现的增强输运,但不会带来灾难性的等离子体损失。增强输运的研究是等离子体物理中的高级课题,我们将在第14章中从经验的观点予以讨论。

总的来说,由于维持磁场线拓扑结构上的要求,理想欧姆定律对等离子体可能的运动形成很强的约束。它限制了可能增长的不稳定性的类型。然而,如果这样的不稳定性被激发,则相对顽固,因为它不依赖于小的敏感的等离子体物理效应。正是这种顽固性使得理想磁流体力学模型变得极其危险,因此在聚变反应堆中必须避免出现这些不稳定性。

### 12.2.3 磁流体力学不稳定性的分类

对于各种类型的磁流体力学不稳定性,文献中一般有几种不同的分类方法,每一种都有各自的应用价值。下面我们概述三种主要的分类。

#### 1. 按内模与外模划分

设想真空将约束良好的平衡等离子体与第一壁隔离开来。第一种分类是按内模和外模来区分不稳定性。区分的基础是看不稳定性增长时等离子体表面是否移动。对于内模不稳定,等离子体表面固定不变。这些不稳定性仅发生在等离子体内部,是由特定的压强分布和电流分布引起的。通常它们不会导致等离子体灾难性损失,但是会对实验运行造成重要的限制并使输运增强。另一方面,外模则与等离子体表面有关,从而与等离子体整体的运动有关。正是这种运动导致等离子体撞击第一壁,所以外模在聚变等离子体中特别危险,一般必须避免。

#### 2. 按压强驱动模与电流驱动模划分

第二种等离子体不稳定性的分类是根据不稳定性的驱动源。一般来说,等离子

体有垂直和平行两个方向<sup>1)</sup>的电流,其中每一个都能驱动不稳定性。这些不稳定性的分类方法如下。

因为平衡时有  $\nabla p = \mathbf{J}_\perp \times \mathbf{B}$ ,故由垂直方向电流驱动的不稳定性一般称为“压强驱动”模。事实上,这种不稳定性是由压强梯度和磁场线曲率共同驱动的。磁场线曲率可以是好曲率、坏曲率或是做稳定的振荡,到底属于哪一种取决于曲率半径矢量与压强梯度方向的相对指向。主要由压强梯度驱动的不稳定性一般可进一步分为两种形式:“内部交换模”和“气球模”。这些名称的来源将在下一节指出。压强驱动不稳定性通常是内模,它设定了一个重要的极限,即聚变等离子体能达到的最大稳定比压。

由平行电流驱动的不稳定性通常称为“电流驱动”模。这些模即使在低比压极限,即所有压强驱动模均稳定的情形下,仍能够存在。在此情形下,电流驱动的不稳定性一般称为“扭曲模”,这是因为等离子体变形为扭曲的形状。扭曲模既可以是内模,也可以是外模。外扭曲模也设定了一个重要极限,即等离子体中的最大环向电流。

在一定情况下,平行电流和垂直电流一起驱动不稳定性,即通常所谓的“气球-扭曲”模。一般来说,这是聚变等离子体中最危险的模。它严重限制了等离子体能达到的最大压强和最大电流的值。此外,它是一种外模,这意味着稳定边界的破坏将导致等离子体能量和电流迅速损失到第一壁。我们将在第13章的稳定性分析中着重阐明如何计算气球-扭曲模的稳定极限。

### 3. 按有导体壁与无壁位形划分

最后一种分类先前已经讨论过,即基于是否存在理想导体壁来划分。严格密封的理想导体壁能大大提高等离子体克服外气球-扭曲模的稳定性。因为这些模严重限制了达到稳定的参数极限,所以人们非常希望通过引入理想导体壁来避免出现这些模。通过导体壁致稳以提高比压和电流极限水平是非常有效的,对某些磁场位形的反应堆来说,这种措施是强制性的。

实际的实验装置或者反应堆不可能在等离子体周围维持一个超导壁。因此壁肯定是电阻性的,这使得等离子体中还会出现电阻性壁模。由简单的力学类比可知,电阻性导体壁的存在对无壁等离子体的稳定边界没有影响。换句话说,尽管理想导体壁能够提高稳定极限,但电阻性导体壁却不改变稳定边界,仅减小不稳定性的增长率。

通过反馈或其他方法来稳定电阻壁模是目前很热的研究领域。这是一个非常重要的问题。在某些位形下,由于等离子体载有很大的电流,因此即使是  $\beta = 0$  的

1) 这里“平行”、“垂直”都是相对主磁场方向(通常设为  $z$  方向)而言。但在下文的单纯  $Z$  箍缩情形下,由于不存在沿轴向的主磁场,仅有轴向电流产生的极向磁场,因此这个电流也称为“垂直电流”。其实它与螺旋箍缩中的平行电流同是  $z$  方向,而螺旋箍缩中的垂直电流则是指极向电流。——译者

情形下仍需要导体壁。而在另一些携带较小电流的位形下,即使不存在壁,这些位形对于小到中等比压也都是稳定的。因此,按照是否需要理想导体壁来实现聚变反应堆所需的压强和电流来进行各种磁位形分类是有道理的。

总的来说,磁流体力学不稳定性可按照不同的方法来分类。根据物理机制的不同,可将不稳定性分为内模和外模,电流驱动模和压强驱动模。而从实验角度看,则可以根据实现聚变反应堆所需压强和电流是否需要理想导体壁来区分给定的磁场位形。

## 12.3 磁流体力学不稳定性的物理图像

本节给出几种简单的物理图像来说明理想磁流体力学模型是如何在等离子体中被激发的。这些模式包括  $Z$  箍缩中的交换模,串级磁镜中的气球模和螺旋箍缩中的扭曲模。所有聚变磁约束位形设计的基本出发点就是要避免出现这些基本的不稳定性。

### 12.3.1 交换模

第一种要考虑的不稳定性是压强驱动交换模。在仅有垂直电流的单纯  $Z$  箍缩中,这种不稳定性最容易理解。假设等离子体柱对称的初始表面扰动如图 12.3 所示。由于流过柱截面的总电流必须在整个柱体上保持恒定,故柱面外 3 个指定位置上的磁场 ( $B_0 \sim 1/r$ ) 及其相应的半径分别满足关系  $B_{01} < B_{02} < B_{03}$  和  $r_1 > r_2 > r_3$ ,而作用在等离子体表面上的磁场张力为  $F_r = (B_0^2/\mu_0)(2\pi rL_z) \sim 1/r$ ,从而有  $F_{r1} < F_{r2} < F_{r3}$ 。就是说,在整个柱上,受力方向均指向扰动增长的方向,譬如在  $r = r_1$  处,扰动力(即  $F_{r1} - F_{r2}$ )沿径向向外;而在  $r = r_3$  处,扰动力(即  $F_{r3} - F_{r2}$ )沿径向向内。扰动力使初始扰动增大,因此它是一种不稳定性的驱动力。这种模是“交换不稳定性”的一种形式,详细分析表明,这种扰动事实上是使等离子体管和磁通管发生交换,如图 12.3 所示。

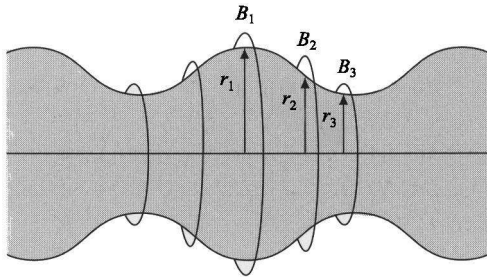


图 12.3  $Z$  箍缩交换不稳定性示意图

Z 箍缩中由垂直电流驱动的另一不稳定如图 12.4 所示。这里,在等离子体表面凹陷的一侧磁场富集,而在凸出的一侧磁场强度减弱。我们再次看到,表面凹陷得越厉害,磁场张力就越大;表面越凸出的地方,磁场张力就越弱。这里扰动力的方向也是指向使扰动幅度增加的方向,因此导致不稳定性。

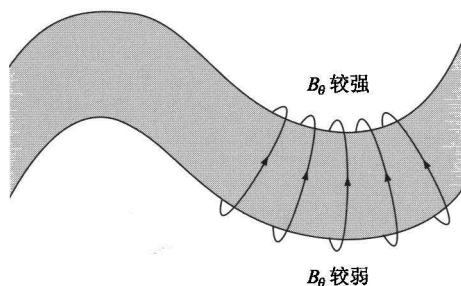


图 12.4 Z 箍缩扭曲不稳定性示意图

从这些示例可以清楚地看出,如果磁场线凹向等离子体表面,则这种磁场曲率叫坏曲率,如图 12.5(a)所示。这是因为曲率半径的方向与扰动方向一致,表面向外凸起使得等离子体处于低场区,而磁场降低又使得凸起进一步增强。与此相反,如果磁场线凸向等离子体表面,如图 12.5(b)所示的会切位形,则这种磁场线的曲率是好的。在此情形下,表面向外凸起将使得等离子体处于较强的磁场区。而较强磁场迫使等离子体恢复到平衡位置,因此这种磁场位形是致稳的<sup>1)</sup>。还应指出,虽然图 12.5(b)中的会切位形处处都是好曲率,但它却不是聚变所需要的位形,因为粒子很容易通过会切终端损失掉。对于交换模如何区分好曲率和坏曲率的单粒子图像将在 12.4 节描述。

### 12.3.2 气球模

很多磁场位形既有好曲率区,也有坏曲率区。在此情形下,我们需要通过适当的平均处理来确定“平均曲率”是好的还是坏的。托卡马克就具有这个特征。说明这点的更简单的例子是图 12.6(a)所示的串级磁镜。在这种位形下,磁流体力学不稳定性的一个重要特征是等离子体扰动更容易出现在坏曲率区,使得等离子体磁面

1) 作者对这两种不稳定性的解释不是很直观。其实这里用压强平衡的观点(这也是国内外流行教科书的解释)来解释更易明了:扰动前等离子体动力压强( $p = nT$ )与外部磁压强( $p_B = B_0^2/2\mu_0$ )相平衡。一旦出现扰动(颈缩或等离子体柱弯曲)后,动力压强可认为不变(各向同性使然),但扰动引起的磁压强差变了。如果这时磁压强差是指向扰动增长的方向(颈缩或坏曲率情形),则这种扰动是不稳定的;反之,扰动前后的磁压强差与扰动增长方向相反(好曲率情形),则这种扰动是可以稳定的,这时我们说这种磁场位形是致稳的。——译者

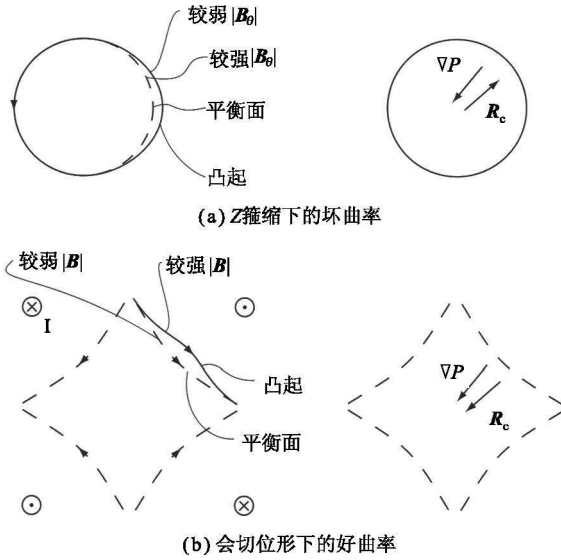


图 12.5

出现类似气球膨胀的畸变,如图 12.6(b)所示,这些不稳定性通常被称为“气球”模。气球模之所以重要,是因为它限制了能稳定约束聚变等离子体的最大  $\beta$  的极限。气球模一旦被激发,通常将导致热能的快速损失或是运输损失明显增强,使得等离子体比压  $\beta$  无法超过气球模极限。还应指出的是,气球不稳定性通常属于等离子体内部不稳定性。

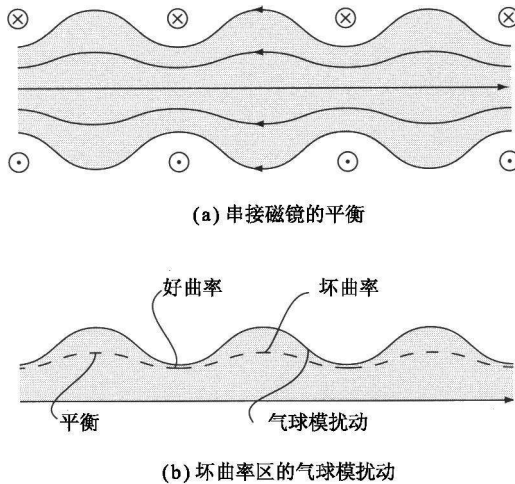


图 12.6 气球模

### 12.3.3 电流驱动不稳定性

现在考虑图 12.7 所示的电流驱动不稳定性。图中显示的是具有内部轴向强磁场的  $Z$  箍缩(即螺旋箍缩)。注意,现在主电流流动的轴向相当于平行方向。螺旋箍缩下的不稳定性机理类似于单纯  $Z$  箍缩的情形。但环向<sup>1)</sup>磁场线(其行为类似于橡皮筋)在出现扰动时会变得弯曲。而磁场线弯曲引起的张力总是试图重新伸直自身,这相当于一个致稳的力。但如果环向磁场太小,那么不稳定性仍无法消除。

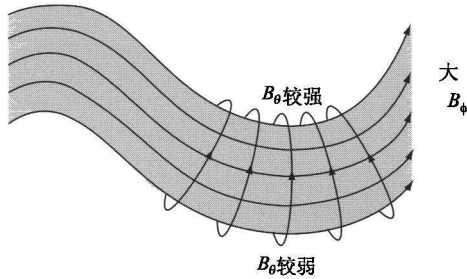


图 12.7 大环向磁场螺旋箍缩中的扭曲不稳定性(注意,  $J \approx J_{\parallel} \hat{b}$ )

可获得的最大环向磁场通常由磁体工程方面的因素决定,它的最大值设定了磁流体力学稳定性允许的最大环向电流。具体来说就是,如果环向电流大于极限电流,那么环向磁场线弯曲的致稳效应就无法起到稳定不稳定模的作用。

概括起来,交换不稳定性、气球不稳定性和扭曲不稳定性的基本驱动机理都可以通过简单的物理模型得到描述。尽量使这些驱动机制最小化是所有聚变磁约束位形设计的基本出发点。

### 12.3.4 好曲率和坏曲率的物理图像

好曲率和坏曲率的区别也能够通过单粒子约束图像的观点来理解。以下的分析将说明导心的曲率漂移是如何在等离子体表面附近感应出电场,进而产生  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移的。 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移的方向取决于曲率半径矢量的符号,既可以是正的也可以是负的。分析过程如下。

考虑图 12.8 所示的柱等离子体,其中在等离子体表面已叠加了交换扰动。我们知道,如果磁场线弯曲,那么就会产生导心曲率漂移:

$$\mathbf{V}_{\kappa} = \mp \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B} \quad (12.5)$$

1) 这里“环向”即“轴向”。在用“轴向”一词时作者显然是指直线  $Z$  箍缩位形,但这里及以下改作“环向”时,作者是当做环形装置的纵场方向来理解的。——译者

式中,正号对应于正电荷。由图 12.9(a) 的圆柱截面视图可见,曲率漂移方向是指向纸内还是纸外取决于曲率半径矢量的方向。对于正电荷,凹向等离子体的磁场线产生指向纸内的漂移,而凸向等离子体的磁场线产生指向纸外的漂移。

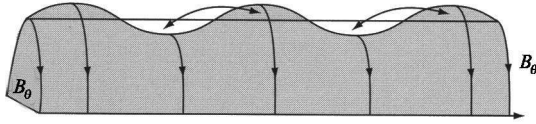
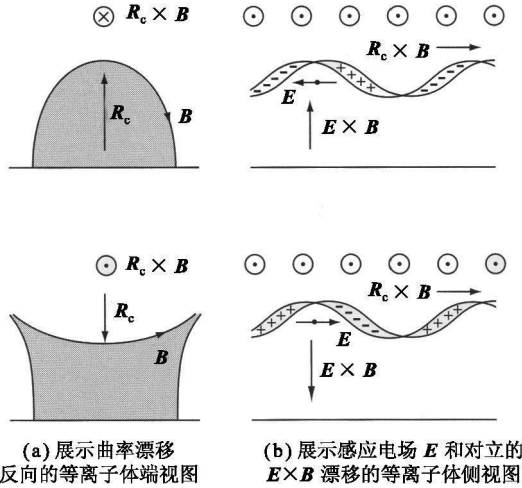


图 12.8 具有交换不稳定性的 Z 箍缩柱(注意,等离子体和真空磁通已经交换了位置)



(a) 展示曲率漂移反向的等离子体端视图 (b) 展示感应电场  $E$  和对立的  $E \times B$  漂移的等离子体侧视图

图 12.9 坏曲率(上)和好曲率(下)的单粒子图像

因为电子和离子曲率漂移方向相反,所以在沿圆柱轴向上,交换不稳定性导致形成周期性电荷分离,如图 12.9(b) 所示,电荷分离产生周期电场。电场的峰值出现在凸起的中间部位[即图 12.9(b) 中电场方向箭头所指的位置]。

凸起中的等离子体此刻经历  $E \times B$  漂移。当磁场线凹向等离子体时,  $E \times B$  漂移的方向将增强扰动,导致不稳定性;反之,当磁场线凸向等离子体时,  $E \times B$  漂移的方向将使等离子体回复到它的平衡位置,导致稳定。

上述简单的物理图像为分辨好曲率和坏曲率提供直观理解。

## 12.4 理想磁流体力学稳定性问题的一般方程

前文已经给出了磁流体力学稳定性的概貌和一些普通概念的描述。现在我们要通过分析量化上述定性的观点。本节介绍理想磁流体力学稳定性问题一般方程的推导。我们从“线性稳定性”概念的讨论开始。线性稳定性是一种能够大大简化



磁流体力学稳定性问题分析的数学处理。然后,我们将这种数学处理应用于理想磁流体力学模型,得到的结果是一组齐次的、具有本征方程形式的线性偏微分方程组,本征值即是扰动的增长率。最后,导出线性稳定问题的重要一般特征,这将使以后章节的应用分析变得更简单。

### 12.4.1 线性稳定性的概念

线性稳定性分析是一种能够大大简化系统稳定性分析的有力的数学处理。其要点是:首先计算自洽的磁流体力学平衡,然后施以使系统偏离平衡位置的小扰动。通过研究小幅扰动的时变特性(即,是恢复到平衡态,还是在平衡态附近振荡,抑或远离平衡态),就可以得知系统的(线性)稳定性。

这种处理有何意义呢?要回答此问题,我们不妨先考虑严格的非线性问题。在此我们假定等离子体已设定了一系列初始条件,这样,系统的稳定性就由磁流体力学方程组的时间演化来确定。如果方程组具有长时间行为,这表明系统具有稳态解,相当于好的约束。但这需要在数学上解一组耦合的非线性三维偏微分方程组,其中的未知量均为  $R, \varphi, Z, t, a$  的函数。即使借助于现代计算机这项工作也太艰难了。

但通过把问题分离成平衡和线性稳定性两部分,那么数学处理上就可以大大简化。具体来说就是,将所有因变量写为  $Q(\mathbf{r}, t) = Q_0(\mathbf{r}) + Q_1(\mathbf{r}, t)$  的形式,其中,  $Q_0(\mathbf{r})$  表示全解的平衡部分,它是磁流体力学平衡方程组的精确解,根据定义,它与时间无关。而且大多数平衡位形都具有一定的几何对称性。例如,在轴对称环形几何结构中,因变量与环向角  $\varphi$  无关。在此情形下,  $Q_0(\mathbf{r}) = Q_0(R, Z)$ , 数学上的表述更加简单。由于  $Q_0(\mathbf{r})$  与时间无关,并且由于几何对称的关系,通常可以少到只有一个空间坐标,因此  $Q_0(\mathbf{r})$  的确定是比求解整个模型简单得多的非线性微分方程组的求解问题。磁流体力学平衡可以迅速地获得数值解,在特定情况下甚至是解析解。因此在下述讨论中,我们假定待求位形的平衡解已知。

$Q_1(\mathbf{r}, t)$  表示偏离平衡态的扰动量。假定扰动幅度是小量,即  $|Q_1(\mathbf{r}, t)| \ll |Q_0(\mathbf{r})|$ 。为了表征所有可能的不稳定行为,它一般是独立变量  $R, \varphi, Z, t$  的函数。小幅假设简化分析如下。考虑包含两个未知量乘积  $J(\mathbf{r}, t)B(\mathbf{r}, t)$  的典型非线性项。在线性稳定性的情况下,上述变量分别改写为  $J = J_0 + J_1, B = B_0 + B_1$ 。乘积为:

$$JB = J_0B_0 + J_0B_1 + J_1B_0 + J_1B_1 \quad (12.6)$$

现在,如果合并方程组中所有的最大项,这些项代表平衡项(即  $J_0B_0$  项),根据定义,它们是磁流体力学模型的精确解,那么这些项必定严格抵消。对于保留项,在小幅假设情形下,所有非线性扰动项均可忽略,具体来说是因为  $|J_1B_1| \ll |J_1B_0| \sim |J_0B_1|$ 。这样,分析中保留的仅是未知扰动中的线性部分,因此称为“线性稳定

性”分析。

需要指出的是,这个结论不依赖于初始非线性为二次函数形式这一事实。对于一般的非线性,围绕平衡解进行泰勒展开:

$$F(J) = F(J_0 + J_1) = F(J_0) + \frac{\partial F(J_0)}{\partial J_0} J_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(J_0)}{\partial J_0^2} J_1^2 + \dots \quad (12.7)$$

第一项因严格满足平衡方程而抵消,泰勒展开中所有二阶或者更高阶项由于小幅假设被忽略。扰动中仅保留线性项。

现在,稳定性问题已简化为研究小幅扰动的时间演化过程。因为方程是线性的,故问题得到很大简化。求解线性偏微分方程目前已有很强的解析和数值计算方法可用,使得多维位形的稳定性分析很容易处理。这也是为什么大多数磁流体力学稳定性分析都将重点放在线性稳定性分析上。

但需记住,线性稳定性分析不提供完整图像。这种分析显然不能预测线性不稳定性的非线性演化,虽然在下述意义上非线性行为往往并不是很重要。经验表明,具有线性磁流体力学不稳定性的等离子体通常演化成严重的甚至是灾难性的约束能量损失状态。因此,研究等离子体如何损失,其能量的细节并不是很重要,重要的是研究如何在初始阶段就避免这些不稳定性。换句话说,我们需要通过线性稳定性分析尽可能准确地确定临界稳定极限。

#### 12.4.2 磁流体力学线性稳定性方程

在本小节,我们将线性稳定性分析应用于理想磁流体力学方程。最后得到的一组3个耦合的线性偏微分方程。这组方程决定了等离子体扰动量的演化过程。通过简正模展开,我们将方程化为求增长率的本征值问题。这样就进一步简化了稳定性边界的确定。

首先,将所有因变量分解为平衡量与扰动量之和: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_1$ ,  $p = p_0 + p_1$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho_1$ 。注意到由于平衡态是静态的,所以对速度作展开,有  $v = v_1$  (因为  $v_0 = 0$ )。现在假定所有平衡量均为三维函数 [ $Q_0 = Q_0(r)$ ], 而扰动量不仅是三维的且依赖于时间 [ $Q_1 = Q_1(\mathbf{r}, t)$ ]。将此代入磁流体力学模型,我们便得到下列平衡和线性稳定性方程组。

平衡态:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0 &= \nabla p_0 \\ \nabla \times \mathbf{B}_0 &= \mu_0 \mathbf{J}_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

线性稳定性:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) &= 0 \\
 \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 - \nabla p_1 \\
 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla p_0 + \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \left[ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \rho_0 \right] &= 0 \\
 \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) \\
 \nabla \times \mathbf{B}_1 &= \mu_0 \mathbf{J}_1 \\
 \nabla \cdot \mathbf{B}_1 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

此处, 电场已通过理想欧姆定律消去,  $\rho_0(\mathbf{r})$  是任意的。我们看到, 尽管方程组 (12.9) 是线性的, 但它仍然包含大量耦合的未知量。

稳定性方程组简化如下。首先, 扰动量的时间变化关系可以通过简正模展开明确确定。这是因为平衡量与时间无关, 且稳定方程是线性的。于是全部扰动量可写为:

$$Q_1(\mathbf{r}, t) = Q_1(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (12.10)$$

频率  $\omega$  (可能是复数) 在问题中以特征值形式出现。一般来说, 等离子体由大量甚至无穷多简正模组成, 每个模都具有自己的特征值。一旦解得简正模方程, 确定了特征值, 那么通过考察每种模式频率  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  ( $\omega_i$  是增长率) 的虚部, 就可以确定稳定性。如果特征值具有  $\omega_i > 0$ , 则系统是不稳定的, 因为扰动随时间呈指数增长:  $Q_1 \sim \exp(\omega_i t)$ ; 如果所有特征值为非正, 即  $\omega_i \leq 0$ , 则系统是稳定的, 因为扰动衰减到 0, 最坏也仅是在平衡位置附近振荡。注意, 当把简正模展开引入到线性稳定性方程时, 每一项中的因子  $\exp(-i\omega t)$  要去掉。

简化过程的第二步是引入如下的扰动位移矢量  $\xi$ :

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -i\omega \xi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (12.11)$$

矢量  $\xi$  表示等离子体偏离平衡位置的扰动位移。

将式 (12.9) 中的所有扰动量表成含  $\xi$  的形式, 我们很容易得到线性磁流体力学稳定性方程组的最终形式。经过简短计算, 除线性动量方程外, 所有其他方程均可化为如下关系:

$$\left. \begin{aligned}
 \rho_1 &= -\nabla \cdot (\rho \xi) \\
 p_1 &= -\xi \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \xi \\
 \mathbf{B}_1 &= \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}) \\
 \mathbf{J}_1 &= (1/\mu_0) \nabla \times [\nabla \times (\xi \times \mathbf{B})]
 \end{aligned} \right\} \quad (12.12)$$

上述表达式中,因子  $\exp(-i\omega t)$  已从所有项中明确消去,所以扰动量仅是  $\mathbf{r}$  的函数。而且为方便起见,下标“0”也已从平衡解中舍去。

将方程组(12.12)中的量代入线性动量方程。得到含  $\xi$  的3个分量的矢量方程:

$$-\omega^2 \rho \xi = \mathbf{F}(\xi) \quad (12.13)$$

式中,力算子  $\mathbf{F}$  的形式非常复杂,其表达式为:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\xi) = & \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times [\nabla \times (\xi \times \mathbf{B})] + \frac{1}{\mu_0} \{ \nabla \times [\nabla \times (\xi \times \mathbf{B})] \} \times \mathbf{B} \\ & + \nabla (\xi \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \xi) \end{aligned} \quad (12.14)$$

为了完备线性磁流体力学稳定性问题的形式体系,必须设立边界条件。边界条件有内模和外模两种情形。内模边界条件很容易确定,接下来就将讨论;外模边界条件相当复杂,对它的讨论放在下一章里进行。

对于内模,位移矢量的法向分量在等离子体表面必须为零,否则等离子体表面形状将发生改变,这与内模的定义相悖。更确切地说,内模需要等离子体表面保持恒定,不稳定性被限制在等离子体内部。然而需要注意的是,位移矢量沿表面的切向分量不必为零。在等离子体内,扰动量沿未扰动曲面作切向滑移运动是允许的。这一物理图像意味着内模边界条件可以写成:

$$\mathbf{n} \cdot \xi|_{S_p} = 0 \quad (12.15)$$

式中,  $S_p$  表示未扰动等离子体曲面;  $\mathbf{n}$  是外法向单位矢量。

式(12.13)和式(12.15)即为任意三维平衡下内模的理想磁流体力学线性稳定性问题的一般公式。由于力矢量因子  $\mathbf{F}$  的复杂性,这个模型一般很难求解。在12.5~12.8节,我们将给出一些简单的零维和一维几何位形下的解,以便展示各种求解方程和特征值的过程。在下一章里,我们还将就特定的简单二维面电流平衡模型来求解包含扩展到外模边界条件的方程组。这种方法使我们能够确定众多聚变位形下的临界稳定极限。

### 12.4.3 线性磁流体力学稳定性的一般特征

磁流体力学稳定性分析的一个重要目的是确定临界稳定性的压强和电流极限。我们知道,临界稳定性定义为最不稳定模的增长率趋于零 ( $\omega_i \rightarrow 0$ ) 的等离子体状态。对于一般的物理系统,向临界稳定的转变可以发生在非零实频值 ( $\omega_r \neq 0$ , 当  $\omega_i \rightarrow 0$ ) 下。然而对于理想磁流体力学系统,这种转变实际上发生在  $\omega_r = 0$  时。这意味着我们在开始分析时可以通过设定  $\omega^2 \rightarrow 0$  来确定临界稳定性。这在数学上可以大大简化复杂性。下面我们来进行理想磁流体力学临界稳定性这一重要性质的

推导。

在  $\omega^2 \rightarrow 0$  时出现临界稳定性的证明与  $\mathbf{F}$  算子具有自伴性这一数学特征有关。自伴性定义如下。对于任意两个满足边界条件的复矢量  $\xi(\mathbf{r})$  和  $\eta(\mathbf{r})$ , 如果  $\mathbf{F}$  算子满足下述积分特征:

$$\int \eta \cdot \mathbf{F}(\xi) d\mathbf{r} = \int \xi \cdot \mathbf{F}(\eta) d\mathbf{r} \quad (12.16)$$

则我们说  $\mathbf{F}$  算子具有自伴性。式(12.14)给出的  $\mathbf{F}$  算子的复杂性使得  $\mathbf{F}$  的这一特征不十分明显。但经过冗长的计算后, 式(12.16)的积分通过构造可以改写为一种自伴的形式, 即交换  $\xi(\mathbf{r})$  和  $\eta(\mathbf{r})$  不改变积分。下面我们不加证明地给出内模的这样一种自伴性:

$$\begin{aligned} \int \eta \cdot \mathbf{F}(\xi) d\mathbf{r} = & - \int d\mathbf{r} \left[ \frac{1}{\mu_0 \nabla} (\xi_{\perp} \times \mathbf{B})_{\perp} \cdot \nabla \times (\eta_{\perp} \times \mathbf{B})_{\perp} \right. \\ & + \frac{B^2}{\mu_0} (\nabla \cdot \xi_{\perp} + 2\xi_{\perp} \cdot \kappa) (\nabla \cdot \eta_{\perp} + 2\eta_{\perp} \cdot \kappa) \\ & + \gamma p (\nabla \cdot \xi) (\nabla \cdot \eta) - (\xi_{\perp} \cdot \nabla p) (\eta_{\perp} \cdot \kappa) \\ & - (\eta_{\perp} \cdot \nabla p) (\xi_{\perp} \cdot \kappa) - \frac{J_{\parallel}}{2B} (\eta_{\perp} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla \times (\xi_{\perp} \times \mathbf{B})_{\perp} \\ & \left. - \frac{J_{\parallel}}{2B} (\xi_{\perp} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla \times (\eta_{\perp} \times \mathbf{B})_{\perp} \right] \quad (12.17) \end{aligned}$$

式中,  $\xi$  和  $\eta$  已改写为  $\xi = \xi_{\perp} + \xi_{\parallel} \mathbf{b}$  和  $\eta = \eta_{\perp} + \eta_{\parallel} \mathbf{b}$ , 这里下标“ $\perp$ ”和“ $\parallel$ ”均相对于平衡磁场方向。

假定自伴性已经成立, 现在不难证明当  $\omega^2 \rightarrow 0$  时, 理想磁流体会出现临界稳定性。通过引入复变量  $\omega^2$  和  $\xi$ , 并对式(12.13)点乘  $\xi^*$  (即令  $\eta = \xi^*$ )。对等离子体体积进行积分:

$$\omega^2 \int \rho |\xi|^2 d\mathbf{r} = - \int \xi^* \cdot \mathbf{F}(\xi) d\mathbf{r} \quad (12.18)$$

取式(12.13)的复共轭, 并点乘  $\xi$ , 重复上述过程。利用  $\mathbf{F}$  的自伴性得到:

$$[(\omega^2) - (\omega^2)^*] \int \rho |\xi|^2 d\mathbf{r} = - \int [\xi^* \cdot \mathbf{F}(\xi) - \xi \cdot \mathbf{F}(\xi^*)] d\mathbf{r} = 0 \quad (12.19)$$

结论即是  $(\omega^2) = (\omega^2)^*$ 。换句话说,  $\omega^2$  是纯实数。因此, 如果本征方程有结果  $\omega^2 > 0$ , 则系统是稳定的, 因为  $\omega_i = 0$  且  $\omega_r = \pm \sqrt{\omega^2}$ , 模式是振荡的。反之, 当  $\omega^2 <$

0 时,系统是不稳定的,因为  $\omega_i = 0$  且  $\omega_i = \pm \sqrt{-\omega^2}$ , 总存在一个模具有正的增长率。很明显,临界稳定发生在  $\omega^2 = 0$  处。

在后面简单的零维和一维应用中,分析中保留  $\omega^2$  项以展示如何实际计算本征方程和本征值。在第13章更重要的确定目前聚变位形下的压强和电流极限的应用里,将采用二维模型,为简化分析,开始时即假定  $\omega^2 = 0$ 。

## 12.5 无限大均匀等离子体——磁流体力学波

理想磁流体力学稳定性理论的第一个应用是所有位形中最简单的无限大均匀等离子体,这时平衡是零维的。由于不存在电流流动驱动的不稳定性,我们预期这种“位形”是稳定的。情况确实如此。分析显示,这种等离子体可以有3种不同类型稳定的波:剪切阿尔文波、压缩阿尔文波(有时称为快磁声波)和磁声波(有时称为慢磁声波)。下面,我们推导包含所有这3种模式的一般本征值关系,并对每种波予以物理讨论。

### 12.5.1 磁流体力学波的一般推导

任何稳定性分析的第一步都是计算自洽的磁流体力学平衡。对于无限大均匀等离子体,这很简单。平衡方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= B_0 \mathbf{e}_z \\ \mathbf{J} &= 0 \\ p &= p_0 \\ \rho &= \rho_0 \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.20)$$

式中  $B_0, p_0$  和  $\rho_0$  均为常数。很明显,式(12.20)满足磁流体力学平衡方程。

第二步是定义扰动的一般形式。因为平衡是零维的,扰动可写成空间傅里叶展开形式:

$$\xi(\mathbf{r}) = \hat{\xi} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (12.21)$$

式中,  $\hat{\xi}$  是复振幅(即  $\hat{\xi}$  是复常数,而非空间的函数)。 $\mathbf{k}$  是波矢量,且其任一分量必须是实的,否则在  $\mathbf{r} = \pm \infty$  处将发散。此外,为不失一般性,可旋转坐标系使得  $\mathbf{k}$  的一个分量沿  $\mathbf{e}_z$  方向,即平行于磁场( $k_{\parallel}$ )的方向,另一个分量沿  $\mathbf{e}_r$  方向,即垂直于磁场( $k_{\perp}$ )的方向。因此,无限大均匀等离子体中扰动的最一般形式可写为:

$$\xi(\mathbf{r}) = \hat{\xi} \exp(ik_{\perp} y + ik_{\parallel} z) \quad (12.22)$$

空间傅里叶分析的优势在于式(12.22)给出的指数解正是描述磁流体力学稳定性[式(12.13)]的线性偏微分方程的精确解。从所有项中去掉指数项,即可将 $\xi$ 的微分方程组简化为 $\xi$ 的代数方程组。对每个关于 $y$ 和 $z$ 的导数项分别乘以因子 $ik_{\perp}$ 和 $ik_{\parallel}$ ,即可导出这些代数方程。于是每一项中的梯度算符简化为:

$$\nabla \rightarrow i\mathbf{k} = ik_{\perp} \mathbf{e}_y + ik_{\parallel} \mathbf{e}_z \quad (12.23)$$

利用这一关系式,可将磁流体力学稳定性方程简化为如下简单的代数形式:

$$\omega^2 \rho_0 \xi = \frac{B_0^2}{\mu_0} \{ \mathbf{k} \times [ \mathbf{k} \times (\xi \times \mathbf{e}_z) ] \} \times \mathbf{e}_z + \gamma p_0 \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \xi) \quad (12.24)$$

将式(12.24)改写为3个矢量分量的标量方程组,即得到所需的形式。最终方程可写成矩阵形式:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - k_{\parallel}^2 v_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 - k^2 v_a^2 - k_{\perp}^2 v_s^2 & -k_{\perp} k_{\parallel} v_s^2 \\ 0 & -k_{\perp} k_{\parallel} v_s^2 & \omega^2 - k_{\parallel}^2 v_s^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{vmatrix} = 0 \quad (12.25)$$

式中,  $v_a = (B_0^2 / \mu_0 \rho_0)^{1/2}$  是阿尔文速度;  $v_s = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$  是绝热声速。

我们看到,式(12.25)表示的是关于3个未知量 $\xi_x$ ,  $\xi_y$ 和 $\xi_z$ 的3个线性齐次代数方程。这些方程仅在矩阵行列式为零时存在非零解。简单观察即可发现,这是一个关于 $\omega^2$ 的三次方的行列式。这说明 $\omega^2$ 存在3个独立的根,分别对应于前文提到的3支磁流体力学波。在下面的三小节里,我们令行列式等于零,来讨论每支波的物理意义。

### 12.5.2 剪切阿尔文波

第一支磁流体力学波是剪切阿尔文波,通过令矩阵方程的 $x$ 分量为零可直接得到。剪切阿尔文波的本征值为:

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 v_a^2 \quad (12.26)$$

很明显,它对应于一支稳定的振荡波。需要注意的是,本征频率独立于 $k_{\perp}$ ,即使 $k_{\perp}^2 \gg k_{\parallel}^2$ 。本征函数有 $\xi_x \neq 0$ ,  $\xi_y = \xi_z = 0$ 。扰动磁场仅有 $x$ 分量,为 $B_{1x} = ik_{\parallel} B_0 \xi_x$ 。对其他各物理量亦有 $\rho_1, p_1$ 和 $\nabla \cdot \xi$ 均为0。剪切阿尔文波是非压缩波,既不引起密度涨落,也不产生压强涨落。

由于扰动磁场和位移均垂直于磁场 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{k}$ ,因此这种波是纯横波。物理上说,这种扰动引起的是磁场线弯曲,如图12.10所示。因此剪切阿尔文波描述了等离子体垂直动能(即内能)与场线弯曲磁能(即场线张力)之间的一种基本振荡。从稳定

性观点来看,剪切阿尔文波可能是最重要的磁流体力学波,因为通常有限电流和几何效应驱动起不稳定性的正是这种波。

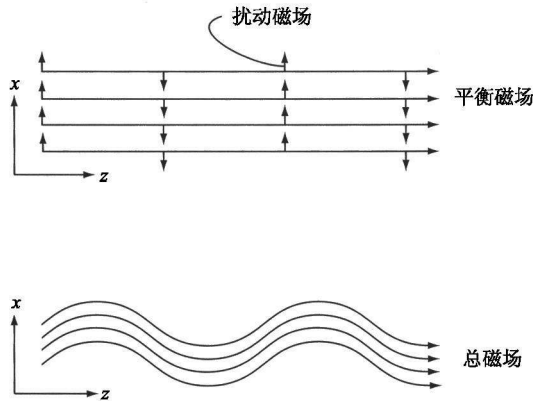


图 12.10 显示磁场线弯曲的剪切阿尔文波

### 12.5.3 压缩阿尔文波

剩下的两支磁流体力学波通过矩阵方程的  $y$  分量和  $z$  分量耦合在一起。令系统的  $2 \times 2$  行列式为零得到:

$$(\omega^2 - k^2 v_a^2 - k_\perp^2 v_s^2)(\omega^2 - k_\parallel^2 v_s^2) - k_\perp^2 k_\parallel^2 v_s^4 = 0 \quad (12.27)$$

注意到对  $\omega^2$  存在两个根,分别为:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} k^2 (v_a^2 + v_s^2) [1 \pm (1 - \alpha^2)^{1/2}] \quad (12.28)$$

式中  $k^2 = k_\perp^2 + k_\parallel^2$ , 且

$$\alpha^2 = 4 \frac{k_\parallel^2}{k^2} \frac{v_s^2 v_a^2}{(v_s^2 + v_a^2)^2} \leq 1 \quad (12.29)$$

压缩阿尔文波(即快磁声波)对应于式(12.28)中的“+”号。注意到  $v_s^2/v_a^2 = \gamma \mu_0 p_0 / B_0^2 \sim \beta$ , 并考虑  $\beta \ll 1$ , 物理上可轻易确定。压缩阿尔文波的本征频率简化为:

$$\omega^2 \approx (k_\perp^2 + k_\parallel^2) v_a^2 \quad (12.30)$$

很明显,这表示一支稳定的振荡波。

由本征方程易知,在低比压极限下,  $\xi_z/\xi_y \approx k_\perp k_\parallel v_s^2 / k^2 v_a^2 \sim \beta \ll 1$ 。运动主要垂直于磁场。且由于  $k_\parallel \sim k_\perp$ , 故有  $B_{1y}/B_{1z} \approx -k_\parallel / k_\perp \sim 1$ 。  $B_{1y}$  项对应于色散关系中



的  $k_{\parallel}^2 v_a^2$  项,即前文提到的场线弯曲效应。 $B_{1z}$ 项对应于  $k_{\perp}^2 v_a^2$  项,相当于图 12.11 中描述的磁压缩。通常有限几何效应要求  $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$ ,即对于压缩阿尔文波,磁压缩效应比场线弯曲效应强。最后,经过简单计算得  $\mu_0 p_1 / B_0 B_{1z} \approx -\mu_0 \gamma p_0 / B_0^2 \sim \beta \ll 1$ ,即在低比压的压缩阿尔文波中,与磁压缩相比,等离子体压缩微不足道。

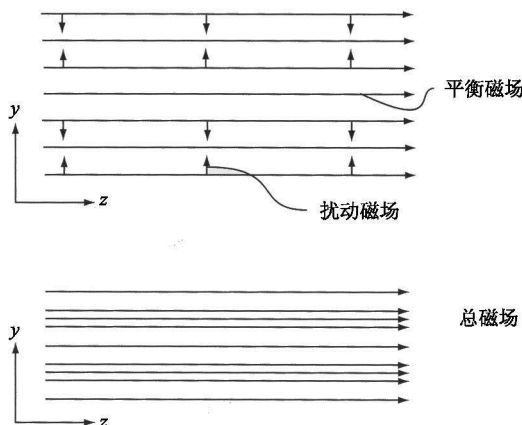


图 12.11 展示磁场压缩且在  $k_{\parallel} / k_{\perp} \ll 1$  时的压缩阿尔文波

概括起来,压缩阿尔文波描述了等离子体动能(即惯性)和磁压缩能(即磁压强)之间的基本振荡。当  $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$  时,它很稳定,因此在大部分等离子体不稳定性中很难激发。

#### 12.5.4 磁声波

磁声波(即慢磁声波)是第三支波,对应于式(12.28)的负根。在低比压极限时本征频率简化为:

$$\omega^2 \approx k_{\parallel}^2 v_s^2 \quad (12.31)$$

类似于其他磁流体力学模,这里本征频率对应于一种稳定的振荡波。对磁声波,本征函数的位移分量满足  $\xi_y / \xi_z \approx k_{\perp} k_{\parallel} v_s^2 / k^2 v_a^2 \sim \beta \ll 1$ 。运动基本平行于磁场。考虑  $k_{\perp} \ll k_{\parallel}$  情形,我们很容易了解磁声波的物理本质。在此情形下,经过简单计算可得  $B_0 B_{1z} / \mu_0 p_1 \approx k_{\perp}^2 / k^2 \ll 1$  和  $B_0 B_{1y} / \mu_0 p_1 \approx -k_{\parallel} k_{\perp} / k^2 \ll 1$ 。运动受磁声波引起的扰动压强支配,如图 12.12 所示。

磁声波表示的是等离子体动能(即惯性)与等离子体热能(即等离子体压缩)之间的一种基本振荡。在等离子体不稳定性中,磁声波较难激发。而且磁声波物理本质依赖于平行方向上的等离子体动力学,磁流体力学模型无法严谨处理这类物理问题。

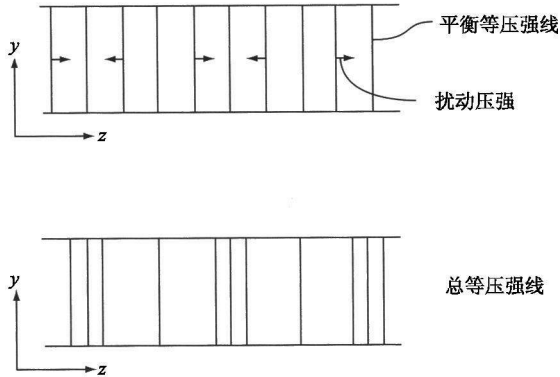


图 12.12  $k_{\parallel}/k_{\perp} \gg 1$  时的磁流体力学声波展示了等离子体压强的压缩作用

### 12.5.5 小结

一般磁流体力学稳定性理论的第一个应用是无限大均匀等离子体。简化几何结构使得问题简化为一系列线性代数方程组。从中我们很容易计算出本征频率。结果显示,无限大均匀等离子体中存在 3 支稳定的振荡波:剪切阿尔文波、压缩阿尔文波和磁声波。通常磁流体力学不稳定性出现时,剪切阿尔文波最易激发。

## 12.6 直线 $\theta$ 箍缩

磁流体力学稳定性理论的第二个应用是研究  $\theta$  箍缩的稳定性。由前述可知,这种位形仅具有垂直电流和直的磁场线。没有场线弯曲,故不存在压强驱动模,而没有平行电流也就不存在电流驱动模。 $\theta$  箍缩将是磁流体稳定的,本节的目的就是证明这一结论。具体步骤是先确定平衡,然后定义扰动的一般形式,最后分析磁流体稳定方程。

### 12.6.1 平衡和扰动

分析从  $\theta$  箍缩平衡条件开始,它涉及等离子体压强和磁压强。为方便起见重申如下:

$$p(r) + \frac{B_z^2(r)}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \quad (12.32)$$

同样,  $p(r)$  是任意函数。

接下来考虑扰动。因为这种平衡是关于  $\theta$  和  $z$  对称的,故可对扰动作傅里叶分析如下:

$$\xi(\mathbf{r}) = \xi(r) \exp[i(m\theta + kz)] \quad (12.33)$$

式中,  $m$  和  $k$  分别是“极向”和“环向”波数。需要指出的是, 因为平衡量是半径的函数, 所以对  $r$  作傅里叶分析在数学上毫无帮助[即  $\exp(ikr)$  形式的解不满足微分方程]。

图 12.13 展示的是不同  $m$  和  $k$  扰动的图像示例。我们看到,  $m = 1$  对应于等离子体柱的轴向扭转;  $m = 2$  对应于等离子体截面发生椭圆形变;  $m = 3$  对应于截面发生三角形变。另外, 当  $k \neq 0$  时, 等离子体柱的轴发生弯曲。而对于  $k = 0$ , 则只是柱截面变形, 整个柱轴不发生形变。特殊情形  $m = 0, k \neq 0$  对应于沿圆柱方向的一系列凸起。最不稳定的外部磁流体力学不稳定性通常都与低  $m$  和小  $k$  的模式有关。

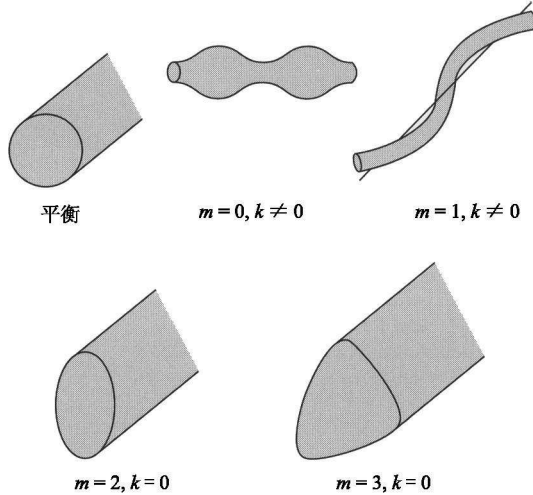


图 12.13 各种不同  $m$  和  $k$  模式扰动的图像示例

对圆柱等离子体, 式(12.33)是最一般的扰动形式。傅里叶分析的应用使得磁流体力学稳定性方程从三维简化到一维。一般来说, 我们必须导出并求解一维磁流体微分方程以确定本征值  $\omega^2$ , 并判断对于任意  $m$  和  $k$ ,  $\omega_i > 0$  是否成立。

### 12.6.2 径向微分方程

接下来是将平衡量和扰动量代入一般的磁流体力学稳定性公式[式(12.13)], 并尽可能简化到一维微分方程。这种处理原则上简单, 但是需要非常冗长的计算, 即使是对最简单的平衡问题。得到的结果是一个独立的关于  $\xi$  的二阶微分方程, 其中  $\omega^2$  以复杂而非标准的形式存在。方程形式如下, 此处不给出证明, 只是让读者对磁流体力学稳定性计算复杂性有初步的概念。

$$\frac{d}{dr} \left[ A \frac{d}{dr} (r \xi_r) \right] - C(r \xi_r) = 0 \quad (12.34)$$

此处,

$$\left. \begin{aligned}
 A(r) &= \frac{\rho(v_a^2 + v_s^2)}{r} \frac{(\omega^2 - \omega_a^2)(\omega^2 - \omega_h^2)}{(\omega^2 - \omega_i^2)(\omega^2 - \omega_s^2)} \\
 C(r) &= -\frac{\rho}{r}(v^2 - \omega_a^2) \\
 \omega_a^2(r) &= k^2 v_a^2 \\
 \omega_h^2(r) &= \frac{v_s^2}{v_a^2 + v_s^2} \omega_a^2 \\
 \omega_{i,s}^2(r) &= \frac{1}{2r^2} (k^2 r^2 + m^2) (v_a^2 + v_s^2) [1 \pm (1 - \alpha^2)^{1/2}] \\
 \alpha^2(r) &= \frac{4k^2 r^2}{k^2 r^2 + m^2} \frac{v_a^2 v_s^2}{(v_a^2 + v_s^2)^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (12.35)$$

我们看到,即使经过冗长的代数计算,本征值  $\omega^2$  仍嫌复杂,以至于无法轻易判断  $\theta$  箍缩是否稳定。当结果可通过数值确定时,对  $\theta$  箍缩,有一种更简单的方法可得到期望的信息。

### 12.6.3 $\theta$ 箍缩的稳定性

确定  $\theta$  箍缩稳定性的另一种方法涉及能够证明  $\omega^2$  必恒为正的积分关系的推导。用一般磁流体力学稳定性方程[式(12.13)]点乘  $\xi^*$ ,并对等离子体空间积分,我们即可得到这一积分关系。进行计算时,将位移矢量展开为  $\xi = \xi_{\perp} + \xi_{\parallel} \mathbf{b}$ ,其中,  $\xi_{\perp} = \xi_r \mathbf{e}_r + \xi_{\theta} \mathbf{e}_{\theta}$ ,且  $\xi_{\parallel} = \xi_z$ 。充分利用平衡关系  $B' = -\mu_0 p'/B$  和平行扰动磁场表达式  $B_{1z} = \mathbf{b} \cdot \nabla \times (\xi_{\perp} \times \mathbf{B}) = (\mu_0 p'/B) \xi_z - B \nabla \cdot \xi_{\perp}$ ,于是积分函数中各项可写为:

$$\left. \begin{aligned}
 \xi^* \cdot \nabla (\gamma p \nabla \cdot \xi) &= \nabla \cdot [(\gamma p \nabla \cdot \xi) \xi^*] - \gamma p |\nabla \cdot \xi|^2 \\
 \xi^* \cdot \nabla (\xi \cdot \nabla p) &= \nabla \cdot [(\gamma p \nabla \cdot \xi) \xi^*] - p' \xi_r (\nabla \cdot \xi_{\perp}^* - ik \xi_{\parallel}^*)^2 \\
 \xi^* \cdot \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B} &= \frac{1}{\mu_0} \{ \nabla \cdot [B_1 \times (\xi_{\perp}^* \times \mathbf{B})] - |B_{1r}|^2 - |B_{1\theta}|^2 - |B_{1z}|^2 \} \\
 \xi^* \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B}_1 &= -\mu_0 \left[ \frac{p'}{B} \right]^2 |\xi_r|^2 + p' \xi_r^* \nabla \cdot \xi_{\perp} + ik p' \xi_{\parallel}^* \xi_r
 \end{aligned} \right\} \quad (12.36)$$

计算等离子体体积分时,注意到由高斯定理知,对内模边界条件,所有散度项积分均为0。提取各项并求解  $\omega^2$ ,便得到期望的稳定性关系式。经过简短计算得到:

$$\omega^2 = \frac{\int [ |B_{1r}|^2 + |B_{1\theta}|^2 + B^2 |\nabla \cdot \xi_{\perp}|^2 + \gamma p |\nabla \cdot \xi|^2 ] dr}{\int \rho |\xi|^2 dr} \quad (12.37)$$

由于积分函数中各项均为正,故立即有  $\omega^2 > 0$ ,因此直线  $\theta$  箍缩对所有磁流体模均稳定。可惜的是,有这么好的稳定性的直线  $\theta$  箍缩却不能弯成环形,因为一旦弯成环形,就会出来一堆与环向力平衡相关的问题。值得指出的是,点乘  $\xi^*$  并对等离子体体积积分这种处理对任意磁流体位形均适用。但对  $\theta$  箍缩平衡以外的位形,最终的积分函数有正有负,因此无法一眼就看清其稳定性。

## 12.7 直线 $Z$ 箍缩中的 $m=0$ 模

磁流体力学稳定性理论的下一项应用是  $Z$  箍缩。这里同样需要将扰动处理成具有任意  $m$  和  $k$  的函数。但如果我们仅限于讨论  $m=0$  的模,计算上要容易得多。对这种模,我们可以导出一个简化的微分方程,并得到本征值的解析表达式。计算表明, $m=0$  模对于典型的  $Z$  箍缩分布是不稳定的,除非在大半径处压强下降得足够慢。本征函数的图像类似于前述图 12.3 中所示的形状,因此通常称为“腊肠不稳定性”。

### 12.7.1 微分方程的推导

由于  $m=0$  模扰动有  $B_{1r} = B_{1z} = 0$  及  $\xi_\theta = 0$ ,因此对它的分析能够简化。对一般磁流体力学稳定性方程[式(12.13)]的右边运用矢量恒等式  $(\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1 \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}_1 - \nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1)$ ,于是方程右边各项可得到简化。最后,分析中不是采用  $\xi_r$  和  $\xi_z$ ,而是引入两个新的等效未知量  $\xi \equiv \xi_r$  和  $\nabla \cdot \xi \equiv (r\xi_r)'/r + ik\xi_z$ ,这样分析过程可进一步简化。

在上述假设下,扰动压强和磁场简化为:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -p'\xi - \gamma p \nabla \cdot \xi \\ B_{1\theta} &= -(B_0/r)'r\xi - B_0 \nabla \cdot \xi \end{aligned} \right\} \quad (12.38)$$

将  $p_1$  和  $B_{1\theta}$  代入动量方程的  $z$  分量中:

$$-\omega^2 \rho \left[ \nabla \cdot \xi - \frac{(r\xi)'}{r} \right] = k^2 \left[ p_1 + \frac{B_0 B_{1\theta}}{\mu_0} \right] \quad (12.39)$$

经过简短计算,可证明  $\nabla \cdot \xi$  仅以代数形式出现:

$$\nabla \cdot \xi = \frac{1}{r} \left[ \frac{2k^2 v_a^2 \xi - \omega^2 (r\xi)'}{k^2 (v_s^2 + v_a^2) - \omega^2} \right] \quad (12.40)$$

将该表达式代入动量方程  $r$  分量,得到最终方程:

$$\omega^2 \rho \xi = \left[ p_1 + \frac{B_0 B_{1\theta}}{\mu_0} \right]' + \frac{2B_0 B_{1\theta}}{\mu_0 r} \quad (12.41)$$

通过代数运算,最终表达式可写为下述形式:

$$[A_1(r\xi)']' + A_2(r\xi)' + A_3(r\xi) = 0 \quad (12.42)$$

计算显示  $A_2 = 0$ 。接下来,假定等离子体处于临界稳定状态。具体说就是,假设  $\omega^2 \ll k^2(v_a^2 + v_s^2)$ 。于是系数  $A_1$  和  $A_3$  可大大简化,并得到期望的本征值方程形式:

$$\omega_i^2 \frac{d}{dr} \left[ \frac{\rho}{r} \frac{d}{dr} (r\xi) \right] - k^2 \left[ \omega_i^2 \frac{\rho}{r} + \frac{2\gamma p K}{r^3} \right] (r\xi) = 0 \quad (12.43)$$

式中,

$$K(r) = \frac{r}{\gamma p} \frac{dp}{dr} + \frac{2B_0^2}{B_0^2 + \gamma \mu_0 p} \quad (12.44)$$

为了集中讨论不稳定性,令  $\omega_i^2 = -\omega^2$ 。

### 12.7.2 $m = 0$ 模的稳定性

$m = 0$  模的稳定性可通过求解方程(12.43)然后判断本征值  $\omega_i^2$  的符号来确定。 $\omega_i^2$  的符号取决于  $K(r)$  的分布。对于典型分布,通常  $K(r)$  在等离子体的大部分区域为正,仅在压强很小的边缘可能为负,也可能非负。

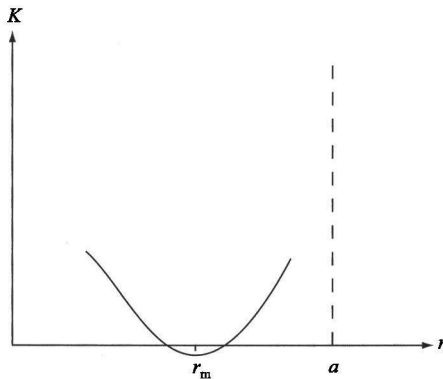


图 12.14  $Z$  箍缩中弱不稳定模  $m = 0$  中的  $k(r)$  函数曲线

对  $0 < r < a$ , 如果  $K(r)$  为正,那么对式(12.43)点乘  $\xi^*$  并对等离子体体积积分,很容易证明等离子体是稳定的( $\omega_i^2 < 0$ )。但如果  $K(r)$  为负,即使是在很小的区域内,等离子体也是不稳定的。为了证明该结论,假定  $K(r)$  形式如图 12.14 所示,并在最低点  $r = r_m$  附近作泰勒展开:

$$K(r) \approx -|K_m(r_m)| + \frac{d^2 K_m(r_m)}{dr_m^2} \frac{(r - r_m)^2}{2} \quad (12.45)$$

接下来,按如下方式引入归一化变量  $\bar{\omega}_i, k^-, x$  :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_i^2 &= (2|K_m|v_s^2/r_m^2)\bar{\omega}_i^{-2} \\ k^2 &= (K_m''/8|K_m|)k^2 \\ r &= r_m + 2(|K_m|/K_m'')^{1/2}(\bar{\omega}_i/k^-)^{1/2}x \end{aligned} \right\} \quad (12.46)$$

于是本征值方程简化为

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \left[ \frac{k^-}{2} \left[ \frac{1}{\bar{\omega}_i} - \bar{\omega}_i \right] - x^2 \right] \xi = 0 \quad (12.47)$$

为使本征函数在远离最小点的地方依然有意义,按局域坐标  $x$  设定的边界条件必须是  $\xi(\pm\infty) \rightarrow 0$ 。这样求解方程(12.47),易知其解为厄米函数。在  $x = \pm\infty$  处为零的本征函数只有若干离散的本征值  $\bar{\omega}_i$ , 这些本征值由  $(k^-/2)(\bar{\omega}_i^{-1} + \bar{\omega}_i) = 2n+1$  解得,式中  $n$  为正整数。对于最快的模( $n=0$ ),  $\bar{\omega}_i$  的解为:

$$\bar{\omega}_i = \frac{k^-}{1 + (1 + k^2)^{1/2}} \rightarrow 1 \quad (12.48)$$

极限值对应于最坏情形  $k^- \rightarrow \infty$ 。相应的本征函数可写成如下的埃尔米特多项式形式:

$$\xi = \exp(-x^2/2) H_{2n+1}(x) \quad (12.49)$$

因为  $\bar{\omega}_i > 0$ , 系统显然不稳定。利用非归一化变量,最大增长率可以写成:

$$\omega_i = (2|K_m|)^{1/2} \frac{v_s}{r_m} \quad (12.50)$$

结论是:如果在等离子体中系数  $K_m$  为负,则  $Z$  箍缩对  $m=0$  模是不稳定的。物理上说,这种模的不稳定性是由磁场线的坏曲率驱动的。但由于等离子体具有可压缩性,因此可以存在一个致稳的力。为使等离子体表面变形为腊肠扰动的形式,我们必须对等离子体做压缩功,它起致稳作用。条件  $K_m = 0$  意味着这两种力互相平衡。

### 12.7.3 压强分布对稳定 $m=0$ 模的意义

稳定条件  $K_m(r) > 0$  通常在等离子体边界附近很难满足,此处压强小而压强梯度(对于约束等离子体)为负。这一直觉从文献中经常出现的下述稳定条件即可看出:

$$-\frac{r}{p} \frac{dp}{dr} < \frac{2\gamma B_0^2}{B_0^2 + \gamma\mu_0 p} \quad (\text{对稳定性}) \quad (12.51)$$

显然,如果在等离子体边界  $p \rightarrow 0$  过快,式(12.51)左边的项就会增大,不等式将不成立。

在边界压强随半径减小的地方,如果我们假设等离子体约束良好,即随着  $r \rightarrow a$ ,  $\gamma\mu_0 p(r) \ll B_0^2(r)$ ,那么该处的不稳定性最大增长率可得到量化。根据这个假设,稳定性条件可简化为:

$$-\frac{r}{p} \frac{dp}{dr} < 2\gamma \quad (12.52)$$

这意味着压强衰减必须比下式还要慢:

$$p \sim \frac{1}{r^{2\gamma}} = \frac{1}{r^{10/3}} \quad (12.53)$$

式中数值对应于  $\gamma = 5/3$  的情形。这是一个相当快的衰减速率,尽管出于稳定性需要等离子体边缘压强必须保持有限。

$m = 0$  模是严重限制简单  $Z$  箍缩宏观稳定性的两种强磁流体力学不稳定性之一(另一种不稳定性是  $m = 1$  模,将在下节中讨论)。特别是在实际的实验中,我们很难通过精确控制压强分布来有效抑制  $m = 0$  模,因此等离子体柱的大破裂难以避免。这也就是为什么  $Z$  箍缩很难作为聚变反应堆的一种选择。在悬浮偶极器位形(LDX)中, $m = 0$  稳定性判据同样起着重要作用。以后将说明,LDX 位形在抑制这种潜在的灾难性不稳定性方面能够提供更高级的压强分布控制。

## 12.8 直线 $Z$ 箍缩中的 $m = 1$ 模

$m = 1$  模是第二种影响直线  $Z$  箍缩的宏观不稳定性。正如在其他情形下所述,对任意波数  $k$  下的这种模做全面研究需要进行大量分析。好在这些分析的结果已经为人所知多年,因此我们可以利用这些结果来做相对简单的推导,这也与本书的初衷一致。要用的主要结果是:①只有  $m = 1$  模需要重视, $m \geq 2$  的模已被证明是稳定的;②最不稳定的波数是  $k \rightarrow \infty$ ;③通过设定  $\omega^2 = 0$ ,我们即可将分析集中在临界稳定性上。

从上述假设出发,易得  $m = 1, k \rightarrow \infty$  的临界稳定的本征值方程。不稳定性扰动的基本驱动机制类似于图 12.4 所示。分析的结果是导出本征函数和本征值波数  $k_n$  的无穷集,这里  $n$  是整数。每个解对应于一个临界稳定的、取极限  $k \rightarrow \infty$  时有效的本征函数。注意,在这种分析里, $k^2$  扮演着本征值的角色,因为  $\omega^2$  已被设定为零。



进行下列推导时应记住,为使本征函数在  $z = \pm \infty$  处有界,轴向边界条件要求  $k$  必须为纯实数。因此,原则上,当等离子体参数调整得使“最坏模”越过稳定性边界(这个边界相当于过零的最大本征值:  $k_{\max}^2 \rightarrow 0$ )时, $Z$  箍缩将出现完全临界稳定现象。这种现象一旦出现,将不再存在有界的本征函数(即在  $k^2 > 0$  时,物理上不存在临界稳定状态),等离子体变成稳定的。不幸的是,分析显示,在简单  $Z$  箍缩中,对于  $m=1$  模,等离子体总是不稳定的。对足够高的  $k$ ,总是存在一个有限的临界态。

最后应当指出,虽然下面的计算是完全自洽的,但在  $m \geq 1$  的模中, $m=1$ ,  $k \rightarrow \infty$  模是最不稳定的模式这一点绝不是显然的。后面我们会通过一个具体例子来说明这一点。

### 12.8.1 动量方程的 $\theta$ 分量

推导的第一步是分析在  $\omega^2 = 0$  的极限情形下, $m=1$  模的动量方程的  $\theta$  分量(即平行分量):

$$J_z B_{1r} - \frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} = 0 \quad (12.54)$$

代入  $B_{1r} = (iB_0/r)\xi$ ,  $p_1 = -(dp/dr)\xi - \gamma p \nabla \cdot \xi$  (这里  $\xi \equiv \xi$ ), 并利用  $Z$  箍缩平衡关系,得到简单条件:

$$\nabla \cdot \xi = 0 \quad (12.55)$$

这个模是非压缩的,即  $d\rho/dt = dp/dt = 0$ 。

在此条件下,扰动压强简化为:

$$p_1 = -\frac{dp}{dr}\xi \quad (12.56)$$

这一关系是进一步分析所需要的。

### 12.8.2 动量方程的 $z$ 分量

推导的第二步是分析动量方程的  $z$  分量,即

$$J_{1r} B_\theta - \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0 \quad (12.57)$$

代入  $\mu_0 J_{1r} = iB_{z1}/r - ikB_{\theta 1}$ , 得到:

$$\frac{B_\theta}{\mu_0} \left[ \frac{iB_{1z}}{r} - ikB_{1\theta} \right] - ikp_1 = 0 \quad (12.58)$$

现在的任务是消去  $B_{1z}$  并确定  $B_{1\theta}$  和  $\xi$  的关系。最终的本征值方程里只需要出现  $B_{1\theta}$ 。利用条件  $\nabla \cdot B_1 = 0$ , 可轻易消去  $B_{1z}$ 。对  $m = 1$  模得到:

$$B_{1z} = -\frac{1}{kr} \left[ B_{1\theta} + \frac{d}{dr}(B_{\theta} \xi) \right] \quad (12.59)$$

将其代入式(12.57), 得到  $B_{1\theta}$  表达式:

$$B_{\theta} B_{1\theta} = \frac{k^2 r^2}{1 + k^2 r^2} \left[ \mu_0 \frac{dp_1}{dr} \xi - \frac{B_{\theta}}{k^2 r^2} \frac{d}{dr}(B_{\theta} \xi) \right] \quad (12.60)$$

注意, 到此为止我们并未用到假定  $k \rightarrow \infty$ 。这个假定要到求得本征值方程的最终形式时才会用到。

### 12.8.3 动量方程的 $r$ 分量

推导的最后一步是简化动量方程的  $r$  分量:

$$J_{z1} B_{\theta} + J_z B_{\theta 1} + \frac{\partial p_1}{\partial r} = 0 \quad (12.61)$$

经过简短计算, 上式改写为:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r^2 (B_{\theta} B_{1\theta} + \mu_0 p_1) \right] - 2\mu_0 \frac{p_1}{r} - i \frac{B_{\theta} B_{1r}}{r} = 0 \quad (12.62)$$

将用  $\xi$  表示的  $B_{1\theta}$ ,  $B_{1r}$  和  $p_1$  代入上式, 化简, 得到:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ \frac{r^3 B_{\theta}^2}{1 + k^2 r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{\xi}{r} \right) \right] + \left[ \frac{d}{dr} (r B_{\theta}^2) \right] \left[ \frac{\xi}{r} \right] = 0 \quad (12.63)$$

利用极限  $k \rightarrow \infty$ , 式(12.63)可进一步简化。最终, 待求的本征值方程的形式为:

$$\frac{1}{r} (r B_{\theta}^2 \psi')' + k^2 (r B_{\theta}^2)' \psi = 0 \quad (12.64)$$

式中  $\psi = \xi/r$ 。

### 12.8.4 $m = 1$ 模的本征值方程的解

很明显, 本征值方程的解很大程度上取决于系数  $(r B_{\theta}^2)'$  的符号。对典型的  $Z$  箍缩分布, 轴上的电流密度分布平坦, 且在等离子体边缘处减至零。相应的磁场先随半径  $r$  线性增长, 然后在电流以外随  $1/r$  减小。图 12.15 描绘了一个特例。

因此, 在电流分布之外,  $B_{\theta} \sim 1/r$ , 系数满足  $(r B_{\theta}^2)' \sim -1/r^2 < 0$ , 对应于单调指数解(即稳定的)。相反, 在电流分布内,  $B_{\theta} \sim r$ , 故有  $(r B_{\theta}^2)' \sim +r^2 > 0$ 。此时解是振荡的(即不稳定的)。从数学上说, 不稳定的本征函数应被限制在等离子体内部。

下面通过一个具体例子来证明这一点。

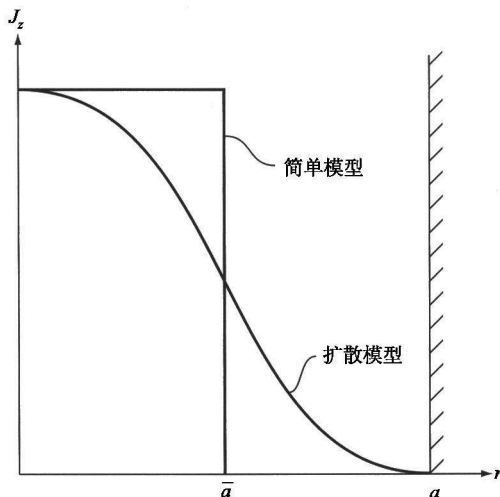


图 12.15 Z 箍缩的扩散模型和简单模型(二者在轴上的电流密度以及总电流匹配)

考虑一个简单平衡模型,其电流密度分布如图 12.15 所示。为使这一模型与实际的扩散模型在轴上的电流密度相匹配,我们定义  $\bar{a}$  :

$$\bar{a} \equiv \frac{\mu_0 I}{2\pi B'_0(0)} \quad (12.65)$$

式中,  $I$  是等离子体总电流;  $B'_0(0)$  是实际扩散磁场的导数。

对这一简单模型,本征值方程简化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r^3}(r^3 \psi')' + 3k^2 \psi &= 0 & 0 < r < \bar{a} \\ r \left[ \frac{\psi}{r} \right]' - k^2 \psi &= 0 & \bar{a} < r < a \end{aligned} \right\} \quad (12.66)$$

要求得本征函数,需要对每一区域的  $\psi$  进行求解,并且选择的积分常数必须满足以下边界条件:在原点,由正则条件知  $\xi(0) = 0$ ;对内模,要求  $\xi(a) = 0$ 。利用界面  $r = \bar{a}$  处的匹配条件可得本征值关系式。具体来说就是,因为模型中不存在面电流,因此这一匹配条件要求  $[\psi]_{\bar{a}} = 0$ , 且  $[\psi']_{\bar{a}} = 0$ 。

满足上述边界条件的本征值方程的解可用贝塞尔函数表达如下:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\text{inner}} &= \hat{C}_1 J_1(\sqrt{3}kr) \\ \psi_{\text{outer}} &= \hat{C}_2 r^2 \left[ K_1(kr) - \frac{K_1(ka)}{I_1(ka)} I_1(kr) \right] \end{aligned} \right\} \quad (12.67)$$

在  $r = a^-$ , 取极限  $k \rightarrow \infty$ , 可得到非常精确的解的渐近形式:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\text{inner}} &\approx \frac{C_1}{\sqrt{r}} \cos(\sqrt{3}kr - 3\pi/4) \\ \psi_{\text{outer}} &\approx \frac{C_2}{\sqrt{r}} (e^{-kr} - e^{-2ka+kr}) \end{aligned} \right\} \quad (12.68)$$

式中  $C_1, C_2$  取代了  $\hat{C}_1, \hat{C}_2$  作为等效的积分常数。由  $\xi$  (或等效的  $\psi$ ) 在  $r = a^-$  处的两个匹配条件可得到待求的本征值关系式:

$$\cot(\sqrt{3}ka^- - 3\pi/4) = \sqrt{3}e^{-ka^-} \tanh[k(a - a^-)] \approx 0 \quad (12.69)$$

更简单的第二个等式对应于取极限  $k \rightarrow \infty$  的情形。

对式(12.69)的研究表明,存在无数个临界稳定的本征值,它们对应于余切函数的每个零。特别地,如果  $n$  是一个很大的正整数,则相应的临界波数  $k_n$  为:

$$k_n a^- \approx \left[ n + \frac{1}{4} \right] \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad (12.70)$$

显然,随着  $n \rightarrow \infty$ , 临界波数变得越来越大。不存在一组等离子体参数使得“最大的”临界波数过零。也就是说,总是存在一个临界波数,使得  $m = 1$  模在边界处是不稳定的。

最后值得指出的是,对式(12.64)的更复杂的分析表明,如果分布中每一点的系数  $(rB_0^2)'$  为正,那么对于  $m = 1, k \rightarrow \infty$  模,任何扩散  $Z$  箍缩都是不稳定的。换句话说,  $m = 1$  模稳定的一般条件是在等离子体中的任何地方都有:

$$\frac{d}{dr}(rB_0^2) < 0 \quad (\text{对稳定性}) \quad (12.71)$$

总之,  $m = 0$  和  $m = 1$  不稳定性的叠加,使得简单  $Z$  箍缩不可能成为聚变堆的理想选择。这两种模对 LDX 的稳定性也有着重要影响,但是这种位形通过对磁场的巧妙设计使其具有稳定这些非常危险的宏观不稳定性的潜力。

## 12.9 本章总结

本章的要点是:①引入了一些与线性磁流体力学平衡有关的基本概念;②给出了磁流体力学不稳定性的主要驱动源的物理图像;③对磁流体力学稳定性问题的一般形式体系进行了描述;④将这一数学形式系统应用于一些简单位形。

具体来看,分析主要集中于理想磁流体力学情形。外部的理想磁流体力学模型

通常导致等离子体的灾难性损失。了解如何避免这种不稳定性很重要。将压强和电流控制在低水平虽然有助于稳定这些模,但是与聚变堆的需求相悖。此外,由磁场线冻结原理可知,理想磁流体力学模型很顽固,几乎不受各种等离子体物理效应的影响。

垂直电流和平行电流均可驱动不稳定性。这些不稳定性主要取决于压强梯度与曲率半径矢量的相对方向。如果二者的方向是平行的,那么这种曲率是好的;如果二者呈反平行,则曲率是坏的。

我们为理想磁流体力学稳定性的一般性问题建立起一套优美的形式体系,它由 3 个耦合的、关于等离子体位移  $\xi$  和本征值  $\omega^2$  的偏微分方程组成。但由于位形的多维性,这一模型在多数情况下很难求解。尽管如此,目前我们已能够证明,一般来说,只有当本征值过零时,系统才会越过临界稳定性边界。也就是说,临界稳定相当于要求  $\omega^2 = 0$ 。

本章还将上述形式化体系应用于一些具体位形。现已证明,无限大均匀等离子体总是稳定的,且存在 3 支振荡波:剪切阿尔文波、压缩阿尔文波和磁声波。我们还对直线  $\theta$  箍缩的稳定性进行了研究,并利用积分关系证明,这种位形总是稳定的。但正如前文指出的,它不能弯曲成环向平衡。最后,我们研究了  $Z$  箍缩中的  $m = 0$  模和  $m = 1$  模的稳定性。我们推导并求解了  $m = 0$  情形下的本征值微分方程。求得的本征值显示, $Z$  箍缩是不稳定的,除非压强随半径降到足够低。对  $m = 1$  模的分析集中在极限  $k \rightarrow \infty$  情况下的临界稳定性问题上。结果表明,对于这种模,直线  $Z$  箍缩的中心总是不稳定的。这些不稳定性一旦被激发,就会在毫秒级的磁流体力学时间尺度上造成等离子体的宏观损失。因此,简单  $Z$  箍缩从聚变堆的角度看没有任何可取性。

下一步的任务是将这一稳定性公式体系应用于一个简单但不失一般性的二维磁流体力学平衡模型,并就多种实际聚变位形来确定压强和电流的极限值。

## 参考书目

描述磁流体力学平衡的许多著作也都对磁流体力学稳定性问题进行了论述。因此,本章的参考书目与第 11 章中列出的非常相似。下列参考书目几乎完全集中于磁流体力学平衡和稳定性的讨论。

- Bateman, G. (1978). *MHD Instabilities*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- Biskamp, D. (1993). *Nonlinear Magnetohydrodynamics*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Freidberg, J. P. (1987). *Ideal Magnetohydrodynamics*. New York: Plenum Press.
- Goedbloed, H. and Poedts, S. (2004). *Principles of Magnetohydrodynamics*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Kadomstev, B. B. (1966). *Hydromagnetic Stability of a Plasma* (Leontovich, M. A., editor), Vol. 2. New York: Consultants Bureau.
- Lifschitz, A. E. (1989). *Magnetohydrodynamics and Spectral Theory*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Wesson, J. (2004). *Tokamaks*, third edn. Oxford: Oxford University Press.
- White, R. B. (2001). *Theory of Toroidally Confined Plasmas*. London: Imperial College Press.

## 习 题

**12.1** 本题研究等离子体的稳定性。这里等离子体由冷离子背景和两束互相贯穿的冷电子束组成。假设平衡时,  $n_i = 2n_0$ , 两束电子束的密度相等:  $n_{e1} = n_{e2} = n_0$ , 且假定  $T_i = T_{e1} = T_{e2} = B_0 = 0$ 。第一束向左传输, 第二束向右传输, 速度大小相等但方向相反:  $\pm v_0$ 。假定束的横向尺寸足够大, 等离子体可简化为一维模型, 且待求距离平行于束的速度。

① 就形式为  $Q_1(\mathbf{r}, t) = Q_1 \exp(-i\omega t + ikz)$  的一维静电扰动情形推导扩散关系式。假定离子质量无限大且碰撞可忽略, 对每束电子分别考虑其流体行为。

② 计算这种“双束不稳定性”的不稳定波数的范围(用  $n_0, v_0$  表达)。

**12.2** 假定仅有单束电子以速度  $v_0$  注入, 且离子质量虽大但有限, 重复求解问题12.1。

**12.3** 喜欢代数演算的读者, 试推导式(12.17)。

**12.4** 喜欢代数演算的读者, 试推导式(12.35)。

**12.5** 本题推导直线  $\theta$  箍缩中传播的剪切阿尔文波的本征值关系式。等离子体位形呈柱对称性, 且有下述非零平衡量:  $p = p(r)$ ,  $\rho = \rho(r)$ ,  $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{e}_z$ 。假定扰动量全都形如  $Q_1 = Q_1(r)\exp(-i\omega t + im\theta + ikz)$ 。为了简化代数演算, 假定扰动满足不可压缩状态方程  $\nabla \cdot \xi = 0$ 。数学上看, 它将原来的含3个未知变量  $\xi_r, \xi_\theta, \xi_z$  和绝热状态方程的问题变成为有4个未知量  $\xi_r, \xi_\theta, \xi_z, \hat{p}_1 \equiv p_1 + BB_{1z}/\mu_0$  并用  $\nabla \cdot \xi = 0$  替代了绝热方程的新问题。

① 推导  $\xi(r) \equiv \xi_r(r)$  的本征值方程, 并证明它可以改写为:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{\omega^2 \mu_0 \rho - k^2 B^2}{m^2 + k^2 r^2} r \frac{d}{dr} (r \xi) \right] - (\omega^2 \mu_0 \rho - k^2 B^2) \xi = 0$$

② 利用图12.16所示的面电流模型简单分布, 求解该方程。通过分别求解 I 区和 II 区方程, 并利用界面  $r = a$  处的边界条件  $[\xi]_a = 0$  和  $[(\omega^2 \mu_0 \rho - k^2 B^2) d(r\xi)/dr]_a = 0$  进行匹配, 导出本征值关系式。取极限  $ka \ll kb \ll 1$ , 给出简单答案。提示: 令  $\xi = d\psi/dr$ 。

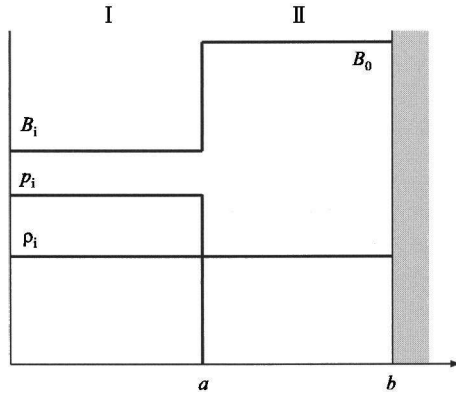


图 12.16

12.6 计算无限大均匀电阻性磁流体力学等离子体中传播的剪切阿尔文波的本征频率： $\omega = \omega(k_{\perp}, k_{\parallel})$ 。等离子体由如下平衡量表征： $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z, p = p_0, \rho = \rho_0$ 。假定欧姆定律包含弱电阻项： $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}$ 。为使代数计算简单，定义  $\gamma_D = \eta k^2 / \mu_0$  且假定  $\gamma_D \ll k_{\parallel} v_A$ 。

12.7 本题研究圆柱  $Z$  箍缩中  $m = 0$  模的黏滞效应。评估该效应的简单方法是对磁流体力学动量方程做如下修正：

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{v})$$

式中， $\mu$  是黏滞系数。为简化稳定性分析，假定  $\mu = \text{常数}$ ，并考虑满足  $\nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{v}_1) \approx -\mu k^2 \mathbf{v}_1$  的短波长（即大  $k$ ）扰动。按照书中描述的分析方法，计算临界稳定附近的本征值。描绘  $\omega_i$  关于  $k$  的函数曲线，并与不存在黏滞性的情形进行比较。黏滞性是否改变临界稳定边界？还是仅改变增长率的大小？

12.8 本题目的是确定  $Z$  箍缩中  $m = 0$  模的热传导效应。对书中所描述分析方法的主要修正，能量方程用下式代替：

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot (\kappa \nabla T)$$

热传导项的添加大大增加了分析的复杂性。然而，利用下面的分析方法可以得到简单的解析解。

① 推导考虑热传导的扰动压强  $p_1$  的修正形式。为简化计算过程，考虑大  $k$  极限并假定增长率正比于  $k$ ；当  $k \rightarrow \infty$  时， $\omega_i/k \rightarrow \text{常数}$ 。证明在此种极限下，扰动压强简化为：

$$p_1 = -\frac{\rho}{\gamma} \cdot \xi - T \frac{dn}{dr} \xi$$

② 稳定性分析的其余部分遵循书中所述，推导临界稳定的条件。证明：热传导改变了稳定性条件。通过与  $\kappa = 0$  情形比较，证明：对于足够缓变的密度分布，热传导改善稳定性；对于急剧衰减的密度分布，热传导减弱稳定性。

12.9 本题目的是确定旋转  $\theta$  箍缩中磁流体力学稳定性。推导涉及以下几步：① 计算平衡场；

②推导本征值微分方程;③构建本征值的积分关系式;④用“猜”本征函数的方法计算本征值;⑤得出你的结论。过程如下。

①一维柱对称旋转 $\theta$ 箍缩的平衡场量为 $B_z(r), p(r), \rho(r), v_\theta(r)$ 。假定,

$$\begin{aligned} B_z^2(r) &= B_0^2 - (B_0^2 - B_i^2)(1 - r^2/a^2)^2 \\ p &= p_0(1 - r^2/a^2)^2 \\ v_\theta &= \Omega r \end{aligned}$$

式中, $B_0, B_i, p_0, \Omega$ 是常数; $a$ 是等离子体边界。求出 $\rho(r)$ ,并利用其余平衡量给出 $\rho_0$ 的表达式和轴处的密度。

②对任意的平衡分布,进行旋转 $\theta$ 箍缩的线性磁流体力学平衡性分析。以下三个假设会使推导适当简化。首先,假定对平衡流系统,位移矢量和扰动速度间的关系为 $\mathbf{v}_1 = -i\omega \boldsymbol{\xi} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{v}_0$ 。其次,假定最不稳定的扰动是不可压缩的, $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$ 。第三,假定所有扰动量形如 $Q_1(\mathbf{r}, t) = Q_1(r) \exp[-i(\omega t - m\theta - kz)]$ ,且考虑 $k=0$ 。原因是 $k$ 有限导致磁场线弯曲,这起致稳作用,因此假定 $k=0$ 相当于最不稳定的模式(这并不适用于 $m=1$ 模,但不管怎样,利用该假定能简化代数演算)。本题此部分的目的是就描述系统线性稳定性的 $\psi_1(r) = r\xi_r(r)$ 情形导出单一的微分方程。为简单起见,引入多普勒平移频率 $\sigma = \omega - m\Omega$ 。

③通过对微分方程点乘 $\psi_1^*$ ,并对等离子体体积积分,构建 $\sigma$ 的积分关系式,此时分布可以任意,仅假定 $\rho(a) = 0$ 。假定相关模式对应于外模: $\psi_1(a) \neq 0$ 。

④将前面得到的平衡分布代入,并利用如下给定的试函数:

$$\psi_1(r) = \psi_a \left[ \frac{r}{a} \right]^m$$

来估计本征值 $\sigma$ 。

⑤基于上述结果,回答下列问题:是不是所有 $m$ 模都是不稳定的?是否存在触发不稳定性的临界旋转速度?如果存在,其值是多少?



# 第 13 章 磁约束聚变概念

## 13.1 引言

本章描述当前正在研究的、并有可能应用于未来聚变反应堆的各种磁场位形。我们将看到,要讨论的磁场位形概念非常之多。但真正能够应用于聚变反应堆的磁场位形,除了需要克服磁流体力学平衡与稳定性( $p$ )的困难之外,还要解决输运( $\tau_E$ )和加热( $T$ )等方面的问题。尽管如此,本书紧接着磁流体力学来介绍这些概念的意图还是很清楚的,因为用于区分这些概念的基本几何特征主要是由磁流体力学行为所决定。比较而言,输运是一个困难得多的问题,而且仅仅在托卡马克位形下取得了显著进展。至于加热,已有多种可用的技术可供选择。这种灵活性使得加热手段可以应用于大多数聚变位形中,因此加热问题不是决定约束几何的主要因素。

为了展开讨论,我们不妨回忆一下研究磁流体力学的主要目标,那就是寻求能够稳定地约束高压强等离子体,使之能最终达到聚变反应堆要求的磁场位形。多年来,总体性能最好的位形一直是托卡马克,因此可将它作为衡量其他各种位形概念的参考位形。出于这种考虑,我们先简要、定性地讨论一下托卡马克位形的优劣之处,这有助于我们准确了解各种替代位形能够解决哪些问题。

托卡马克是一种轴对称位形,具有很强的环向磁场和非常大的环向直流电流。托卡马克装置已经实现了在接近反应堆水平的等离子体压强、约束时间和温度条件下的稳定运行。换句话说,在物理性能方面,托卡马克已经基本实现了聚变反应堆的所有要求,人们期待下一代装置(例如,ITER)能够解决余下的问题。那么托卡马克面临的突出问题是什么呢?主要有两方面,首先是等离子体物理方面的问题,其次是工程技术方面的问题。下面分别予以介绍。

等离子体物理方面的突出问题主要来源于稳态运行的要求。阐述这个问题需要一个较长的推理过程。首先我们注意到,托卡马克位形所需环向电流通常是通过变压器感应产生的,这种方法在目前的脉冲运行的装置中非常有效,但是显然不适用于稳态运行的装置,所以我们需要某种外部非感应的电流驱动方式。目前已有一些可行的非感应电流驱动方法,但是它们将功率转变为电流的效率不高,如果全部环向电流都必须通过这些方式来驱动,那么要取得功率平衡,所需的外部输入功率就将大到不可接受的地步。幸好托卡马克中存在一种由等离子体输运自然形成的

电流,即所谓“自举电流”,原则上它能够在无需外界电流驱动的情形下提供维持托卡马克位形所需的大部分环向电流。但自举电流的大小与等离子体压强的分布密切相关。人们发现,要取得满足可观的功率平衡所需的足够大的自举电流占总电流的比例,所需的等离子体压强远远超出了无限大真空边界条件下等离子体位形的磁流体力学  $\beta$  极限。不过,如果等离子体是密封于理想导体壁之内,那么理想导体壁将会产生很强的致稳作用,这样,所需的等离子体  $\beta$  值将低于磁流体力学  $\beta$  极限。

可以看出,精确判断磁流体力学稳定边界是一个微妙而关键的问题。其困难来源于环绕等离子体的第一壁的行为。尽管理想导体壁具有很强的致稳作用,但是实际的电阻性导体壁却没有这种作用。但是,电阻性导体壁的不稳定性增长特征时间(通常为毫秒量级)要比真空情形下的特征时间(通常为微秒量级)要长很多,因此我们可以通过反馈控制来实现平衡。理想导体壁情形下的等离子体比压  $\beta$  的极限值与电阻性导体壁情形下的  $\beta$  极限存在着很大差异,实验中能够达到的  $\beta$  极限主要取决于人们对电阻壁模的反馈致稳能力。这种控制能力非常关键,它直接决定了托卡马克位形能否在维持所需的总体功率平衡的要求下,以足够低的电流驱动功率实现稳态运行。

因此,提出能够改善标准托卡马克性能的新想法和新概念就成为一个重要领域。这一新概念是:在无需额外的电流驱动,并且不违反适当的磁流体力学稳定性极限的条件下实现稳态运行。一种解决办法是所谓“先进托卡马克(AT)运行模式”,人们预期,将剖面控制和反馈致稳结合起来可以解决这些困难,但是仍有待实验的验证,而且这无疑将增加托卡马克概念的物理复杂性。另一种直接解决这一问题的方式是采用仿星器作为替代方案,仿星器是一种三维的、具有内在稳态性质的磁场位形,且无需非感应电流驱动。与托卡马克相比,它的主要缺点是需要采用技术更加复杂、成本更加昂贵的磁体来产生三维仿星器磁场。

托卡马克面临的第二个重要问题实质上是工程技术问题。为了实现所需的稳态功率平衡,托卡马克装置需要有很强的环向磁场才能维持磁流体力学平衡,而能够提供这种强的环向磁场的磁体必须采用超导材料。从工程角度来看,超导磁体当然是可行的,但是它很昂贵,同时也增加了托卡马克反应堆的技术复杂性。如果对环向场系统的要求能够大大降低甚至消除,那么聚变反应堆的前景自然会更具吸引力。尽管仿星器使这个问题变得更加困难,但其他各种替代概念则明显有助于改善这种状况。这些概念包括:球形托卡马克、反向场箍缩(RFP)、球马克、场反位形(FRC)和悬浮偶极器(LDX)等。但和托卡马克相比,可以明显看出,反向场箍缩、球马克和场反位形这几种概念的约束性性能较差,无壁情形下的磁流体力学值也较低。即便如此,为了缓解这些困难,人们已经提出了一些非常精巧的设想,我们将在本章后面予以讨论。LDX是一种新概念,直到最近才具有可操作性,因此评估其性能还为时尚早。

总之,我们看到,这里涉及多方面的权衡——每一种替代概念都改善了托卡马克概念某一方面的性能,但是却以牺牲其他方面性能为代价。经过多年的实验研究,这些多方权衡的结果牢固确立了托卡马克在实现聚变反应堆之路上的优先地位。时间将会证明,是否存在在反应堆总体要求上,即在等离子体物理和聚变技术两方面,均可取代托卡马克的某种替代概念。

在举证证明这些观点时,人们总爱拿托卡马克作为其他各种替代概念优劣比较的参照基准。然而,就磁流体力学行为来说,托卡马克是一种较难分析的概念。所以,为了描述方便,我们从最简单的位形开始讨论,然后逐步深入到更复杂的位形。研究各种位形的目的是要了解其磁流体力学平衡性质,并计算出相应的为克服磁流体力学不稳定性所需的等离子体比压  $\beta$  和压强的极限值。

基于上述考虑,我们先来讨论 LDX 和 FRC 位形概念,相关结果可以从上一章对 Z 箍缩装置的分析中直接获得。其余的位形概念分析起来就相当困难了。为了导出所需的信息,我们引入一种特别简单的模型,称为表面电流模型。尽管该模型中的参数分布只是对实际实验过程中参数分布的粗略近似,但至少我们可以得到完整的分析。与采用高级理论分析或采用更接近实际参数分布的磁流体力学数值模拟分析的结果比较,可以看出,在磁流体力学平衡和稳定性  $\beta$  极限方面,表面电流模型的分析结果定性上和半定量上都与那些更高级、更实际的理论模型结果符合得很好。利用表面电流模型,我们可以获得反向场箍缩、球马克、托卡马克、拉长型托卡马克,以及先进托卡马克等位形的磁流体力学分析结果。至于仿星器,由于其非常复杂的三维平衡,因此讨论主要是描述性的,并参考了有关的数值研究的结果。

## 13.2 悬浮偶极器(LDX)

### 13.2.1 LDX 简介

悬浮偶极器( Levitated Dipole Experiment, LDX)是一种相当新颖的聚变概念。其最初设想源于天体物理学观测,特别是对土星的观测。人们发现,在土星周围,存在着一个受到土星偶极磁场约束的稳定的长寿命等离子体环。LDX 实验装置于 2005 年在美国麻省理工学院(MIT)建设完成,其目的是要在地球上复制出类似的、实验室规模的、稳定的长寿命等离子体。

如图 13.1 所示,LDX 的磁场位形主要由一个简单的、能够产生偶极磁场的环电流组成。线圈电流和等离子体电流均为纯粹环向的,产生单纯的极向磁场。等离子体形成一个环绕偶极线圈的中空的环向壳层。等离子体压强  $p$ 、极向磁场  $B_p$  和电流密度  $I_p$  沿着中平面  $Z = 0$  的分布如图 13.2 所示。注意,当等离子体中的电流密度必须改变正负号的时候,总存在一个与线圈电流同方向的净的等离子体电流以

保持环向力平衡。

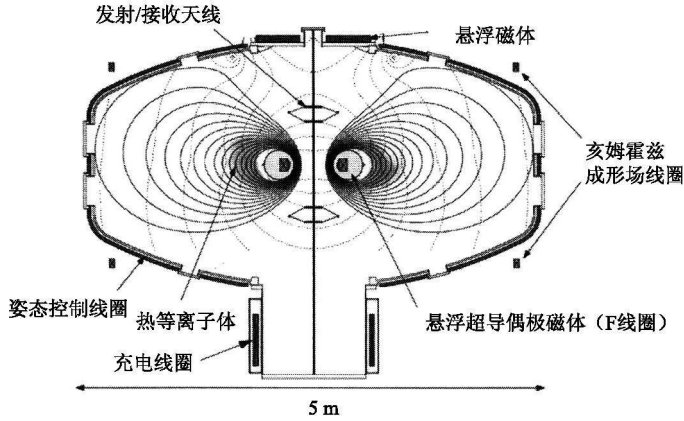


图 13.1 LDX 装置的概念图(承蒙 D. Garnier 提供)

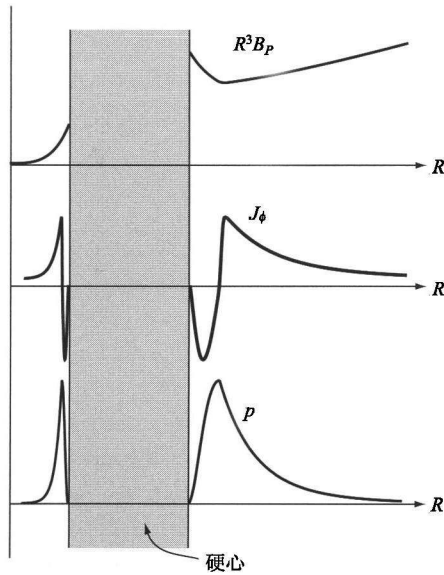


图 13.2 LDX 装置中  $p, B_p$  和  $J_\phi$  沿中平面  $Z = 0$  的分布图(承蒙 L. Guazzotto 提供)

LDX 的一个重要特点是需要使线圈悬浮于真空室中。这是因为如果采用机械支撑,那么等离子体在拓扑上就必然会在某些位置与这些支撑结构相交。这将冷却等离子体,并使支撑结构变热。这在实验上是无法接受的,反应堆中就更不行。实际上,如果线圈是用超导材料制成的,那么就可以使其长时间地悬浮在空中。很明显,这样做增加了这种聚变概念的技术复杂性,但是不管怎么说,对实验室规模的实验装置来说仍然是可行的。

LDX 的科学目标是通过微波加热产生约束良好的热等离子体,微波共振频率

选定为电子回旋频率。人们试图弄清楚,对于给定的微波输入功率,能够取得的稳定约束的等离子体压强有多高,相应的温度有多高。等离子体压强的极限值主要由磁流体力学因素所决定,而可实现的温度主要取决于输运,尤其是热传导和可能的热对流。我们可以对 LDX 中等离子体压强极限值进行定量估计,这些是本小节的重点。对输运的估计要困难得多,必须等到取得实际的实验数据后才谈得上对 LDX 概念下输运性质的了解。

现在我们来考虑磁流体力学压强极限问题。详细分析表明,LDX 的主要物理性质可以用一个线性的圆柱几何体来精确描述。环效应会在定量上对结果产生一定影响,但如果只是定性地,或非定量地了解磁流体力学行为,则不是必要的。因此本小节分析采用图 13.3 所示的 LDX 圆柱体模型。我们注意到,平衡情形下主要的场量是  $p(r)$  和  $B_\theta(r)$ ,与单纯 Z 箍缩情形类似。但是中心线圈所起的作用就好像嵌入 Z 箍缩装置的硬心,对于稳定 LDX、抑制危险的  $m = 0$  和  $m = 1$  模起着重要作用。

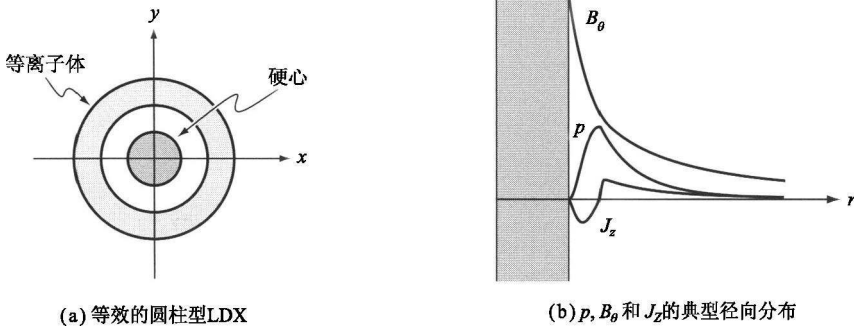


图 13.3

分析表明,LDX 的稳定取决于 3 个压强极限值(即  $\beta$  极限):一个缘于平衡考虑,另一个针对  $m = 0$  模式,第三个针对  $m = 1$  模式。 $m = 0$  的腊肠模设定了最严格的  $\beta$  极限。虽然如此,由此得到的临界  $\beta$  值依然很高,在  $1/2$  量级。此外,这种稳定性无需理想导体壁即可实现。由分析得到的第二个重要结果与硬心线圈电流的大小有关。很明显,如果没有这个电流,LDX 位形即退化为单纯 Z 箍缩位形,它总是不稳定的。分析还预言了抑制  $m = 0$  和  $m = 1$  模的增长至少需要多大的线圈电流才能得到所需的稳定性。

最后,尽管对 LDX 的研究还处于非常初步的阶段,但我们依然可以从聚变反应堆应用的角度评估其相对于托卡马克的优劣。结论如下。

从好的方面看,LDX 具有非常简单的磁场几何结构,仅需要一个简单的线圈就能约束住等离子体。从物理学的角度以及早期实验的设计和操作上来说,单个线圈是非常可取的。LDX 位形的另一个优点是在高  $\beta$  情形下无需理想导体壁就可以实

现完全理想的磁流体力学平衡。与托卡马克相比,不需要任何环向磁场线圈是一个重要的工程技术上的优势。

其不足之处有两点。首先,使超导线圈处于悬浮状态显然是个问题,而且随着实验规模的扩大,以及等离子体环境变得更加严峻(即密度和温度的提高),这个问题在工程技术上愈发具有挑战性。虽然悬浮本身并不困难,但要维持则不容易。其次,要保持线圈的超导性,就必须将它与聚变产物隔离开来。磁场能够屏蔽带电粒子,但对 D-T 反应产生的大量高能中子却无能为力。所以,为了减少高能中子的数量,LDX 反应堆必须建立在更为困难的 D-D 或者  $D-^3\text{He}$  聚变反应基础上(因为这两者的反应截面都较小)。例如,对于 D-D 反应,在 40 keV 的典型反应堆温度下,性能参数  $p\tau_E$  需要提高到  $p\tau_E \approx 170 \text{ atm s}$ ,相比之下,对于 D-T 反应的托卡马克,  $p\tau_E \approx 8 \text{ atm s}$ 。尽管从产生较少的中子这一点上看,采用 D-D 和  $D-^3\text{He}$  反应作为燃料在技术上可取的,但是对  $p\tau_E$  的较高要求很有可能会成为主要问题。

对 LDX 的简介就说这些,本节余下部分着重讨论 LDX 概念的磁流体力学平衡和稳定性极限。

### 13.2.2 LDX 平衡

我们的分析从对柱对称 LDX 几何的平衡分布的计算开始。先选取一种有代表性的压强分布,然后根据一维径向压强平衡关系式来确定极向磁场,由此得到磁场的解析表达式,可以看出,存在平衡的  $\beta$  极限。从中我们还可以得到一般性的平衡条件,它将等离子体比压  $\beta$  和线圈电流以及等离子体电流联系在一起。

#### 1. 压强分布

第一步是明确等离子体的压强分布。能够精确描述 LDX 基本物理性质的一种简单模型是:

$$p(r) = K \frac{r^2 - r_1^2}{(r^2 + r_2^2)^{\gamma+1}} \quad (13.1)$$

其分布如图 13.3 所示。注意到在线圈表面  $r = r_1$  处,  $p(r)$  为零。压强分布是中空的,先随  $r$  增加而增大,接着在大  $r$  处逐渐减小:  $r \rightarrow \infty$  时  $p(r) \sim 1/r^{2\gamma}$  (这里  $\gamma$  是比热容比)。大  $r$  处的径向定标关系预示着需要在低压强区域抑制  $m = 0$  模。参数  $K$  是对峰值压强的量度,参数  $r_2$  是压强最大值的位置。

即便采用这种简单模型,代数运算仍很快就变得极为复杂。为了降低复杂性,我们需要做出几点假设,这将使分析大为简化而不失主要的物理本质。具体来说就是将参数  $r_2$  取为  $r_2 = r_1$ ,另外  $\gamma$  设定为  $\gamma = 2$  而不是  $\gamma = 5/3$ 。为了更进一步简化,我们引入归一化半径  $x = r^2/r_1^2$ 。根据这些假设,压强分布可以写为:

$$p(x) = 27p_{\max} \frac{x-1}{(1+x)^3} \quad (13.2)$$

其中,  $p_{\max}$  是压强最大值, 位于  $r_{\max}^2/r_1^2 = x_{\max} = 2$ 。

## 2. 总体径向压强平衡关系

平衡分析的下一步是计算磁场分布。作为计算过程的预备, 我们不妨先导出 LDX 总体平衡条件下压强平衡的一个一般性关系式。为此我们给出  $\beta$  的一种实用定义。按照第 11 章中有关径向压强平衡讨论的思路, 我们从下述平衡关系式入手:

$$p' + \frac{B_\theta}{\mu_0 r} (rB_\theta)' = 0 \quad (13.3)$$

上式乘以  $r^2$  并对整个等离子体区域进行积分, 得到:

$$\int_{r_1}^{\infty} r^2 p' dr + \frac{1}{2\mu_0} (r^2 B_\theta^2) \Big|_{r_1}^{\infty} = 0 \quad (13.4)$$

它可以化简为:

$$\int_{r_1}^{\infty} p r dr = \frac{\mu_0}{16\pi^2} [(I_c + I_p)^2 - I_c^2] \quad (13.5)$$

其中,  $I_c$  是硬心线圈电流;  $I_p$  是等离子体电流。

与螺旋箍缩压强平衡关系式类似, 引入如下的  $\beta$  定义是有用的:

$$\beta \equiv \frac{16\pi^2}{\mu_0 (I_c + I_p)^2} \int_{r_1}^{\infty} p r dr \quad (13.6)$$

注意, 这里用系统的总电流  $I = I_c + I_p$  对  $\beta$  进行了归一化。从式(13.5)我们可以直接得到 LDX 的一般径向压强平衡表达式(它将  $\beta$  与线圈电流和等离子体电流联系起来):

$$\beta = 1 - i_c^2 \quad (13.7)$$

其中,

$$i_c = \frac{I_c}{I_c + I_p} \quad (13.8)$$

与线圈电流成正比。从  $\beta$  的这个定义可以明显看出,  $0 \leq \beta \leq 1$ 。式(13.7)对于了解 LDX 的稳态运行区域具有极其重要的作用。

## 3. 极向磁场

现在, 只要从局部压强平衡关系的积分形式计算出极向磁场, 就可以得到平

平衡解:

$$\frac{1}{2\mu_0}(r^2 B_\theta^2) \Big|_{r_1}^r = - \int_{r_1}^r r^2 p' dr \quad (13.9)$$

经过稍显冗长的计算,我们可以算出这个积分:

$$b_\theta^2(x) = 1 - 8\beta \frac{x^2}{(1+x)^3} \quad (13.10)$$

其中,  $b_\theta \propto rB_\theta$  是极向磁场的归一化形式,其定义为:

$$b_\theta(x) \equiv \frac{2\pi r B_\theta(r)}{\mu_0(I_c + I_p)} \quad (13.11)$$

另外,利用式(13.6)给出的  $\beta$  的积分定义,可以根据  $\beta$  写出压强定标常数  $p_{\max}$  的表达式:

$$p_{\max} = \frac{\mu_0(I_c + I_p)^2}{54\pi^2 r_1^2} \beta \quad (13.12)$$

式(13.10)即为稳定性分析所需的  $b_\theta^2$  的表达式。

#### 4. 平衡 $\beta$ 极限

$b_\theta$  的解的一个有趣的性质是存在平衡  $\beta$  极限。这个极限值可从图 13.4 所示的不同  $\beta$  下的  $b_\theta^2$  对  $x$  曲线看出。我们注意到,随着  $\beta$  的增加,  $b_\theta^2$  的逆磁下凹变得越来越深。最后,当曲线的最小值恰与  $X$  轴相交时,  $\beta$  达到最大值  $\beta = \beta_{\max}$ 。如果  $\beta > \beta_{\max}$ , 则  $b_\theta^2$  为负,这在物理上是不可能的。同时,令  $(b_\theta^2)' = db_\theta^2/dx = 0$ , 我们很容易得到  $\beta$  的临界值:

$$\beta \leq \beta_{\max} = \frac{27}{32} \approx 0.84 \quad (13.13)$$

这是一个很弱的限制条件。它的出现是因为需要有最小的线圈电流来维持压强的中空分布——将等离子体推离  $r = r_1$  处的线圈表面。这个线圈电流的值由一般平衡关系式(13.7)确定,计算给出:

$$i_c \geq i_{\min} = \sqrt{\frac{5}{32}} \approx 0.40 \quad (13.14)$$

即流过硬心的电流至少要占总电流的 40%。

总之,我们引入一个简单的平衡模型来精确描述 LDX 位形的基本性质。参数分布显示,存在平衡的  $\beta$  极限,它的作用有限,不对装置性能构成严重的限制。



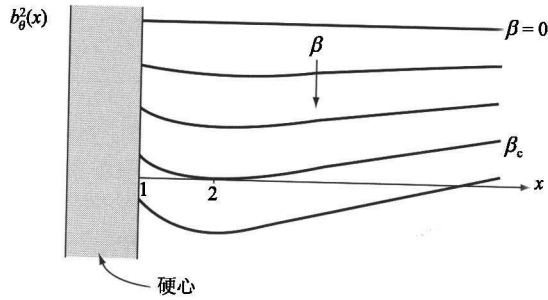


图 13.4 不同  $\beta$  值的  $b_0^2$  对  $x$  的曲线

(容许的最大  $\beta$  值位于  $\beta = \beta_c$  曲线上,在该点,曲线与  $x$  轴相切于  $x_{\max} = 2$ )

### 13.2.3 $m = 1$ 稳定性

LDX 的稳定性取决于从  $Z$  箍缩导出的  $m = 0$  和  $m = 1$  时的局部判据。LDX 具有硬心这一点对稳定性判据的一般形式没有影响,因为相应的推导中只需假设纯极向磁场情形下的柱对称平衡即可。但是很显然,对临界稳定性边界的定量预测取决于参数分布的实际形状。

对于 LDX,上述简单模型的平衡参数分布必须选择得使等离子体中的任意一点  $r$  都满足  $m = 0$  和  $m = 1$  稳定。实际上,这导致每一种模都存在  $\beta$  极限。下面的分析提供了  $m = 1$  模下  $\beta$  极限值的推导过程。

注意到  $m = 1$  模的稳定性要求  $B_0$  的分布满足:

$$\frac{d}{dr}(rB_0^2) < 0 \quad (13.15)$$

或等效地写作:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{b_0^2}{x^{1/2}} \right] < 0 \quad (13.16)$$

简单  $Z$  箍缩装置总是不满足这个判据,因为在靠近等离子体中心处,  $B_0$  是  $r$  的增函数。在 LDX 位形中,硬心明显改善了这一状况,因为在靠近等离子体的内侧边界处,  $B_0 \sim 1/r$ 。实际上,通过观察可以看出,对于  $r_1 < r < r_{\max}$ ,压强梯度总是正值,这意味着磁场曲率是好的。再看图 13.3,不稳定性只出现在  $r > r_{\max}$  处,也就是曲率变坏的地方。直观上明显可以看出,随着  $\beta$  的增加,稳定性判据会越来越难以满足,因为  $b_0^2$  的斜率变得越来越大。

将平衡情形下的参数分布代入式(13.16),可以得到对临界  $\beta$  值的定量估计。经简单计算得到稳定性条件要求:

$$\beta < \frac{1}{24} \frac{(x+1)^4}{x^2(x-1)} \quad (13.17)$$

式(13.17)右边的函数存在一个最小值,正是这个最小值设定了  $\beta$  最严格限制。简单计算给出这个最小值点位于:

$$x_{\min} = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{17}) \approx 4.56 \quad (13.18)$$

相应的  $\beta$  极限为:

$$\beta \leq \beta_{\max} = \frac{51 \sqrt{17} - 107}{192} \approx 0.54 \quad (13.19)$$

$m = 1$  模的稳定性所要求的  $\beta$  极限明显低于平衡情形下的  $\beta$  极限,但是不管怎么说,其绝对值还是很高的。

最后,将临界  $\beta$  值代入一般的稳态压强平衡关系式[即式(13.7)]以确定抑制  $m = 1$  模所需的最小线圈电流,得到:

$$i_c \geq i_{\min} = (1 - \beta_{\max})^{1/2} = 0.68 \quad (13.20)$$

也就是说,硬心电流必须占总电流的 70% 左右。

#### 13.2.4 $m = 0$ 稳定性

类似的分析对  $m = 0$  模也是适用的。这种情形下的稳定性条件为

$$-\frac{r}{p} \frac{dp}{dr} < \frac{2\gamma B_0^2}{B_0^2 + \mu_0 \gamma p} \quad (13.21)$$

对于  $\gamma = 2$ , 利用归一化的变量可以将判据写为如下形式:

$$-\frac{x}{\hat{p}} \frac{d\hat{p}}{dx} < \frac{2b_0^2}{b_0^2 + x\hat{p}} \quad (13.22)$$

其中,  $\hat{p}(x)$  是归一化压强,其定义为:

$$\hat{p}(x) = \frac{8\pi^2 r_1^2}{\mu_0 (I_c + I_p)^2} p(r) = 4\beta \frac{x-1}{(x+1)^3} \quad (13.23)$$

下一步是将稳态情形下的参数分布代入式(13.22)。经过简单计算可以得到关于  $\beta$  的稳定性条件为:

$$\beta < \frac{(x+1)^2(2x-1)}{4x^3} \quad (13.24)$$

在磁场线坏曲率区域, 即当  $x \rightarrow \infty$  时, 同样出现对  $\beta$  的最严格限制磁场线。 $m = 0$  情形下的  $\beta$  极限值为:

$$\beta \leq \beta_{\max} = \frac{1}{2} \quad (13.25)$$

对应的最小电流为:

$$i_c \geq i_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \quad (13.26)$$

对于给定的模型参数分布,  $m = 0$  模具有最小  $\beta$  极限值, 它比  $m = 1$  模的  $\beta$  极限值略低。但这个极限值具有重要意义。另外, 硬心电流占总电流的比例要高于 70%。

### 13.2.5 悬浮偶极器总结

简言之, 悬浮偶极器是一种新颖的聚变位形, 其物理性能将在 LDX 装置上首次得到验证。它具有由悬浮超导线圈产生的简单的磁场几何结构, 在不需要理想导体壁的情形下就可以实现磁流体力学平衡并达到很高的稳定的  $\beta$  极限, 图 13.5 对此做了总结。图中给出了  $\beta$  随归一化线圈电流的变化曲线, 稳定区域位于临界  $\beta$  点的右侧。

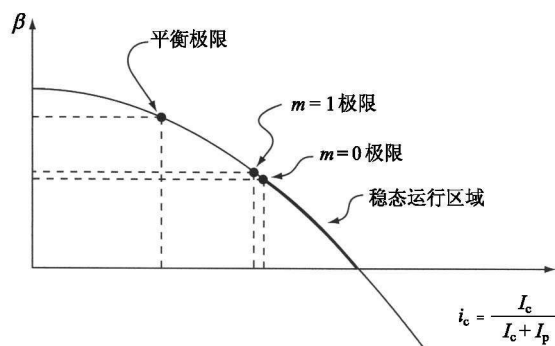


图 13.5 由一般平衡关系式得出的  $\beta$  对  $i_c$  曲线(图中还列出了平衡、 $m = 1$ 、 $m = 0$  等情形下的临界稳定性极限)

$m = 0$  模式设定了最严格的稳定极限值, 要求  $\beta < 1/2$  以及  $i_c > 1/\sqrt{2}$ 。从长远来看, LDX 概念面临的主要问题是悬浮线圈的制造, 以及需要采用更难点火的 D-D 或 D-<sup>3</sup>He 反应等复杂的工程技术问题。另外, 输运依然是个未知数, 但是随着 LDX 实验数据的不断积累, 这个问题会得到解决。

## 13.3 场反位形(FRC)

### 13.3.1 FRC 简介

场反位形(The Field Reversed Configuration, FRC)是一种非常紧凑的轴对称闭合位形,其中等离子体完全由极向磁场约束。这种位形没有外加的环向磁场,因此不需要环向磁场线圈绕组。另外,这种位形也没有穿过装置中心的欧姆场变压器。因此,FRC内在地就是一种脉冲装置,从技术结构上看,它相当简单。FRC装置的示意图如图13.6所示。其运行方式如下:初始时在真空腔中沿轴向建立起小的轴向 $\theta$ 箍缩偏置磁场,然后注入中性气体,独立电源对气体进行预电离,产生等离子体。此时开启主电源,形成强烈的轴向 $\theta$ 箍缩磁场。这个磁场比偏置磁场要大10倍左右,而且方向相反。主磁场增加得极快,引起等离子体的压缩和加热。假设初始等离子体已经准备好,并且磁场已按适当程序建立起来,因此轴向磁场将会像图中所示那样交错和重连<sup>1)</sup>。最终是在分离磁面内形成一系列拉长的具有闭合磁面的磁场位形。

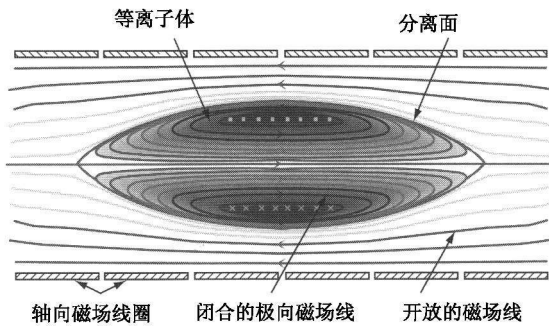


图 13.6 FRC 装置的原理图(承蒙 R. Milroy 提供)

典型的压强和磁场的分布如图13.7所示。以最初 $\theta$ 箍缩磁场方向为负方向来看,可以看出,在离轴的某个位置 $B_z$ 变号。这就是“场反位形”这个名称的由来。有趣的是,虽然采用了两个 $\theta$ 箍缩磁场来给等离子体成形,但最终形成的是一种具有扁平的环形 $Z$ 箍缩的拓扑结构。

1) 为清楚起见,磁场重连过程可以这样理解:最先形成的指向右端的(图13.6中未画出)弱磁场在有了等离子体后被“冻结”在等离子体中。由于等离子体的理想导体性质,这之后投入的反向(图中指向左端的场线)强磁场很难渗入等离子体中抵消掉先前的弱场,而只能在等离子体表面附近与先前的磁场线相交和重连,从而形成局部闭合的磁面嵌套。——译者

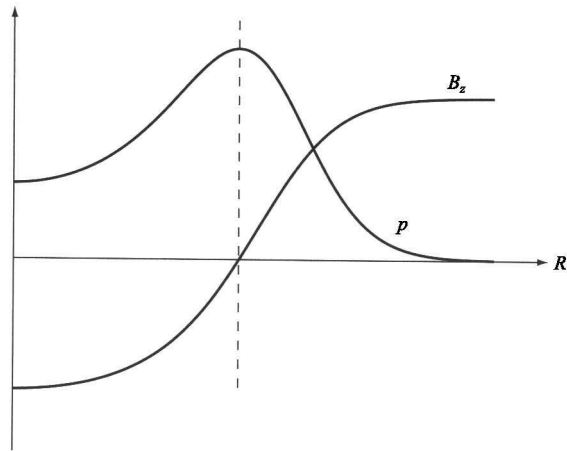


图 13.7 FRC 装置中平面上  $B_z(R,0)$ ,  $p(R,0)$  的典型分布

FRC 具有  $Z$  箍缩的拓扑结构这一特点允许我们根据已知的单纯  $Z$  箍缩的计算结果来估计 FRC 的理想磁流体力学稳定性,而无需做新的分析。推理如下:在等离子体的端口附近,FRC 位形具有坏的极向磁场曲率;在等离子体扁平的中心部分,极向磁场线基本上是平直的,也就是曲率为零;而且 FRC 位形中不存在起稳定作用的环向磁场。最终结果是 FRC 位形中存在坏曲率或者零曲率区域,但是没有好曲率区域。所以,根据理想磁流体力学理论,FRC 位形应该是很不稳定的。这一结论确实在数值模拟中得到了证实。

既然它的磁流体力学行为是非常不稳定的,有人也许会问,研究 FRC 对于聚变计划有什么意义。原因主要有两个。第一个原因与 FRC 实验的观测结果有关。大量实验事实表明,FRC 等离子体似乎比理想磁流体力学预言的要稳定得多。尽管产生这一有利行为的原因还不完全明了,但大多数研究人员认为,等离子体动理学效应扮演着重要角色。这些效应包括欧姆定律中的霍尔效应项,以及离子回旋半径大小与等离子体小半径相当这一事实。这两个效应对理想磁流体力学模型起着致稳作用的调整。然而,大多数研究人员也认为,如果将 FRC 位形放大到反应堆要求的大尺寸,那么动理学效应就不那么显著了,这意味着等离子体对于理想磁流体力学模型来说将会变为不稳定。考虑到 FRC 在小尺寸下性能良好但大尺寸下表现不佳的特性,研究认为 FRC 也许可以作为一种很好的等离子体源,即所谓“磁化靶聚变(MTF)”源。MTF 正是在聚变能背景下研究 FRC 位形的第二个基本原因。MTF 的基本原理是:将预先加热的高密度( $10^{23} \text{ m}^{-3}$ )中等温度(300 eV)的等离子体源置于一个空心金属圆柱体中,然后挤压圆柱体及其中的等离子体,实现极高的粒子压强和磁场强度,爆聚的等离子体流最终停滞下来,随后再次膨胀。因为等离子体的超高密度,预计在停滞点附近会发生很多的聚变反应,释放足够多的超出输入的压

缩能的聚变能。人们考虑了很多种产生靶等离子体的方式, FRC 位形也许具有最多的有利性质。

本小节余下部分着重深入分析运用 FRC 靶等离子体的 MTF 概念。只要掌握了其基本原理, 我们就能够从聚变能的角度探讨其优劣。

### 13.3.2 MTF 概念

如图 13.8 所示, MTF 包含 3 个步骤: 产生、转移和压缩。

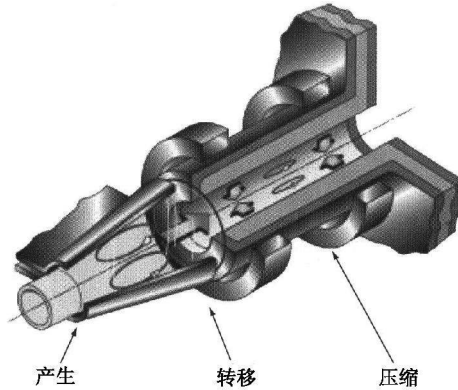


图 13.8 MTF 概念的原理图(承蒙 R. Sieman 提供)

#### 1. 产生

MTF 过程的第一步是等离子体的“产生”。在这里或多或少会用到 FRC 技术。对 MTF 来说, FRC 是一种很好的位形, 它的技术简单, 而且等离子体中也没有环向场。不希望出现环向场的原因接下来会很明了。对初始形成的 FRC 位形的唯一限制条件是它必须满足“小判据”, 就是说它必须对动理学修正的磁流体力学模是稳定的。这条判据主要是基于实验数据中归纳出的经验规律, 具体要求是:

$$S/\kappa < 3.5 \quad (13.27)$$

其中,  $\kappa = Z_s/R_s$  表示分离面的拉长度;  $S = R_s/\delta_i$  是分离面的半径与所谓离子无碰撞趋肤深度  $\delta_i = C/\omega_{pi}$  的比值。

从 MTF 的应用上看, 要求初始 FRC 等离子体具有高密度  $n_e \approx 10^{23} \text{ m}^{-3}$ , 大的拉长度  $\kappa \approx 10$ , 分离面半径  $R_s \approx 0.05 \text{ m}$ 。对于这些参数, 式(13.27)勉强可以满足。所需的初始温度和磁场分别为  $T_e = T_i \approx 0.3 \text{ keV}$  和  $B = 5 \text{ T}$ , 对应的  $\beta \approx 1$ , 压强为 100 atm。我们注意到, FRC 位形下的初始等离子体密度比其他聚变位形中的典型等离子体密度大约高 3 个数量级。FRC 等离子体产生的另一个值得注意的地方是在主  $\theta$  箍缩线圈的两端各增加了一组小线圈。这些线圈产生一个弱的磁镜场, 使得在每次脉冲放电过程中 FRC 等离子体都成形于  $\theta$  箍缩的中心。此外它们还是转移

室的“引导场”。

## 2. 转移

MTF 过程的第二步是“转移”。其目的是将等离子体从 FRC 产生室的初始位置转移到 MTF 压缩腔。这是通过在主  $\theta$  箍缩线圈系统右侧略微减弱的磁场来实现的。因为左侧的磁场较强,磁压强较大,由此引起左右磁压强的不平衡。这个不平衡将等离子体沿转移室中的引导场推向右边,直到等离子体进入压缩腔。

## 3. 压缩

MTF 概念的核心部分是压缩腔。压缩腔的主要部件是一个很薄的金属圆柱体,有时称作衬套,大小跟一个汽水瓶差不多。一旦 FRC 等离子体转移进入压缩腔,就立刻由外电路驱动起沿圆柱体轴向( $Z$  方向)的强大电流,由此产生紧贴圆柱体外表面的很强的极向磁场  $B_\theta$ ,形成的表面磁压强以约为  $v_R \approx 10^6$  m/s 的极快速度将圆柱体沿径向向内压缩。这一绝热过程将等离子体压缩到很高的密度和温度,足以引起大量的聚变反应。

压缩过程的原理如下:在相对短暂的压缩阶段,衬套和等离子体都可以看作理想导体,因为它们的趋肤耗散特征时间很长。因此在等离子体边界与衬套之间的狭窄区域内,磁通量必然是守恒的。衬套的快速向内运动压缩这个磁通量,由此大大增加了等离子体表面的磁场强度,其相应的增大了的表面磁压强则将 FRC 等离子体(及其内部磁通量)绝热压缩到具有极高温度和密度的半径很小的体积中。

随着等离子体粒子压强和内部反向磁场压强的逐渐增大,衬套的运动最终在某个时刻停顿下来。如果系统设计得恰当,停顿时刻的温度应该在 10 keV 量级,这会引发大量的聚变反应。聚变反应的持续时间  $\tau_E$  约等于衬套的停留时间,后者取决于衬套的质量和能量,以及 FRC 等离子体的最终性质。对 MTF 反应堆,研究得出的压缩后 FRC 等离子体的最终状态的典型参数列于表 13.1。可以看出,与托卡马克的  $n, B, \tau_E$  的典型取值相比,MTF 终态的密度和温度都很高,但是聚变反应的持续时间却非常非常短。

表 13.1 衬套压缩前状态与最大压缩状态时的 MTF 参数的对比

参 数	压缩前	最大压缩状态时
密 度	$10^{23} \text{ m}^{-3}$	$10^{25} \text{ m}^{-3}$
温 度 ( $T_e \approx T_i$ )	300 eV	10 keV
磁 场	5 T	500 T
等离子体寿命	20 $\mu\text{s}$	200 ns
衬套内径	5 cm	0.5 cm

为了产生足够多的聚变反应以实现能源应用的可行性,必须有很大一部分燃料得到燃烧。在优化设计中,这一要求体现为  $\tau_D \approx \tau_E$ 。如果能量约束时间过短,

$\tau_D \gg \tau_E$ , 则在聚变反应能够发生之前等离子体就冷却了。另一方面, 如果  $\tau_D \ll \tau_E$ , 那么对等离子体的约束就显得过度了, 这时可适当减小系统的体积, 从而降低了造价。

上述定性图像说明了为什么 FRC 这种没有内部环向磁场的位形对于 MTF 是一种很好的选择。原因在于: 如果存在环向磁场, 那么由于在理想磁流体力学条件下, 这个磁场和等离子体一起运动, 因此爆聚衬套的能量除了用于压缩等离子体及其极向磁场之外, 还将不得不分配部分能量用于压缩环向磁场。显然这样就降低了爆聚的效率, 而且与没有环向磁场的情形相比, 要得到相同的终态等离子体参数, 衬套所需的初始动能更高。效率的大幅度降低将导致功率平衡所需的输入能量大到无法接受。

这一思路也带来另一个问题: 既然没有环向磁场可以提高效率, 那么通过某种途径消除压缩腔中的极向磁场岂不更好? 假设衬套能量的一半传给了等离子体, 另一半给了极向磁场, 那么取消极向磁场将会使得效率翻番。回答是响亮的——“不!” 原因在于, 有没有磁场, 对等离子体的热输运损失关系重大。下一章中我们将指出, 横越磁场的热输运损失要比平行磁场方向上——或无磁场——的情形小好几个量级。所以极向磁场起着等离子体和衬套之间的热绝缘的重要作用。如果没有极向磁场, 能量约束时间  $\tau_E$  会很短, 也就不可能实现预期的功率平衡。

### 13.3.3 FRC 作为聚变能来源

随着 MTF 基本概念的建立, 现在我们可以从聚变堆可行性的角度来评估其优劣。开始时人们注意到, MTF 系统与其他聚变概念在参数上存在巨大差异, 因此聚变界大多数人将它视为众多候选方案中的一匹“黑马”。因为它的参数运行范围是如此的不同, 现有的具体可用的科学知识几乎很难移植过去。尽管如此, MTF 概念确实提供了常规磁约束聚变概念之外的另一种选择, 因此它当然值得作为一种潜在的聚变能来源来研究。

现在让我们考虑 MTF 概念的潜在优势。首先, 由于聚变反应速率与燃料的数密度平方成正比, 因此 MTF 预言的极高的  $n$  值意味着可以实现很高的聚变功率密度。其次, 高的功率密度反过来意味着 MTF 系统的几何尺寸可以做得很小。因为装置建设成本取决于其体积, 所以这是个很大的优势。第三, 尽管 MTF 需要高电压和脉冲技术, 但在总体上这些技术还是要比诸如激光功率源、微波功率源或者中性粒子束功率源简单, 成本也较小。所有这些都是 MTF 相对于托卡马克的优势所在。

将这些优势综合起来, 我们看到, MTF 研究的根本动机是: MTF 概念具有这样一种潜力, 它可以在比常规磁约束聚变途径花费少得多的条件下来进行核聚变点火物理的某些方面研究, 并验证实验装置的科学可行性。MTF 的另一个有吸引力的实际考虑是, MTF 研究所需的许多脉冲功率源已经在美国能源部防卫计划的资助



下在洛斯阿拉莫斯(Los Alamos)和圣地亚(Sandia)国家实验室建立起来了。

当然,还有许多科学上和工程技术上的问题需要 MTF 研究人员来解决。这些问题主要包括以下几个方面;首先,必须能够产生具有压缩前参数的 FRC 初始等离子体。这需要从现有 FRC 等离子体产生条件外推得到,尽管活跃的实验计划目前正在进行并取得了一定的进展。

其次,衬套的爆聚带来了一些与等离子体科学相关的材料科学问题。其中有:①在爆聚过程中衬套壁材料变为液态,故衬套壁材料会与等离子体混合;②爆聚过程中等离子体热运输的特征时间尺度为  $\tau_E$ ,但目前对这一输运过程还不了解,而足够长的  $\tau_E$  对 MTF 的成功甚为关键;③必须要证明在整个爆聚过程中磁流体力学平衡保持成立,以免等离子体从 FRC 的端部逃逸。

第三,可能也是大多数常规聚变途径研究人员担心最多的一点是:如何将 MTF 技术外推到电站级别的反应堆中。尽管很多人会同意,一次性 MTF 爆聚是有可能的,但反应堆要求的是一系列快速连续不断的爆聚,大概几秒钟一次。这就对高电压技术和压缩腔技术提出了很高的要求,因为每一次爆聚后都需要排尽杂质。而且,由于每次脉冲都会损坏一副衬套,因此需要不断提供衬套备件。为了实现经济上的可行性,衬套的造价必须足够低廉,这当然也是个技术上的挑战。

最后,衬套本身也面临着工程技术上的困难,其中包括确保衬套在爆聚过程中不会因为焦耳热引起的巨大的内压强而破裂。这些问题中有很多与惯性约束聚变所面临的问题非常相似。

MTF 的发展还处在早期阶段,目前着眼于建成一套能够在一次性爆聚中成功实现点火的完整的集成系统也许是比较现实的。如果这个任务能够取得成功,届时再更深入地考虑反应堆方面的技术难题,从而确定建造新装置的必要性亦为时不晚。

### 13.3.4 FRC 概念小结

FRC 是一种紧凑的、拉长的环向 Z 箍缩位形。尽管人们根据理想磁流体力学分析预言它是非常不稳定的,但小装置的实验观察却表明它出乎意料地稳定,估计这是由于其他等离子体动力学效应造成的。不加环向磁场的实验观测表明,FRC 也许是产生 MTF 概念所需的靶等离子体的一种理想选择。在 MTF 概念中,一团小体积、高密度的 FRC 等离子体产生后,被注入压缩腔内,接着金属衬套将等离子体压缩到高温高密度状态,引起大量的聚变反应。

研究 MTF 的根本目的是希望用较其他聚变概念成本低的条件产生聚变等离子体,因为它的体积小,高电压技术相对成本也较低。在产生聚变能方面,我们主要担心的是如何将现有技术推广到快速脉冲反应堆规模。

## 13.4 表面电流模型

### 13.4.1 概述

除了 LDX 和 FRC, 其他所有的聚变概念都具有环向磁场和极向磁场。环向磁场的加入明显增加了分析的复杂性, 而且, 这方面的大多数文献内容也超出了本书的范围。为了克服这个困难, 我们引入一个极其简单的模型来大大简化分析, 同时可以获得所需的关于磁流体力学  $\beta$  极限值的信息。这个模型即所谓“表面电流模型”。

表面电流模型是一种简单的磁流体力学模型。我们可以在多种聚变位形中用它来解析计算克服外部气球-扭曲模所需的压强和电流的极限值。由于这些模通常决定了最严格的稳定性极限值, 因此这一模型从宏观磁流体力学行为方面给出了进行反应堆可行性估计时所需的准确信息。

这一模型所基于的思想是: 考虑这样一种特定平衡, 其中电流  $I$  仅由理想化表面电流组成。假设这个电流沿单一表面流动, 并将等离子体与真空区域隔开, 这使得平衡和稳定性分析得到了极大简化。下面列出利用表面电流模型得出压强和电流极限值的程序步骤。这一处理对一维和二维的等离子体均适用, 因此适用于大多数位形。为了最大程度保持数学上的简单性, 我们假设等离子体的横截面是圆形的, 尽管这对模型来说不是基本的。

得出磁流体力学边缘区稳定性极限值的整个形式化过程最终可归结为四步流程。定性来看, 这些步骤为:

- ① 计算二维表面电流的平衡;
- ② 求出等离子体区域中的扰动磁场;
- ③ 求出真空区域中的扰动磁场;

④ 通过用外部模式的边界条件对等离子体-真空界面进行匹配, 来确定边缘区稳定性的条件。

下面给出各个步骤的具体描述。

### 13.4.2 二维表面电流的平衡

考虑图 13.9 所示的具有圆截面的二维环形等离子体。我们的任务是要计算等离子体-真空界面两侧的压强和磁场。表面电流模型的一个重要简洁之处是稳定性分析仅仅需要知道紧挨着表面两侧的稳态磁场。

我们感兴趣的第一个量是由等离子体压强。假设等离子体中没有电流:  $\mathbf{J} = 0$ 。因此平衡关系式  $\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p = 0$  化简为  $\nabla p = 0$ 。这个方程的解很简单:

$$p = \text{常数} \quad (13.28)$$

即等离子体区域内每一点的压强是常数。感兴趣的第二个量是等离子体内的环向磁场  $B_\phi$ 。由  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  可知  $B_\phi$  可以写为：

$$B_\phi(r, \theta) = B_i \frac{R_0}{R} = B_i \frac{R_0}{R_0 + r \cos \theta} \quad (13.29)$$

其中  $B_i$  是大半径  $R = R_0$  处的内部环向磁场。

接下来,注意到在轴对称几何下,由于等离子体中没有环向电流,因此等离子体内的极向磁场也应该为零: $B_r(r, \theta) = 0$ 。这样,我们就完成了对等离子体内部磁场的简化。

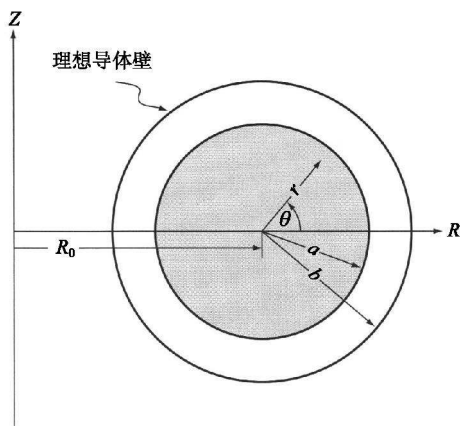


图 13.9 表面电流模型的二维几何形态

现在考虑界面的真空一侧。显然真空中的压强为零: $p = 0$ 。接下来,与等离子体区域类似,真空中的环向磁场也满足条件  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ ,所以也可以表示为:

$$B_\phi(r, \theta) = B_0 \frac{R_0}{R} = B_0 \frac{R_0}{R_0 + r \cos \theta} \quad (13.30)$$

其中,  $B_0$  是  $R = R_0$  处的外加环向磁场。最后,注意到在表面电流外的区域中极向磁场  $B_r(r, \theta)$  不为零。一般来说,计算真空区域每一处的  $B_r(r, \theta)$  是困难的,但是稳定性分析仅需要知道等离子体表面附近的磁场。通过如下的磁流体力学压强平衡的“跳变条件”,可以很容易地得到有关表面极向磁场的有限信息。

我们由如下形式的精确的非线性动量方程出发来分析:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left[ p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] \quad (13.31)$$

如图 13.10 所示,在穿越等离子体-真空界面的无限小的径向距离上对这个方

程进行积分。请注意,这里允许磁场和压强的值在界面两侧跳变。它们的法向梯度在界面处变成了 $\delta$ 函数。然而,压强和磁场在界面两侧的等离子体区域和真空区域内都是平滑的。这意味着 $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}$ 项穿越界面的积分为零。原因如下,尽管磁场存在跳变,但运算符 $\mathbf{B} \cdot \nabla$ 只与表面导数有关,而由于 $\mathbf{B}$ 就在表面上,也就是说,因为在表面上 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ ,所以不存在法向导数。因此对 $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}$ 项的积分仅与无限短距离上的阶跃函数的积分有关,而它的贡献为零。类似地,惯性项穿越界面的积分一定为零。如果不为零,速度 $\mathbf{v}$ 将不得不发生跳变,这意味着加速度无穷大(从 $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ 项即可知),这没有物理意义,是不允许出现的。

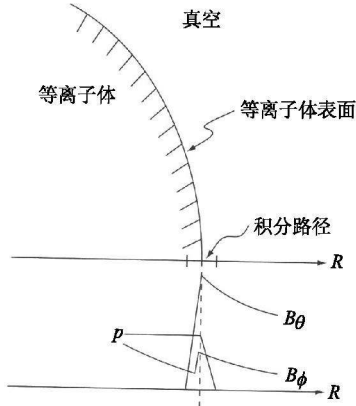


图 13.10 穿越等离子体-真空分界面的积分

根据上述讨论可以得出结论:穿越等离子体-真空界面的严格的非线性跳变条件只能由梯度项的法向分量所引起,它可以写为:

$$\left[ p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] \Big|_{S_p^-}^{S_p^+} = 0 \quad (13.32)$$

其中, $S_p$ 是包括平衡和稳定性贡献的精确的等离子体表面: $S_p = a + \xi_r(a, \theta, \phi)$ 。

将式(13.32)应用到平衡态下等离子体-真空界面 $S_p = a$ 上,可以得到所需的平衡态下真空区域中靠近表面的极向磁场的表达式:

$$\hat{B}_\theta^2(a, \theta) = 2\mu_0 p + \frac{B_i^2 - B_0^2}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} \quad (13.33)$$

其中, $\hat{\mathbf{B}}_p = B_0 \mathbf{e}_\theta$ ;  $\varepsilon = a/R_0$ 是等离子体环径比的倒数。根据稳定性分析,式(13.33)是仅需的平衡态信息。尽管它看起来简单,但它可以描述多种聚变位形,各种位形之间的区别仅在于参数 $p, B_i, B_0$ 和 $\varepsilon$ 的不同选择。

### 13.4.3 等离子体中的扰动磁场

现在我们已经定义了平衡。下一步是进行线性磁流体力学稳定性分析。依照

一般的方法,待定的本征函数只能简化到在等离子体表面算出的等离子体位移的法向分量,也就是说,本征函数是  $\xi(\theta, \phi) \equiv \xi_r(a, \theta, \phi)$ 。此外,在轴对称系统中,我们可以对  $\phi$  做傅里叶分析,然后分别处理每一种傅里叶模式。

$$\xi(\theta, \phi) = \xi(\theta) \exp(-in\phi) \quad (13.34)$$

其中,  $n$  是刻画每一种傅里叶模的环向波数。根据不同的应用,待定的本征值是使系统临界稳定的(即  $\omega^2 = 0$ ) 等离子体比压  $\beta$  或者是等离子体电流  $I$  的值。

在稳定性分析中,我们的目的是算出等离子体区域和真空区域的扰动磁场,并用  $\xi(\theta, \phi)$  将它们表示出来。利用式(13.32)给出的线性化的压强平衡跳变条件,在等离子体—真空界面上对这些解进行匹配,就可以得到本征值。

这一小节描述确定等离子体区域内扰动磁场的步骤。这里的关键是,在表面电流模型中,  $\xi$  的计算可以简化为求解拉普拉斯方程的问题。分析步骤如下:对临界稳定性分析来说,线性化的动量方程简化为:

$$B_\phi \mathbf{J}_1 \times \mathbf{e}_\phi - \nabla p_1 = 0 \quad (13.35)$$

由这个方程的  $\mathbf{e}_\phi$  分量得出  $(in/R)p_1 = 0$  或  $p_1 = -\gamma p \nabla \cdot \xi = 0$ 。如果模数  $n \neq 0$ ,那么扰动压强为零,且本征函数所描述的流体是不可压缩的。

如果  $p_1 = 0$ ,动量方程简化为  $\mathbf{J}_1 \times \mathbf{e}_\phi = 0$ ,它的解为  $\mathbf{J}_1 = \lambda_1(r, \theta) \exp(-in\phi) \mathbf{e}_\phi$ 。其中  $\lambda_1$  是任意标量函数。接下来,注意到  $\nabla \cdot \mathbf{J}_1 = 0$  的条件简化为  $(in/R)\lambda_1 = 0$  或者  $\lambda_1 = 0$ 。结论是:在表面电流模型中,等离子体内部的扰动电流也必须为零:

$$\mathbf{J}_1 = 0 \quad (13.36)$$

所以,  $\mathbf{B}_1$  作为真空磁场(即  $\nabla \times \mathbf{B}_1 = \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ ) 可以写为:

$$\mathbf{B}_1 = \nabla V_1 \quad (13.37)$$

其中,  $V_1$  满足:

$$\nabla^2 V_1 = 0 \quad (13.38)$$

势函数  $V_1$  通过边界条件与表面位移相耦合。这要求:①等离子体内部的  $V_1$  应具有正则性;②表面上扰动磁场的法向分量满足  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1|_a = \mathbf{n} \cdot \nabla \times (\xi \times \mathbf{B})|_a$ 。

最后的这个条件简化为:

$$\left. \frac{\partial V_1}{\partial r} \right|_a = - \left. \frac{inB_\phi}{R} \xi \right|_a = - \frac{inB_i}{R_0(1 + \epsilon \cos\theta)^2} \xi \quad (13.39)$$

式(13.38)和式(13.39)就是我们计算等离子体区域扰动磁场所需的公式。随着应用的扩展,它们可以在多种条件下得到解。无论什么情形,一旦解出了这些方程,

压强平衡匹配条件所需的物理量即为  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1|_a$ , 它可以很容易地用  $V_1$  表示如下:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1|_a = -\frac{i n B_\phi}{R} V_1 \Big|_a = -\frac{i n B_i}{R_0(1 + \epsilon \cos \theta)^2} V_1 \Big|_a \quad (13.40)$$

这样我们就给出了等离子体区域的稳定性公式。

#### 13.4.4 真空区域的扰动磁场

真空区域扰动磁场的计算与等离子体区域中的计算非常类似。因为我们感兴趣的区域是真空, 所以可以用势函数立刻写出扰动磁场:

$$\hat{\mathbf{B}}_1 = \nabla \hat{V}_1 \quad (13.41)$$

其中,  $\hat{V}_1$  满足:

$$\nabla^2 \hat{V}_1 = 0 \quad (13.42)$$

$\hat{V}_1$  有两个边界条件。首先假设包围着等离子体的是半径为  $b$  的圆截面同心理想导体壁(图 13.9)。在理想导体壁上, 磁场法向分量必定为零, 因此第一个边界条件可以写为:

$$\left. \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial r} \right|_b = 0 \quad (13.43)$$

注意, 特殊极限  $b/a \rightarrow \infty$  对应于没有导体壁的情形。为简单起见, 电阻性导体壁的情形将在后面讨论。

第二个边界条件将  $\hat{V}_1$  和表面扰动耦合。尽管最终答案相对简单, 但严格的推导需要很多步代数运算。这里我们可以通过如下方式直观地得到正确结果。我们知道, 在等离子体区域, 扰动磁场的法向分量与边界上位移矢量的关系为  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1|_a = \mathbf{n} \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})|_a$ 。如果我们设想将等离子体区域稍稍扩展到真空区域, 那么以此类推, 真空区域的扰动磁场所对应的边界条件是  $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1|_a = \mathbf{n} \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \hat{\mathbf{B}})|_a$ 。注意, 这里用的是真空磁场  $\hat{\mathbf{B}}$  而不是等离子体区域的磁场  $\mathbf{B}$ 。通过简单计算, 第二个边界条件简化为:

$$\left. \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial r} \right|_a = \left[ -\frac{i n \hat{B}_\phi}{R} + \frac{\hat{B}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \xi \Big|_a = \left[ -\frac{i n B_0}{R_0(1 + \epsilon \cos \theta)^2} + \frac{\hat{B}_\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \xi \quad (13.44)$$

式(13.42)~式(13.44)描述了真空区域的稳定性问题。随着应用的扩展, 它们可以在多种条件下得到解。最后, 与等离子体区域中情形一样, 一旦得到了真空区域的解, 则压强平衡匹配条件所需的物理量即为  $\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1|_a$ , 它可以用  $\hat{V}_1$  表示成:

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 \Big|_a = \left[ -\frac{i n \hat{B}_\phi}{R} + \frac{\hat{B}_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \hat{V}_1 \Big|_a = \left[ -\frac{i n B_0}{R_0 (1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{\hat{B}_0}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \hat{V}_1 \Big|_a \quad (13.45)$$

这样我们就完成了真空区域的稳定性分析过程。

### 13.4.5 压强平衡匹配条件

随着公式的确立,等离子体和真空区域的扰动磁场原则上可以通过任意选取的表面位移  $\xi(\theta, \phi)$  计算出来。但话说回来,我们还没有足够的信息来确定本征函数和本征值。完成系统分析还需要更多的信息,那就是穿越等离子体-真空界面的压强平衡匹配条件。

通过对式(13.32)给出的准确的压强平衡跳变条件进行线性化,即可得到所需的关系式。我们知道,式(13.32)中的表面是指平衡表面加上扰动表面  $S_p = a + \xi(\theta, \phi)$ ,因此问题很简单,可以直接进行泰勒展开得到:

$$\left[ p_1 + \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 + \xi \frac{\partial}{\partial r} \left[ p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] \right]_{a-} = \left[ \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 + \xi \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{B^2}{2\mu_0} \right] \right]_{a+} \quad (13.46)$$

注意到  $p_1 = 0$  和  $p = \text{常数}$ ,因此这个表达式可以化简。另外,在表面上,  $B_\phi$  的径向导数可以容易地算出:

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial r} \Big|_a = \frac{\partial}{\partial r} \frac{B_i R_0}{(R_0 + r \cos \theta)} \Big|_a = \frac{B_i \cos \theta}{R_0 (1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \quad (13.47)$$

对于  $\hat{B}_\phi$  有类似的表达式。最后,利用  $\nabla \times \hat{\mathbf{B}} = 0$  的条件并注意到  $\hat{B}_r(a, \theta) = 0$  (对应于  $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{B}}(a, \theta) = 0$ ),  $\partial \hat{B}_\phi / \partial r \Big|_a$  可以通过  $\hat{B}_\theta(a, \theta)$  直接算出:

$$\frac{\partial \hat{B}_\phi}{\partial r} \Big|_a = -\frac{\hat{B}_\theta}{a} \quad (13.48)$$

综合这些结果即得到所需的——尽管有点复杂的——压强平衡跳变条件的形式:

$$\left[ \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 - \frac{B_i^2 \cos \theta}{R_0 (1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \xi \right]_{a-} = \left[ \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 - \frac{B_0^2 \cos \theta}{R_0 (1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \xi - \frac{B_0^2}{a} \xi \right]_{a+} \quad (13.49)$$

表面电流稳定性问题的数学形式现在就完成了。显然,此时这个形式在本质上仍然是概念上的,如何确定临界压强和电流的实际途径到目前为止还不清楚。解决这一问题的最佳途径是直接研究各种磁约束聚变变形的稳定性。这些应用展示了表面电流模型在理论预言磁流体力学压强电流稳定性极限值的过程中的实用性。

### 13.4.6 表面电流模型小结

为了方便起见,求解表面电流模型的步骤小结如下。

平衡:

$$\hat{B}_0^2(a, \theta) = 2\mu_0 p + \frac{B_i^2 - B_0^2}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} \quad (13.50)$$

等离子体内部的扰动磁场:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 V_1 &= 0 \\ \frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_a &= -\frac{inB_i}{R_0(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} \xi \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1 \Big|_a &= -\frac{inB_i}{R_0(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} V_1 \Big|_a \end{aligned} \right\} \quad (13.51)$$

真空区域的扰动磁场:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \hat{V}_1 &= 0 \\ \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial r} \Big|_b &= 0, \quad \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial r} \Big|_a = \left[ -\frac{inB_0}{R_0(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} + \frac{\hat{B}_0}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \xi \\ \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 \Big|_a &= \left[ -\frac{inB_0}{R_0(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} + \frac{\hat{B}_0}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \hat{V}_1 \Big|_a \end{aligned} \right\} \quad (13.52)$$

压强平衡跳变条件:

$$[\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1]_a = \frac{(B_0^2 - B_i^2) \cos\theta}{R_0(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} \xi + \frac{\hat{B}_0^2}{a} \xi \quad (13.53)$$

这些就是我们将用于分析各种聚变位形的稳定性极限值所需的方程组。

## 13.5 反向场箍缩(RFP)

### 13.5.1 RFP 简介

反向场箍缩位形(The Reversed Field Pinch, RFP)是第一种利用表面电流模型进行分析的位形。它是一种轴对称的环形位形,其特点是大的环向电流,中等大小的环向磁场以及相对较高的 $\beta$ 值。目前国际上的RFP装置主要有这么几个:①麦迪逊对称环(Madison Symmetric Torus, MST, 美国威斯康星大学);②反向场实验装置(Reversed Field Experiment, RFX, 由意大利帕多瓦大学、政府机构和商业机构组成



的协作机构负责运行);③日本产业技术综合研究所(AIST)实验室的 RFP 装置(位于日本筑波)。此外还有一个位于瑞典的较小的实验装置 Extrap T2R。

RFP 的原理图如图 13.11 所示。装置的运行方式如下:首先在真空室内形成一个弱的环向偏置磁场,接着迅速提升大的等离子体环向电流,由此产生对等离子体和环向偏置磁场的压缩。此外,电流通过欧姆加热方式提高等离子体的温度。在电流提升结束时,等离子体内部的极向和环向磁场的强度很接近。但由于大部分环向磁通量被禁锢和压缩在等离子体中,因此仅在等离子体的边缘区残留少量的剩余磁场。值得注意的是,在某些运行状态下,边缘区环向磁场会自发反向——“反向”场箍缩由此得名。通常这是我们最期望得到的运行状态。

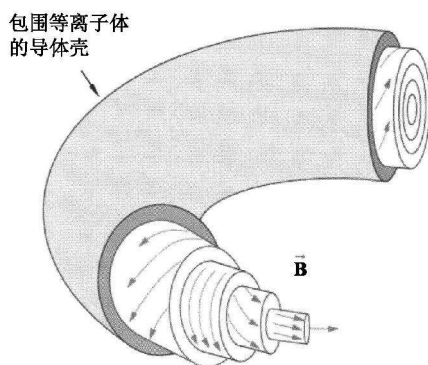


图 13.11 RFP 原理图(承蒙 J. S. Sarff 提供)

等效的柱形 RFP 典型的参数分布如图 13.12 所示。可以看到,压强在中心呈平坦分布, $B_z$  在等离子体边缘处反向。详细的分析指出,RFP 的基本物理性质可以用线性几何来精确描述。本小节采用圆柱几何处理进行讨论,因此极大地简化了数学运算。

从反应堆的观点来看,相比于托卡马克,RFP 有优势也有劣势。优势在于:首先,产生偏置磁场所需的环向磁场线圈不大,这最终会带来紧凑的高功率密度的等离子体,从经济上看这是个明显的优势。其次,与托卡马克相比,预期 RFP 会实现相当高的  $\beta$  值。在有理想导体壁的情形下,理论预言的最大稳定  $\beta$  值约为 0.5,而已经实现的实验值则在 0.15 ~ 0.25 量级。第三,环向电流也许可以大到——或者说至少接近——足以通过欧姆加热等离子体到点火。与各种外部微波加热手段相比,欧姆加热具有简单、高效而且成本低廉等优点,这是 RFP 另一个重要的优势所在。

当然,我们也应看到 RFP 有几处不利的地方。首先,等离子体边缘区的弱环向磁场意味着边缘安全因子较低,这反过来会引起电阻性磁流体湍流。这种湍流表现为明显增强的能量输运。通常,RFP 的能量约束时间  $\tau_E$  要比托卡马克的小很

多。最近有关电流密度分布控制的新型实验技术已经显著改善了上述情形,但是要想赶上托卡马克的性能,RFP 还有很长的路要走。

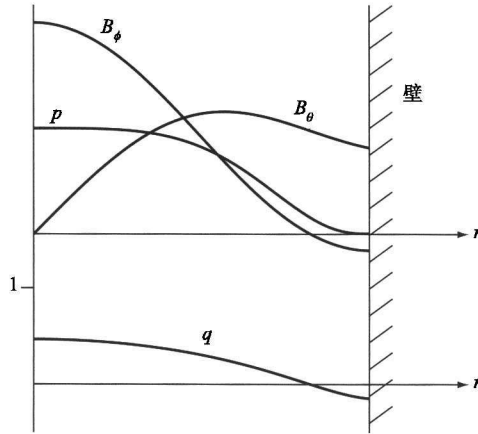


图 13.12 RFP 参数的典型径向分布(承蒙 J. S. Sarff 提供)

其次,由于欧姆变压器无法以直流稳态方式运行,故外界电流驱动是必不可少的。而且 RFP 需要的环向电流很大,因此所需的电流驱动功率很高。这增加了反应堆的成本和复杂性。基于这些原因,目前研究的针对托卡马克的电流驱动方式很可能对于 RFP 来说不是可行的。但是,有一种被称为“振荡场电流驱动(OFC-D)”的方式可能对 RFP 是有效的,可对托卡马克而言就不是了。OFC-D 采用交流驱动电压,因此可以通过感应驱动的变压器实现正弦稳态。目前这种方法还处于实验室实验的早期研发阶段。

最后一点,RFP 位形的高磁流体力学稳定的  $\beta$  值依赖于理想导体壁的存在。如果壁的电导率有限,等离子体将会受制于电阻壁模,临界  $\beta$  减为零,甚至在  $\beta=0$  时等离子体依然是不稳定的,会在 5~10 种不同的电流驱动模式之间来回切换。这意味着需要较为复杂的反馈系统。

本小节分析着重于磁流体力学  $\beta$  极限值,这也是研究 RFP 磁位形的主要目的。根据表面电流模型,研究发现, $m=0$  和  $m=1$  模式决定了最严格的稳定性边界。我们首先从理想导体壁开始分析,然后再针对电阻壁的情形。对于理想导体壁,表面电流模型预言的临界  $\beta$  值约为 0.5。在 6 种可能的电流驱动模式下,电阻壁条件下导出的临界  $\beta$  值均为零。所以 RFP 位形作为聚变反应堆的最终可行性与改善输运、研发可以驱动大的环向电流的 OFCD 系统,以及能够稳定电阻壁模等方面密切相关。

### 13.5.2 RFP 表面电流平衡

分析的第一步是将通常的二维表面电流平衡关系简化为能够精确描述圆柱形

RFP 的一维形式。令倒环径比趋于零:  $a/R_0 \equiv \varepsilon \rightarrow 0$ , 我们很容易实现从二维到一维的转变。接着, 磁场和压强参数选取为图 13.13 所示的典型的 RFP 参数近似分布。

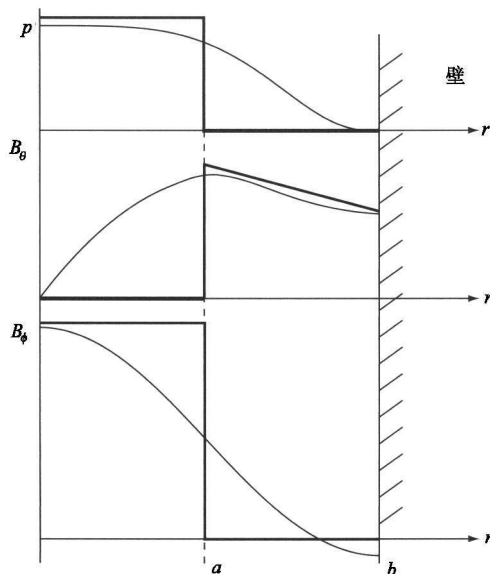


图 13.13 RFP 位形的表面电流模型近似

注意到 RFP 适当的参数定标要求  $p \sim B_i^2/2\mu_0 \sim B_0^2/2\mu_0$ , 即所有压强的量级相同。并且外界环向磁场仍设为零:  $B_0 = 0$ 。严格来讲, RFP 中的环向场很小而且在等离子体边缘附近反向:  $B_0/B_i < 0$  且  $|B_0/B_i| \ll 1$ 。这里反向是稳定特定的内部磁流体力学模所需的。这些模是由采用平滑参数分布时出现的压强和电流梯度驱动的。但在表面电流模型中这些模并不存在。因此既然从一开始就没有这些内模的信息, 那么令  $B_0 = 0$  也就不会造成额外的损失。更重要的是, 最严格的稳定性限制条件来自于外部扭曲模而不是内模。详细分析表明, 在  $|B_0/B_i| \ll 1$  时, 各种外部扭曲模对  $B_0$  的大小的依赖关系很弱。根据上述讨论, 适用于 RFP 的表面电流平衡关系式简化为:

$$p + \frac{B_i^2}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \quad (13.54)$$

注意到在圆柱模型中  $B_0(a, \theta) = \text{常数}$ 。环绕等离子体表面的极向磁场是均匀的。式(13.54)表明, 等离子体压强与内部环向磁压强之和与极向磁场的张力相平衡。

式(13.54)的形式也可以作为 RFP 等离子体比压  $\beta$  的一种有用的定义:

$$\beta \equiv \frac{2\mu_0 p}{B_0^2} = \frac{8\pi^2 a^2 p}{\mu_0 I^2} \quad (13.55)$$

其中,  $I$  是环向电流。在 RFP 中, 总体  $\beta$  值等于极向  $\beta$  值:  $\beta = \beta_p$ 。根据这个定义可得  $0 \leq \beta \leq 1$ , 它表明不存在平衡态  $\beta$  极限。

式(13.54)和式(13.55)体现了稳定性分析所需的平衡态信息。

### 13.5.3 RFP 表面电流稳定性

这一小节将一般的表面电流稳定性分析应用于 RFP 位形。我们将分别计算等离子体和真空的贡献, 然后代入压强平衡匹配条件, 最终得到明确的 RFP 临界稳定性条件。

#### 1. 等离子体的贡献

第一步是将二维环面的稳定性方程简化为适用于直圆柱体的一维稳定性方程。这很容易实现, 只要令  $\varepsilon \rightarrow 0$  并根据环向坐标  $\phi$  定义轴向坐标  $z$  为  $z = R_0\phi$  即可。类似地, 环向模数  $n$  与轴向波数  $k$  之间的关系可以表示为  $k = n/R_0$ 。最后, 直圆柱体平衡具有极向和轴向对称性。所以, 我们可以对极角做傅里叶分析。基于这些变换, 表面位移的法向分量具有形式  $\xi(\theta, \phi) \rightarrow \xi_0 \exp[i(m\theta - kz)]$ , 其中  $\xi_0$  是常数。对于所有的  $m$  和  $k$  都必须检验其稳定性。

现在考虑等离子体对稳定性分析的贡献。与表面电流稳定性问题的基本形式相一致, 等离子体的影响可以通过解如下方程得到:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dV_1}{dr} \right] - \left[ \frac{m^2}{r^2} + k^2 \right] V_1 = 0 \quad (13.56)$$

以等离子体内部的均匀性为条件, 以及

$$\left. \frac{dV_1}{dr} \right|_a = -ikB_i \xi_0 \quad (13.57)$$

依据修正的贝塞尔函数容易得到如下解:

$$V_1(r) = -\frac{iB_i \xi_0}{I'_m(ka)} I_m(kr) \quad (13.58)$$

其中,  $I'_m$  表示对自变量求导。另外, 注意到贝塞尔函数  $I_m$  的行为定性上类似于非振荡增长的指数函数, 它在原点是奇异的; 而互补的修正贝塞尔函数  $K_m$  的行为则定性类似于非振荡衰减的指数函数, 它在  $r \rightarrow 0$  时是奇异的。

现在可以直接计算压强平衡匹配条件所需的量  $B \cdot B_1|_a$ :

$$B \cdot B_1|_a = B \cdot \nabla V_1|_a = -\frac{B_i^2}{a} \frac{\rho_a I_a}{I'_a} \xi_0 \quad (13.59)$$

其中,  $\rho_a = k_a$  是归一化波数, 同时采用了如下简化记号:  $I_a = I_m(\rho_a)$  以及

$$I'_m = dI_m(\rho_a)/d\rho_a.$$

## 2. 真空的贡献

我们可以通过类似的方式导出真空对稳定性分析的贡献。在这个区域中要解的相关方程式为：

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d\hat{V}_1}{dr} \right] - \left[ \frac{m^2}{r^2} + k^2 \right] \hat{V}_1 = 0 \quad (13.60)$$

条件为：

$$\left. \frac{d\hat{V}_1}{dr} \right|_b = 0 \quad (13.61)$$

$$\left. \frac{d\hat{V}_1}{dr} \right|_a = \frac{im\hat{B}_\theta}{a} \xi_0$$

最终的解是满足式(13.61)所选取的贝塞尔函数  $I_m$  和  $K_m$  及其任意常数的组合。简单计算得出：

$$\hat{V}_1(r) = \frac{im\hat{B}_\theta \xi_0}{ka} \left[ \frac{I'_b K_m(kr) - K'_b I_m(kr)}{I'_b K'_a - K'_b I'_a} \right] \quad (13.62)$$

现在,匹配条件所需的量  $\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1|_a$  可得出如下：

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1|_a = \hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla \hat{V}_1|_a = -\frac{m^2 \hat{B}_\theta^2}{a} \frac{K_a}{\rho_a K'_a} \Lambda_b \xi_0 \quad (13.63)$$

其中,  $\Lambda_b$  表示导体壁的影响,可表示为：

$$\Lambda_b = \frac{1 - (K'_b I_a)/(I'_b K_a)}{1 - (K'_b I'_a)/(I'_b K'_a)} \quad (13.64)$$

## 3. 压强平衡匹配条件

稳定性分析的最后一步是将等离子体和真空的贡献代入压强平衡匹配条件中,这在圆柱几何条件下简化为：

$$[\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1]_a - \frac{\hat{B}_\theta^2}{a} \xi_0 = 0 \quad (13.65)$$

经过代换,我们得到

$$\left[ \frac{m^2 \hat{B}_\theta^2}{a} \frac{K_a}{\rho_a K'_a} \Lambda_b - \frac{B_i^2}{a} \frac{\rho_a I_a}{I'_a} + \frac{\hat{B}_\theta^2}{a} \right] \xi_0 = 0 \quad (13.66)$$

注意到幅度  $\xi_0$  是所有项的公因子。因此,如果存在非平凡的解,方括号中的系数必

然为零。这就是决定本征值的条件,对 RFP 来说,它可以看作  $\beta$  的临界稳定值。利用平衡关系消去  $B_i^2$  即可得到我们需要的本征值关系的形式:

$$(1 - \beta) \frac{\rho_a I_a}{I'_a} - m^2 \frac{K_a}{\rho_a K'_a} \Lambda_b - 1 = 0 \quad (13.67)$$

在更详细的分析之前,我们从这个关系可以得到两个一般性结论。首先,注意到  $I_a, I'_a, K_a$  均为正,而  $K'_a$  为负。另外可以看出  $\Lambda_b$  恒正。所以,式(13.67)的前两项——分别表示等离子体和真空的贡献——为正。因为它们由真空磁场产生,所以总是起稳定作用(也就是说,它们的贡献类似于无限大、均匀的、无电流等离子体平衡条件下的等离子体波解)。其次,起不稳定性作用的“ $-1$ ”项来源于磁场表面梯度的不均匀性:  $B_b^2/a$ 。它相当于极向磁场坏曲率的贡献。因为环向磁场线是直的,没有曲率贡献。

最后要指出的一点是,尽管本征值条件相对简单,但它的含义并不一目了然,因为它包含了很多超越贝塞尔函数。在下一小节中我们将对贝塞尔函数做简单近似,以便得到  $\beta$  的边缘稳定极限值的明确形式。

#### 13.5.4 $m = 0$ 模

现在考虑将一般的本征值关系[式(13.67)]应用于  $m = 0$  模,这有点类似于处理完全  $Z$  箍缩中的腊肠不稳定性。关键区别在于 RFP 位形具有内部轴向磁场。所以 RFP 中的腊肠扰动必然会挤压等离子体和内部磁场,然而在  $Z$  箍缩中则仅压缩等离子体。对轴向磁场的挤压是一种额外的致稳效应,可以想见,足够大的轴向磁场  $B_i$  将会稳定  $m = 0$  模式。实际情形正是如此。因为增加  $B_i$  相当于减小  $\beta$ ,保持  $m = 0$  模式的稳定导致可允许的最大  $\beta$  值。

注意到  $m = 0$  模式中的贝塞尔函数  $I_m$  具有如下性质:  $\rho \ll 1$  时,  $I_0(\rho) \approx 1 + \rho^2/4$ ;  $\rho \gg 1$  时,  $I_0(\rho) \approx \sqrt{1/2\pi\rho} \exp(\rho)$ , 由此可以得到临界  $\beta$  值的明确表达式。为此我们合理地假设:

$$\frac{\rho_a I_a}{I'} \approx 2 + ka \quad (13.68)$$

这在  $\rho$  很大或者很小时均适用,而且对于中间值还算精确。根据这个近似,  $m = 0$  且  $ka > 0$  (最不穩定波数范围)情形下的本征值条件的简化为:

$$(1 - \beta)(2 + ka) - 1 = 0 \quad (13.69)$$

或者解出边缘  $\beta$  值:

$$\beta \leq \beta_c(ka) \equiv \frac{1 + ka}{2 + ka} \quad (13.70)$$

显然对  $\beta$  的最严格的限制发生在  $ka = 0$  时,可写为:

$$\beta \leq \beta_{\max} = \frac{1}{2} \quad (13.71)$$

最终结论是:稳定  $m = 0$  模要求  $B_i \geq \hat{B}_0 / \sqrt{2}$ 。对应的稳定的最大  $\beta$  值为  $1/2$ 。这个值虽然比平衡态的最大  $\beta$  值  $1$  要小,但是对于聚变能源这个目标来说还是太高了。

### 13.5.5 $m = 1$ 模

对于  $m \neq 0$  的情形,RFP中最危险的是  $m = 1$  模。定性地说,RFP的  $m = 1$  模与完全  $Z$  箍缩的  $m = 1$  模有类似之处。但因为  $m = 1$  模的扰动是造成磁场线弯曲,所以内部环向磁场的存在具有致稳作用。尽管如此,边界安全因子很小[即当前模式的  $q(a) = 0$ ]导致真空区域的稳定性减弱。真空区域中没有可弯曲的环向磁场线,因此不稳定性始终存在,除非  $\beta$  足够小且导体壁足够封闭。

下面的分析考察  $m = 1$  模的稳定性,由此得到稳定的边缘  $\beta$  值,它是壁位置的函数。对于紧邻的壁,稳定的  $\beta$  值有可能很高。对于远距离的壁,即使  $\beta = 0$ ,等离子体也是不稳定的。通过对贝塞尔函数进行近似,然后解出稳定的边缘  $\beta$  值,即可定量得出下述结果。

注意到对于  $\rho \ll 1, I_1(\rho) \approx \rho/2, K_1(\rho) \approx 1/\rho$ ; 对于  $\rho \gg 1$ , 渐近形式为  $I_1(\rho) \approx \sqrt{1/2\pi\rho} \exp(\rho), K_1(\rho) \approx \sqrt{\pi/2\rho} \exp(-\rho)$ 。与处理  $m = 0$  模时情形相仿,对于  $\rho$  很大或者很小时,这些展开式可以贝塞尔函数的各种组合来近似表示本征值方程的简单函数解,对于中间值,这个解也还算精确。特别地,如果  $m = 1$  且  $ka > 0$  (最不稳定的波数范围),我们可以近似得到:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_a I_a}{I'_a} &\approx \frac{k^2 a^2}{1 + ka} \\ \frac{K_a}{\rho_a K'_a} &\approx -\frac{1}{1 + ka} \end{aligned} \right\} \quad (13.72)$$

类似地,壁项简化为:

$$\Lambda_b \approx \frac{1 + a^2/b^2}{1 - a^2/b^2} \quad (13.73)$$

注意到如果壁位置有限,则  $\Lambda_b > 1$ 。如果壁“无穷远”,则  $\Lambda_b \rightarrow 1$ 。

根据这些近似, $m = 1$  模式的本征值方程简化为:

$$(1 - \beta) \frac{k^2 a^2}{1 + ka} + \frac{\Lambda_b}{1 + ka} - 1 = 0 \quad (13.74)$$

或者解得稳定的边缘  $\beta$  值:

$$\beta \leq \beta_b(ka) \equiv \frac{k^2 a^2 - ka + \Lambda_b - 1}{k^2 a^2} \quad (13.75)$$

恒等号右侧关于  $ka$  的函数有最小值,它给出了对  $\beta$  的最严格的限制。容易得出最小波数为  $ka = 2(\Lambda_b - 1)$ 。对应的  $\beta$  稳定范围是:

$$\beta \leq \beta_{\max} = \frac{1}{8} \left[ 9 - \frac{b^2}{a^2} \right] \quad (13.76)$$

图 13.14 显示了物理量  $\beta_{\max}$  随  $b/a$  的变化。我们注意到,如果  $\beta_{\max}$  为正(这对于物理上可以实现的等离子体是必需的),则理想导体壁的距离不能大于  $b/a = 3$ 。如果  $b/a > 3$ ,即使  $\beta = 0$ ,等离子体也是不稳定的。另外,如果  $b/a = \sqrt{5} \approx 2.24$ ,那么  $\beta_{\max} = 1/2$ ,也就是说,  $m = 0$  和  $m = 1$  模式的稳定性边界在此  $\beta$  值时重合。

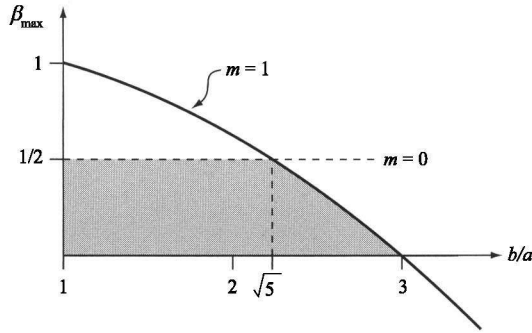


图 13.14 RFP 中稳定的最大值  $\beta_{\max}$  随  $b/a$  的变化图(图中还显示了  $m = 0$  模的值,阴影区域是稳定区域)

最后需要讨论的一点是考虑壁远离等离子体的情形。在这种极限情形下,RFP 总是不稳定的,我们感兴趣的问题是严格地确定哪些以及有多少模式是不稳定的。为了获得这些信息,指定  $\Lambda_\infty = 1$  且考虑用  $n/R_0$  取代  $k$  时的等效环面。边缘稳定性关系式简化为:

$$\beta \leq \beta_\infty(n) \equiv 1 - \frac{R_0}{na} \quad (13.77)$$

图 13.15 画出了在  $R_0/a = 5.5$  的实际情形下边缘  $\beta$  随模数  $n$  的变化。注意到对于  $\beta = 0$ ,等离子体在  $0 \leq n \leq 5$  时是不稳定的。随着  $\beta$  增加,有更多的模式变得不稳定。例如,当  $\beta = 0.2$  时  $n = 6$  的模式也变得不稳定。结论是:没有理想导体壁的 RFP 位形,即使在  $\beta = 0$  的情形下至少对于某些  $n$  值是不稳定的。



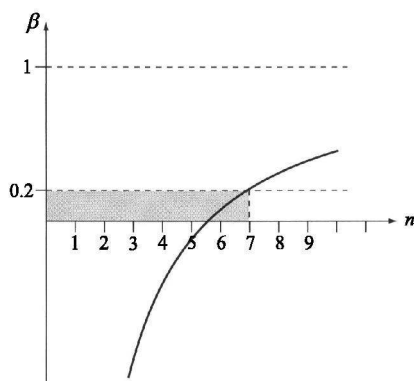


图 13.15  $R_0/a = 5.5$  且  $b/a \rightarrow \infty$  时边缘  $\beta$  随环向模数的变化  
(阴影区中的整数  $n$  在  $\beta = 0.2$  时是不稳定的)

### 13.5.6 电阻壁模

上述分析表明,如果存在理想导体壁,RFP 位形在高  $\beta$  时可以是磁流体力学稳定的。无壁等离子体在  $\beta = 0$  时是不稳定的。本小节考虑更为实际的情形:壁存在但是电导率有限。分析表明,电阻壁条件下的边缘稳定性判据与无壁条件下的稳定性边界完全一致;也就是说,电阻壁对边缘  $\beta$  不起任何致稳作用。但是,不稳定性增长率则从理想磁流体力学情形下的值减小到与壁的电阻耗散时间有关的值。这一点很关键,因为只有当所需的回路响应时间跟壁的耗散时间可比时(通常为几十毫秒),实际的反馈系统才是可行的。实际上,对于理想磁流体力学时间尺度下(通常为几个微秒)的增长模式来说,反馈控制是不可行的。

分析中包括重新计算电阻壁情形下真空的贡献。对稳定性分析中的其他部分的贡献仍保留不变。因为我们关心的是缓慢增长的模式,所以仍假设可以忽略惯性项(即令等离子体中  $\omega^2 = 0$ )。计算过程包括求解电阻壁两侧的真空扰动磁场以及利用“薄壁”近似求解电阻壁本身的内部磁场。壁两边和等离子体-真空界面两边合适的匹配条件最终使得我们能够算出稳定性分析所需的物理量  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_{||}$ 。最终结果是给出电阻壁模增长率的显性表达式,它由两种理想的边缘稳定性  $\beta$  极限值表示,分别对应于有壁和无壁的情形。最后,值得注意的是,尽管计算是在柱面电流模型下进行的,但其结果是通用的,对于多维几何条件下的任意参数分布都是适用的。

#### 1. 真空和电阻壁的磁场

在有电阻壁的情形下,等离子体外部区域的分析实际上是一个图 13.16 所示的三区域问题。内侧和外侧真空区域的磁场可以写成满足拉普拉斯方程的势函数的形式。相应的势函数的解为:

$$\left. \begin{aligned} \hat{V}_I &= [C_1 K_m(kr) + C_2 I_m(kr)] \exp[\omega_i t + i(m\theta - kz)] \\ \hat{V}_{II} &= C_3 K_m(kr) \exp[\omega_i t + i(m\theta - kz)] \end{aligned} \right\} \quad (13.78)$$

这里的  $C_j$  是未知系数,由待定的匹配条件确定。通过设  $\omega = i\omega_i$ ,时间的依赖性被明确地表示出来,可以预期,电阻壁模不稳定性是一种纯增长模式。另外,注意到  $\hat{V}_{II}$  仅有  $K_m(kr)$  部分的贡献,因为正则性要求  $r \rightarrow \infty$  时  $\hat{V}_{II} \rightarrow 0$ 。当  $C_j$  最终确定后,可将其代回原式计算稳定性分析所需的物理量:

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_I|_a = \hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla \hat{V}_I|_a = \frac{imB_\theta}{a} (C_1 K_a + C_2 I_a) \quad (13.79)$$

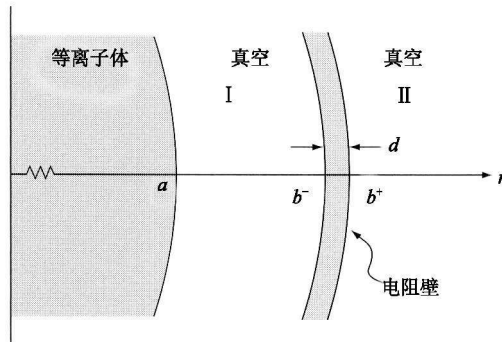


图 13.16 电阻壁模的三区域问题的几何图像

将壁的电阻率  $\eta$  代入  $\mathbf{E} = \eta \mathbf{J} = (\eta/\mu_0) \nabla \times \mathbf{B}_w$  后,即可从法拉第定律得到电阻壁内部的磁场。利用  $\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}}_w = 0$  这一条件我们得到标准的磁扩散方程:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}_w}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \hat{\mathbf{B}}_w \quad (13.80)$$

式(13.80)的解不是十分复杂,但需要一些精妙的分析。关键是假设  $d \ll b$ ,它使我们能够根据以下简化方法引入“薄壁”近似:①在此极限情形下仅需要径向分量  $\hat{B}_{wr}$ ;②为方便起见,引入如下定义的类似平板的局部径向坐标  $x: r = b + x$ ,其中  $0 \leq x \leq d$ ;③在薄壁模型中, $x$  方向上的变化梯度较大,但在  $\theta$  和  $z$  方向上变化要慢得多。所以可以近似认为  $\nabla^2 \approx \partial^2/\partial x^2$ ;④傅里叶分析表明  $\hat{B}_{wr}$  可以写为  $\hat{B}_{wr} = \hat{B}_{wr}(x) \exp(\omega_i t + i(m\theta - kz))$ ;⑤  $\omega_i$  的典型幅度对应于壁耗散时间的倒数:  $\omega_i \sim \eta/\mu_0 bd$ 。为了比较分析过程中出现的各项,这个假设是必需的。根据这些条件,式(13.80)简化为:

$$\frac{\partial^2 \hat{B}_{wr}}{\partial x^2} - \frac{\mu_0 \omega_i}{\eta} \hat{B}_{wr} = 0 \quad (13.81)$$

在上述假设条件下,有  $\partial^2/\partial x^2 \sim 1/d^2$  和  $\mu_0 \omega_i/\eta \sim 1/bd$ , 经过简单的迭代,我们可得式(13.81)的解。为此做展开  $\hat{B}_{wr} = \hat{B}_{r0} + \hat{B}_{r1} + \dots$ , 其中  $d/b \ll 1$  是展开参数。零阶和一阶的方程分别为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{B}_{r0}}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \hat{B}_{r1}}{\partial x^2} &= \frac{\mu_0 \omega_i}{\eta} \hat{B}_{r0} \end{aligned} \right\} \quad (13.82)$$

其解为:

$$\left. \begin{aligned} \hat{B}_{r0} &= B_{r0} \\ \hat{B}_{r1} &= B_{r0} \left[ \frac{\mu_0 \omega_i}{2\eta} x^2 \right] + B_{r1} \left[ \frac{x}{d} \right] \\ \hat{B}_{wr} &\approx \hat{B}_{r0} + \hat{B}_{r1} = B_{r0} \left[ 1 + \frac{\mu_0 \omega_i}{2\eta} x^2 \right] + B_{r1} \left[ \frac{x}{d} \right] \end{aligned} \right\} \quad (13.83)$$

其中,  $B_{r0}$  和  $B_{r1}$  分别是零阶和一阶的未知常数。注意,  $\omega_i$  项也是一阶的。

现在,所有3个区域中的解可以用5个未知常数  $C_1, C_2, C_3, B_{r0}, B_{r1}$  确定,而这些常数则可通过匹配条件来确定。

## 2. 匹配条件

匹配条件有5个:关于等离子体表面的有一个,关于电阻壁两侧的各有两个。壁条件可以简化为一组与  $r = b$  位置的势函数  $\hat{V}_I$  和  $\hat{V}_{II}$  有关的跳变条件。

首先考虑关于等离子体表面的条件。它与理想导体壁情形下的条件一样:

$$\left. \frac{\partial \hat{V}_I}{\partial r} \right|_a = k(C_1 K'_a + C_2 I'_a) = \frac{im\hat{B}_0}{a} \xi_0 \quad (13.84)$$

接下来考虑壁。这一跳变条件直接可得,尽管形式上有点复杂。关键是壁尽管很薄但仍有一定厚度。所以壁的两个表面都没有表面电流。这意味着壁内磁场的法向和切向分量在壁面两边与真空磁场之间是连续的。磁场的法向分量的连续性要求:

$$\left. \frac{\partial \hat{V}_I}{\partial r} \right|_{b-} = \hat{B}_{wr} \Big|_{x=0} \quad \left. \frac{\partial \hat{V}_{II}}{\partial r} \right|_{b+} = \hat{B}_{wr} \Big|_{x=d} \quad (13.85)$$

为了计算切向磁场的连续性,注意到壁内  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , 这一条件意味着  $i\mathbf{k} \cdot$

$\hat{B}_w = -\partial\hat{B}_{wr}/\partial x$ 。类似地,真空区域中  $\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 = -k_0^2 \hat{V}$ , 其中,  $k_0^2 = k^2 + m^2/b^2$ 。因此切向磁场的连续性要求:

$$\hat{V}_1|_{b^-} = \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial \hat{B}_{wr}}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \hat{V}_1|_{b^+} = \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial \hat{B}_{wr}}{\partial x} \Big|_{x=d} \quad (13.86)$$

经过简短的计算,常数  $\hat{B}_{r0}$  和  $\hat{B}_{r1}$  可以消去,由此得到下面这组真空势函数的跃变条件。每个条件包含  $d/b$  展开式中的首个非零项的贡献:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{V}_I}{\partial r} \Big|_{b^-} &= \frac{\partial \hat{V}_{II}}{\partial r} \Big|_{b^+} \\ \hat{V}_I|_{b^-} &= \hat{V}_{II}|_{b^+} - \left[ \frac{\mu_0 \omega_i d}{\eta k_0^2} \right] \frac{\partial \hat{V}_{II}}{\partial r} \Big|_{b^+} \end{aligned} \right\} \quad (13.87)$$

这些条件可用系数  $C_j$  写为:

$$\left. \begin{aligned} C_1 K'_b + C_2 I'_b - C_3 K'_b &= 0 \\ C_1 K_b + C_2 I_b - C_3 \left[ K_b - \frac{\mu_0 \omega_i dk}{\eta k_0^2} K'_b \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.88)$$

式(13.84)和式(13.88)即所需的关系式,它们的推导显然需要更为复杂的分析。这些关系式应看作由表面位移  $\xi_0$  表示的关于3个未知系数  $C_1, C_2, C_3$  的3个线性代数方程。经过较为冗长的计算,我们可以算出这些系数并代入式(13.79),从而得到电阻壁的本征值关系。

### 3. 电阻壁的稳定边界

根据上述过程,我们得到真空对压强平衡匹配条件的贡献的表达式:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1|_a &= -\frac{m^2 \hat{B}_0^2}{a} \frac{K_a}{\rho_a K'_a} \left[ \frac{\Omega_i (1 - K'_b I_a / I'_b K_a) + 1}{\Omega_i (1 - K'_b I_a / I'_b K_a) + 1} \right] \xi_0 \\ &\approx \frac{\hat{B}_0^2}{a} \frac{1}{1 + ka} \left[ \frac{\Omega_i (1 + a^2/b^2) + 1}{\Omega_i (1 - a^2/b^2) + 1} \right] \xi_0 \end{aligned} \quad (13.89)$$

这里的  $\Omega_i$  是归一化的不稳定性增长率:

$$\Omega_i = - \left[ \frac{\rho_b^2 I'_b K'_b}{m^2 + \rho_b^2} \right] \frac{\mu_0 \omega_i b d}{\eta} \approx \left[ \frac{1 + kb}{1 + k^2 b^2} \right] \frac{\mu_0 \omega_i b d}{2\eta} \quad (13.90)$$

简化形式中的贝塞尔函数相当于  $m = 1$  的近似。

下一步是将这个关系式代入压强平衡匹配条件。由此得到的本征值方程很容易改写为  $m = 1$  时的增长率显性表达式,它可写为:

$$\omega_i \tau_w \approx - \left[ \frac{2(1 + k^2 b^2)}{(1 + kb)(1 - a^2/b^2)} \right] \left[ \frac{\beta - \beta_*}{\beta - \beta_b} \right] \quad (13.91)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \beta_* &= 1 - \frac{1}{ka} \\ \beta_b &= 1 - \frac{1}{ka} + \frac{\Lambda_b - 1}{k^2 a^2} = 1 - \frac{1}{ka} + \left[ \frac{2}{b^2/a^2 - 1} \right] \frac{1}{k^2 a^2} \end{aligned} \right\} \quad (13.92)$$

$\tau_w = \mu_0 bd/\eta$  是壁耗散时间。这就是所需的电阻壁模的本征值方程。

分析式(13.91)时,首先,我们注意到方括号内的项总是正的。其次,注意到  $\beta_b(ka)$  和  $\beta_*(ka)$  分别是理想导体壁分别位于  $r = b$  和  $r = \infty$  时所对应的边缘稳定性  $\beta$  值。另外,随着  $ka$  变化,  $\beta_b(ka)$  和  $\beta_*(ka)$  均可正可负,但是总有  $\beta_b > \beta_*$ 。最后要记住的是,电阻壁模是一种在理想化壁模以外的由等离子体支撑的新的模。

在上述分析的基础上,还有3种有趣的情形要考虑。首先,假设在某个取定的  $k$  下,等离子体对于无穷远壁情形下的理想化壁模是稳定的:  $\beta < \beta_* < \beta_b$ 。这时本征值关系意味着  $\omega_i \tau_w < 0$ ,也就是说,此时等离子体对于理想化壁模和电阻壁模都是稳定的。因为此时理想导体壁对理想稳定性来说不是必需的,所以电阻壁不改变稳定性的性质。

第二种情形是,尽管理想导体壁存在,但其距离还不足以稳定理想化壁模:  $\beta > \beta_b > \beta_*$ 。这时仍有  $\omega_i \tau_w < 0$ ,即电阻壁模仍是稳定的。但等离子体对于快变、甚至可能是突变的理想化壁模则是不稳定的。如果理想导体壁不是近到足以稳定理想化壁模,那么即使将它变成电阻壁也不起作用。

第三种情形,也是最有趣的情形是,理想导体壁存在而且距离近到足以稳定理想化壁模,但无壁等离子体对于理想化壁模是不稳定的:  $\beta_b > \beta > \beta_*$ 。在此情形下  $\omega_i \tau_w > 0$ ,这表明此时电阻壁模是不稳定的。因为如果壁是电阻性的,那么在理想导体壁中发展起来的致稳的涡流会在壁耗散时间内耗散掉。在这个时间尺度上,电阻壁不起作用,稳定性边界回到没有壁的情形。

图 13.17 显示了  $R_0/a = 5.5, b/a = \sqrt{5}$  的 RFP 位形下的上述结果。图中显示了  $n = 3$  模式的电阻壁模增长率  $\omega_i \tau_w$  随  $\beta$  的变化。注意到  $\beta = \beta_b \approx 0.85$  右侧的区域对于理想化壁模是不稳定的。 $\beta = \beta_* \approx -0.83$  左侧的区域对于理想化壁模和电阻壁模均是稳定的,但显然这在物理上是无法实现的,因为  $\beta$  不能为负。中间区域对于理想化壁模是稳定的,但对于电阻壁模是不稳定的。如前所述,这个模式即使  $\beta = 0$  也是不稳定的。

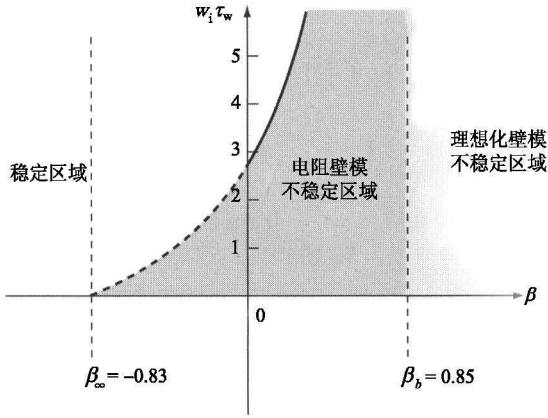


图 13.17 对于  $R_0/a = 5.5, b/a = \sqrt{5}, n = 3$  的 RFP 情形, 电阻壁模的增长率随  $\beta$  的变化

### 13.5.7 小结

RFP 是一种具有较大环径比、轴对称的环形位形。从磁流体力学稳定性方面看, 由于内部存在环向磁场, 它的稳定性与完全  $Z$  箍缩相比有了极大的改善。但因为边缘安全因子小, 如果没有环绕等离子体的理想导体壁的话, 它会受到各种外部扭曲模的影响, 即使  $\beta = 0$  亦难幸免。如果存在合适紧邻的理想导体壁, RFP 位形在极高的  $\beta$  值 ( $\sim 1/2$ ) 下对于最危险的  $m = 0$  和  $m = 1$  模式仍是稳定的。对于实际的电阻壁, 不稳定性将重现, 尽管此时不稳定性增长率小了很多。因此最终的结论是, 此时我们需要某种形式的反馈稳定系统。

尽管如此, 输运仍是 RFP 研究的重点, 这也是威斯康星大学的 MST 装置研究计划的核心。早期实验的能量损失速率要比同尺寸的托卡马克快两个量级。在这些实验中, 厚铜壁在实验的时间尺度上有效地起到了理想导体壁的作用, 因此电阻壁模不是实验要解决的主要问题。此外, 一些创新的实验构想已大大改善了输运状况, 提升了不止一个数量级, 这确实是相当不错的结果。

但随着输运状况有望继续得到改善, 加之实验上脉冲放电时间的延长, 电阻壁模将变得重要起来。这一考虑促使其他的 RFP 研究小组 (例如, 意大利的 RFX 研究小组和瑞典的 Extrap T2R 小组) 将他们的研究计划重点放在了发展主动控制磁流体力学行为, 尤其是电阻壁模的方法上。

全世界的 RFP 研究人员正在深入研究 RFP 装置面临的几个主要的等离子体物理问题。时间会告诉我们, RFP 装置的整体物理性能能否比得上托卡马克。

## 13.6 球马克

### 13.6.1 球马克简介

球马克(Spheromak)是一种紧凑的轴对称的环形位形。它的极向磁场和环向磁场大小接近,理论上实现高等离子体压强的潜力,但迄今为止实验上仅实现了相对较低的 $\beta$ 值运行。球马克的独特之处在于既没有环向磁场线圈也不需要欧姆变压器,环的内侧没有线圈回路臂,因此真空室具有球形而不是环形拓扑结构,球马克因此得名。

既然没有环向场线圈和欧姆变压器,我们不禁要问,球马克是如何产生环向和极向磁场的呢?答案是通过一种新颖的稳态电流驱动方法与外加极向磁场耦合来实现。图13.18展示了球马克的简单原理图。图中还给出了这一概念的实际装置结构图,该装置的全称叫劳伦斯·利弗莫尔国家实验室的持续型球马克物理实验装置(Sustained Spheromak Physics Experiment, SSPX)。

装置的运行原理如下。首先,对外部偏置线圈进行缓慢充电励磁,产生的极向磁场穿过真空室内环向对称的间隙;接着向真空室注入少量的中性气体。在间隙两端的高电压(通常由电容器组产生)的作用下,形成初始等离子体。等离子体的带电粒子沿磁场的运动使得在两个电极间产生最初的电流。随着电流的增大并最终超过临界值,极向磁场线断裂并重联形成闭合的磁面。闭合面内的电流产生欧姆加热效应,从而形成球马克等离子体。

磁场线的断裂和重联机制是一个复杂的物理过程。按球马克研究者的标准观点,也是本节的主要观点,这个过程涉及小尺度、对称性破缺的电阻性磁流体力学湍流。这种湍流甚至在球马克等离子体形成以后依然存在,并使等离子体非线性地弛豫到最低能态,这一过程通常称为“自组织”,尽管称作“湍流弛豫”也许更合适。较新的观点则认为,重联过程涉及大尺度的对称性破坏,并导致产生磁场线的随机化。这种效应在球马克等离子体的形成过程中可能占主导地位,但是在等离子体产生之后,可通过降低间隙电流来减弱。不论采取哪种解释,都存在可观的增强的输运过程。搞清楚这一复杂行为尚需进一步研究。

有趣的是,尽管外部驱动的两个电极间的电流沿极向流动,但球马克等离子体内部的弛豫过程同样会感应出环向电流。从等离子体物理学的观点来看,弛豫过程的分析也是一个吸引人的课题。但由于其复杂性,这一分析超出了本书范围,感兴趣的读者可以参阅贝兰(P. M. Bellan)于2000年写的《球马克》(London: Imperial College Press)一书。就眼下目的来说,我们不妨从假设“球马克等离子体已经产生”开始分析,我们的任务是要理解其磁流体力学平衡和稳定性方面的性质,最终是要了解它作为反应堆的可能性。

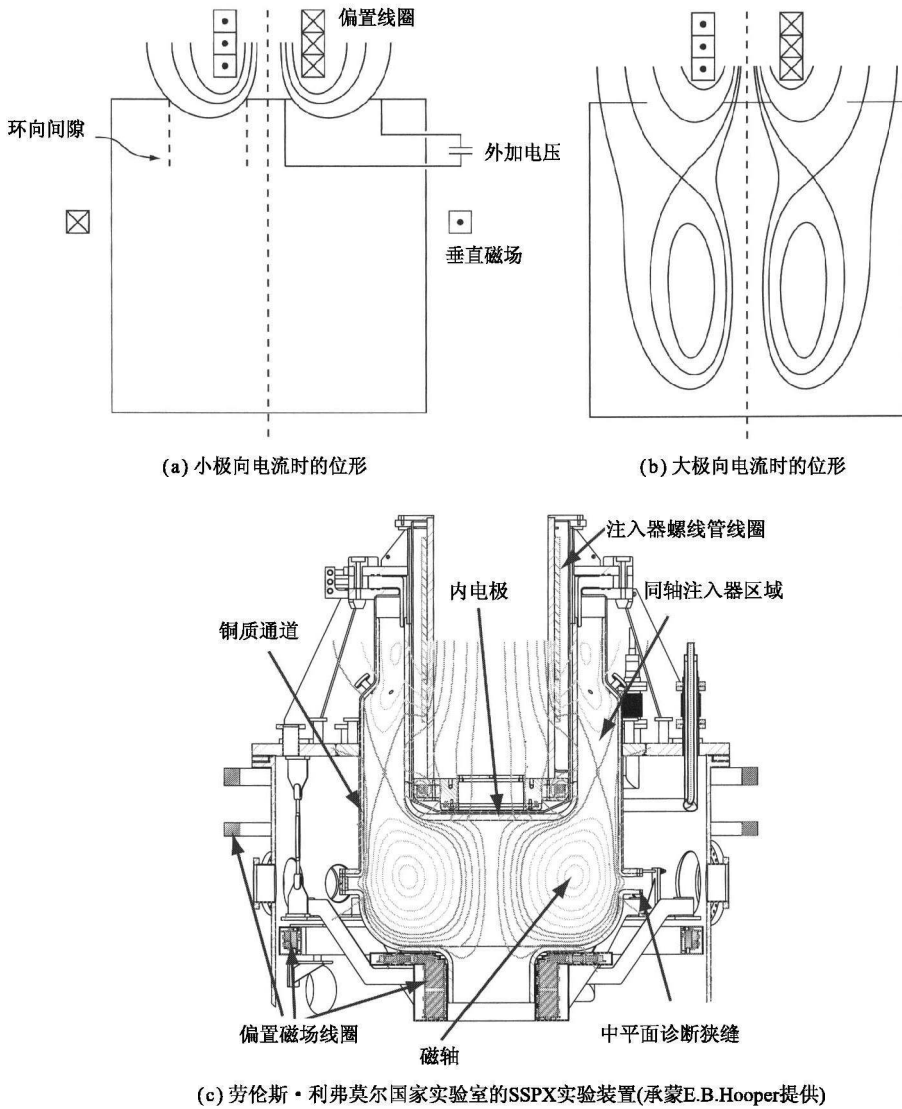


图 13.18 球马克概念图示

在磁流体力学平衡方面,现有的球马克采用真空室导体壳内流动的涡流来保持环向力平衡。由于电力供应上的限制,大多数实验的脉冲长度还短于壁耗散时间。换句话说,在现有实验的时间尺度上,壁可看作理想导体。对于脉冲更长的实验,则需要投入外部垂直场线圈。总之,仅采用 3 种直流电源供电:①外部偏置线圈电流;②电极间的电压;③垂直场线圈电流,来实现真正的稳态运行是可能的。另外,目前实验中没有采取辅助加热手段,可实现的  $\beta$  值受到最大欧姆加热电流和输运损



失的限制。

在稳定性方面,安全因子随小半径增大缓慢减小,在没有理想导体壁情形下,通常低到不足以保证稳定性。通常最危险的不稳定性是  $n = 1, m = 1$  为主的极向谐波模。这是一种外部扭曲模,用来描述等离子体的倾侧(tilting)运动。具体来说,在没有导体壁的情形下,等离子体的平衡靠一组垂直场线圈产生的磁场来维持,线圈电流与等离子体电流方向相反。电流的反向使得球马克电流环设法翻转  $180^\circ$  以颠倒位置。短时间内这个翻转运动看起来像倾侧运动。实际上,由于实验脉冲长度相对较短,真空室表现为理想导体壁,因此这种不稳定性是观察不到的。但随着实验脉冲长度的增加,预期这种不稳定性会作为一种电阻壁模重新出现,因此需要采取某种反馈稳定措施来抑制。

下面考虑球马克作为聚变反应堆相对于托卡马克的潜在优势和劣势。从积极的方面说,没有中心结构的球形位形技术上要比环形位形简单。这种装置结构紧凑,成本也较低,显然这是一个重要的优点。预期球马克反应堆的环向电流为 30 MA,极向电流为 100 MA,因此总电流要比托卡马克大很多,高出不止一个量级。原则上,这么大的电流应该能够通过欧姆加热到等离子体点火,而无需昂贵的微波或者中性束等辅助加热系统,因此其比较优势是不需要昂贵复杂的辅助性电流驱动系统来维持稳态运行。如前所述,球马克有可能只需 3 种技术难度相对较低的直流电源即可维持稳态运行。

球马克也有一些不足之处。首先,与弛豫过程有关的湍流会造成输运的增强,因此球马克实验取得的能量约束时间  $\tau_E$  相对于主流托卡马克明显偏短。由于弛豫过程是球马克的固有性质,因此目前尚不明了由此导致的输运增强最终能被减小到什么水平。这是球马克当前研究的主要课题之一。第二,相对较低的安全因子会引起电阻壁模不稳定性,这种不稳定性甚至在零  $\beta$  时也存在。这意味着需要采取某种形式的反馈稳定措施,这就增加了技术复杂度,尤其是在一个极为紧凑的几何位形下。最后,尽管采用技术难度低的直流电源来实现稳态电流驱动是一个优点,但效率如何仍是一个重要问题。驱动 1 A 的电流需要多少瓦功率? 目前来说,弛豫产生的电流驱动效率很低,如果直接外推到反应堆规模,不可能达到所需的功率平衡。但是,平心而论,提高电流驱动效率还未成为球马克研究的一个主要课题。如果输运问题能够改善,这才可能突出为一个重要的课题。

本小节着重于根据表面电流模型来分析球马克的磁流体力学平衡和稳定性。尽管现在输运问题是球马克研究计划面临的最严峻的问题,但我们研究球马克位形的动机则主要出自磁流体力学方面的考虑,本小节的主要目标就是确切理解这一目的。分析主要是要确立针对倾斜模( tilt mode)的最大稳定  $\beta$  值与理想导体壁半径之间的关系。结果表明,对于合理的环径比和壁半径取值,能够实现很高的稳定  $\beta$  值:  $\beta \sim 0.5$ 。如果壁电导率有限,则不稳定性以电阻壁模的形式重新出现,通常仅

有一种模式,即  $m = 1$  模,变得不稳定。稳定这种模需要采取某种反馈措施。

### 13.6.2 球马克表面电流平衡

我们先将一般的二维表面电流平衡关系简化为适用于球马克的较简单的形式。表面电流模型的参数可通过对中平面参数分布进行一系列数值计算检验来选取,如图 13.19 所示。图中同时给出了表面电流模型给出的近似分布。首先,我们注意到,对于球马克,合适的参数定标关系可假设为: $p \sim B_0^2/2\mu_0 \sim B_0^2/2\mu_0$ 。所有的压强量级均可比。

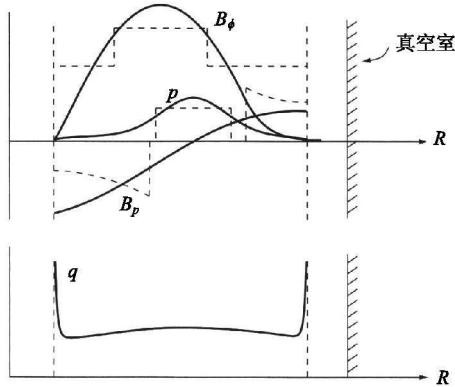


图 13.19 球马克中平面( $Z=0$ )上的参数随  $R$  的变化(承蒙 E. B. Hooper 提供)

其次是注意到,我们可以合理地近似认为球马克的截面是圆形的。截面的拉长和变形不是这种位形的主要特征。

最后,对球马克参数分布的数值计算研究发现,由于这种位形结构紧凑、环径比小,因此环向效应很重要。然而,在倾斜稳定性分析中,将环向效应包括进来导致数学上计算非常复杂。为了避开这个困难,我们再次引入大环径比展开: $\epsilon \ll 1$ 。这样做尽管近似上相当粗略,但没有遗漏主要的物理问题,只是结果仅在定性上是正确的。因此,下一步的简化是将圆截面和  $\epsilon \ll 1$  展开结合起来,将环向稳定性问题简化为等价的直圆柱问题,这种处理与 RFP 的过程类似,只是  $B_0 \neq 0$ 。

综合上述假设,我们得到如下关于“直圆柱”球马克表面电流模型的简化的平衡态下压强平衡关系式:

$$B_0^2(a) = 2\mu_0 p + B_i^2 - B_0^2 \quad (13.93)$$

就稳定性分析来说,有必要定义  $\beta$  和  $q$ 。在表面电流模型中,球马克的一个合适的  $\beta$  定义为:

$$\beta = \frac{2\mu_0 p}{B_0^2 + B_i^2} \quad (13.94)$$

类似地,安全因子的定义为:

$$q = \frac{\varepsilon B_0}{B_0} \quad (13.95)$$

球马克的安全因子通常接近但稍小于 1,其典型值为  $q \approx 0.7$ 。因此,如果假设安全因子的适宜的量为  $q \sim 1$ ,并且放宽环径比展开的限制到  $\varepsilon \approx 0.6$ ,由此可得:

$$\beta = \frac{2\mu_0 p}{B_0^2(1 + \varepsilon^2/q^2)} \quad (13.96)$$

这就完成了对平衡态的简化。

### 13.6.3 $m = 1$ 倾斜不稳定性

影响球马克的最重要的外界磁流体力学不稳定性是  $m = 1, n = 1$  的倾斜模。这种不稳定性的基本特征可以通过分析大环径比球马克模型来得到。分析的细节几乎和对 RFP 的分析一样,这里没必要重复,但有几点细微的差别值得讨论。同时我们应该明确,计算的目的是推导出倾斜模的  $\beta$  随  $b/a$  变化形式的边缘稳定性关系。

球马克和 RFP 分析的主要差别在于扰动的真空磁场的边界条件。对于 RFP,该条件已经在假设  $B_0 = 0$  的情形下导出。而对于球马克,  $B_0 \neq 0$ ,因此原用于 RFP 的由扰动真空势表示的边界条件现在必须修正如下:

$$\left. \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial r} \right|_0 = \frac{i m \hat{B}_0}{a} \xi_0 \rightarrow \frac{i(m \hat{B}_0 - k a B_0)}{a} \xi_0 \quad (13.97)$$

利用这个代换,我们可以容易地证明,只需一处修正就可以让 RFP 的压强平衡匹配条件适用于球马克。新的球马克的匹配条件是:

$$\left[ \frac{(m \hat{B}_0 - \rho_0 B_0)^2}{a} \frac{K_a}{\rho_a K'_a} \Lambda_b - \frac{B_i^2}{a} \frac{\rho_a I_a}{I'_a} + \frac{\hat{B}_0^2}{a} \right] \xi_0 = 0 \quad (13.98)$$

唯一的改变是第一项,  $m \hat{B}_0$  被替换为  $m \hat{B}_0 - k a B_0$ 。

为了将这个本征值关系应用于球马克,需要做若干简化。首先,倾斜不稳定性要求令  $m = 1$ 。第二,参数  $\rho_a = k a = n \varepsilon$ 。对于倾斜不稳定性必须令  $n = 1$ ,也就是说  $\rho_a = \varepsilon$ 。第三,在大环径比展开的情形下,我们可以用  $\rho_a I_a / I'_a \approx \varepsilon^2$  和  $K_a / \rho_a K'_a \approx -1$  来近似表示贝塞尔函数表达式。类似地,壁稳定性项简化为  $\Lambda_b = (w^2 + 1)/(w^2 - 1)$ ,其中,  $w = b/a$  是壁半径与等离子体半径之比。最后,通过平衡态关系式:  $B_i^2 = B_0^2 + \hat{B}_0^2(a) - 2\mu_0 p = (1 - \beta)(1 + \varepsilon^2/q^2) B_0^2$  消去  $B_i^2$ 。综合这些简化可得如下针对倾斜不稳定性的边缘稳定  $\beta$  的表达式:

$$\beta \leq \beta_{\max} \equiv \frac{[2(1-q) - \varepsilon^2] - w^2[2(1-q) - \varepsilon^2]}{(q^2 + \varepsilon^2)(w^2 - 1)} \quad (13.99)$$

图 13.20 形象地描述了  $q = 0.7, \varepsilon = 0.6$  情形下的这一表达式。我们注意到,当壁远到足以满足  $w > [2(1-q) - \varepsilon^2]^{1/2} / [2(1-q)q - \varepsilon^2]^{1/2} \approx 2$  时,即使  $\beta = 0$ ,球马克对于倾斜不稳定性也是不稳定的。另一方面,对于满足条件  $w < [1 + (1-q)^2]^{1/2} / [1 - (1-q)^2]^{1/2} \approx 1.1$  的贴近壁的情形,球马克在  $\beta = 1$  时是稳定的。

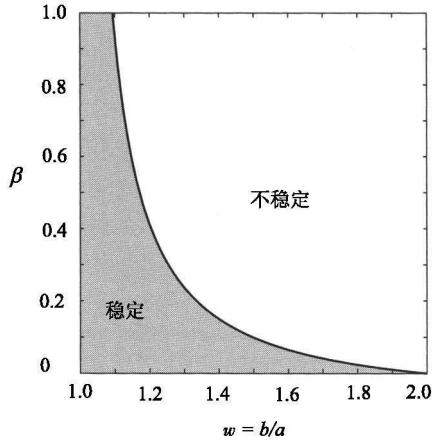


图 13.20  $q = 0.7$  时作为壁半径  $w = b/a$  的函数的倾斜不稳定性边缘  $\beta$  值分布

显然,在表面电流模型下,边缘  $\beta$  强烈依赖于壁的位置。更严格的包括了环向效应的数值研究也表明,壁必须非常靠近才能抑制倾斜不稳定性。精确结果取决于参数分布和导体壁的形状,因此不存在简单通用的确定某一特定  $\beta$  的临界壁半径的关系式。但是如果没有壁,即使  $\beta = 0$ ,孤立的球马克等离子体对于倾斜不稳定性也总是稳定的。对于那些持续时间长到可以和壁耗散时间可比的放电,壁的致稳效应消失,倾斜不稳定性以电阻壁模的形式重新出现。与 RFP 类似,长脉冲运行需要某种形式的反馈稳定措施。

本小节的最后一个主题是对引起倾斜不稳定性的基本机制作简要的定性描述。简单导线模型即可提供所需的解释。考虑图 13.21 所示的由垂直场维持平衡的球马克。这里暂且假设不存在理想导体壁。球马克可以近似为一个载流  $I$  的导线圆环。为了提供向内的、沿  $R$  方向的排斥力以维持等离子体的环向力平衡,垂直场线圈必须携带与等离子体电流方向相反的电流  $I_{\text{ext}}$ 。现在假设等离子体经历一个如图 13.21(a) 所示的极小的倾斜运动。于是球马克电流将受到一个垂直的  $Z$  方向的小的力。由于  $I$  和  $I_{\text{ext}}$  方向相反,右侧的球马克电流受到的  $Z$  方向的力方向向上(即排斥),而左侧的力方向向下(排斥)。换句话说,感应力指向增强初始倾斜扰动的方向,这对应于不稳定性。

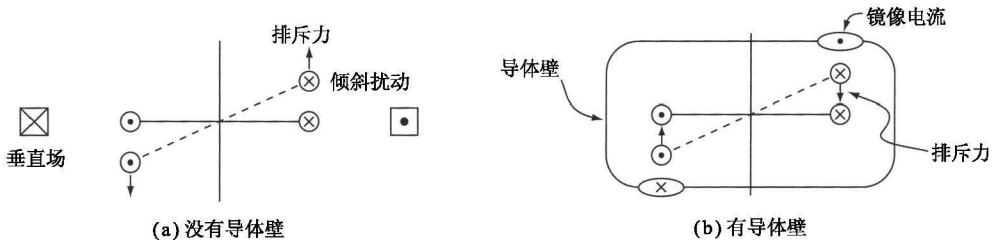


图 13.21 倾斜不稳定性的物理机制

现在考虑理想导体壁的作用。如果用这样的壁包围着等离子体,尤其是形状较为平整的情形,那么球马克等离子体如果经历倾斜扰动,壁中就会产生图13.21(b)所示的镜像电流。该电流与球马克电流方向相反,因此产生排斥力。但是,因为镜像电流的位置随着倾斜运动一起旋转,排斥力实际上指向使等离子体电流回到原位的方向。这代表着稳定性。

### 13.6.4 球马克小结

球马克是一种紧凑的轴对称位形,具有不需要环向场磁体和欧姆变压器的独特性质。它的极向磁场和环向磁场大小差不多,分别是由外界提供的极向电流和极向偏置磁场产生的,原则上这些场都可以由直流电源驱动。等离子体自身则是由极为复杂的非线性弛豫过程形成的。尽管与RFP相比,球马克的几何非常紧凑,但其基本物理问题却基本相似。

目前实验上球马克概念面临的核心问题是搞清楚并减少弛豫过程引起的反常能量输运。目标是实现较高温度下( $T_e \sim T_i \sim$ 数百电子伏)的持续运行。如果持续的准稳态运行能够实现,那么高 $\beta$ 运行也应该能够实现。与托卡马克研究相比,球马克研究目前仍处在较为初期的阶段。因此聚变界将拭目以待球马克是否能克服这一概念中固有的等离子体物理问题。

## 13.7 托卡马克

### 13.7.1 托卡马克简介

托卡马克是一种轴对称环形位形,具有强的环向磁场、适中的等离子体压强和相对较弱的环向电流。目前它是国际上第一代聚变反应堆的首选位形,这是因为它具有良好的物理性能。尤其是托卡马克在高等离子体温度 $T$ 下实现的 $p\tau_E$ 值是其他聚变概念所不及的。因此,国际聚变界有许多大型托卡马克实验装置在运行或建设中。

托卡马克的工作原理如图13.22所示。我们注意到,托卡马克有4个基本磁体

系统:①产生强的环向磁场的环向场线圈;②欧姆变压器,它感应出平衡所需的环向等离子体电流并进行欧姆加热;③垂直场系统,它是环向力平衡所必需的;④成形场线圈,它产生非圆截面位形,用以提升磁流体力学平衡极限值并且减少等离子体与壁作用引起的杂质问题。

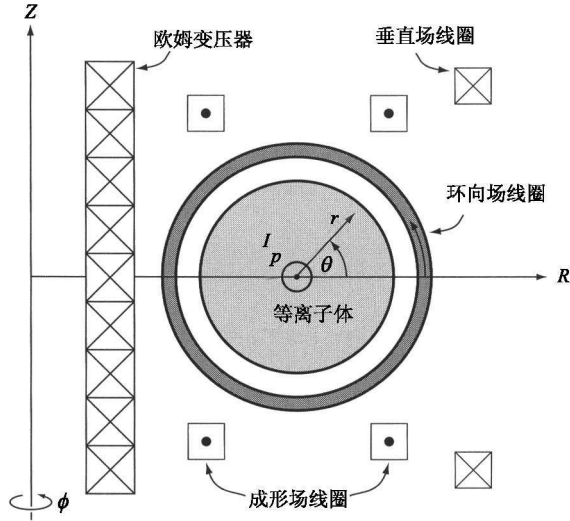


图 13.22 托卡马克原理图

典型的托卡马克放电运行过程的第一步是建立强的稳定的环向磁场。然后将中性气体注入真空室并进行预电离。接着变压器感应出环向电流,这个电流爬升到最大值并在维持脉冲的“平顶”部分不变。在电流平顶运行阶段,外界加热功率以射频或者中性束的形式进入等离子体。外加功率的大小通常比欧姆功率大很多。大多数有趣的实验等离子体物理过程均发生在平顶阶段。

托卡马克各参数在平顶运行阶段的典型平衡分布如图 13.23 所示。我们注意到,环向磁场具有很小的逆磁倾角,这是为了保持等离子体的径向压强平衡。一个重要特征是安全因子  $q(r) \approx rB_\phi/R_0B_\theta$  的性质。对于托卡马克, $q(r)$  是半径的增函数,而且更重要的是,它总是很大:几乎在整个等离子体中  $q(r) > 1$ ,这是强的环向磁场的结果。

从反应堆需求方面来看,托卡马克有很多优点,但也存在一些问题。主要优点是它的物理性能表现良好。强的环向场及其相应的高安全因子使得即使没有导体壁,其磁流体力学稳定  $\beta$  值依然有限,并且在实验上取得了相当高的能量约束时间  $\tau_E$ 。良好的约束使得用中等水平的外部加热就可以将等离子体加热到高温,而且相应的  $\beta$  值在反应堆允许的范围内。举例来说,坐落在英国牛津附近的欧洲联合环流

器(Joint European Torus, JET)已实现高性能D-T放电。在  $B_0 \sim 3.6 \text{ T}$ , 外部加热功率  $P_h = 25 \text{ MW}$  的情形下, JET 可在下述参数下实现长达数秒的脉冲放电:  $n(0) \approx 0.4 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ ,  $T_i(0) = 28 \text{ keV}$ ,  $T_e(0) = 14 \text{ keV}$ ,  $\langle \beta \rangle \approx \beta(0)/3 \approx 0.018$ ,  $\tau_E \approx 0.9 \text{ s}$ , 对应的  $\langle p \rangle \tau_E \sim 0.84 \text{ atm s}$ 。作为比较, 我们不妨回忆一下, 点火所需的  $p \tau_E$  是  $p \tau_E \sim 0.8 \text{ atm s}$ 。显然, 现有托卡马克的实验性能已开始接近实际反应堆的参数区。

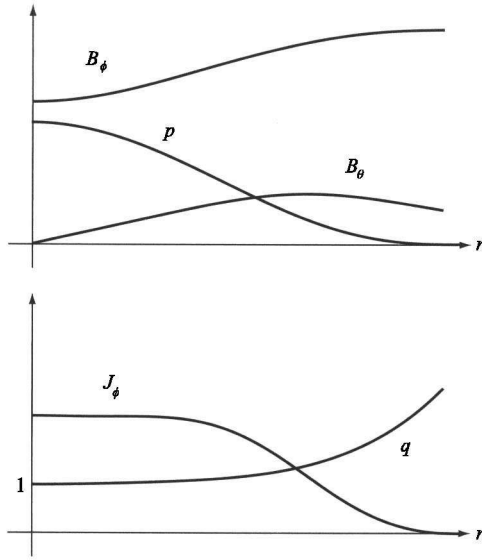


图 13.23 大环径比极限  $R_0/a \rightarrow \infty$  情形下托卡马克放电的典型参数分布

当然, 托卡马克也面临一些问题。首先, 强的环向磁场增加了反应堆的技术复杂性和成本。因此, 其他大多数位形概念, 除了仿星器, 均设计成采用小的外加环向磁场来缓解这个问题, 其代价是造成边界安全因子较低。从道理上讲, 这些位形概念是通过解决较复杂的等离子体物理问题来换取较简单的反应堆技术。而从实际工程的角度来看, 托卡马克反应堆设计表明, 强的环向磁场是肯定可以实现的——只是如果不需要这么强的磁场, 技术上会简单些, 也经济些。

第二个主要问题是反应堆几乎肯定需要稳态运行。这个要求与采用欧姆变压器的运行方式是矛盾的, 因为从长时间运行来说, 它不能通过感应来驱动直流电流, 因此需要某种外加的电流驱动手段。这些外加电流驱动方法通常包括诸如微波或者中性束等昂贵的高技术功率源, 而且电流驱动的效率并不十分高——每安培输出电流需要很大的外界功率来驱动。其结果是, 过高的电流驱动成本使得这种功率平衡方式在经济上缺乏吸引力。

幸运的是, 托卡马克中存在输运驱动的环向电流, 称为“自举电流”。这种电流是自发产生的, 不需要任何外界功率源。依据不同的压强和磁场分布, 自举电流的

大小可以从零大到占总电流的95%。目前聚变界比较一致的认识是,聚变反应堆必须做到75%甚至更多的电流由自举电流来提供才具有吸引力。也就是说,外加电流驱动源提供的电流必须不大于25%。麻烦的是,要实现高比例的自举电流就需要装置在高 $\beta$ (它的值始终高于无壁 $\beta$ 极限)下运行。因此,高自举电流托卡马克需要解决好如何稳定电阻壁模的问题。

托卡马克面临的第二个问题可以概括为:托卡马克概念的成功与否,取决于能否实现高 $\beta$ 运行,或者说,取决于能否实现高自举电流比例等离子体的稳态运行,外界驱动的电流仅占一小部分,并且无需欧姆变压器。这是未来等离子体物理研究的主要目标之一。关于自举电流和电流驱动等问题的更深入的讨论分别见第14章和第15章。

最后,必须再一次强调满足磁流体力学 $\beta$ 极限对于抑制外部气球-扭曲模的重要性。实验中这个判据一旦不成立,几乎总是伴随着等离子体压强和电流的灾难性崩溃。这类事件被形象地称为“大破裂”。在大型实验装置和反应堆中必须避免出现这种现象,因为它产生的瞬态力会对设备造成实际的物理破坏。因此结论是,准确判断抑制外部气球-扭曲模的磁流体力学 $\beta$ 极限值,并确切掌握尽可能接近 $\beta$ 极限的条件下运行的本领,对于实现装置的最佳性能是很重要的。

本小节着重讨论托卡马克及其几种紧密相关的变体的磁流体力学行为。与其他大多数聚变位形概念一样,磁流体力学方面的考虑是研究基本磁场位形的主要动机。讨论从对大环径比、圆截面的托卡马克的分析开始。尽管是大环径比,但在平衡和稳定性计算中保留环向效应是必需的。

分析表明,在表面电流模型下,有3个重要的 $\beta$ 和 $I$ 极限值。首先,存在一个平衡态极限,它限定了 $\beta/I^2$ 的最大值。第二,随着 $\beta \rightarrow 0$ ,低 $n$ 扭曲模使得存在一个稳定性极限,它限定了 $I$ 的最大值。第三,低 $n$ 气球-扭曲模使得存在这样一个稳定性极限:对于每一个 $I$ 的最优值,它限定了可实现的最大 $\beta$ 值。最严格的 $\beta$ 极限来自气球-扭曲模。下面我们首先假设在没有理想导体壁的情形下,导出 $\beta$ 和 $I$ 的稳定性极限值。

另外值得注意的是,还存在一种内部不稳定性,它对应于影响托卡马克运行的 $m=1, n=1$ 模。这种不稳定性位于等离子体的磁轴附近,引起所谓“锯齿型”内部弛豫振荡。但从目前的观点来看,这种模不是十分危险,尽管它确实设定了一个运行极限 $q(0) > 1$ 。锯齿振荡的物理机制并未包含在表面电流模型中,这里提及它主要是出于完备性考虑。

现在考虑基本托卡马克的变体。第一种变体是横截面的拉长。人们多年前就知道,等离子体截面的拉长和三角形变的组合能够提高抑制低 $n$ 气球-扭曲模的 $\beta$ 极限值。但是,由于会激发 $n=0$ 的轴对称模,因此实际可实现的最大的拉长比存在一个极限。通常,要实现超过高/宽比约为2的拉长比是极为困难的。稍后我们



给出拉长比对托卡马克稳定性影响的简单的定性图像。

第二种变体是“先进托卡马克”(Advanced Tokamak, AT)的运行模式。AT运行模式正是为解决上述主要的等离子体物理问题而提出的。在AT运行模式下,通过外界控制将参数分布调节到形成中空的环向电流密度和高 $\beta$ ,其目的是要产生大的自举电流的恰当组合,来尽可能减少对外部电流驱动方面的依赖。实验上是通过程序控制等离子体电流随时间的变化,以及外部加热源投入的径向位置和时序来实现这种参数分布的。这里要解决的磁流体力学的问题是:对于大的自举电流,无理想导体壁情形下的气球-扭曲 $\beta$ 极限始终是破缺的,必须通过反馈控制来稳定由此引起的电阻壁模。我们将通过计算给出确定壁必须接近到何种程度才能够从理想化壁模到电阻壁模的转换,从而实现反馈稳定的实际可能性。

接下来要考虑的一种托卡马克变体是球形托卡马克。它实际上是一种环径比非常小的托卡马克。从拓扑结构上讲,环径比必须满足 $R_0/a \geq 1$ 。对于标准托卡马克, $R_0/a \approx 3$ ,而球形托卡马克却是 $R_0/a \approx 1.2$ 。研究小环径比的动机是理论上预言(接下来会推导):托卡马克中抑制气球-扭曲模的最大的稳定 $\beta$ 值 $\sim a/R_0$ 。所以小环径比带来高 $\beta$ 。与标准托卡马克相比,球形托卡马克可以外推到更加紧凑的、有可能是低成本的反应堆。其前提是必须解决好紧凑的中心柱所带来的工程技术问题,以及如何通过自举效应来维持大比例的环向电流等问题。对球形托卡马克的讨论主要集中在 $\beta$ 极限以及它对聚变功率密度的影响方面。

最后,让我们回到第5章中给出的简单反应堆概念设计上来。目的是要定量研究设计中所做的一个假设。具体来说就是,从磁流体力学 $\beta$ 极限值上考虑,最优设计的反应堆应该运行在环向场线圈内侧允许的最强磁场条件下,即使强磁场增加了建设成本。利用导出的托卡马克的磁流体力学 $\beta$ 极限值可以说明这一点。

总的来看,聚变界一致认为,托卡马克物理参数最终将能够满足聚变反应堆的要求,尽管参数区间不会超出太多。关键是要记住,这些参数需要维持在稳态。这就要求在没有理想导体壁或者(更可能是)对电阻壁模进行反馈稳定的情形下,实现大比例的自举电流。本章的重点是要确定磁流体力学 $\beta$ 极限值。在后两章中,我们将 $\beta$ 极限与自举电流的产生(第14章)和电流驱动的功率要求(第15章)联系起来。

### 13.7.2 圆截面托卡马克——平衡

圆截面托卡马克的平衡分析采用巧妙的环径比展开来对精确的压强平衡关系式进行简化。由此得到环绕等离子体表面的极向磁场的简单表达式。分析表明,对于可实现的 $\beta/I$ 的最大值,存在平衡极限。这是因为在 $I$ 不变的情形下,随着 $\beta$ 增加,需要持续增加外界垂直场来提供环向力平衡。这里假设电流 $I$ 不变是为了维持高的安全因子。也就是说,通过增加等离子体电流同时保持垂直场不变来支撑环向

力平衡中的高的压强,将会减小安全因子的值。最终,当外界垂直场变得足够大,分离面将向等离子体内表面运动,这代表着平衡态极限。

### 1. 环径比展开

为了促进对表面电流模型中的参数选择的理解,请看图 13.24 所展示的大型圆截面托卡马克聚变实验反应堆(Tokamak Fusion Test Reactor, TFTR)的典型的磁场和压强分布。建于美国普林斯顿等离子体物理实验室的这个装置运行于 1982 ~ 1997 年间,在最后几年的运行中采用的是 D-T 等离子体。图中叠加在 TFTR 参数分布之上的是表面电流模型给出的数值近似结果。现在我们的任务是,在大环径比假设  $\varepsilon \equiv \frac{a}{R_0} \ll 1$  下,求得参数  $\varepsilon$  的各阶展开,从而得到一般表面电流压强平衡关系的简化表达式。下面通过简要的物理论证给出适用于托卡马克的参数大小排序关系。

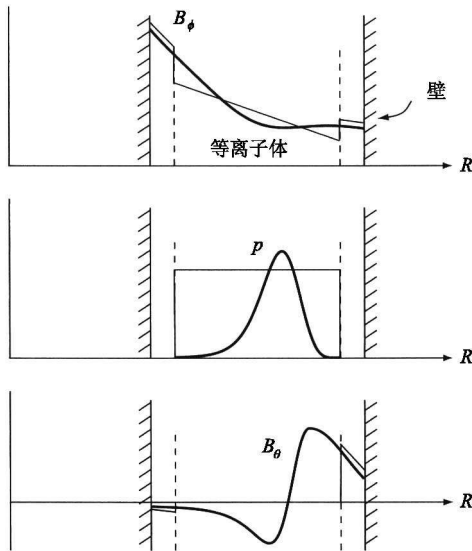


图 13.24 TFTR 实验得到的中平面上典型的参数分布(光滑曲线), 重叠的是表面电流模型给出的近似(折线)

托卡马克环径比展开的核心是假设安全因子必须看作有限的量,这样才能实现良好的磁流体力学稳定性。特别地,假设

$$q \sim 1 \quad (13.100)$$

由于  $q \approx rB_0/R_0B_\theta$ , 因此这意味着极向磁场的合适范围是:

$$\frac{B_\theta}{B_\phi} \sim \varepsilon \quad (13.101)$$

即极向磁场与环向磁场相比很弱。

接下来,考虑径向压强平衡。我们知道,弱的极向磁场意味着总  $\beta$  近似等于  $\beta_z$ :

$$\beta \approx \frac{2\mu_0 p}{B_\phi^2 + B_\theta^2} \approx \frac{2\mu_0 p}{B_\phi^2} \approx \beta_z \quad (13.102)$$

注意到如果环向磁场是纯粹的真空场(即  $B_i = B_\theta$ ),那么径向压强平衡就仅由极向磁场提供,此时能够被约束的等离子体实际上很少: $p \approx B_\theta^2/2\mu_0$ ,这表明  $\beta_z \sim \varepsilon^2$  和  $\beta_\theta \sim 1$ 。这不是我们最感兴趣的托卡马克运行区域。

利用环向磁场中很小的逆磁倾角可以约束较高压强的等离子体。如果我们假设  $B_\theta - B_i \sim \varepsilon B_\theta$ ,那么由径向压强平衡  $p \approx (B_\theta - B_i)B_\theta/\mu_0$  可得  $\beta_z \sim \varepsilon$  以及  $\beta_\theta \sim 1/\varepsilon$ 。这是我们感兴趣的托卡马克运行区域。我们不可能使得逆磁倾角大于  $\varepsilon$  量级,因为马上会证明,如果  $q$  被限定在 1 附近,那么环向力平衡是不可能实现的。实验上,逆磁倾角主要是由外部加热功率大于欧姆加热功率引起的。

总之,托卡马克各参数大小按适当的环径比展开可确定为:

$$q \sim B_\theta/\varepsilon B_\phi \sim (1 - B_i/B_\theta)/\varepsilon \sim \beta_z/\varepsilon \sim \varepsilon \beta_\theta \sim 1 \quad (13.103)$$

现在,我们能够将这个排序关系引入到表面电流压强平衡模型中,从而得到极向磁场的简单表达式。

## 2. 表面电流压强平衡关系式

表面电流压强平衡的一般关系为:

$$B_\theta^2(\theta) = 2\mu_0 p + \frac{B_i^2 - B_\theta^2}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} \quad (13.104)$$

通过对环向场所在的项的分母对  $\varepsilon$  进行泰勒展开,并引入一个新的常数  $\lambda$  代替  $B_i$ ,可将上式简化为:

$$\frac{B_\theta^2}{B_\theta^2} \equiv 1 - \beta + \varepsilon^2 \lambda \quad (13.105)$$

其中,

$$\beta \equiv \frac{2\mu_0 p}{B_\theta^2} \quad (13.106)$$

它与环径比展开  $\lambda \sim 1$  是一致的。简单计算后给出:

$$\left[ \frac{B_\theta}{\varepsilon B_\theta} \right]^2 = \lambda + 2 \frac{\beta}{\varepsilon} \cos\theta \quad (13.107)$$

现在,我们可以方便地将  $\lambda$  替换为如下定义的另一等价的常数  $k$ :

$$\lambda \equiv \frac{2\beta}{\varepsilon k^2}(2 - k^2) \quad (13.108)$$

式(13.107)简化为:

$$\left[ \frac{\hat{B}_0}{\varepsilon B_0} \right]^2 = \frac{4\beta}{\varepsilon k^2} \left[ 1 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (13.109)$$

尽管式(13.109)形式上相对简单,但是从  $\hat{B}_0$  必须通过常数  $k$  来表达这一点上看还不完全令人满意,因为  $k$  还没有简单的物理解释。更重要的是将  $\hat{B}_0$  用  $\beta$  和  $I$  而不是用  $\beta$  和  $k$  表示出来。这是平衡态推导的最后一步。

电流  $I$  可以通过安全因子的定义来引入,尽管这是托卡马克中的一个重要的微妙之处。我们还记得,在直圆柱下,  $q(a) = aB_0/R_0B_0(a) \sim 1/I$ 。而在环形托卡马克中,  $q$  和  $I$  仅在低  $\beta/\varepsilon$  时成反比关系。高  $\beta/\varepsilon$  时这个关系不成立。为了对这两类情形进行区分,我们不妨直接从  $q$  的定义来计算  $q = q(k, \beta)$  然后将它和一个新的量  $q_* = q_*(k, \beta)$  进行比较,  $q_*$  定义为始终与  $I$  成反比。具体来说,从安全因子的定义可得:

$$q(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{rB_\phi}{RB_0} \right] \Big|_a d\theta \approx \frac{\varepsilon B_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\hat{B}_0} = \frac{kK(k)}{\pi} \frac{1}{(\beta/\varepsilon)^{1/2}} \quad (13.110)$$

其中  $K(k)$  是第一类完全椭圆积分。其次,量  $q_*(k, \beta)$  定义为在  $k$  很小时与  $q(a)$  一致,但对于所有  $k$  均与  $I$  成反比:

$$q_* \equiv \frac{2\pi a^2 B_0}{\mu_0 R_0 I} = \varepsilon B_0 \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{B}_0 d\theta \right]^{-1} = \frac{\pi k}{4E(k)} \frac{1}{(\beta/\varepsilon)^{1/2}} \quad (13.111)$$

其中  $E(k)$  是第二类完全椭圆积分。

注意,对于小  $k$  有  $K \approx E \approx \pi/2$  和  $q(a) \approx q_* \approx k/[2(\beta/\varepsilon)^{1/2}]$ 。然而,当  $k \rightarrow 1$  时,  $K \approx \ln[4/(1-k^2)^{1/2}]$  且  $E \approx 1$ 。换句话说,  $q(a)$  发散但  $q_*$  保持有限。后面我们会讨论  $q(a)$  发散的重要性。就当前目的而言,在后面的稳定性分析中,重要参数是  $q_*$  而不是  $q(a)$ 。稳定性极限与电流大小的联系要比与磁场线的平均螺旋倾角的联系更为紧密。最后,利用  $E(k)$  的极限值可得到如下近似:

$$E(k) \approx \left[ k^2 + \frac{\pi^2}{4}(1-k^2) \right]^{1/2} \quad (13.112)$$

用这个近似消去  $k$ ,得到如下与  $\beta/\varepsilon$  和  $q_*$  有关的极向磁场表达式:

$$\left[ \frac{\hat{B}_0}{\varepsilon B_0} \right]^2 \approx \frac{1}{q_*^2} \left[ 1 - \beta + \frac{\pi^2}{4} \beta \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (13.113)$$

其中,

$$\hat{\beta} \equiv \left[ \frac{16}{\pi^2} \right] \left[ \frac{\beta q_*^2}{\varepsilon} \right] \quad (13.114)$$

这就是我们要求的关系式。

### 3. 平衡态 $\beta$ 极限

平衡态解的一个有趣的特点是当电流(也就是  $q_*$ ) 固定时存在平衡态  $\beta$  极限。数学上看,这个极限的产生是因为  $B_\theta$  必须是实数。从式(13.113)可知,角度  $\theta = \pi$  对应于环的内侧,它规定了实现  $B_\theta$  的最严格的限制,即要求  $k^2 \leq 1$ 。等价地,式(13.113)对应的极限要求  $B \leq 1$ 。这相当于要求存在如下的平衡态  $\beta$  极限:

$$\frac{\beta q_*^2}{\varepsilon} \leq \frac{\pi^2}{16} \approx 0.62 \quad (13.115)$$

对于固定的几何形态来说,这实际上就是  $\beta/I^2$  的极限。

图 13.25 从原理上展示了环向力平衡是如何通过外加垂直场实现的,研究它可以搞清楚平衡态极限的物理起源。注意到在环的内侧,垂直场和等离子体电流的  $B_\theta$  指向相反。显然,在等离子体外侧的某一点,它们完全抵消;净极向场为零。 $B_p = 0$  的点被称为通量分离面的“X点”。

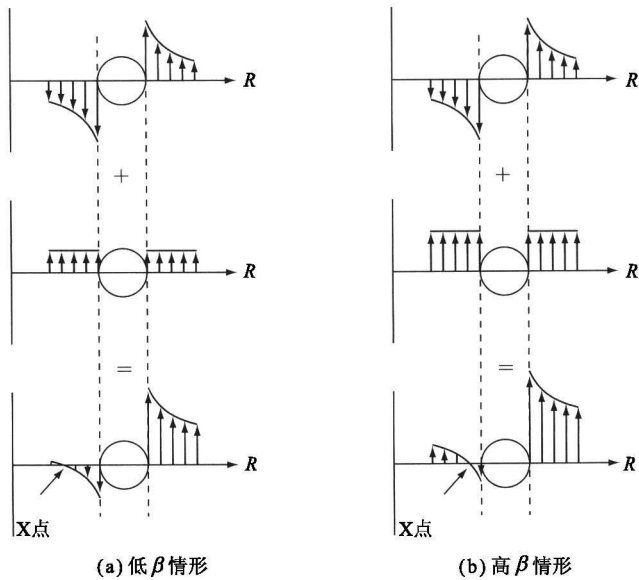


图 13.25 平衡态  $\beta$  极限的物理根源表明,对于不同的  $\beta$  值,X 点的位置不同(两种情形中等离子体电流保持恒定,高  $\beta$  情形下,为了达到环向力平衡,必须增强垂直场)

现在假设  $\beta$  增加但是等离子体电流保持不变。根据图 13.25, 这意味着等离子体电流贡献的  $B_\theta$  的大小不变。所以, 为了维持环向力平衡, 垂直场必须增加。结果是 X 点向等离子体表面移动。最终, 在  $\beta$  足够高时 X 点移到等离子体表面上。此时等离子体达到其平衡态  $\beta$  极限。对于圆截面等离子体, 这个  $\beta$  值不可能再增加了。要进一步增加  $\beta$ , 就需要减小等离子体的内侧部分。

最后, 注意到 X 点移动到等离子体表面时, 在  $\theta = \pi$  处有  $B_\theta = 0$ 。这就是在平衡态极限情形下  $q(a) \rightarrow \infty$  的原因。然而, 尽管  $B_\theta(a, \pi) = 0$ , 但等离子体仍保持其有限的固定值。这就解释了高  $\beta/\varepsilon$  时  $q(a)$  和  $q_*$  之间的偏差。

### 13.7.3 圆截面托卡马克——稳定性

现在我们用表面电流模型对圆截面托卡马克进行稳定性分析。与直圆柱相比, 环形位形更加复杂, 因为环效应将扰动的所有极向谐波耦合起来。也就是说, 关于环向角  $\phi$  和极向角  $\theta$  的合适的傅里叶分析为:

$$\xi(\theta, \phi) = e^{-in\phi} \sum_{-\infty}^{\infty} \xi_m e^{im\theta} \quad (13.116)$$

其结果是, 最终的本征值方程是由无限多个关于未知傅里叶振幅  $\xi_m$  的耦合代数方程组构成的。令这组方程式的行列式为零, 可得到临界稳定性条件。而且分析表明, 最不稳定的环向模数对应于  $n \sim 1$ 。

这里采取的方法是: 先从无限方程组导出一般的本征值关系式, 然后截断傅里叶级数, 在两种极限情形下来确定临界稳定性条件,  $\beta/\varepsilon \rightarrow 0$  极限对应于扭曲模的  $q_*$  的临界值, 而  $\beta \rightarrow 1$  的平衡态极限对应于气球-扭曲模式的  $\beta/\varepsilon$  的临界值。具体分析如下。

#### 1. 等离子体的贡献

等离子体对稳定性分析的贡献可通过解如下方程得到:

$$\nabla^2 V_1 = 0 \quad (13.117)$$

对于  $n \sim 1$ , 大环径比展开意味着:

$$\nabla^2 V_1 \approx \nabla_\rho^2 V_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial V_1}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_1}{\partial \theta^2} = 0 \quad (13.118)$$

在等离子体内, 式(13.118)必须根据正则性来求解, 并且对  $\varepsilon$  展开的第一阶有:

$$\left. \frac{\partial V_1}{\partial r} \right|_a = - \frac{inB_0}{R_0} \xi(\theta, \phi) \quad (13.119)$$

易得其解为:

$$V_1 = e^{-in\phi} \sum_{m \neq 0} A_m \left[ \frac{r}{a} \right]^{|m|} e^{im\theta} \quad (13.120)$$

其中,

$$A_m = - \frac{in \varepsilon B_0}{|m|} \xi_m \quad (13.121)$$

注意到求和中  $m=0$  项已被消去。这是因为在大环径比展开中,  $\nabla \cdot \xi = 0$  的条件意味着  $\xi_0 = 0$ 。现在可以容易地计算出稳定性分析所需的物理量  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1|_a$ :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1|_a = \mathbf{B} \cdot \nabla V_1|_a = - \frac{aB_0^2}{R_0^2} e^{-in\phi} \sum_{m \neq 0} \frac{n^2}{|m|} \xi_m e^{im\theta} \quad (13.122)$$

这就是我们要求得的表达式。

## 2. 真空的贡献

对真空的贡献的分析与前面类似。在大环径比极限下,真空势满足:

$$\nabla^2 \hat{V}_1 \approx \nabla_p^2 \hat{V}_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{V}_1}{\partial \theta^2} = 0 \quad (13.123)$$

边界条件稍为复杂些。如果壁远离等离子体,那么对于  $a < r < \infty$ ,  $V_1$  必须是正则的。在等离子体—真空界面上,边界条件可以写为:

$$\left. \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial r} \right|_a = \mathbf{e}_r \cdot \nabla \times (\xi \times \mathbf{B})|_a = - \frac{inB_0}{R_0} \xi + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{B}_\theta \xi) \quad (13.124)$$

解可写为:

$$\hat{V}_1 = e^{-in\phi} \sum_{m \neq 0} \hat{A}_m \left[ \frac{a}{r} \right]^{|m|} e^{im\theta} \quad (13.125)$$

其中,  $\hat{A}_m$  经过简单计算可得:

$$\hat{A}_m = - \frac{i\varepsilon B_0}{|m|} \sum_{p \neq 0} G_{mp} \xi_p \quad (13.126)$$

而矩阵元  $G_{mp}$  为:

$$G_{mp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{m\hat{B}_\theta}{\varepsilon B_0} - n \right] \cos[(m-p)\theta] d\theta \quad (13.127)$$

实际上  $G_{mp}$  是通过数值计算得出的,尽管对于某些特殊情形它可以有解析解。显然,  $G_{mp}$  不是矩阵对角元,这一事实表明不同极向谐波之间存在耦合。

真空分析的最后一步是计算稳定性分析所需的物理量  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1|_a$ 。经过简单计

算我们发现:

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 |_{\alpha} = \hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla \hat{V}_1 |_{\alpha} = \frac{aB_0^2}{R_0^2} e^{-in\phi} \sum_{p \neq 0} \sum_{l \neq 0} \frac{G_{1m} G_{lp}}{|l|} \xi_p e^{im\theta} \quad (13.128)$$

对于我们感兴趣的两种特殊情形,双重求和可解析地进行。

### 3. 压强平衡匹配条件

稳定性分析的最后一步是将等离子体和真空的贡献代入压强平衡匹配条件。对于大半径比圆截面托卡马克,这个条件简化为:

$$[\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1]_{\alpha} = \frac{\hat{B}_0^2}{a} \xi + \frac{\beta B_0^2}{R_0} \xi \cos\theta \quad (13.129)$$

等号右侧第一项代表极向场曲率的不稳定效应。这一项尽管随角度  $\theta$  变化,但它始终为正,对应于坏曲率。右侧第二项代表环向磁场线曲率的效应。此项在环外侧 ( $\theta = 0$ ) 为正,而在环内侧 ( $\theta = \pi$ ) 为负。在环外侧,磁场线曲率凹向等离子体,意味着坏曲率。反过来,在环内侧,磁场线曲率凸向等离子体,意味着好曲率。我们说托卡马克中最危险的扰动是其中存在强的气球模成分,而曲率的这种摇摆不定正是其主要原因,扰动引起的位移在环外侧会变得越来越强,而在环内侧则越变越弱。

式(13.129)右侧的计算就简单多了。代入平衡场后可得出:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\hat{B}_0^2}{a} \xi &= \frac{aB_0^2}{R_0^2} e^{-in\phi} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{q_*} \left[ 1 - \beta + \frac{\pi^2}{4} \beta \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \xi_m e^{im\theta} \\ \frac{\beta B_0^2}{R_0} \xi \cos\theta &= \frac{aB_0^2}{R_0^2} e^{-in\phi} \sum_{m \neq 0} \left[ \frac{\beta}{\varepsilon} \xi_m \cos\theta \right] e^{im\theta} \end{aligned} \right\} \quad (13.130)$$

和以前一样,这里  $\beta = (16/\pi^2)(\beta q_*^2/\varepsilon)$ 。

现在我们可以导出压强平衡匹配条件的最终形式了。经过简单计算,得到:

$$\sum_{p \neq 0} W_{mp} \xi_p e^{im\theta} = 0 \quad (13.131)$$

其中,矩阵元  $W_{mp} = W_{pm}$  由下式给出:

$$\begin{aligned} W_{mp} &= \left\{ \frac{n^2}{|m|} - \left[ \frac{1}{q_*} + \left[ 2 - \frac{16}{\pi^2} \right] \frac{\beta}{\varepsilon} \right] \right\} \delta_{m-p} \\ &\quad - \frac{3}{2} \frac{\beta}{\varepsilon} (\delta_{m-p-1} + \delta_{m-p+1}) + \sum_{l \neq 0} \frac{G_{lm} G_{lp}}{|l|} \end{aligned} \quad (13.132)$$

$\delta_k$  是熟悉的克罗内克德尔塔函数:  $\delta_0 = 1, \delta_{k \neq 0} = 0$ 。因为每个极向模数  $m$  是独立的,故式(13.131)实际上代表了一组方程。也就是说,每个谐波的系数均必须为零。



由此得到关于未知量  $\xi_m$  的一组线性齐次代数方程:

$$\sum_{p \neq 0} W_{mp} \xi_p = 0 \quad (\text{对每个 } m \neq 0) \quad (13.133)$$

式(13.133)就是我们需要的本征值条件表达式。若要求存在非平凡的解,则  $\vec{W}$  的行列式必须为零。令  $\det \vec{W} = 0$  就可得出临界稳定性条件。

#### 4. $\beta/\varepsilon \rightarrow 0$ 扭曲不稳定性

一般本征值关系的第一个应用是考虑  $\beta/\varepsilon \rightarrow 0$  时的扭曲模不稳定性。分析表明,在低  $\beta$  极限下,电流存在临界值(即  $q_*$ )。如果电流过大,等离子体是不稳定的。反过来,如果电流足够小,等离子体对于扭曲模是稳定的。

随着  $\beta/\varepsilon \rightarrow 0$ , 矩阵  $\vec{W}$  变成对角阵,这时对扭曲模的分析可以极大地简化。因此,在这个极限情形下,极向谐波退耦,对每个  $m$  值可以分别处理。退耦的原因是在  $\beta/\varepsilon \rightarrow 0$  极限下,极向场简化为:

$$\frac{\dot{B}_0}{\varepsilon B_0} = \frac{1}{q_*} = \text{常数} \quad (13.134)$$

即不存在角度耦合。这一点可以通过计算真空矩阵元  $G_{lm}$  清楚地看出来,此时  $G_{lm}$  简化为:

$$G_{lm} = \left[ \frac{l}{q_*} - n \right] \delta_{l-m} \quad (13.135)$$

将式(13.135)代入式(13.132)后,我们就得到如下矩阵元  $W_{mp}$  的简单表达式:

$$\begin{aligned} W_{mp} &= \left[ \frac{n^2}{|m|} - \frac{1}{q_*^2} + \frac{1}{|m|} \left[ \frac{m}{q_*} - n \right]^2 \right] \delta_{m-p} \\ &= \frac{2}{|m| q_*^2} \left[ \left[ n q_* - \frac{m}{2} \right]^2 + \frac{|m| (|m| - 2)}{4} \right] \delta_{m-p} \end{aligned} \quad (13.136)$$

稳定性要求每一个矩阵元  $W_{mp} \geq 0$ 。由式(13.136)的第二个等式立刻得知,对于任何  $m \geq 2$ , 等离子体对于扭曲模是稳定的。不稳定性仅当  $m = 1$  时才可能发生。对于这种情形,简单计算表明,如果  $0 < nq_* < 1$ , 则存在不稳定性。由  $n = 1$  时出现的关于  $q_*$  的最严格的限制可引出稳定性条件:

$$q_* > 1 \quad (13.137)$$

这个稳定性边界被称为克鲁斯卡尔-沙弗拉诺夫极限。它可写成最大允许电流的形式:

$$I \leq I_{\max} \equiv \frac{2\pi a^2 B_0}{\mu_0 R_0} \quad (13.138)$$

对于第5章中设计的简单反应堆,可得  $I_{\max} \approx 19 \text{ MA}$ 。采用平滑参数分布得到的更实际的数值计算结果表明,表面电流模型有些过于乐观了。根据参数分布,  $q_*$  值更确切的范围是  $2 < q_* < 3$ , 这使得最大电流减小为  $6.3 \text{ MA} < I_{\max} < 9.4 \text{ MA}$ 。值得注意的是,如果托卡马克具有非圆截面,则  $I_{\max}$  较这些值有显著增加。这一点将在下一小节讨论。

分析的结论是,对于给定的几何形态和环向磁场,环向电流不能太大,否则将引起电流驱动的不稳定性。换句话说,需要足够强的环向磁场才能使托卡马克对于  $m = 1$  模保持稳定,这种模在单纯  $Z$  箍缩中总是不稳定的。

### 5. $\beta q_*^2 / \varepsilon \rightarrow \pi^2 / 16$ 气球-扭曲模不稳定性

一般压强平衡匹配条件的最重要的应用也许当属计算抑制气球-扭曲模的  $\beta$  极限。根据表面电流模型,假设等离子体运行在由  $\beta q_*^2 / \varepsilon = \pi^2 / 16$  定义的最大平衡  $\beta$  曲线上的某一点,那么这种不稳定性所对应的  $\beta$  极限就可以计算出来。这个平衡  $\beta$  极限实际上是  $\beta / I^2 \sim \beta q_*^2 / \varepsilon$  的极限。利用压强平衡匹配条件可得稳定的最大电流或者等价的最低的  $q_*$ 。

尽管  $\beta$  极限的计算过程很直接,但是细节非常复杂。所以,为了保持思路的连贯性,这里我们仅列出关键步骤。但分析中有两个重要的简化需要指出。首先,尽管数值计算  $\vec{W}$  的行列式时我们可以保留极高次谐波分量,但对于目前的任务来说,对这个矩阵截取到三阶就够了:  $m = 1, 2, 3$ 。与数值结果相比,由此得到的结果已足够精确。第二处简化是,因为在平衡  $\beta$  极限处,极向磁场可简化为:

$$\frac{B_\theta}{\varepsilon B_0} = \frac{\pi}{2q_*} |\cos(\theta/2)| \quad (13.139)$$

这个简单形式使得我们可以解析计算矩阵元  $G_{lm}$ 。经过简单计算得到:

$$G_{lm} = -n\delta_{l-m} - (-1)^{l-m} \frac{1}{q_*} \frac{l}{4(l-m)^2 - 1} \quad (13.140)$$

只需将这些简化结果代入  $3 \times 3$  矩阵的压强平衡匹配条件,即可得到如下临界稳定性判据:

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{12} & W_{22} & W_{23} \\ W_{13} & W_{23} & W_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (13.141)$$

这里利用了对称关系  $W_{mp} = W_{pm}$ 。从式(13.132)可以直接求出矩阵元。经过简单计算可得如下  $W_{mp}$  的表达式(尽管不是十分直观但富有启发性):

$$\left. \begin{aligned} W_{11}/n^2 &= 2 - 2\left[\frac{1}{nq_*}\right] - \left[\frac{\pi^2}{8} - M_{11}\right]\left[\frac{1}{n^2 q_*^2}\right] \\ W_{22}/n^2 &= 1 - 2\left[\frac{1}{nq_*}\right] - \left[\frac{\pi^2}{8} - M_{22}\right]\left[\frac{1}{n^2 q_*^2}\right] \\ W_{33}/n^2 &= \frac{2}{3} - 2\left[\frac{1}{nq_*}\right] - \left[\frac{\pi^2}{8} - M_{33}\right]\left[\frac{1}{n^2 q_*^2}\right] \\ W_{12}/n^2 &= -\frac{2}{3}\left[\frac{1}{nq_*}\right] - \left[\frac{3\pi^2}{32} + M_{12}\right]\left[\frac{1}{n^2 q_*^2}\right] \\ W_{23}/n^2 &= -\frac{2}{3}\left[\frac{1}{nq_*}\right] - \left[\frac{3\pi^2}{32} + M_{23}\right]\left[\frac{1}{n^2 q_*^2}\right] \\ W_{13}/n^2 &= \frac{2}{15}\left[\frac{1}{nq_*}\right] + M_{13}\left[\frac{1}{n^2 q_*^2}\right] \end{aligned} \right\} \quad (13.142)$$

其中,数值系数  $M_{mp}$  由下式给出:

$$M_{mp} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{|l|}{[4(l-m)^2 - 1][4(l-p)^2 - 1]} \quad (13.143)$$

值得注意的是矩阵元  $W_{mp}$  的形式。由于我们考虑的是沿平衡  $\beta$  极限曲线运行的平衡,每个  $W_{mp}$  都可以写成量  $1/nq$  的多项式函数:  $W_{mp} = A_{mp} + B_{mp}/nq_* + C_{mp}/n^2 q_*^2$ 。因此只要算出系数  $M_{mp}$ , 计算矩阵  $\overleftrightarrow{W}$  的行列式(它是  $1/nq_*$  的六次多项式)就很简单了。用数值方法计算  $M_{mp}$  很简单,当然我们也可以采用复杂的计算得到解析解:  $M_{11} = 5/4, M_{22} = 89/36, M_{33} = 1111/300, M_{12} = -11/12, M_{23} = -277/180, M_{13} = 1/180$ 。

采用数值求解方法容易得到  $1/nq_*$  多项式的根。就稳定性而言,限制性最强的根是  $nq_{* \text{crit}} = 1.67$ 。如果精确到 20 阶极向谐波分量,可以得到更为准确的数值计算结果:  $nq_{* \text{crit}} = 1.71$ , 这个值将来会用到。另外,由于对于稳定性有  $q_* \geq q_{* \text{crit}}$ , 故  $n = 1$  显然是最不稳定的模式。

最终结果是,对于圆截面托卡马克,抑制气球-扭曲模稳定的最低  $nq_*$ , 以及对应的最大  $\beta$  分别为:

$$\left. \begin{aligned} q_* &\geq q_{* \text{crit}} = 1.71 \\ \beta &\leq \beta_{\text{crit}} = \left[\frac{\pi}{4q_{* \text{crit}}}\right]^2 \varepsilon = 0.21 \frac{a}{R_0} \end{aligned} \right\} \quad (13.144)$$

式(13.144)可以这么理解。首先,我们注意到,对于环径比  $R_0/a = 2.5$  的简单反应堆设计,  $\beta_{crit}$  值为 0.084,这在要求的范围之内。但是后面会看到,与采用实际的扩散型参数分布的数值计算结果相比,表面电流模型的预测有些过于乐观了。其次是,比例关系  $\beta_{crit} \sim a/R_0$  表明小环径比托卡马克是有利的,至少从磁流体力学分析的角度来看是这样,尽管球形环的环径比到底能多小是有极限的。最后,注意到稳定的  $q_*$  的最小值从  $\beta/\varepsilon \rightarrow 0$  时的  $q_* = 1$ ,提升到了  $\beta/\varepsilon = 1$  时的  $q_* = 1.71$ 。允许的最大等离子体电流减小了近一半。

稳定性的整体图像可以总结如图 13.26 所示的  $\beta$  关于  $I$  的曲线。该图显示了数值计算得到的平衡  $\beta$  极限曲线和整个稳定性曲线。稳定性极限的解析解对应于稳定性曲线的端点值。我们注意到,对于足够低的  $\beta$  且足够小的  $I$  的情形,存在一个稳定的运行区域。

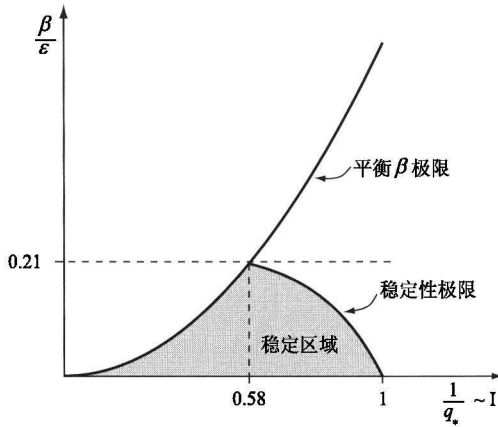


图 13.26 圆截面托卡马克表面电流模型给出的完整的稳定性图,图中显示了数值计算得到的平衡  $\beta$  极限和稳定性极限(D' Ippolito et al. (1976). *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, **1**, 523)

最后要考虑的是本征函数的形状,目的是要证明“最不稳定的模式具有等离子体表面气球-扭曲扰动的形式”这一断言。通过反过来解式(13.141)得到  $\xi_m$  的相对幅度,我们容易证实这一点。利用临界稳定性点对应的参数,通过简单计算表明,扰动的主要成分是  $m = 2$  的极向谐波,其边带的相对幅度为

$$\xi_1/\xi_2 \approx \xi_3/\xi_2 \approx 0.43 \quad (13.145)$$

本征函数的形状如图 13.27 所示。图像展示了在 4 个不同环向角位置上未扰动表面  $r = a$  与扰动表面  $r = a + \xi_1 \cos(\theta - \phi) + \xi_2 \cos(2\theta - \phi) + \xi_3 \cos(3\theta - \phi)$  的对比,这里假设  $\xi_2/a = 0.09$ 。我们注意到,表面扭曲沿环向角旋转,它表明了这种

不稳定性的扭曲特性。另外,环外侧的扰动总是远大于内侧: $r(\theta = 0) - a = 1.86\xi_2 \cos\phi$ ,而 $r(\theta = \pi) - a = 0.14\xi_2 \cos\phi$ 。这表明在坏曲率区域,扰动具有向气球模转化的趋势。

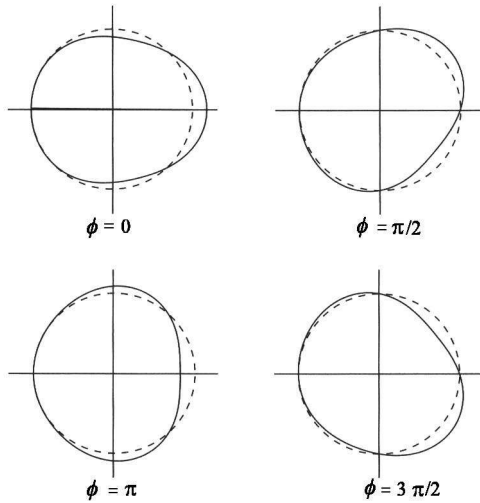


图 13.27 4 个不同环向角位置上扰动的等离子体截面

现在我们就完成了利用表面电流模型对大环径比、圆截面托卡马克的稳定性分析。从实际的实验应用来看,将理论预言的 $\beta/\epsilon$ 极限与采用实际的扩散性参数分布得到的更细致的数值结果进行比较是很有意思的。

## 6. 特鲁瓦永 $\beta$ 极限

人们对抑制理想磁流体力学不稳定性所需的总体 $\beta$ 极限进行了多方面的数值研究。应用最广泛的一个结果是特鲁瓦永(Troyon)及其同事给出的所谓“特鲁瓦永极限”。这些研究探求的是抑制所有理想磁流体力学模——外部扭曲模和气球模、内部模、局部模,等等——的稳定性,尽管通常外部气球模是最严重的。研究中没有理想导体壁来提供额外的稳定性。

稳定性分析的目的是要确定实际几何形态和参数分布下可能的最大稳定 $\beta$ 值。为此特鲁瓦永及其同事通过不断改变实际可能的等离子体截面形状以及压强和电流分布来对这些参数进行优化。

数值研究表明,拉长的三角形截面对稳定性是最有利的。平坦的压强分布和内部安全因子分布也是有利的。经过相当深入的数值研究,特鲁瓦永及其同事得到了一个关于最优 $\beta$ 极限的相当简单的经验公式:

$$\beta \leq \beta_{\text{rit}} \equiv \beta_N \frac{1}{aB_0} \quad (13.146)$$

其中,  $\beta_N$  是数值计算得出的系数, 当电流  $I$  的单位取 MA 时, 其值为  $\beta_N = 0.028$ 。通常在文献中,  $\beta$  以百分比表示, 此时  $\beta_N = 2.8$ 。但为了保持一致性, 在以后的各小节里我们均采用小数记法。

我们注意到, 尽管在拉长的三角形截面情形下  $I/aB_0$  才有最大值, 但是式(13.146)给出的  $\beta$  极限对于任何截面都是适用的, 只要它在优化电流和压强分布的过程中保持不变。所以, 为了与表面电流模型结果进行比较, 我们可以将式(13.146)改写为下述更方便的圆截面托卡马克的形式:

$$\beta \leq \beta_{rit} \equiv 0.14 \frac{\varepsilon}{q_*} \quad (13.147)$$

图 13.28 对这个表达式做了图解, 其中叠加了表面电流模型的稳定性结果。我们再次看到, 表面电流模型显得过分乐观了。在确定总体稳定的最大  $\beta$  值方面, 特鲁瓦永极限并不完全令人满意, 因为它并未明确说明稳定的  $q_*$  的最小值。一般地,  $q_*$  是几何条件和参数分布的弱函数, 对于圆截面托卡马克, 近似有  $q_* \approx 2$ 。利用这个显然有点含糊不清的值, 我们发现圆截面托卡马克中最大的稳定  $\beta$  为:

$$\beta \leq \beta_{max} \equiv 0.07 \frac{a}{R_0} \quad (13.148)$$

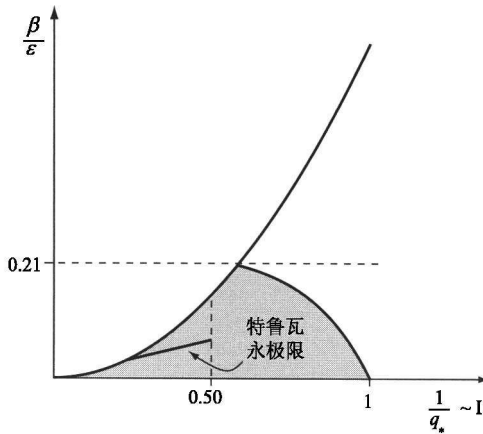


图 13.28 特鲁瓦永极限与表面电流稳定性图的叠加

我们看到, 由特鲁瓦永极限和表面电流模型可以得到相同的  $\beta$  与环径比的定标关系:  $\beta \sim a/R_0$ 。但是数值系数减小到约为原来的三分之一。所以特鲁瓦永极限对于  $R_0/a = 2.5$  预言的  $\beta$  最大值约为 0.028。这个值比反应堆要求的要低, 这促使聚变研究人员寻找提高托卡马克中  $\beta$  极限的新设想。这些设想将在下面的小节中讨论。

### 13.7.4 非圆截面托卡马克

提高托卡马克中  $\beta$  极限的设想之一是允许等离子体具有非圆截面。理论和实验研究都表明,稳定性对于同时具有拉长和指向外的三角形截面是最优的。几乎所有的现代托卡马克均采用这种改进。一个著名的例子是位于英国牛津附近的 JET 装置。图 13.29 展示了 JET 的非圆截面。

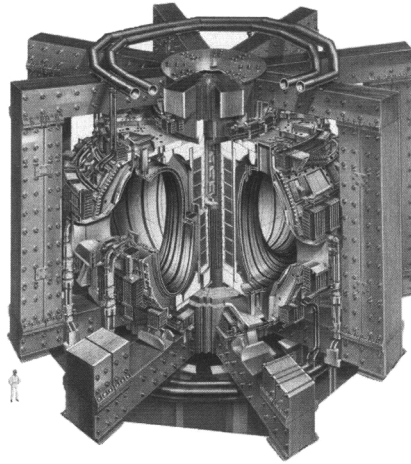


图 13.29 具有拉长和指向外侧的三角形非圆截面的 JET 图示

本小节中讨论非圆截面对磁流体力学稳定性的影响。这里有两个重要问题。第一个是针对  $n = 1$  气球-扭曲模的  $\beta$  极限,这已通过表面电流模型得到解决。研究表明,在我们感兴趣的范围内,临界  $\beta$  随拉长比线性增加,这确实是个鼓舞人心的结果。但也应看到,对于实际可实现的最大拉长比,临界  $\beta$  存在极限,这正是要讨论的第二个问题。分析表明, $n = 0$  的轴对称扰动(即均匀的垂直位移)会驱动起拉长截面托卡马克中的不稳定性。这些不稳定性具有电阻壁模的形式,而实际的反馈系统仅对约小于 1.8 的拉长比才是可能的。我们将通过简单的等离子体导线模型来研究  $n = 0$  模。

最终结果是:拉长截面托卡马克在实验中实现了相当高的、接近反应堆要求的  $\beta$  值。剩下的问题是,这种压强和电流分布尽管稳定但只能产生份额不大的自举电流,其在总电流中所占比例离反应堆得要求还相差甚远。为此人们提出了其他办法来改善这种局面,但是目前我们还是将注意力集中在拉长对磁流体力学稳定性造成的影响。

#### 1. $n = 0$ 轴对称不稳定性

多年来,在托卡马克实验中,通过反馈稳定  $n = 0$  不稳定性几乎已成为日常例行任务。这种模式的基本物理机制既不涉及环效应,也与有限的等离子体压强无

关,在具有拉长截面的低  $\beta$  托卡马克中就会出现。值得注意的是,通过将等离子体抽象为一根简单的载流  $I$  的导线就可以容易地建立起具有这种模式关键特征的模式。由此问题简化为单纯的静磁问题。

对  $n = 0$  模的最简单的解释可通过仔细观察图 13.30 得出。如图 13.30 所示,假设等离子体导线与两个等距的导线保持平衡。为了在竖直方向拉长等离子体,平衡导线的电流方向必须与等离子体电流同向。这样两根平衡导线产生的吸引力分别“拖拽”等离子体的顶部和底部,使得它被拉长。

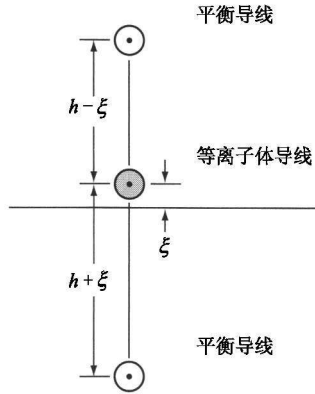


图 13.30 演示  $n = 0$  垂直不稳定性的简单导线模型

现在假设等离子体导线受到一个很小的朝向上方导线的垂直位移  $\xi$ 。我们知道,上方导线对等离子体导线的力与它们之间的距离成反比。所以,这种垂直位移使得等离子体导线与上方导线彼此靠近了一点,向上的拉力增加了。类似地,下方导线的拉力减小,因为它距离等离子体远了一点。结果,作用在等离子体导线上的合力方向向上。就是说,合力的方向指向将等离子体导线推向更加偏离平衡位置的方向。显然这对应于不稳定的情形。

这种不稳定性的行为可以通过更为实际的等离子体和平衡线圈的导线模型来量化。

## 2. 更实际的 $n = 0$ 导线模型

考虑图 13.31 所示的导线模型。其中等离子体依然被抽象为载流  $I$  的单根导线。它与 4 根与其相距  $c$  的等距“平衡”导线构成平衡态。为了模拟实际压强平衡的情形,每根平衡导线所携电流与等离子体电流方向相反。由此产生的斥力即为压强平衡所需的“推”力。等离子体的拉长是通过假设  $I_p < I_x$  来实现的,即垂直导线的推力比水平导线的小,因而产生了拉长的等离子体。

分析的关键是确定产生给定的所需拉长比的  $I_p$  和  $I_x$  之间的明确关系。得出这一关系的过程如下。假设等离子体的等效水平半宽度  $s_x/2 = a$ 。类似地,假设等离



子体的等效半高度为  $s_y/2 = \kappa a$ , 其中  $\kappa = s_y/s_x$  定义为拉长比。通过要求水平和垂直边界点在同一磁面上即可明确  $I_y$  和  $I_x$  之间的关系。根据矢势, 这相当于要求  $A_z(\kappa a, 0) = A_z(0, a)$ 。为了估算这一条件, 我们利用静磁学中著名的矢势(也就是通量)与载流导线之间的关系:  $A_{z,j} = (\mu_0 I_j/2\pi) \ln r_j$ , 其中  $r_j$  是从第  $j$  根导线的中心测得的径向距离。经过简单计算, 并对等离子体和平衡导线求和, 可得所需的  $I_y$  和  $I_x$  之间的关系:

$$I_y \ln \left[ \frac{c^2 - \kappa^2 a^2}{c^2 + a^2} \right] + I_x \ln \left[ \frac{c^2 + \kappa^2 a^2}{c^2 - a^2} \right] - I \ln \kappa = 0 \quad (13.149)$$

通过取平衡导线远离等离子体 ( $c \gg a$ ) 的极限即可将式(13.149)化简:

$$I_x - I_y = \frac{c^2}{a^2} \frac{\ln \kappa}{1 + \kappa} I \quad (13.150)$$

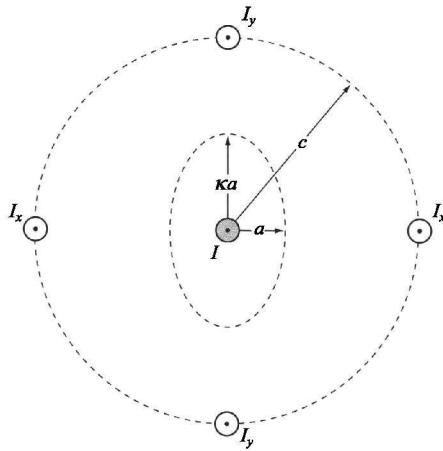


图 13.31 用于分析  $n = 0$  垂直不稳定性的导线模型

下一步是进行  $n = 0$  模的稳定性分析。与以前一样, 假设等离子体经历一个很小的垂直位移  $\xi$ , 但是所有导线电流, 包括等离子体电流都保持不变。稳定性分析需要计算所有平衡导线作用在等离子体导线上的垂直扰动的合力。如果此力为正, 它增大位移, 因而等离子体是不稳定的; 如果此力为负, 即等离子体返回平衡位置, 则对应于稳定性。现在我们利用静磁学的著名结果: 电流  $I_j$  受到电流  $I_i$  的作用力  $\mathbf{F}_{ij} = -(\mu_0 L I_i I_j / 2\pi r_{ij}) \mathbf{e}_{ij}$ , 其中,  $L$  是导线长度;  $\mathbf{e}_{ij}$  是连接导线  $i$  指向导线  $j$  方向上的单位矢量。注意到对于反方向的电流,  $\mathbf{F}_{ij}$  对应排斥力。容易算出产生的作用在等离子体上的垂直力为:

$$F_y = \frac{\mu_0 LI}{2\pi} \left[ -\frac{I_y}{c - \xi} + \frac{I_y}{c + \xi} + 2 \frac{\xi I_x}{(c^2 + \xi^2)^{1/2}} \right] \quad (13.151)$$

线性化后可得如下的关于垂直方向扰动力的表达式:

$$\delta F_y = \frac{\mu_0 LI^2}{\pi} \left[ \frac{I_x - I_y}{I} \right] \frac{\xi}{c^2} \quad (13.152)$$

稳定性条件  $\delta F_y < 0$  简化为:

$$\frac{I_x - I_y}{I} < 0 \quad (13.153)$$

代入式(13.150)给出的平衡关系即得到最终结果。这是一个用拉长比表示的稳定性条件:

$$\frac{\ln \kappa}{1 + \kappa} < 0 \quad (13.154)$$

正如预想的那样,对任何垂直拉长的等离子体,有  $\kappa > 1$ ,因此是不稳定的;而扁平等离子体的  $\kappa < 1$ ,故对于垂直位移是稳定的。但是根据对称性,这样的等离子体对于水平位移将是不稳定的。

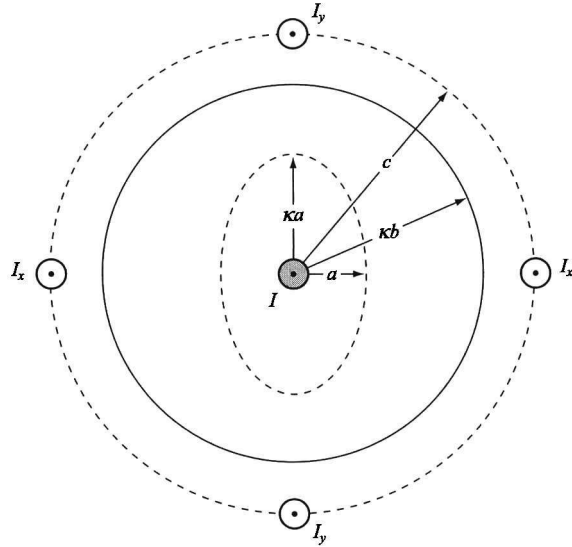
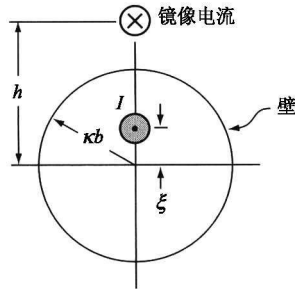
那么怎样才能产生拉长的等离子体呢?答案与分析中所做的重要假设——所有电流在等离子体被扰动偏离平衡位置时是不变的——有密切关系。如果我们在等离子体电流和平衡电流之间插入理想导体壁,这个限制条件就变了。当等离子体中产生位移时,通量守恒在壁中感应出涡流,它的方向指向产生稳定性的方向。理想导体壁对于  $n = 0$  模的稳定性的定量分析正是下面要讨论的问题。

### 3. 理想导体壁对 $n = 0$ 模的稳定作用

图 13.32 示出了一种分析理想导体壁效应的简单方法。由图 13.32 可知,在等离子体和平衡导线之间插入了一层圆形的直径为  $\kappa b$  的理想导体壁。选取因子  $\kappa$  是为了数学上的方便,这样壁移动到等离子体的表面的极限对应于  $b/a \rightarrow 1$ 。分析的目标是导出作为确定  $b/a$  函数的最大可实现的  $\kappa$  的临界稳定性条件。

在将这个问题进行数学形式化时,对于理想导体壁,一种有用的考虑方法如下。假设开始时壁具有很大但是有限的电导率。经过足够长的时间周期,平衡导线产生的磁场通过壁完全扩散出去,磁场大小和无壁时相同。此时假设壁变为超导的,随后等离子体导线垂直向上移动  $\xi$ 。平衡导线产生的磁场保持不变,因为它们被超导体锁定在无壁时的值上。换句话说,它们造成的使等离子体失稳的力与无壁时一样。但是,等离子体的运动在壁中感应出涡流,而这些感应电流产生一个额外的作用在等离子体导线上的力,这个力的方向是致稳的。

致稳力的大小可以用镜像方法算出。众所周知,根据静磁学原理,用图 13.32 所示的壁外侧的镜像电流代替壁,就可以算出涡流造成的效应。镜像电流的大小必须取为  $I' = -I$ ,它与原点的距离必须为  $h = \kappa^2 b^2 / \xi$ 。选取这些参数后, $r = \kappa b$  表面为磁面[也就是说,对于  $x = \kappa b \cos\theta$  和  $y = \kappa b \sin\theta$  有  $A_z(x, y) = \text{常数}$ ]。

(a) 用于分析  $n=0$  垂直不稳定性的导线模型

(b) 垂直移动的等离子体的等效镜像电流

图 13.32

现在我们很容易将这种稳定性分析推广到考虑了镜像电流效应的情形。根据与式(13.151)相关的处理过程,容易得出作用在等离子体导线上的垂直扰动力的一般形式为:

$$\delta F_y = \frac{\mu_0 L I^2}{2\pi} \left[ 2 \left[ \frac{I_x - I_y}{I} \right] \frac{\xi}{c^2} + \left[ \frac{I'}{I} \right] \frac{1}{h} \right] \quad (13.155)$$

于是稳定性条件简化为:

$$2\left(\frac{I_x - I_y}{I}\right)\frac{\xi}{c^2} + \left(\frac{I'}{I}\right)\frac{1}{h} < 0 \quad (13.156)$$

代入  $I_x - I_y$ 、 $I'$  和  $h$ , 我们得到将最大可实现的  $\kappa$  与壁位置  $w \equiv b/a$  联系起来的临界稳定性条件:

$$\frac{2\kappa^2}{1 + \kappa^2} \ln \kappa \leq \frac{1}{w^2} \quad (13.157)$$

这个关系式画在图 13.33 中。我们注意到, 曲线的行为与预想的壁远离等离子体 ( $w \rightarrow \infty$ ) 的极限情形一致。其中, 最大稳定拉长比退化为圆的拉长比情形:  $\kappa \rightarrow 1$ 。壁移动到等离子体表面对应于  $w \rightarrow 1$  情形, 此时存在很强的壁致稳效应:  $\kappa \approx 1.9$ 。但是, 与我们预想所不同的是, 这个致稳效应不是无穷大 ( $\kappa \rightarrow \infty$ )。原因是, 在导线模型稳定性分析中, 导线中心 ( $r = 0$ ) 和壁 ( $r = \kappa b$ ) 之间的通量守恒, 而不是等离子体表面 ( $x = a \cos \theta, y = \kappa a \sin \theta$ ) 和壁之间的通量守恒。换句话说, 导线模型中壁移动到等离子体表面实际上对应  $w \rightarrow 0$  而不是  $w \rightarrow 1$ 。

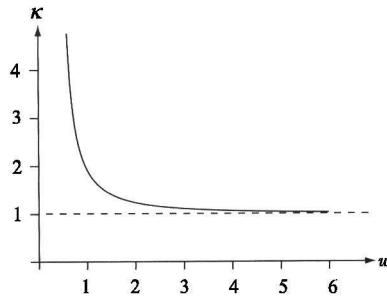


图 13.33 导线模型中临界稳定的拉长比  $\kappa$  随壁位置半径  $w = b/c$  的变化

不管怎样, 与实际情形的数值计算的结果相比, 这样得到的实际拉长比的误差并不大。举例来说,  $\kappa = 1.6$  的拉长比要求壁靠近到  $w < 1.2$ , 等离子体才是稳定的。这相比于数值计算结果略为悲观, 典型的数值结果为: 对于环径比  $R_0/a \approx 3$  的等离子体, 根据不同的参数分布和截面形状, 拉长比达到  $\kappa \approx 1.8$  才要求  $w < 1.2 \sim 1.4$ 。

最后, 如同前述, 真实的壁的电导率是有限的。这意味着垂直位移不稳定性会转化为  $n = 0$  的电阻壁模, 因此需要通过反馈来致稳。所有现代托卡马克都具有紧密贴合的导体壳和抑制  $n = 0$  模的反馈系统, 实际运行中它们可以产生高达  $\kappa \approx 1.8$  的拉长比。因此, 后文中我们将取  $\kappa \approx 1.8$  作为最大可实现的拉长比。

#### 4. $n = 1$ 气球-扭曲模不稳定性

我们采用表面电流模型对截面拉长的托卡马克进行  $n = 1$  模的稳定性分析。分析结果定性上类似于圆截面托卡马克的结果。也就是说,存在平衡态  $\beta/I^2$  极限,对于  $I$  的最大值时有低  $\beta$  扭曲模极限和决定最大  $\beta/\varepsilon$  的气球-扭曲模极限。定性来讲,所有与环径比成反比的定标关系都得到保留,主要差别在定义每个极限的数值因子现在变为拉长比的函数。总体上说,一个主要结论是,与气球-扭曲模有关的  $\beta$  极限随拉长比线性增加,这是一个极为有利的定标关系。最后,最高的稳定  $\beta$  是在  $n = 0$  垂直不稳定性设定的最大拉长比下实现的。

这里分析的具体数学过程与圆截面情形非常相似,只是横截面现在假设成拉长比为  $\kappa$  的椭圆。然而,即使对于这种简单的截面,结果也只能通过数值计算得到,因为这里除了有与环效应有关的  $\cos\theta$  耦合,还有与椭圆度有关的  $\cos 2\theta$  耦合。虽然分析再一次得到了稳定性问题的矩阵形式,但对于有限的椭圆度,却没有简单的近似关系来反映作为  $\kappa$  的函数的  $\beta$  与  $q_*$  之间的定标关系。

基于这些原因,我们根据表面电流模型的数值计算结果,能够得到临界  $\beta_{\text{crit}}$  与  $q_{* \text{crit}}$  之间的简单近似关系就很满意了。如上所述,随着拉长比的增加,这些物理量的定标关系会变好。从物理上来解释这一现象有些复杂,但根据表面电流模型,有一种效应很容易理解。那就是,对于给定的小半径,截面拉长型托卡马克中极向磁场的坏曲率与圆截面托卡马克中截面顶部和底部极向磁场的坏曲率是可比的:  $\kappa_r^{(\text{pol})} \approx -B_0^2/aB_\phi^2$ ; 但中平面附近的截面两侧几乎是垂直直线,这表明在此区域极向磁场曲率非常小:  $\kappa_r^{(\text{pol})} \approx 0$ 。所以,直观上可以认为,尽管较大的横截面积允许通过较大的电流,但是与垂直侧相关的中性稳定性不会严重影响到总体稳定性。因此,截面拉长既有利于平衡,也有利于提高气球-扭曲模的  $\beta$  极限,具体提高多少则取决于最大可允许电流。

有了上述基础,现在我们来考虑 3 个感兴趣的  $\beta$  极限:①平衡态  $\beta$  极限;②低  $\beta$  扭曲模稳定性极限;③气球-扭曲模稳定性  $\beta$  极限。首先需要定义截面拉长型(椭圆形截面)托卡马克的临界等离子体参数。等离子体  $\beta$  的定义与圆截面中的一样:  $\beta \approx \beta \equiv 2\mu_0 p/B_0^2$ 。类似地,根据水平方向小半径  $a$ ,可将倒环径比定义为:  $\varepsilon = a/R_0$ 。扭曲模安全因子  $q_*$  采用这样的定义:在低  $\beta$  极限下与实际的安全因子  $q$  保持一致。经过复杂的代数运算,表面电流分析表明,合适的定义为:

$$q_* = \frac{2\pi a^2 \kappa B_0}{\mu_0 R_0 I} G(\kappa) \quad (13.158)$$

其中,

$$G(\kappa) = \frac{4\kappa E^2(\alpha)}{\pi} \approx \frac{1}{\kappa} \left[ 1 + \frac{4}{\pi^2} (\kappa^2 - 1) \right] \quad (13.159)$$

这里,  $E(\alpha)$  是椭圆积分,  $\alpha^2 = 1 - 1/\kappa^2$ 。这个近似公式利用了椭圆积分的简单曲线拟合。关键是要注意, 在我们感兴趣的拉长比  $1 < \kappa < 2$  区域,  $G(\kappa)$  的值非常接近于常数:  $G(\kappa) \approx 1$ 。根据这个近似, 扭曲模安全因子简化为:

$$q_* = \frac{2\pi a^2 \kappa B_0}{\mu_0 R_0 I} \quad (13.160)$$

这个定义与圆截面情形下的定义是一致的, 只是在分子中多了因子  $\kappa$ 。以后我们用式(13.160)作为  $q_*$  的定义。

第一个有意思的结果是平衡态  $\beta$  极限。与圆截面等离子体一样, 当  $\beta$  变得足够大以至于真空界面的 X 点移动到等离子体表面时, 椭圆截面等离子体具有一个平衡态  $\beta$  极限。表面电流分析表明, 在  $1 < \kappa < 2$  区域, 平衡态  $\beta$  极限的一个很好的近似为:

$$\frac{\beta q_*^2}{\varepsilon} \leq \frac{\pi^2}{16} \kappa \quad (13.161)$$

在某种程度上, 椭圆截面的  $q_*$  可以如圆截面情形一样维持不变, 由此可得平衡态  $\beta$  极限与拉长比的线性定标关系。这是与拉长比有关的有利的定标关系的第一个例子。

第二个极限关系是低  $\beta$  扭曲模稳定性极限。我们还记得, 在圆截面情形下, 低  $\beta$  极限使稳定性矩阵  $\vec{W}$  变得对角化。因此, 通过分别检验每一个矩阵对角元的符号, 就可轻易确定稳定性。对于椭圆截面的情形, 由于存在  $\cos 2\theta$  耦合, 因此低  $\beta$  时矩阵不能对角化。这时耦合谐波的稳定性问题只能通过数值方法来解决, 但是最终结果——与圆截面类似——仍是由  $q_*$  的最小稳定值构成。这些结果表明, 在  $1 < \kappa < 2$  区域, 扭曲模稳定性极限近似为:

$$q_* \geq \frac{1 + \kappa}{2} \quad (13.162)$$

注意到  $q_{*crit}$  随  $\kappa$  增加, 这意味着, 随着等离子体被拉长, 低  $\beta$  时需要更大的“安全”因子。跟预想的拉长导致更高的可允许电流相反, 这似乎不是有利的定标关系。但是, 如果我们利用  $q_*$  的定义来计算电流大小便可知:

$$I \leq I_{max} = \frac{2\pi a^2 B_0}{\mu_0 R_0} \frac{2\kappa}{1 + \kappa} \sim \frac{2\kappa}{1 + \kappa} \quad (13.163)$$

结论是:  $I$  的最大值随  $\kappa$  增加(例如, 随着  $\kappa$  从 1 增加到 2,  $I$  变为原来的 4/3 倍), 尽管效果不是十分明显。对这种行为的解释与如下事实有关: 在低  $\beta$  时, 扰动局限于椭圆顶部和底部的坏曲率区域, 因此对压强驱动的气球模影响不大。换种说法就

是,压强驱动的气球模对于局限于等离子体外侧的扰动是不稳定的;而对于等离子体顶部和底部的扰动则变得稍具稳定性。然而,这种稳定性效应在低  $\beta$  极限下很弱。

我们感兴趣的最后一个极限与气球-扭曲模有关。这里与圆截面情形一样,我们假设托卡马克正沿着平衡态  $\beta$  极限曲线运行,然后用数值方法算出稳定性所需的  $q_*$  的最小稳定值。最后将  $q_*$  值代入平衡态  $\beta$  极限的表达式,得出稳定的  $\beta$  的最大值。

有趣的是,数值研究的结果表明,随着拉长比增加, $q_{* \text{ crit}}$  几乎保持圆截面下的值不变;也就是说,最小  $q_*$  在高  $\beta$  区域与  $\kappa$  无关: $q_{* \text{ crit}} \approx 1.7$ 。从物理上讲, $\beta$  值较高时,由于存在压强驱动的气球效应,扰动不可能简单地局限于截面的顶部和底部,而是会出现在等离子体外侧。所以,与之前给出的直观论证的结果一致,随着  $\kappa$  增加,通过相当大的电流确实是可能的。这一增长被  $q_*$  定义中的因子  $\kappa$  所平衡,导致  $q_{* \text{ crit}}$  与  $\kappa$  无关的结论。

在平衡态  $\beta$  极限的表达式中代入  $q_{* \text{ crit}} \approx 1.7$  可得如下有关气球-扭曲模的  $\beta$  极限:

$$\beta \leq \beta_{\text{max}} = 0.21 \frac{a}{R_0} \kappa \quad (13.164)$$

作为一个例子,我们令  $\kappa = 1.8$ ,它对应于  $n = 0$  模允许的最大拉长比,那么对于  $R_0/a = 2.5$  的托卡马克, $\beta_{\text{crit}}$  为 0.15,这个值对于反应堆已绰绰有余。然而,与圆截面情形一样,更加实际的数值计算结果(相应的特鲁瓦永极限)则并不如此乐观,尽管随着  $\kappa$  增加它们确实改善了。

为了理解拉长对特鲁瓦永极限的影响,我们不妨回忆一下下述数值计算结果的重要特征。特鲁瓦永极限为:

$$\beta \leq \beta_{\text{rit}} = \beta_N \frac{I}{aB_0} = 0.028 \frac{I}{aB_0} \quad (13.165)$$

它是通过对截面和参数分布进行优化得到的,因此式(13.165)给出的表达式对于研究范围内的任何拉长比都是适用的。我们注意到,这个极限并不明显地依赖于  $\kappa$ ,只是随着  $\kappa$  增加、最大  $I$  也增加时,才隐含地随拉长比而改善。

通过改写式(13.165),可将拉长效应明确地写成与表面电流结果可比的形式:

$$\beta \leq \beta_{\text{rit}} = 0.14 \frac{\epsilon \kappa}{q_*} \quad (13.166)$$

如果我们再次假设,对于弥散性分布,最小  $q_*$  与拉长比无关,那么令  $q_* \approx 2$  即可得  $\beta$  的特鲁瓦永极限为:

$$\beta \leq \beta_{\max} = 0.07 \frac{a}{R_0} \kappa \quad (13.167)$$

我们注意到,特鲁瓦永极限和表面电流模型预言了同样的  $\beta_{\max}$  与  $\varepsilon$  以及  $\kappa$  的定标关系,不同的仅是数值系数。如果  $R_0/a = 2.5$  且  $\kappa = 1.8$ ,特鲁瓦永极限为  $\beta_{\max} = 0.05$ 。这个值接近但是小于从简单反应堆设计中导出的  $\beta \approx 0.08$ 。但是,简单反应堆设计并未包含拉长的影响,而且显然是基于极为简化的分析过程。托卡马克专家的一般看法是,  $\beta \sim 0.05$  也许对于反应堆是合适的。这很令人鼓舞,因为目前实验已经达到了这样的值。

对于托卡马克,余下的磁流体力学相关问题涉及电流驱动和自举电流。特鲁瓦永及其同事得到的稳定的参数分布不能自然产生满足需要的自举电流,因此需要外部电流驱动系统。这些要求可以通过对托卡马克的另一种改进——即所谓“先进运行模式”——来解决。这是我们下面要讨论的问题。

### 13.7.5 先进托卡马克(AT)

先进托卡马克(Advanced Tokamak, AT)实际上指的是托卡马克实验的一种特殊运行模式。其目的是形成能够产生高比例自举电流的压强和电流分布,从而减小对外部电流驱动系统的要求。

正如第14章中要指出的,产生高比例自举电流的最有效的参数分布是中空的电流分布,它导致  $q$  分布的根本性变化,即  $q$  分布不再是半径的单调增函数,而是先增后减。安全因子具有离轴的最小值。图13.34所示是位于圣迭戈通用原子公司的DIII-D托卡马克的典型例子。在实验中,这些参数分布是通过电流程序控制和利用局部辅助加热进行参数分布控制综合产生的。这样的分布通常被称为“反剪切分布”,这里的剪切是指  $rq'/q$ ,它在最小  $q$  处变号。

定性地说,反剪切分布在两方面有助于解决电流驱动问题。首先,对于最优化参数分布有  $q_{\min}(r_{\min}) > 2$ ,因此这种托卡马克中的电流要比  $q_{\min}(0) \approx 1$  的典型托卡马克运行中的电流要小。也就是说,要驱动的总电流减小了。第二,中空的电流分布与自然形成自举电流的分布极为接近。我们不需要驱动大量的同轴电流,因为反剪切和自然形成的自举电流的分布都是中空的。

由于引入了新的磁流体力学不稳定性,这些优势被部分抵消了。从反应堆的经济性上说,高比例的自举电流(即  $f_b$  约  $0.7 \sim 0.9$ )是必需的,而这就需要有较高的总体  $\beta$  和极向  $\beta$ 。然而,电流的减小虽然对电流驱动有利,但却导致  $n = 1$  气球-扭曲模的稳定性极限值降低。我们还记得,特鲁瓦永极限有  $\beta \leq \beta_n \left[ \frac{I}{aB} \right] \sim I$ 。反应堆实现必需的自举电流比例所对应的典型  $\beta_n$  值约为  $0.04 \sim 0.05$ 。但是,这个值几乎是特鲁瓦永得到的值( $\beta_n \approx 0.028$ )的两倍,这意味着必须采用理想导体壁来增加  $\beta$



极限(特鲁瓦永的研究中没有环绕等离子体的导体壁假设)。

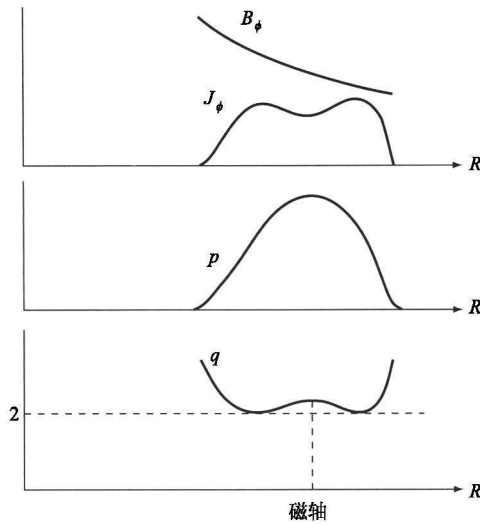


图 13.34 DIII-D 托卡马克中平面上典型的参数分布,图中显示了  $q(\psi)$  的离轴最小值(即反剪切)和中空的  $J_\phi$  分布(Stait, et al. (1995). *Physical Review Letters*, **75**, 4421)

本小节的目的是确定导体壁要靠近到何种程度才能实现所需的  $\beta$  极限。从表面电流模型可以容易地得到答案,而且这个结果与更加实际的数值计算结果符合得很好。结果表明,所需的壁的半径一般为  $b/a \sim 1.4$ ,跟截面拉长型托卡马克中稳定  $n = 0$  垂直不稳定性所需的差不多。而且不要忘了,如果壁具有有限的电导率,那么不稳定性即转变为需要反馈稳定的电阻壁模。目前这种技术还不像针对  $n = 0$  模的技术那样成熟,仍是当前研究的活跃领域。

### 1. 壁对扭曲模电流极限的影响

托卡马克中理想导体壁对  $n = 1$  模的影响可以通过表面电流模型得到。为简单起见,计算时采用了圆截面等离子体。这种分析仅需要将壁的影响包括到真空对压强平衡关系的贡献里。对于 RFP 这已经计算过了,在合适的长波长极限下,我们需要做的仅是在托卡马克压强平衡关系中做如下代换:

$$\sum_{l \neq 0} \frac{G_{lm} G_{lp}}{|l|} \rightarrow \sum_{l \neq 0} \frac{G_{lm} G_{lp}}{|l|} \left[ \frac{1 + (a/b)^{2|l|}}{1 - (a/b)^{2|l|}} \right] \quad (13.168)$$

现在考虑低  $\beta$  扭曲模极限。与无壁情形类似,稳定性矩阵变得对角化,仅有  $m = 1$  可能是不稳定的。 $m = 1, n = 1$  时修正的稳定性条件变为:

$$W_{11} = 1 - \frac{1}{q^*} + \left[ 1 - \frac{1}{q^*} \right]^2 \left[ \frac{w^2 + 1}{w^2 - 1} \right] > 0$$

$$= \frac{2w^2}{(w^2 - 1)q_*^2} (q_* - 1)(q_* - 1/w^2) > 0 \quad (13.169)$$

其中  $w = b/a > 1$ 。我们注意到,稳定性依然要求  $q_* > 1$ 。结论是:就抑制低  $\beta$  扭曲模的稳定性而言,理想导体壁对  $I_{\max}$  的值没有任何影响。注意,理论上讲,低  $q_*$  的稳定区域(即  $0 < q_* < 1/w^2$ ) 在托卡马克中是无法实现的,因为要进入这个参数区,就需要  $q_*$  随电流增大(或等价地,随着  $q_*$  减小)经过极其不稳定的区域  $1/w^2 < q_* < 1$ 。

## 2. 壁对气球-扭曲模 $\beta$ 极限的影响

气球-扭曲模不稳定性是 AT 运行中要克服的最危险的模式。核心问题是确定理想导体壁放置得多靠近才能将稳定  $\beta$  的最大值提升到比无壁极限高一个确定的量。

通过再次让等离子体沿平衡态极限曲线  $\beta q_*^2 / \varepsilon = \pi^2 / 16$  (它不受壁的影响)运行,并确定稳定性所需的临界  $q_*$ , 我们即可以从表面电流模型中得到所需的信息。与低  $\beta$  区域相反,高  $\beta$  区域中的稳定性  $q_{* \text{crit}}$  确实与壁的位置有关。一旦确定了  $q_{* \text{crit}}$ , 带回到平衡态极限关系就得到对应的  $\beta$  最大值。

利用壁修正的真空贡献,令矩阵  $\hat{\mathbf{W}}$  的行列式为零,即可以通过数值计算得到所需的  $\beta_{\max} / \varepsilon$  对  $b/a$  的关系,结果显示在图 13.35 中。我们注意到,直到  $b/a \approx 2$ , 壁几乎没有影响。原因是模式中的主要谐波对应于  $m = 2$ , 对于该模数,壁效应应以  $(b/a)^4$  很弱地起作用。

利用图 13.35, 现在我们可以解决“壁必须靠得多近才能实现高比例自举电流”的问题了。为了形式化处理这个问题,我们不妨回忆一下,反应堆研究曾表明,根据特鲁瓦永极限,为了实现所需的高比例自举电流,临界  $\beta_N$  必须从  $\beta_N = 0.028$  提高到  $\beta_N \approx 0.045$ 。这相当于  $\beta_N$  的比为  $0.045/0.028 = 1.6$ 。此外我们还曾假设,导体壁的稳定性效应对弥散型等离子体模型与对表面电流等离子体模型是类似的,因此我们需要知道表面电流模型下  $\beta_{\max}$  乘以相同因子 1.6 后所对应的临界壁位置。换一种说法,对于给定的环径比,临界  $\beta/\varepsilon$  必须从  $\beta/\varepsilon = 0.21$  增加到  $\beta/\varepsilon = 0.34$ 。从图 13.35 可推断,这相当于临界壁位置为  $b/a \approx 1.4$ 。这个值与采用弥散型参数分布下数值稳定性研究的结果相比,略为乐观。在截面拉长的等离子体中,它与  $n = 0$  稳定性所需的壁位置差不多。

总之,采用反剪切参数分布的 AT 运行可以实现高比例自举电流。然而,这个区域所需的高  $\beta$  使得等离子体超出无壁极限。通常需要  $b/a < 1.4$  的导体壁。由于实际的壁具有有限电导率,不稳定性转化为电阻壁模,因此需要通过反馈或者旋转来稳定。目前,同时实现高比例自举电流和高稳定  $\beta$  是托卡马克研究的一个主要领域。

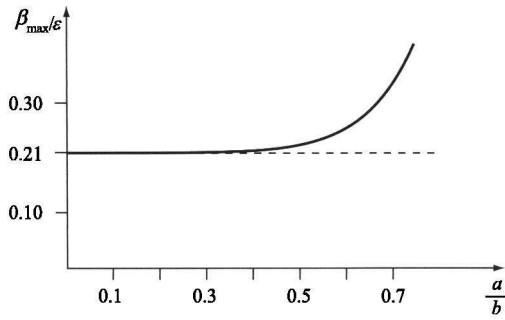


图 13.35  $\beta_{\max}/\epsilon$  随  $a/b$  的变化曲线(图中显示了壁不断靠近等离子体时  $\beta$  极限是如何增加的)

### 13.7.6 球形托卡马克(ST)

球形托卡马克(Spherical tokamak, ST)是要讨论的最后一种托卡马克位形。这种位形的新的特征是小的环径比,一般有  $R_0/a$  约 1.2 ~ 1.4。人们已经建造了许多球形托卡马克实验装置,其中最大的两个分别是位于英国卡拉姆实验室的兆安培球形托卡马克(Mega-Ampere Spherical Tokamak, MAST)和位于普林斯顿等离子体物理实验室的国家球形环实验装置(National Spherical Torus Experiment, NSTX)。NSTX 的示意图如图 13.36 所示。

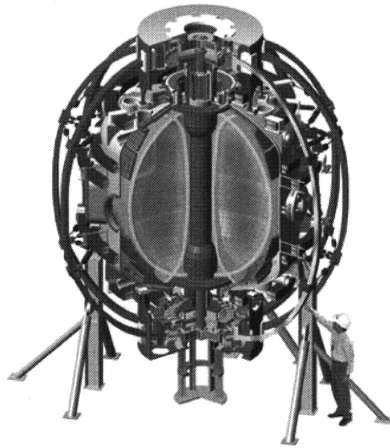


图 13.36 位于普林斯顿等离子体物理实验室的 NSTX 实验装置示意图(承蒙 M. Peng 提供)

研究 ST 位形的主要目的之一是探索充分利用磁流体力学  $\beta$  极限的定标关系  $\beta \sim \epsilon$ 。显然,随着环径比变小,  $\beta_{\max}$  将增加,实验上也确实看到了这种行为。我们希望较高的稳定  $\beta$  能够增加聚变反应堆的吸引力,因为它允许采用较弱的环向磁场,或是采用较小的更加紧凑的几何结构。无论哪种选择都会降低成本。

更详细的分析表明,将 ST 作为反应堆是有利有弊的。实际上,如下一小节所述,如果我们参照标准托卡马克来权衡 ST 的利弊,很难肯定地说 ST 就一定会发展成为更有吸引力的反应堆,即使磁流体物理分析所预言的高  $\beta$  能够实现。但是,ST 还有一种替代应用,也许更适合,那就是体中子源。

这些论断基于如下理由。 $\beta$  和紧凑所带来的好处必然会被其他一些问题所抵消,这些问题在 ST 上要比标准托卡马克情形下严重得多。首先,我们知道,聚变反应堆需要高的等离子体压强,它与  $\beta$  有关但并不等同。特别是,在小环径比(即  $R_0/a \rightarrow 1$ )下,由于环内侧空间体积减小,使得产生环向  $B_{\max}$  的环向磁场磁体在中心柱内的回臂粗细大大减小,而磁场的大小正比于  $1/R$ ,由此导致  $\beta$  据以定义的等离子体中心的  $\beta_0$  大大减小。最终结果是,ST 中的最大的可实现压强较之标准托卡马克要小。这一点在以后会更详细地讨论。

第二,为了实现极为紧凑的环径比,包层和几乎所有的屏蔽层都必须从等离子体内侧移除。其结果是环向场磁体在中心柱内的回臂必须是铜质的,因为超导磁体没有合适的防护,已不再适用。中心铜质回臂会耗散相当多的欧姆功率,这些功率必须计入整体功率平衡中。详细的反应堆研究表明,要实现可观的功率平衡, $B_{\max}$  必须限制在小于 7.5 T。这个值要比采用超导磁体的标准托卡马克的磁场值小很多。ST 的这个限制还导致较低的最大可实现压强。

第三,为了在小环径比装置中实现与标准托卡马克类似的安全因子,需要很大的环向电流。所以,在 ST 中要解决电流驱动问题更为困难,实际上,要求自举电流比例远高于 90%。在 ST 中,尽管小环径比能够产生高  $\beta$ ,但同时也会引起磁流体力学无壁  $\beta$  极限的破坏。因此,ST 还必须解决相应的电阻壁模的稳定问题。

上面讨论的结论是:从反应堆的吸引力方面看,ST 反应堆并不像原先预计的那样明显比标准托卡马克更优越。但是,ST 非常适用于另一种聚变应用——体中子源。14 MeV 的中子源将在聚变反应堆用材料的测试和研发方面起到重要的作用。从反应堆应用上说,材料的耐用性及其环境影响(尤其是在放射性方面)显然是其具有多大吸引力的重要因素。目前还没有这样一种能够产生 14 MeV 的中子源。这种中子源的一个重要特点是它的主要目的是能够在相当小的空间范围内产生用于测试小样本聚变材料的高强度中子流。它不需要取得可观的功率平衡,而一旦功率平衡的限制解除了,那么 ST 将因其袖珍的体积和采用铜材料做磁体,也许很适合成为一种相对便宜的 14 MeV 中子源。

有了上面的介绍,本小节的余下部分将着重讨论 ST 的磁流体力学行为。我们尤其感兴趣的是确定 ST 中的  $\beta$  极限,看看有利的环径比定标关系在  $\varepsilon \rightarrow 1$  时是否能够保持。另外,我们还将比较 ST 的和标准托卡马克的  $\beta$ -压强关系,包括考虑环向场磁体内回臂对磁场极限的影响。尽管这些分析原则上能够通过表面电流模型进行,但是在感兴趣的参数范围内还没有得到类似的结果。因此,这里的讨论是基

于与特鲁瓦永的早期研究思路相似的数值研究,只是推广到将环径比很小的球形环包括在进来。

### 1. 球形环中的磁流体力学 $\beta$ 极限

特鲁瓦永及其同事的早期研究涉及对参数分布和等离子体形状的数值优化,进而确定针对所有磁流体力学模式(通常  $n = 1$  外界气球-扭曲模不稳定性设定了最严格的限制)的最大的稳定  $\beta$ 。这些研究涵盖了范围广泛的位形,但却不包含小环径比 ST,因为那时 ST 的概念还没有提出来。

但是,MAST 和 NSTX 的建造激励了进一步的数值研究,即将特鲁瓦永及其同事的结果推广到小环径比区域。普林斯顿等离子体物理实验室的梅纳德(Menard)及其同事对此进行了一系列研究。他们在对一些关键的等离子体参数改进定义之后,通过研究表明,即使对于很小的环径比, $\beta_{\text{crit}}$ 对环径比的依赖关系( $\beta_{\text{crit}} \sim \varepsilon$ )依然成立。他们还考虑了  $q_*$ 对扭曲模的关系。将这些结果综合起来,我们就可以确定作为环径比和拉长比函数的优化的  $q_*$ 和相应的  $\beta_{\text{crit}}$ 。分析的细节如下。

第一步是引入关键等离子体参数的改进定义,这里主要是指  $\beta$ 和  $q_*$ 。现有的  $\beta$ 定义更改为:

$$\beta \equiv \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_0^2} \rightarrow \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{\langle B^2 \rangle} \quad (13.170)$$

这个定义最早由特鲁瓦永及其同事提出。这里  $\langle \rangle$ 表示体平均值。我们看到,在新的定义中,轴上的真空磁能  $B_0^2$ 被替换为总体磁能的体平均值  $\langle B^2 \rangle = \langle B_\phi^2 + B_p^2 \rangle$ 。在大环径比极限  $\varepsilon \rightarrow 0$ 下,这两种定义是一致的。接下来,引入扭曲模安全因子的新定义,它与拉长比的关系与此前稍有不同:

$$q_* \equiv \frac{2\pi B_0 a^2}{\mu_0 R_0 I} \kappa \rightarrow \frac{2\pi B_0 a^2}{\mu_0 R_0 I} \left[ \frac{1 + \kappa^2}{2} \right] \quad (13.171)$$

这两个定义对于  $\kappa = 1$ 是一致的,对于  $\kappa = 2$ 只相差因子  $5/4$ 。

利用这些定义,普林斯顿研究小组进行了深入的数值研究,就截面、参数分布、安全因子、环径比,包括与 ST 位形相关的小环径比等广泛的参数范围确定了最大稳定  $\beta$ 。他们的数值研究结果数据可以(按新定义)总结为一个简单的解析拟合表达式:

$$\beta \leq \beta_{\text{crit}} \equiv \langle \beta_N \rangle \frac{1}{aB_0} = 5 \langle \beta_N \rangle \left[ \frac{1 + \kappa^2}{2} \right] \frac{\varepsilon}{q_*} \quad (13.172)$$

其中  $\langle \beta_N \rangle$ 是新的归一化系数。显然,它与环径比和拉长比均无关,仅是  $q_*$ 的函数。

我们看到,  $\beta_{\text{crit}}$ 与  $\varepsilon$ 的线性关系即使在球形环参数区域也成立。另外,由于

$\langle \beta_N \rangle$  与  $\kappa$  无关,拉长的优势对于小环径比依然成立:  $\beta_{\text{crit}} \sim 1 + \kappa^2$  随拉长比增加。在扭曲不稳定性决定的  $q_*$  对  $\langle \beta_N \rangle$  的依赖关系方面,数值研究表明,对于  $q_* > 2$ ,  $\langle \beta_N \rangle$  的值近似为一个常数:  $\langle \beta_N \rangle \approx 0.03$ ; 对于较低的  $q_*$ ,  $\langle \beta_N \rangle$  的值减小,直到  $q_* \approx 1$  时为零。理论上,  $\langle \beta_N \rangle$  对  $q_*$  的依赖关系可以归纳为如下这个简单的表达式:

$$\langle \beta_N \rangle \approx 0.03 \frac{(q_* - 1)}{[(3/4)^4 + (q_* - 1)^4]^{1/4}} \quad (13.173)$$

总体  $q_*$  对  $\beta_{\text{crit}}$  的依赖关系取决于比值  $\langle \beta_N \rangle / q_*$ 。容易证明,这个函数在  $q_* = 1 + (3/4)^{4/5} \approx 1.8$  处有最大值,这时  $\beta_{\text{crit}}$  达到最大值  $\beta_{\text{max}}$ 。特别地,标准托卡马克或者球形环中的  $\beta$  极限为:

$$\beta \leq \beta_{\text{max}} \equiv 0.072 \left[ \frac{1 + \kappa^2}{2} \right] \varepsilon \quad (13.174)$$

拉长比  $\kappa = 2$ , 倒环径比  $\varepsilon = 1/1.25 = 0.8$  的球形环具有相当高的  $\beta$  最大值  $\beta_{\text{max}} = 0.14$ , 这就证实了起初的 ST 研究动机——增加稳定  $\beta$  值。

## 2. 托卡马克中 $\beta$ 和压强的关系

上述分析表明,用  $\langle B^2 \rangle$  来定义  $\beta$  在理论上是方便的,因为倒环径比的定标关系很简单,即使对于很小的环径比也有:随着  $\varepsilon \rightarrow 1$ ,  $\beta \sim \varepsilon$ 。实验中更加方便的定义是将  $\langle B^2 \rangle$  替换为  $B_0^2$ , 这个物理量测量上容易得多。但用  $B_0^2$  定义导致  $\beta_{\text{max}}$  对  $\varepsilon$  的依赖关系变得复杂,也就是说,此时此刻画  $\beta$  极限的  $\beta_{\text{max}}$  较用  $\langle B^2 \rangle$  定义时高很多。那么什么才是  $\beta$  的最佳定义呢?

这个问题的答案要到聚变反应堆的要求中去找。这个要求的关键是聚变功率密度近似地与等离子体压强的平方成正比:

$$S_f = \frac{E_f}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle = \frac{E_f}{16} \frac{\langle \sigma v \rangle}{T^2} p^2 \approx \frac{E_f}{16} \left[ \frac{\langle \sigma v(T_f) \rangle}{T_f^2} \right] p^2 \quad (13.175)$$

其中,  $T_f \approx 15$  keV。因此,一个经济上具有吸引力的反应堆必须能够稳定地约束住高压强等离子体。在此基础上,  $\beta$  的最佳定义必须能够给出对压强的精确度量。由于  $p \sim \beta B^2$  且环向场线圈内侧的  $B$  由  $B \leq B_{\text{max}}$  限定,因此我们可以引入如下定义:

$$\beta_E \equiv \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_{\text{max}}^2} \quad (13.176)$$

这里  $\beta_E$  称为“工程贝塔值”,它是聚变反应堆情形下的“最佳”定义。

现在的任务是将  $\langle B^2 \rangle$  与  $B_{\text{max}}^2$  联系起来,计算出 ST 中可实现的最高稳定压强,并与标准托卡马克中的值相比较。这个任务分两步完成:首先,找出  $\langle B^2 \rangle$  与  $B_0^2$  的关

系;其次,将  $B_0^2$  与  $B_{\max}^2$  联系起来。

一般说来,  $\langle B^2 \rangle$  与  $B_0^2$  之间的关系需要通过详细的数值计算才能给出。但是,通过一些简化的假设,我们可以得到一个相当精确的理论近似。首先考虑  $\langle B_\phi^2 \rangle$  对  $\langle B^2 \rangle$  的贡献。假设等离子体中  $B_\phi$  的值与真空值相等:  $B_\phi \approx B_0(R_0/R)$ 。忽略等离子体的抗磁性会稍微高估了  $\langle B_\phi^2 \rangle$ ,但这一影响不大。较重要的是典型的等离子体截面被拉长为指向外的三角形。由于此时内部体积相对较大,环内侧的磁场要比圆截面时强得多,因此这种形变相对来说重要得多。这种拉长截面的一个简单模型是图 13.37 所示的半椭圆。  $\langle B_\phi^2 \rangle$  与  $B_0^2$  之间的关系为:

$$\langle B_\phi^2 \rangle = B_0^2 \int (R_0/R)^2 dr / \int dr \quad (13.177)$$

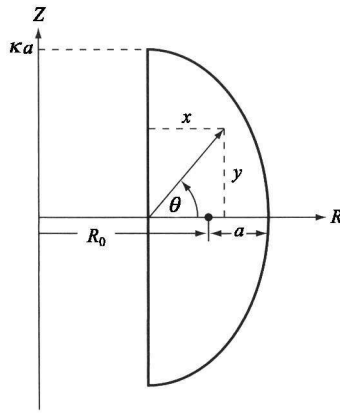


图 13.37 用于描述 ST 等离子体非圆截面的半椭圆模型

通过引入如下的新坐标系:  $R = R_0 - a + 2a\rho\cos\theta$  和  $Z = \kappa a\rho\sin\theta$ , 其中,  $0 \leq \rho \leq 1$ ,  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ , 我们可以直接计算出这些积分, 得到的是一个较为复杂的表达式, 它可写为

$$\frac{\langle B_\phi^2 \rangle}{B_0^2} = G_\phi(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon\delta} \left[ \frac{1 - (2\delta/\pi) - (4/\pi) \sqrt{1 - \delta^2} \arctan^{-1} \sqrt{(1 - \delta)/(1 + \delta)}}{1 - (1 - 8/3\pi)\varepsilon} \right] & \varepsilon < 1/3 \\ \frac{1}{\varepsilon\delta} \left[ \frac{1 - (2\delta/\pi) + (2/\pi) \sqrt{\delta^2 - 1} \ln(\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})}{1 - (1 - 8/3\pi)\varepsilon} \right] & \varepsilon > 1/3 \end{cases} \quad (13.178)$$

其中,  $\delta = 2\varepsilon/(1 - \varepsilon)$ 。该函数如图 13.38 所示。我们注意到,  $\langle B_\phi^2 \rangle / B_0^2$  是关于  $\varepsilon$  的单调增函数。随着  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 可以看出  $\langle B_\phi^2 \rangle / \langle B_0^2 \rangle \rightarrow 1$ , 这符合预期。对于  $\varepsilon = 1/3$  的典型托卡马克, 这个比值增加到  $\langle B_\phi^2 \rangle / \langle B_0^2 \rangle = 1.15$ , 改变很小。但对于  $\varepsilon = 1/1.25 = 0.8$  的 ST 而言, 这个比值是  $\langle B_\phi^2 \rangle / \langle B_0^2 \rangle = 1.76$ , 差别就很大了。

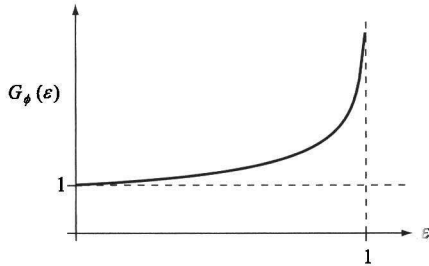


图 13.38 函数  $G_\phi(\varepsilon) \equiv \langle B_\phi^2 \rangle / B_0^2$  随  $\varepsilon$  的变化

现在考虑  $\langle B_p^2 \rangle$  对  $\langle B^2 \rangle$  的贡献。即使在小环径比条件下, 这种贡献依然较小。所以, 为了简化分析, 我们可以采用大环径比下的极向磁场近似。存在一个电流密度随大半径增加——这与真实的参数分布一致——的简单模型, 它由如下形式的矢量给出:

$$A_\phi = C \left[ \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{\kappa^2 a^2} - 1 \right] x \quad (13.179)$$

其中,  $R = R_0 - a + x, z = y$ 。通过计算  $B_x, B_y$ , 然后计算环绕等离子体表面的线积分  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ , 就可以容易地用等离子体电流来表示常数  $C$ :

$$\mu_0 I = 4aC \left[ \frac{\kappa^2 + 4/3}{\kappa} \right] \quad (13.180)$$

现在计算磁场和  $\langle B_p^2 \rangle$  就很容易了。简单的计算给出:

$$\frac{\langle B_p^2 \rangle}{B_0^2} = G_p(\varepsilon) = \frac{\pi^2}{32} \frac{(\kappa^2 + 1)^2 \varepsilon^2}{(\kappa^2 + 4/3) q_*^2} \quad (13.181)$$

注意到如果  $\kappa = 2, q_* = 1.8$ , 那么对于  $\varepsilon = 1/3$  的标准托卡马克, 有  $G_p = 0.05$ ; 对于  $\varepsilon = 1/1.25 = 0.8$  的 ST, 有  $G_p = 0.29$ 。与环向场的贡献相比, 这些值有限且很小。

综合这些结果可得如下  $\langle B^2 \rangle$  与  $B_0^2$  之间的简单关系:

$$\langle B^2 \rangle / B_0^2 \equiv G(\varepsilon) = G_\phi(\varepsilon) + G_p(\varepsilon) \quad (13.182)$$

对于标准值  $\kappa = 2$  和  $q_* = 1.8$ , 如果  $\varepsilon = 1/3$ , 则  $G = 1.2$ ; 如果  $\varepsilon = 0.8$ , 则  $G = 2.05$ 。注意到对于 ST, 最大稳定  $\beta$  预言值的变化可相差一倍多, 具体取决于定义中



采用的是  $\langle B^2 \rangle$  还是  $B_0^2$ , 选取后者对应较高的值。显然, 对于 ST,  $\beta$  的精确定义是一个重要问题。

当考虑聚变反应堆时, 合适的定义是  $\beta_E$ 。计算  $\beta_E$  需要完成推导的第二步, 即明确  $B_0$  和  $B_{\max}$  之间的关系。通过重新审视图 13.39 所示的托卡马克反应堆内侧的几何形态, 这一步很容易实现。因为环向磁场  $\beta_b \sim 1/R$ , 故立刻可知所需的关系为:

$$B_0 = (1 - \varepsilon_b - \varepsilon) B_{\max} \quad (13.183)$$

其中  $\varepsilon_b = b_i/R_0$ ,  $b_i$  是包层与屏蔽层的内侧厚度。

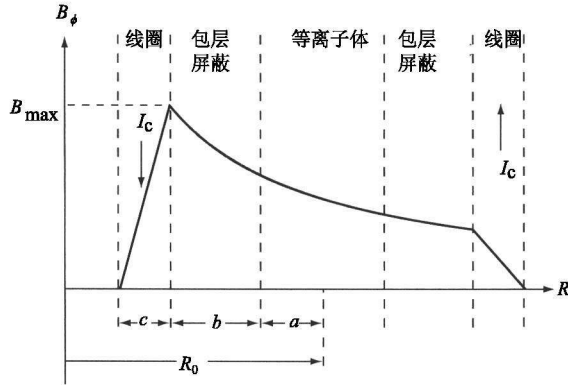


图 13.39 托卡马克反应堆的几何形态, 图中标出了  $B_{\max}$  的位置 (我们注意到, 在环向场线圈内侧  $B_\phi$  为零)

综合本小节的结果可得所需的最优化  $q_* = 1.8$  情形下  $\beta_E$  的表达式:

$$(\beta_E)_{\max} = 0.036(1 + \kappa^2) \varepsilon (1 - \varepsilon_b - \varepsilon)^2 G(\varepsilon) \quad (13.184)$$

较实际的参数——最大稳定压强——由下式给出:

$$\langle p \rangle = 0.14(1 + \kappa^2) \varepsilon (1 - \varepsilon_b - \varepsilon)^2 G(\varepsilon) B_{\max}^2 \quad (\text{atm}) \quad (13.185)$$

现在, 我们终于可以比较 ST 和标准托卡马克中的 (没有导体壁情形下的) 最大可实现压强了。标准托卡马克的参数为  $\kappa = 2$ ,  $\varepsilon = 2/5 = 0.4$ , 超导环向磁体的最大允许磁场  $B_{\max} = 13 \text{ T}$ 。内侧包层厚度  $b_i = 1.2 \text{ m}$ , 相当于  $\varepsilon_b = 1.2/5 = 0.24$ 。由这些值可得:

$$\langle p \rangle_{\max} = 7.7 \quad (\text{atm}) \quad (13.186)$$

这大概就是反应堆所需的值, 但是相应的参数分布不能产生足够的自举电流。

现在考虑假想的 ST 聚变反应堆, 典型参数值为  $\varepsilon = 0.8$ ,  $\kappa = 2$  和  $q_* = 1.8$ 。另

外,内侧包层的厚度可以忽略:  $\varepsilon_b = 0$ 。关键是设定最大环向磁场  $B_{\max} \approx 7.5 \text{ T}$ 。因为只有这样才能确保欧姆耗散足够低以实现可观的功率平衡。目前的实验都还是在远低于这一限定条件下运行的。由这些参数可得:

$$\langle p \rangle_{\max} = 2.6 \quad (\text{atm}) \quad (13.187)$$

尽管 ST 可实现较高的  $\beta$  值,但其最大压强较标准托卡马克显著要低,这是小环径比下强的  $1/R$  效应以及对  $B_{\max}$  的较低限制的综合结果。

圣迭戈加州大学的 ARIES 小组提出了一种更为综合和自洽的 ST 反应堆设计。设计中他们通过增加拉长比到  $\kappa = 3.4$  并使  $\langle \beta_N \rangle$  的值差不多翻番来改善等离子体性能。在这些参数下,  $n = 0$  的垂直不稳定性变得更难以稳定,且  $n = 1$  气球型电阻壁模被激发,需要反馈来稳定。另外,等离子体电流约为  $30 \text{ MA}$  (也就是  $q_* = 2.8$ ),为了尽可能减少对电流驱动方面的要求,所需的自举电流份额达  $f_B = 0.96$ ,尤其是在等离子体中心附近。有趣的是,ARIES 小组的研究表明,存在优化的倒环径比  $\varepsilon \approx (1.7)^{-1} = 0.59$ 。这个最优值是下述两种因素之间权衡的结果:一方面稳定性要求通过增大  $\varepsilon$  来增大  $\langle p \rangle$ ,另一方面,由于  $1/R$  效应,  $B_0$  的  $1 - \varepsilon$  函数关系要求减小  $\varepsilon$ 。结论是“ST 反应堆”的最优环径比实际上是在标准托卡马克和现有 ST 实验值之间。

最后,值得一提的是,根据 ARIES 小组的研究,ST 反应堆的发电成本 (Cost of Electricity, CoE) 预期与常规托卡马克的相同。但是 ST 需要在改进等离子体物理性能方面做出更大胆的假设,同时还需处理好中心柱方面复杂的工程技术问题。综上所述我们可以得出结论:从聚变反应堆建设角度看,与标准托卡马克相比,高  $\beta$  带来的 ST 的优势并不明显地更具吸引力。

### 3. ST 作为中子源

一种更能够发挥 ST 位形优势的应用是体中子源。这种设备的目标是产生测试先进聚变材料所需的高强度  $14.1 \text{ MeV}$  的中子流。源的体积不需要造得跟反应堆一样大,因为待测材料试样可以做得很小。因此核心问题不是追求可观的功率平衡,而是产生强中子流。

ST 的优势可作如下解释。与作为反应堆情形一样,采用 ST 作中子源省去了环内侧的包层和屏蔽。另外,环径比可以取得使中子产额达到最大化,也就是说,  $\varepsilon$  值可取得适中。将这些特点综合起来即可得出相对紧凑的设计,相应的成本也较低。但获得这些好处付出的代价是环向磁场在环内侧的  $B_{\max}$  极限较低。由于现在的问题主要不是实现总体功率平衡,因此也许更重要的是将欧姆加热功率维持在足够低的水平上 (即小于  $250 \text{ MW}$ ),这样才能使运行费用维持在合理的范围内。

综上所述,就低到中等通量范围的中子源而言,与标准托卡马克相比,ST 可能是一种成本更低的中子源。而要获得较高的中子通量,则标准托卡马克更加经济,

尽管产生的中子也许比需要的还多。下面的分析可以证明这些观点。这里有两个重要假设: ST 和标准托卡马克都运行在中等拉长比情形下 ( $\kappa \approx 2$ ); 它们的  $\beta$  值都低于无壁  $\beta_{\text{max}}$  极限。这些假设之所以成立是因为对 neutron 源的需求要远早于实际反应堆的建设, 所以为了谨慎起见, 中子源的研发设计无需在物理上追求高于现有装置性能水平的改善。

分析包括对 ST 和标准托卡马克的中子通量进行计算和比较两方面。在这两种情形下, 小半径  $a$  均选取为对于给定的大半径  $R_0$  使得中子通量  $P_w$  最大化, 这样最优  $P_w$  可以作为  $R_0$  的函数用图形表示出来。接下来, 我们很容易计算出包层、屏蔽和线圈所占的体积  $V$ , 并做出其对  $P_w$  的函数图。  $V$  这个量的作用是衡量建造成本。观察这条曲线即可定性地看出在哪些区域 ST 作为中子源要比标准托卡马克更加经济。

首先考虑中子通量的计算。中子源的几何尺寸如图 13.40 所示。根据第 5 章中的讨论, 穿过第一壁的中子功率的平均通量可以表示为:

$$P_w = \frac{E_n n^2 \langle \sigma v \rangle V_p}{4 A_p} \approx \left[ \frac{E_n \langle \sigma v(T_i) \rangle}{16 T_i^2} \right] \frac{V_p}{A_p} p^2 \quad (\text{W/m}^2) \quad (13.188)$$

这里,  $T_i = 15 \text{ keV}$ ;  $E_n = 14.1 \text{ MeV}$ ;  $V_p, A_p$  分别是等离子体的体积和表面积。式 (13.188) 表明, 穿过第一壁的中子功率通量等于每秒每立方米产生的中子能量乘以等离子体体积再除以等离子体的表面积。对于 ST 和标准托卡马克, 等离子体的体积和表面积分别为

$$\left. \begin{aligned} V_p &= \pi \kappa a^2 R_0 [ \pi - (\pi - 8/3) \varepsilon ] \\ A_p &\approx 2 \pi \kappa a R_0 [ \pi + 2 - (\pi - 2) \varepsilon ] \end{aligned} \right\} \quad (13.189)$$

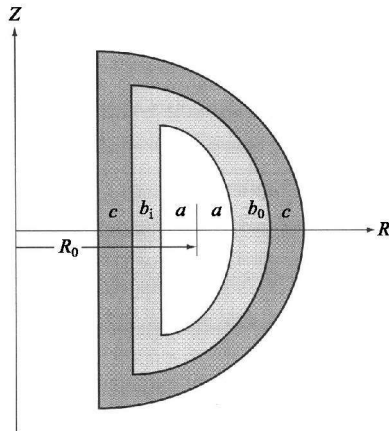


图 13.40 聚变中子源几何

就我们感兴趣的参数区域来说,第二个公式是个相当好的近似。现在将压强设定为式(13.185)给出的无壁情形下的最大值。经过简单计算可得下述对两种位形均适用的中子功率通量的表达式:

$$P_w = 4.29 \times 10^{-4} R_0 B_{\max}^2 (1 + \kappa^2)^2 H(\varepsilon) \quad (\text{MW/m}^2) \quad (13.190)$$

其中,

$$H(\varepsilon) = \frac{1 - 0.15\varepsilon}{1 - 0.22\varepsilon} G^2(\varepsilon) \varepsilon^3 (1 - \varepsilon_b - \varepsilon)^4 \quad (13.191)$$

函数  $H(\varepsilon)$  有一个最大值,此时中子功率通量最大。最优值  $\varepsilon$  对  $\varepsilon_b$  的函数曲线如图 13.41 所示。我们注意到,对于 ST( $\varepsilon_b = 0$ ),最佳环径比约为  $R_0/a \approx 2$ ;对于标准托卡马克,最佳环径比较大; $R_0/a > 2$ 。更实际的计算得到的环径比的值要小一些,但是对于当前目的来说,采用前面给出的简单估计就足够了。

将最优的  $\varepsilon$  代入式(13.190),我们得到中子功率通量与大半径  $R$  之间的关系式。对于 ST 和标准托卡马克,这个关系式图示在图 13.42 中,其中假设两种位形都有  $\kappa = 2$ ,且 ST 的  $B_{\max} = 7.5 \text{ T}$ ,标准托卡马克的  $B_{\max} = 13 \text{ T}$ 。对于标准托卡马克,  $b_i = 1.2 \text{ m}$ 。我们发现,如果大半径小于  $4.7 \text{ m}$ ,ST 产生的中子功率通量较大。高于这个值,则标准托卡马克产生的中子通量较大。在交点处有  $P_w \approx 2.3 \text{ MW/m}^2$ 。

我们感兴趣的最后一点是计算两种位形的包层、屏蔽和线圈所占的体积  $V$ ,从而探讨一下相对建造费用的问题。利用直观的几何模型可得  $V$  的表达式:

$$\left. \begin{aligned} V &= \pi^2 \{ w h \bar{R} - 2\kappa a^2 [R_0 - (1 - 8/3\pi)a] \} \\ w &= a + c + (b_i + b_o)/2 \\ h &= \kappa a + b_o + c \\ \bar{R} &= R_0 - a - b_i - c + (8/3\pi)w \end{aligned} \right\} \quad (13.192)$$

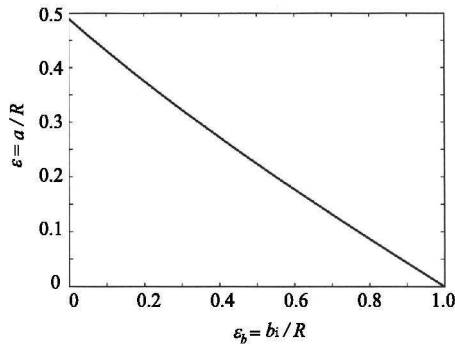


图 13.41 作为  $\varepsilon_b = b_i/R_0$  的函数的最优环径比  $\varepsilon$

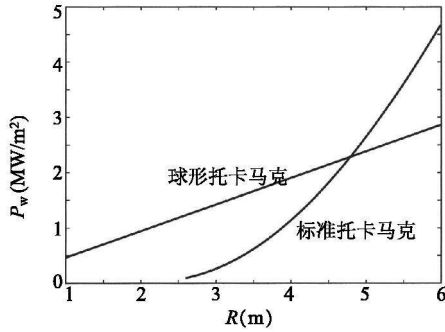


图 13.42 作为大半径  $R$  的函数的最大中子功率通量

其中,  $b_i$  和  $b_o$  分别是环内侧和外侧的包层及屏蔽层厚度。体积随中子功率通量的变化曲线如图 13.43 所示。跟预想的一样, ST 在中子功率通量适中时的体积比标准托卡马克小, 意味着费用低。

上述简化分析提供了 ST 在性能方面与标准托卡马克相比的定性特点。结论是: 作为中低中子功率通量水平的中子源, ST 较之标准托卡马克具有潜在的优势。

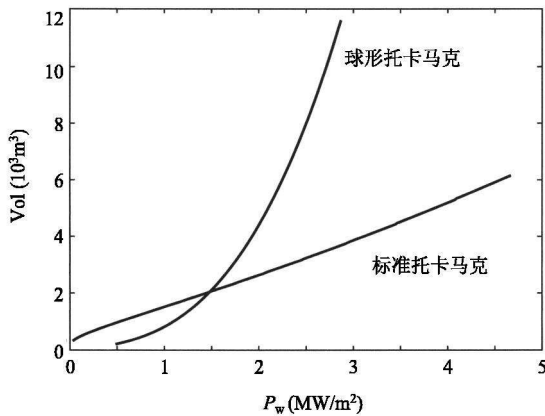


图 13.43 聚变中子源的包层、屏蔽和线圈所占的体积与中子功率通量的函数关系

### 13.7.7 托卡马克小结

托卡马克是目前有可能成为第一代聚变反应堆的首选方案, 这主要得益于它高品质的物理性能。具有截面拉长的非圆截面托卡马克能够在不需要理想导体壁的情形下稳定地约束反应堆级别的等离子体压强。其最大的物理缺陷是相应的压强分布不能产生足够大的自举电流, 从而使对外部电流驱动的需求降到足够低的水平, 以满足反应堆的经济性。

以中空电流分布和中空安全因子分布为特征的,能产生比例高得多的自举电流的先进托卡马克运行模式解决了这一困难。但是,这种性能的实现破坏了特鲁瓦永极限,通常导致  $n = 1$  气球型电阻壁模的激发,因此需要采用反馈系统来抑制  $n = 1$  模。尽管如此,AT托卡马克似乎仍是目前通向聚变反应堆的最有前途的途径。

最后,一种被称为球形托卡马克(ST)的更现代的位形作为聚变反应堆的一种可能选择方案被引入。ST本质上是环径比很小的托卡马克,其设计目的是为了借助  $\varepsilon \rightarrow 1$  来充分利用  $\beta \sim \varepsilon$  的磁流体力学稳定性定标关系。更详细的分析表明,尽管ST可实现较高的  $\beta$  值,但是相应的等离子体压强通常要比标准托卡马克低。因此从反应堆角度看,ST相比于标准托卡马克并不具有显著的优势,但它作为中低中子功率通量水平的体中子源可能更具吸引力。

## 13.8 仿星器

### 13.8.1 仿星器概述

仿星器是本章要讨论的最后一种主要磁约束聚变概念。它内在地就是一种三维结构,我们可以将这种结构看成弯曲成环的螺旋对称系统。产生仿星器磁场位形可以采用各种不同的线圈构造和布置方法,但最终所需的磁场只有3种:①相对较强的轴对称环向磁场  $B_\theta(r, \theta)$ ;②强度中等的螺旋形磁场,它具有  $l\theta - n\phi$  的对称性,绝大部分情形下是多个具有不同  $l$  或  $n$  的谐波分量的叠加;③一个较小的轴对称垂直磁场  $B_z(r, \theta)$ 。仿星器没有欧姆驱动或外部驱动的环向电流,这是它极为重要的一个优点。换句话说,在仿星器中流动的净的环向电流只可能是由自举效应自然产生的。

从物理性能的观点来看,仿星器是一种与托卡马克最为相近的磁约束聚变概念。二者相对较强的环向磁场均可以有效地稳定约束适度大小的等离子体压强(对应的  $\beta \sim 0.05$ )。仿星器在实现这种性能指标时无需理想导体壁,因此可以预期,电阻性壁模在仿星器上并不重要。

环形系统里螺旋场与垂直场的组合拥有非常有利的平均曲率,并且可以提供大于1的安全因子。这些磁场对于单粒子约束也是至关重要的。具体到仿星器,由于这种位形的三维本质,如果仿星器的磁场设计得不好,就可能导致粒子由于纯粹的经典机制而迅速损失,其损失速度甚至可能超过微观湍流驱动的反常输运水平。这种快速经典损失之所以会发生,是因为蹩脚的仿星器磁场形成了损失锥,并使粒子运动大大偏离磁面。经过多年的研究,仿星器研究者们已经知道怎样将这些磁场位形驱动的粒子损失减小到最小,避免其支配输运。

在物理设计策略方面,存在两种优化仿星器位形下多自由度的基本方法。第一

种方法着眼于优化磁流体力学平衡和稳定性能;第二种方法重在优化单粒子约束。此外,由于三维结构分析的难度,直到20世纪90年代后期,用于上述这两种优化方法的理论和计算工具才成熟起来。对三维仿星器物理理解的加深使人们在提高仿星器实验性能的道路上取得了坚实的进步。现在,仿星器实验获得的最高 $\beta$ 和 $\tau_E$ 已经接近——有时候甚至可以媲美——相似尺寸的托卡马克。这确实是非常了不起的成就。

现在我们来考虑仿星器作为聚变反应堆的优点与缺点。与标准托卡马克相比,仿星器有两个主要优点。首先,由于无需欧姆感应或其他电流驱动手段,它是自然的稳态运行装置;其次,由于环向流动的电流很小甚至完全没有,因此激发大破裂的可能性大大减轻。这两个优势无疑是令人向往的。

相较于托卡马克,仿星器有一个最主要的缺点。正如前述,产生仿星器磁场所需的线圈系统的技术复杂程度要远远高于托卡马克线圈系统,因此建造成本大大增加,同时还会使可达到的最大磁场强度受到更严格的限制。最后,这个缺点必须与托卡马克所面临的如何在先进运行模式下克服电流驱动和大破裂等问题的难度进行权衡。

本小节讨论的主要目的是认清仿星器分析在数学上的复杂性,这是由其三维的几何本性决定的。由于这一分析已经超出了本书的范围,因此后面我们将不再讨论。我们将转向描述三个当前正在研究的最大的仿星器项目。它们是:①日本国家聚变研究所(NIFS)的大型螺旋装置(LHD);②德国马克斯·普朗克等离子体物理研究所的W7-X;③美国普林斯顿等离子体物理实验室(PPPL)的国家级紧凑型仿星器实验(NSCX)装置。这其中,只有LHD已经建设完成并运行。

我们的目的是要了解这些装置并弄懂这些设计背后的动机与理念。必要时,我们还将简要地引用一些实验结果或通过数值计算得到的理论预期结果。

### 13.8.2 大型螺旋装置(LHD)

LHD是由日本建造并运行的十亿美元级仿星器实验装置。LHD装置的磁体结构属于一种特殊的仿星器形式,称作螺旋器(heliotron)。具体来说,它的磁体系统由两组连续的、互相环绕的螺旋-环形线圈加上一组轴对称的垂直场线圈组成,如图13.44所示。螺旋-环形线圈提供环向磁场和螺旋磁场。该线圈还产生很大的垂直磁场,不过其大部分被外部垂直场线圈产生的磁场所抵消,只保留一个较小并可调节的净垂直磁场以优化物理性能。

LHD的螺旋环形线圈是由超导材料制成的,并且由于拓扑结构的限制只能在现场绕制。不言而喻,LHD螺旋环形线圈的设计与建造代表了当今工程技术上的非凡成就。尽管连续的线圈在LHD上运行良好,但是大多数人认为,一旦将这种仿星器设计外推至反应堆级别,则这种形式的线圈并不代表着最佳的设计途径。现场

绕制线圈的制约加上相应的维护难度以及替换线圈的高昂成本等,意味着我们有必要考虑另一种备选方案。这种备选方案涉及模块化的线圈设计,将在后面 W7-X 和 NSCX 小节里简要介绍。

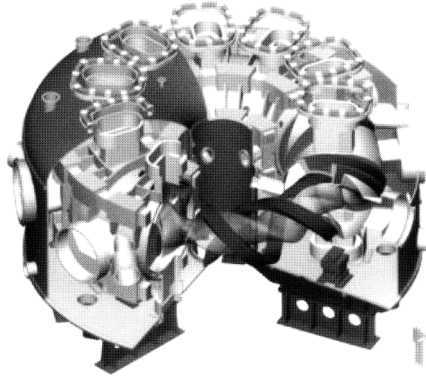


图 13.44 日本的 LHD 仿星器装置示意图(承蒙 A. Komori 提供)

现在我们考虑建造 LHD 背后的物理动机。LHD 设计之初,当今可以利用的许多先进的三维计算工具还不存在,一些与单粒子约束相关的细节当时也尚未完全认识清楚。因此,LHD 设计团队利用当时能够获取到的最佳信息,将结构优化设计的目标确定为磁流体力学平衡和稳定性能的最大化而不是单粒子约束性能优先。另一个更深层次的复杂因素是,当时能够对危险的外扭曲模进行稳定性测试的三维宏观磁流体力学计算代码尚未成熟到可以作为日常的设计工具来使用的程度,计算的精度以及运算时间是主要问题。为此设计团队将针对一类较易用数值方法进行测试的局域内部磁流体力学模(也就是基本的交换模)来最大化  $\beta$  作为目标进行几何优化。这些考虑构成了决定线圈设计、诊断设备位置以及 LHD 标准运行模式的基础。

现在,LHD 已经运行,读者可能会问“LHD 运行得怎么样?”应当说,该装置早期的运行结果达到了可以接受的性能,但并没有如最初预期的那样好。在设计与建造阶段,人们对仿星器物理解进一步加深,发现针对局域模的磁流体力学稳定性问题可能并非最严峻的。这些模式要么没有被激发,要么即使被激发也早在一个较低并且无害的水平上就已经饱和,反之,单粒子约束性能差很可能成为更为严重的问题。幸好,对装置的运行进行一些相对较小的调整后性能得到了显著提升。具体的调整包括:重新编制线圈电流的运行程序,以便将等离子体相对于最初的运行模式进一步向里偏移。这个偏移极大地提高了单粒子约束的质量。

表 13.2 概括了到 2004 年为止 LHD 最佳的表现。表中所列的参数是在一些不同类型的优化放电中得到的,其中一种放电模式是最大化  $T_e$ ,一种是最大化  $T_i$ ,第三种是最大化  $\tau_E$ 。列出的还有  $p_i \tau_E$ ,  $\beta$  和  $n_e$  等参数所达到的最大值。这些值与相



似尺寸的托卡马克装置上能达到的值可比或者稍微偏小。仿星器自然的稳态性质也得到了体现。仿星器无需电流驱动的特点再加上超导线圈的应用,允许 LHD 的放电持续数百秒钟。

表 13.2 电子温度、离子温度和能量约束时间取最大值条件下的 LHD 优化放电的实验参数  
(表中一并列出了已取得的  $p\tau_E$ ,  $\beta$  和  $n_e$  的最大值)

	$T_e/\text{keV}$	$T_i/\text{keV}$	$\tau_E/\text{s}$	$P_{\text{aux}}/\text{MW}$	$n_e/\text{m}^{-3}$
$T_e$ 最大值	10.0	2.0	0.06	1.2	$5.0 \times 10^{18}$
$T_i$ 最大值	4.2	7.0	0.06	3.1	$2.9 \times 10^{18}$
$\tau_E$ 最大值	1.3	1.3	0.36	1.5	$4.8 \times 10^{19}$
$p_i\tau_E$ 最大值	0.035 atm s				
$\beta$ 最大值	0.032 $B_\phi = 0.5 \text{ T}$				
$n_e$ 最大值	$1.6 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$				

LHD 未来的研究活动将包括各种各样的装置升级,尤其是辅助加热源方面的改造,以便能够在更高的密度和温度下实现更长时间的放电。在相当好的单粒子约束的基础上,物理目标将放在现有微观湍流驱动的反常运输的条件下实现能量约束时间的最大化,并且测定可达到的磁流体力学宏观稳定的最大  $\beta$ 。

### 13.8.3 仿星器里的粒子导心轨道

另外两个仿星器, W7-X 和 NCSX, 尚未完全建造完成(截至 2004 年)。W7-X 正在建造当中,而 NCSX 则即将完成工程设计,建造工作应该于近期开始。这些装置最主要的物理目标都集中在通过提高单粒子约束来使性能最优化,第二目标则是磁流体力学平衡和稳定性。然而,两个装置为达到这些目标而采用的战略却大为不同。

为领会各个装置背后的动机,我们必须理解三维空间中导心轨道的行为。这需要做一些稍显复杂和抽象但对于理解仿星器仍属非常基本的分析。本小节总结了三维导心行为的基本特征,对详细分析感兴趣的读者可以阅读本书附录 C。

分析的基本目的是要证明,在任意给定的磁面上,沿某一轨道运动的粒子的导心行为只与磁场的大小( $B = |\mathbf{B}|$ )有关,而与其矢量性质无关。这绝不是一个显然的结论,但一旦确立,它就能为创造各种优化仿星器中单粒子约束的方法提供基础。W7-X 和 NCSX 所展示的两种方法将在下一小节里进行讨论。

理解三维空间中的导心行为包括两个步骤。第一,必须引入一个合适的坐标系,以便自动将磁流体力学平衡方程所需的若干约束条件考虑进来;第二,用这些坐标来表示导心轨道的一般表达式,从而得出我们想要的结论,即任意磁面上的轨道只与  $B$  有关。这些步骤概括如下。

#### 1. 仿星器坐标系

在第 8 章里,我们导出了粒子导心在一般三维空间中的运动方程,回顾这一推

导过程有助于我们理解目前要讲述的基本问题。对于稳态平衡,导心轨道可以写作  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_g(t) + v_{\parallel}(t)\mathbf{b}$ , 其中  $\mathbf{r}_g(t)$  表示垂直漂移(即磁场梯度漂移和曲率漂移), 而  $v_{\parallel}(t)$  表示平行运动。为方便起见, 这里重写确定  $\mathbf{r}_g(t)$  和沿磁场线的位置  $l(t)$  (对于带正电荷的粒子) 的方程(对于带正电荷的粒子)<sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_g}{dt} &= \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_c} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B} \\ \frac{dl}{dt} &= v_{\parallel} \end{aligned} \right\} \quad (13.193)$$

乍看起来, 由于矢量  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{R}_c$  的出现, 似乎意味着导心轨道依赖于磁场的矢量性质。但并不必然如此, 可以说明这一点的一个简单例子是带电粒子在磁场  $\mathbf{B} = B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z$  中的运动, 这里  $B_y$  和  $B_z$  是常量。描述轨道的方程是:

$$\left. \begin{aligned} m \dot{v}_x &= e(v_y B_z - v_z B_y) \\ m \dot{v}_y &= -e v_x B_z \\ m \dot{v}_z &= e v_x B_y \end{aligned} \right\} \quad (13.194)$$

表面上看, 这个问题的解似乎依赖于磁场的矢量性质, 因为  $B_y$  和  $B_z$  分别存在于运动方程中。然而, 只要引入一组“聪明的”变量  $v_n = v_x$ ,  $v_t = (v_y B_z - v_z B_y)/B$  以及  $v_{\parallel} = (v_y B_y + v_z B_z)/B$ , 这里  $B = (B_y^2 + B_z^2)^{1/2}$ , 方程组就可以化简为:

$$\left. \begin{aligned} m \dot{v}_n &= e B v_t \\ m \dot{v}_t &= -e B v_n \\ m \dot{v}_{\parallel} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.195)$$

我们看到, 在新的坐标下, 轨道仅仅依赖于单个的量  $B$ , 而不是分开的矢量分量  $B_y$ ,  $B_z$ 。对一般三维磁场的相应分析尽管看起来复杂但其分析思路是相同的。

我们从恰当地引入一组“聪明的”变量来开始三维分析。作为解题的第一步, 不妨想象已经得到磁流体力学方程的一个数值解,  $B = B(r, \theta, \phi)$  和  $p = p(r, \theta, \phi)$ 。原则上, 导心轨道可以通过如下方式将  $\mathbf{r}_g$  和  $l$  与  $r, \theta, \phi$  联系起来求得。令  $\mathbf{r}$  的两个等价的表达式相等:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_g + l\mathbf{b} = r\mathbf{e}_r + r\theta\mathbf{e}_{\theta} + (R_0 + r\cos\theta)\phi\mathbf{e}_{\phi}$ , 然后将表达式代入式(13.193)求解  $r(t)$ ,  $\theta(t)$  和  $\phi(t)$ 。虽然直觉上使用  $r, \theta, \phi$  明显是一种定义导心位置的方法, 但这些坐标不具备显示轨道仅仅依赖于  $B$  的属性。

1) 实际上, 在第8章中  $l(t)$  方程有一个一阶修正并未计算, 但对于完整地处理三维的导心运动, 这一修正是必需的。而就目前分析的需要来说, 这个修正不是必要的。

我们要求的坐标更为抽象,定义如下。通常需要 3 个坐标来确定导心的位置,但这里不是用  $r, \theta, \phi$  坐标,而是引入等效的以  $\psi, \chi, \zeta$  标记的“磁面”坐标。这里,在  $2\pi$  范围内,  $\psi$  表示  $p$  为常量的等磁通面内包含的极向磁通,它基本上是一个类似于径向坐标的磁面函数坐标,表征导心所在位置的磁面。顺便说一句,对于托卡马克来说,使用  $\psi$  来标记磁面比使用  $p$  更加方便。但由于  $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$  意味着  $p = p(\psi)$ ,  $\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0$ , 因此,  $p$  和  $\psi$  是等价的并且都是正确的标记。接下来,量  $\chi$  是一个类似于极角  $\theta$  的角坐标,  $\theta$  每增加  $2\pi$  的值  $\chi$  也增加  $2\pi$ 。通常,它受到环向角和极向角叠加的周期性调制。类似地,  $\zeta$  则是一个类似于环向角  $\phi$  度的角坐标,  $\phi$  每增加  $2\pi$  它的值也增加  $2\pi$ 。它也同时受到环向与极向的周期性调制。概括起来,抽象的  $\psi, \chi, \zeta$  坐标与更为熟悉的  $r, \theta, \phi$  坐标之间的一般关系可以写作:

$$\left. \begin{aligned} \psi(r, \theta, \phi) &= \psi_0(r) + \sum_{l,n} \psi_{ln}(r) e^{i(l\theta + n\phi)} \\ \chi(r, \theta, \phi) &= \theta + \sum_{l,n} \theta_{ln}(r) e^{i(l\theta + n\phi)} \\ \zeta(r, \theta, \phi) &= -\phi + \sum_{l,n} \phi_{ln}(r) e^{i(l\theta + n\phi)} \end{aligned} \right\} \quad (13.196)$$

$\phi$  前的负号用于保证  $\psi, \chi, \zeta$  坐标构成右手坐标系,很清楚,两种坐标系都可以有效地描述导心的位置。

在这一点上,系数  $\psi_{ln}, \theta_{ln}, \phi_{ln}$  是可以任意选择的。布泽(A. H. Boozer)为这些系数给出了一种特别聪明的选择。他证明了,总可以找到一组  $\psi_{ln}, \theta_{ln}, \phi_{ln}$ , 使得磁场可以表示为如下两种可相互替换的等价形式:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \zeta \times \nabla \psi + q(\psi) \nabla \psi \times \nabla \chi \\ \mathbf{B} &= i_l(\psi) \nabla \chi + i_p(\psi) \nabla \zeta + \tilde{i}(\psi, \chi, \phi) \nabla \psi \end{aligned} \right\} \quad (13.197)$$

这些表达式中,  $\psi = \Psi_p/2\pi$ , 这里  $\Psi_p$  是极向磁通。物理量  $q(\psi)$  是安全因子。同样,  $i_l(\psi) = (\mu_0/2\pi)I_l(\psi)$ ,  $i_p(\psi) = (\mu_0/2\pi)I_p(\psi)$ , 这里  $I_l(\psi)$  是环向等离子体电流, 而  $I_p(\psi)$  是线圈内的和等离子体的极向总电流。最后,  $\tilde{i}(\psi, \chi, \phi)$  是一个在任意  $\chi$  或  $\zeta$  的  $2\pi$  周期内平均值为零的任意函数。磁场这两种等价形式的存在性的证明完全不是那么显而易见的,需要一些高级的分析。感兴趣的读者可参阅附录 C 了解详情。式(13.197)给出的两种坐标表达式对于理解仿星器是非常重要的,被称作“布泽坐标”。

现在假设存在一组布泽坐标。于是人们会问,这种双重表示有何价值? 用一种形式点乘另一种形式我们就能找到答案。简单计算得到:

$$\nabla \psi \cdot (\nabla \chi \times \nabla \zeta) = \frac{B^2}{i_t + q i_p} = f(\psi) B^2 \quad (13.198)$$

量  $\nabla \psi \cdot (\nabla \chi \times \nabla \zeta)$  表示从  $\psi, \chi, \zeta$  坐标转换到  $r, \theta, \phi$  坐标的雅可比行列式  $J$ 。所以,布泽坐标的优点在于雅可比行列式仅仅依赖于  $\psi$  和  $B = B(\psi, \chi, \zeta)$ 。它不依赖于任何给定磁面上磁场的矢量性质,因为没有出现任何单独的矢量分量。这对于简化下述的导心轨道非常关键。

## 2. 布泽坐标系下的导心轨道

现在的目标是确定给定粒子沿着其导心轨道运动时  $\psi, \chi, \zeta$  坐标随时间的演化。基本运动方程是:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \psi \\ \frac{d\chi}{dt} &= \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \chi \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \zeta \end{aligned} \right\} \quad (13.199)$$

稳态下,  $\partial/\partial t = 0$ 。而且,要让粒子沿着导心轨道移动,方向导数必须具有  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_g + v_{\parallel} \mathbf{b}$  这样的形式。所以,导心轨道方程可以简化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= (\mathbf{r}_g + v_{\parallel} \mathbf{b}) \cdot \nabla \psi \\ \frac{d\chi}{dt} &= (\mathbf{r}_g + v_{\parallel} \mathbf{b}) \cdot \nabla \chi \\ \frac{d\zeta}{dt} &= (\mathbf{r}_g + v_{\parallel} \mathbf{b}) \cdot \nabla \zeta \end{aligned} \right\} \quad (13.200)$$

需要注意的一点是,这三个方程中,确定  $d\psi/dt$  的方程是最重要的。这个方程描述粒子的导心运动是如何导致横越磁面的漂移的。这种运动如果是单向的,就会导致粒子直接从等离子体中漂移到壁(就像损失锥的情形那样)。即使在其他情形下,它也会通过增强扩散导致粒子的快速损失(也就是新经典输运),这将在下一章中讨论。导心  $\chi, \zeta$  位置的改变则不是那么重要,因为这些改变只代表磁面内的运动,并不是粒子径向损失的直接原因。基于这些讨论,并且考虑到  $\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0$ ,接下来需要检验的关键方程是:

$$\frac{d\psi}{dt} = \mathbf{r}_g \cdot \nabla \psi \quad (13.201)$$

其中  $r_g$  由式(13.193)给出。

附录 C 中给出的一个简单的计算说明,式(13.201)可以写作:

$$\frac{d\psi}{dt} = \left[ \frac{2E - \mu B}{eB} \right] \left[ \frac{i_i}{i_i + q i_p} \frac{\partial B}{\partial \zeta} - \frac{i_p}{i_i + q i_p} \frac{\partial B}{\partial \chi} \right] \quad (13.202)$$

这里  $E = (m/2)(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)$  和  $\mu = mv_{\perp}^2/2B$  都是运动常量,或者说,在式(13.202)中,它们都是关于时间微商的常数。

$d\psi/dt$  方程的关键特征是它的右边仅仅依赖于磁通  $\psi$  和磁场的大小  $B$ ,而与磁场的矢量性质无关。 $d\chi/dt$  和  $d\zeta/dt$  方程也有相似的结论。下一代仿星器实验的优化设计中用的正是这一特征。

优化的仿星器基于“准对称”的想法,这是一种能够内在地提供优良的单粒子约束性能的属性。准对称可定性描述如下。仿星器的磁场通常是一个复杂的三维空间矢量函数:  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\psi, \chi, \zeta)$ 。通过精心选择组成总磁场的各螺旋谐波分量的大小和相位,就可以形成这样一种位形,其中磁场  $\mathbf{B}$  的各矢量分量能够以某种特定方式结合,使得  $B = |\mathbf{B}(\psi, \chi, \zeta)|$  近似于二维函数。具有这种近似二维性质的位形被称为具有准对称性。三种可能的准对称位形分别是准环向对称位形  $B \approx B(\psi, \chi)$ , 准极向对称位形  $B \approx B(\psi, \zeta)$  以及准螺旋对称位形  $B \approx B(\psi, l\chi - n\zeta)$ 。准对称性有助于提高单粒子约束性能的原因是这种位形具有两个运动守恒量,即能量守恒和与对称性方向关联的正则动量守恒。可以证明,存在守恒的正则动量,就一定存在相应的约束轨道。反之,在一个完全三维的结构里,如果不存在守恒的正则动量,则不能保证轨道一定被约束。

实际上,优化的准对称设计要求同时满足两个条件。首先是要求磁场位形尽可能接近准对称,这样就能让粒子不至于漂移磁面太远,并且不存在损失锥;其次是要求当  $B(\psi, \chi, \zeta)$  变换回实用的  $r, \theta, \phi$  几何空间后,产生的磁场必须能够从物理上实现,并且能够由一组技术上可行的磁体产生。接下来的两小节我们将结合这些考虑来讨论 W7-X 和 NCSX 的不同的设计思想。

### 13.8.4 Wendelstein 7-X (W7-X)<sup>1)</sup>

W7-X 是一个造价十亿美元级别的装置,目前正在德国马克斯·普朗克等离子体物理研究所建造。它采用模块化的超导线圈,所以应该能够实现长脉冲运行。W7-X 的原理图如图 13.45 所示,从中可以看出各个线圈模块的技术复杂程度。

1) Wendelstein 系德文词,意为“螺旋器”。——译者

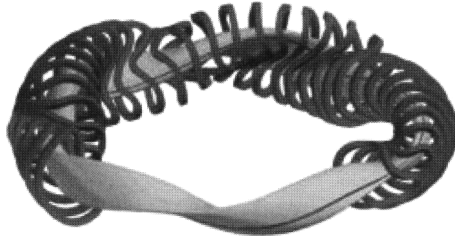


图 13.45 德国 W7-X 装置原理图

W7-X 的设计基于准极向对称的概念 [ $B = B(\psi, \zeta)$ ], 这一概念的可行性最先是由较小的螺旋型先进仿星器 (W-AS) 上的实验结果得到证明的。定性地说, 准极向对称与简单直线磁镜装置 [ 它的磁场为  $B = B(r, z)$  ] 有一些相似之处。它的磁场在极向角度上没有变化, 并且没有平行于磁场流动的电流。同样, 粒子在磁场的两个极大值之间被俘获。终端损失的问题则通过将一系列串联在一起的磁镜弯曲成一个环形而得以解决。所以, 粒子离开某一个磁镜单元的终端就马上流入邻近的磁镜单元。

然而, W7-X 的实际结构要比这种简单图像复杂得多。它的磁场必须设计成能够在没有任何外驱动平行电流的条件下实现环向力的平衡。同样, 截面形状的细节也非常重要, 因为业已证明, 简单磁镜具有不利的平均曲率 (见 12.3.2 节), 会导致磁流体力学不稳定性。所以, W7-X 设计的目标是要形成一个没有外驱动平行电流但具有好的平均曲率的准极向位形。

现在, 我们来更具体地讨论如何实现无平行电流这一目标。让平行电流最小化的目的是为了提高单粒子约束对于等离子体压强变化的鲁棒性。通常来说, 仿星器中的平行电流有两个主要贡献来源, 这可以从下面简单推出的表达式中看出:

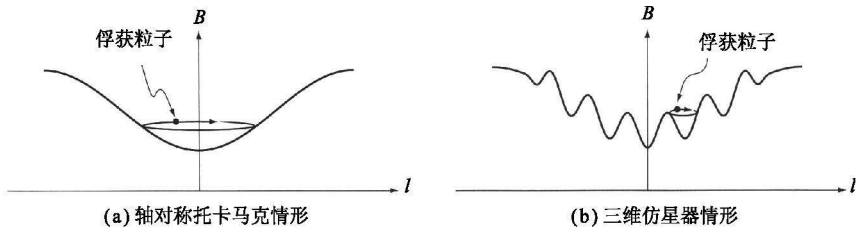
$$\mu_0 \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}}{B^2} = \mu_0 \frac{J_{\parallel}}{B} = \frac{1}{i_i + q i_p} \left[ \left[ i_p \frac{di_i}{d\psi} - i_i \frac{di_p}{d\psi} \right] + \left[ i_i \frac{\partial i_i}{\partial \zeta} - i_p \frac{\partial i_i}{\partial \chi} \right] \right] \quad (13.203)$$

第一项包含自举效应 (在第 14 章介绍) 产生的净的环向电流, 它正比于  $dp/d\psi$ 。第二项包含类似于偶极项的贡献, 可以证明, 它正比于  $(dp/d\psi) \cos\theta$ 。这一项是因等离子体为满足环向力平衡而出现位移产生的, 通常称为普费尔施-施吕特 (Pfirsch-Schluter) 电流。我们看到, 通过在设计过程中将  $J_{\parallel}$  最小化, 总磁场 (外加磁场与感生磁场之和) 对压强分布改变的灵敏度变得最小。换句话说, 如果一个装置在较低  $\beta$  拥有不错的单粒子约束性能, 那么当  $\beta$  提高时这种性能会继续保持。

接下来, 考虑布泽坐标系下准极向对称的原理, 并具体说明为什么这一原理有助于使粒子漂离磁面变得最小。在最简单的水平上, 检视式 (13.202) 可以知道, 选择  $B = B(\psi)$  或许是理想的, 因为这种位形的性质就像直的一维圆柱, 即都没有粒子漂离磁面。但不幸的是, 这种性质在环形位形下物理上是无法实现的, 因为环形

位形起码是一种二维结构。于是, W7-X 小组将目标集中在准极向概念  $B = B(\psi, \zeta)$  上。尽管如此, 精确的准极向结构在几何上也是不可能的。因此, 在确保单粒子约束这一基本思路不变的前提下, W7-X 小组主要是要解决如何针对那些相对于磁面可能发生最大偏移的最危险的一类粒子来尽可能实现位形上的准极向对称性。这种准极向对称位形一旦实现, 这类粒子将转变为俘获粒子, 由此 W7-X 小组即可以通过其设计来实现使这些粒子的损失最小化。

俘获粒子的产生是因为在环形几何下  $\nabla_{\parallel} B \neq 0$ 。图 13.46 描述了  $B$  关于  $l$  (这里  $l$  是沿磁场线的距离) 的典型分布。图 13.46(a) 表示的是轴对称托卡马克的分布, 图 13.46(b) 表示的是仿星器或者具有环向纹波(由于空间分离的环向磁场线圈的数量有限所致)的托卡马克的分布。 $v_{\parallel}$  较小的粒子在  $B$  的极小区域被俘获。



注意: 仿星器中可能存在多个极小值

图 13.46  $B$  关于  $l$  的函数曲线

为了理解俘获粒子的行为, 有必要对极小点附近的  $B(\psi, \chi, \zeta)$  进行分析。简单的计算说明, 这样的极小点在下式成立时出现:

$$\nabla_{\parallel} B = b \cdot \nabla B = \frac{J}{B} \left( \frac{\partial B}{\partial \chi} + q \frac{\partial B}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad (13.204)$$

接下来考虑深度俘获的粒子, 它的  $v_{\parallel} \approx 0$ 。在环形位形下, 这种粒子通常不可能一直被约束在某个磁面的狭窄区域中, 因为由于  $B_{\phi}$  的  $1/R$  依赖关系,  $\nabla B$  漂移只有纯垂直分量, 因此通常不能在等离子体的顶部和底部被抵消(因为粒子只能沿磁场线走一小段)。

$B_{\max}$  附近的  $B$  的几何形态的变化决定了粒子是否会漂离磁面。这种几何变化正比于  $\nabla_{\perp} B$  在磁面上的分量, 但却垂直于磁场线:

$$\frac{d\psi}{dt} \sim \nabla_{\perp} B = \frac{1}{|\nabla \psi|} (\psi \times b) \cdot \nabla B = -\frac{J}{B |\nabla \psi|} \left[ i_p \frac{\partial B}{\partial \chi} - i_t \frac{\partial B}{\partial \zeta} \right] \quad (13.205)$$

如图 13.47 所示, 位于  $\nabla_{\perp} B \neq 0$  处的深度俘获粒子并不环绕原点运动而是漂移出等离子体。即使粒子并未损失, 但它相对磁面的偏离很可能非常大, 从而导致大的扩

散损失。尽管任一时刻俘获粒子的快速损失比例可能较小,但它们的数量却由于速度空间中非俘获粒子的库仑碰撞而不断得到补充。换句话说,俘获粒子常常代表着等离子体中最快的粒子和能量损失通道。W7-X 的设计目标是将极小点(此处  $\nabla_{\parallel} B = 0$ )附近的  $\nabla_{\perp} B$  漂移最小化。从某种程度上说,深度俘获粒子不离开磁面而是保持良好的约束是可能的。换句话说,在 W7-X 的设计中,准极向对称属性  $\partial B / \partial X = 0$  集中表现在极小  $B$  场区域,这些区域中  $\partial B / \partial \zeta = 0$ 。

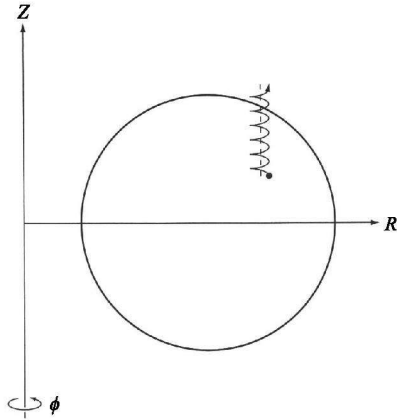


图 13.47 深度俘获的粒子  $\nabla_{\perp} B$  漂移导致它直接漂移出等离子体

W7-X 的设计考虑了所有粒子的轨道,而不只是深度俘获粒子轨道。实际上,只要深度俘获粒子能被良好地约束,其余粒子偏离磁面的漂移也都能小到可以接受的程度。因此,W7-X 的几何结构通过优化在磁场极小点(同时有最小  $J_{\parallel}$ )处实现了准极向对称。更深入的研究表明,在环径比相对较大的时候( $R_0/a \approx 10.6$ )能够得到优化的设计方案。定性上说,在磁场线的某一位置  $\nabla_{\perp} B$  和  $\nabla_{\parallel} B$  同时为零意味着局域来讲磁场线在这些位置是“直”的。所以,从单粒子约束的观点来看,W7-X 可以看作一系列沿环向串结起来的磁镜,每个磁镜在其磁场极小点附近是“柱对称”的。

W7-X 完工并且运行以后,将检验三维几何下等离子体约束的重要理论。基于三维分析上的巨大进步以及 W-AS 的实验结果,W7-X 小组期待实验能够取得圆满成功。

### 13.8.5 国家紧凑型仿星器 (NCSX)

NCSX 代表了在三维空间中实现高质量单粒子约束性能的不同途径。它的设计基于下述准环向对称概念。目前实验装置刚刚完成了设计阶段,预期建造工作将很快在美国普林斯顿等离子体物理实验室开始。它是一个新颖的实验装置,在紧凑的几何空间里使用模块化的铜线圈。图 13.48 是 NCSX 的一张图片。与 W7-X 一



样,线圈模块从技术上是非常复杂的。整个实验的耗资估计将在一亿美元量级。

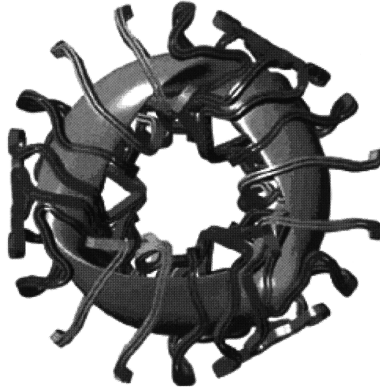


图 13.48 美国 NCSX 的示意图(承蒙 A. R. DeMeo 提供)

从磁流体力学的观点来看,NCSX 可视为仿星器和托卡马克的混合体。与 W7-X 不同,NCSX 的位形允许存在——事实上它需要——很大的净的环向等离子体电流,用以产生类似于托卡马克所具有的良好磁流体力学性质、输运性质以及技术特性。这个环向电流是由自举效应自然产生的,因而不需要外部的电流驱动。由这个净电流产生的典型的磁场线转动变换可以与螺旋磁场产生的转动变换相比,但总是小于后者。这是为了避免让整个结构对压强分布(它决定了自举电流的分布)过度敏感。最重要的是,这个环向电流也最终导致了一种更加紧凑的设计, $R/a \sim 4$ 。人们期望,按这种紧凑设计外推得到的反应堆能够具有较小的单元体积(即较低的总功率输出),这意味着较低的成本(尽管不一定是较低的每瓦成本)。与欧洲和日本不同,美国通常认为紧凑性是一个更为重要的问题。

NCSX 设计背后最核心的概念就是准环向对称。这个概念提供了固有的优秀单粒子约束性能。定性地说,准环向对称位形  $[B = B(\psi, \chi)]$  与轴对称托卡马克  $[B = B(r, \theta)]$  有某些相似之处。就像在一个轴对称的环中运动一样,粒子的垂直  $\nabla B$  漂移在横截面的顶端和底端相互抵消。同样,等离子体中流动着真实的环向电流,在没有导体壁、有限  $\beta$  的条件下也可以拥有良好的磁流体力学稳定性。

接下来我们要更深入探究这种准轴对称性是怎样导致良好的单粒子约束的。让我们再次将注意力集中在俘获粒子上,它们是最容易从等离子体中快速损失的。为了比较,我们不妨先回想一下 W7-X 的设计思想:设计的磁场  $B$  应使得深度俘获粒子不会漂移出磁面;同时当  $\nabla_{\parallel} B = 0$  时有  $\nabla_{\perp} B = 0$ 。在  $\nabla_{\perp} B \neq 0$  的地方,粒子将在局部  $B$  极小的任意极向位置被俘获,并且直接漂移出等离子体,因为垂直的  $\nabla B$  漂移通常在等离子体的顶部和底部不会抵消。

类似地,具有准环向对称性的 NCSX 也不允许深度俘获粒子漂移出磁面。这可由

导心轨道的布泽表达式直接推出。准环向对称等价于要求在所有位置上有  $\partial B / \partial \zeta = 0$ , 所以  $B$  的极小点, 即深度俘获粒子的位置, 由满足下列条件的角度  $\chi$  确定:

$$\nabla_{\parallel} B = \frac{J}{B} \frac{\partial B}{\partial \chi} = 0 \quad (13.206)$$

由于准环向对称性, 式(13.206)也意味着偏离磁面的垂直漂移在下面这一点为零:

$$\nabla_{\perp} B = \frac{J_{\perp}}{B |\nabla \psi|} \frac{\partial B}{\partial \chi} = 0 \quad (13.207)$$

深度俘获的粒子在准环向对称的结构里不可能直接损失。

有趣的是, 准环向对称性还保证中等或者弱俘获粒子的垂直漂移总能够在等离子体的顶部和底部抵消。图 13.49 通过画出  $B-\chi$  曲线在极向平面上的投影说明了这一点。关键的一点是, 由于具有类似于托卡马克的对称性,  $B$  极小点只有一个并且出现在环的外侧(即  $\chi = \theta = 0$  的位置)。因此, 所有俘获粒子的轨道具有上下对称性, 如图 13.49 所示, 导致垂直的  $\nabla B$  漂移在等离子体顶部和底部精确地抵消。结论是准轴对称不允许俘获粒子直接从等离子体内损失掉。

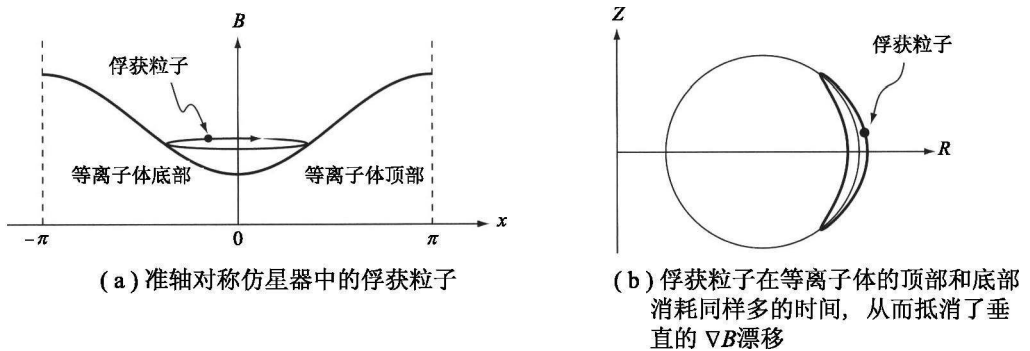


图 13.49

我们看到, 虽然准极向对称与准环向对称对于约束俘获粒子有一些相似之处, 但它们有一个重要的不同点: 准极向对称系统可以设计成极小或者完全没有平行电流, 而准环向系统总是有净的平行电流。所以, 完全不同的目标——消除或是利用这个平行电流——导致 W7-X 和 NCSX 实验装置具有极其不同的外观。

最后, 我们注意到, 如前所述, 尽管没有直接的俘获粒子损失, 但中等或者弱俘获粒子漂离磁面带来的因扩散导致的粒子损失要比非俘获粒子更加迅速。这实际上是所有准环向对称位形, 包括完全轴对称的托卡马克, 都会遇到的问题。这种增强了的损失被称为“新经典”输运, 将在第 14 章讨论。尽管如此, 从聚变反应堆总的约束需求来看, 新经典损失在一定程度上还是能够接受的。事实上, 由微观湍流

驱动的反常输运通常起主导作用。总的结论是, W7-X 的准极向串接磁镜概念和 NCSX 的类托卡马克的准环向概念是三维仿星器位形避免粒子与能量出现不可接受的大损失的两种方法。

当 NCSX 运行起来以后, 它将为准环向对称原理提供重要的检验。深入的三维分析以及位形中大量类似托卡马克的性质, 使得 NCSX 小组对实验的成功充满了信心。

### 13.8.6 仿星器小结

仿星器是一种三维磁场位形。这种概念的所有版本均具有内在稳态运行的主要优点, 不需要通过电流驱动来维持放电。通常来说, 仿星器的净环向电流不大甚至为零, 这意味着它所面临的磁流体力学不稳定性导致的大破裂问题应该比托卡马克小。

目前主要有三种类型的仿星器实验装置: 日本的 LHD、德国的 W7-X 和美国的 NCSX。LHD 已经建成并实现满负荷运行。它采用连续绕制的超导线圈, 到目前为止, 其性能与相似尺寸的托卡马克可比或有些许偏低。W7-X 目前正在建造过程中。它是一个采用模块化线圈的大型超导装置。W7-X 的主要目标是要检验准极向串接磁镜对称性原理的可行性, 这种位形具有良好的单粒子约束, 并且实质上没有净的自举驱动的平行电流或类似偶极驱动的普费尔施-施吕特电流。NCSX 刚刚完成设计, 应当很快便会开始建造。它具有紧凑性的设计, 并使用模块化的铜线圈。NCSX 是一个仿星器与托卡马克的混合体, 具有很大的环向自举电流。它的首要目标是通过类似托卡马克的准环向对称性获得较好的粒子与能量约束。

在等离子体物理性能方面, 仿星器是托卡马克的主要竞争对手。但最终, 预期的物理优势必须与建造更大规模的实验装置或者反应堆所需的超导线圈模块而增加的复杂度和造价进行权衡。

## 13.9 简单聚变反应堆回顾

### 13.9.1 分析目标

本节将回顾第 5 章所介绍的简单反应堆设计。我们记得, 这个简单反应堆设计的目的是要确定聚变反应堆的几何参数和等离子体物理参数, 以保证包层与屏蔽以及线圈系统的总体积可以最小化。假定反应堆的资金成本近似正比于建造反应堆所需的材料体积, 其中包层与屏蔽以及线圈是主要部分。体积最小化必须满足如下约束条件: 固定的电力输出功率  $P_E = 1000 \text{ MW}$ , 真空室壁允许的最大中子负荷  $P_w = 4 \text{ MW/m}^2$ , 热能到电能的最大转换效率  $\eta_t = 0.4$ , 以及由核物理截面确定的包层与屏蔽层的最小厚度  $b = 1.2 \text{ m}$ 。

随着分析的进行,我们遇到的一个关键问题是确定反应堆应当采用多大磁场强度  $B_c$  的线圈,我们先做一个假设,无论  $B_c$  取值多少,为了使线圈的厚度  $c = c(B_c)$  和相应的线圈体积最小化,磁体的设计必须允许运行在最大应力水平  $\sigma_{\max} = 300 \text{ MPa} \approx 3000 \text{ atm}$  之上。应当指出,  $c(B_c)$  是一个随  $B_c$  单调递增的函数。所以,运行在容许的最大磁场强度  $B_c = B_{\max} = 13 \text{ T}$  会导致线圈厚度最大[也就是说  $\max[c(B_c)] = c(B_{\max})$ ],但也将等离子体  $\beta$  值的要求降到最低。选择一个较低的  $B_c$  值,可以减少线圈的厚度但却需要更高的等离子体  $\beta$ 。有人声称,基于磁流体力学稳定性的考虑,容许的最大  $\beta$  将充分小,以至于线圈厚度与容许的  $\beta$  的折中将迫使  $B_c = B_{\max}$ ,以保证实现功率平衡的同时不与磁流体力学稳定极限冲突:  $\beta_{\text{必需}} < \beta_{\text{HD}}$ ,但这并未被证实。通过使用第 13.7 节导出的磁流体力学稳定极限,现在我们可以针对托卡马克反应堆来检验这一判断的正确性。本节的主要目的就是要证明这一判断确实是正确的。

### 13.9.2 反应堆分析

分析过程从回顾反应堆设计所涉及的基本关系开始,主要区别是保留  $B_c$  为一个可变的参数,而不是将它固定为  $B_c = B_{\max}$ 。然后,计算反应堆的单位功率体积 ( $V_i/P_E$ ) 与  $B_c$  的关系。这一点是为了证明,如预期的那样, ( $V_i/P_E$ ) 随  $B_c$  (当然也是  $c$ ) 的增加而增加。最后一步是计算为达到功率平衡所需的  $\beta$  值(记为  $\beta_{\text{PB}}$ ) 与  $B_c$  的关系,并且将它与托卡马克的磁流体力学  $\beta$  极限(记为  $\beta_{\text{HD}}$ ) 做比较。通过这个比较确认我们一开始所做的假设——托卡马克反应堆应当选择  $B_c = B_{\max}$ 。

现在考虑反应堆设计所涉及的基本关系。我们还记得,反应堆中必须最小化的一个关键参数是单位发电功率所需的包层与屏蔽以及线圈系统的总体积:

$$\frac{V_i}{P_E} = \frac{2\pi^2 R_0 [(a+b+c)^2 - a^2]}{P_E} \quad (13.208)$$

利用壁负载与总电功率输出的关系,可以消去大半径  $R_0$ :

$$R_0 = \left[ \frac{1}{4\pi^2 \eta_i} \frac{E_n}{E_\alpha + E_n + E_{Li}} \right] \frac{P_E}{aP_w} = 0.04 \frac{P_E}{aP_w} = \frac{10}{a} \quad (\text{m}) \quad (13.209)$$

为简单起见,这里和下文中将  $P_E, P_w$  和  $\eta_i$  等变量的值代入了所有关系式。

通过让反应堆的磁体工作在最大许应力水平  $\sigma_{\max} = 300 \text{ MPa}$ ,可以假设线圈厚度  $c$  已经被最小化,从而可以利用  $a, b$  和  $B_c$  等项将  $c$  消去:

$$c = \frac{2\xi}{1-\xi}(a+b) \quad (13.210)$$

这里  $\xi = B_c^2/4\mu_0\sigma_{\max} = 6.63 \times 10^{-4} B_c^2$  是一个无量纲参数。在当前分析中,  $\xi$  被当做一个可变的参数而不是将它设为与  $B_c = B_{\max}$  对应的  $\xi = \xi_{\max}$ 。

将这些关系式代入式(13.208),我们得到一个关于  $V_1/P_E$  的简化表达式:

$$\frac{V_1}{P_E} = \frac{0.2}{(1-\xi)^2} \left[ (4\xi)a + (1+\xi)^2 \frac{b^2}{a} + 2(1+\xi)^2 b \right] \quad (\text{m}^3/\text{MW}) \quad (13.211)$$

这个正比于单位功率成本的函数有一个关于  $a$  的极小值,当  $b = 1.2 \text{ m}$  时,  $a$  可表示为:

$$a = \frac{1+\xi}{2\xi^{1/2}} b = 0.6 \frac{1+\xi}{\xi^{1/2}} \quad (\text{m}) \quad (13.212)$$

对应的  $V_1/P_E$  值是:

$$\frac{V_1}{P_E} = 0.47 \frac{1+\xi}{(1-\xi^{1/2})^2} \quad (\text{m}^3/\text{MW}) \quad (13.213)$$

图 13.50 绘出了成本函数  $V_1/P_E$  与  $\xi$  ( $\sim B_c^2$ ) 的关系曲线。与预期一致的是,  $V_1/P_E$  随  $B_c$  增加而单调增长;较高的  $B_c$  要求较大的  $c$ ,意味着较大的线圈体积以及更高的成本。因此,从经济性的角度来看,反应堆应当在尽可能低的  $\xi$  值下运行。

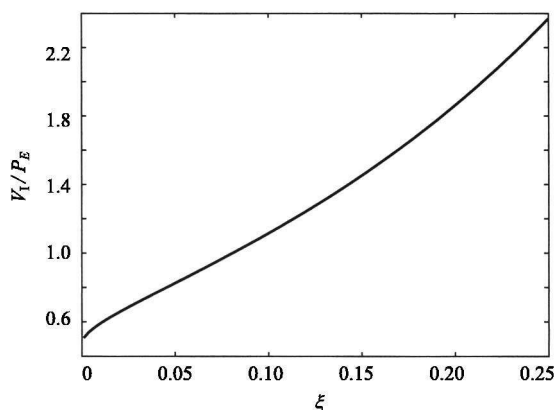


图 13.50 成本函数  $V_1/P_E$  与  $\xi \propto B_c^2$  的函数关系

然而,  $\xi$  允许的最小值必须与磁流体力学稳定性对  $\beta$  的限制相容。这一点可通过计算功率平衡所需的  $\beta$  值与  $\xi$  的函数关系来证明。证明的第一步是计算产生与特定电功率输出对应的热核聚变功率所需的等离子体压强:

$$p = \left[ \frac{16}{E_\alpha + E_n + E_{Li}} \frac{P_E}{\eta_i V_p} \frac{T^2}{\langle \sigma v \rangle} \right]^{1/2} = \frac{10.4}{a^{1/2}} \quad (\text{atm}) \quad (13.214)$$

其中,  $T = 15 \text{ keV}$ ;  $V_p$  为等离子体的体积:  $V_p = 2\pi^2 R_0 a^2 = 20\pi^2 a_0$ 。另外,  $a = a(\xi)$  由

式(13.212)给出。现在,功率平衡所需的  $\beta$  值可以通过定义  $\beta = 2\mu_0 p/B_0^2$ , 以及由于熟悉的  $1/R$  效应引起的  $B_0$  和  $B_e$  之间的关系式很容易地进行估计:

$$\beta_{PB} = \frac{1.7 \times 10^{-3}}{\xi a^{1/2} (1 - 0.1a^2 - 0.12a)^2} \quad (13.215)$$

图 13.51 所示的是  $\beta_{PB}$  与  $\xi$  的函数关系。注意,与直觉预期一致,所需的  $\beta_{PB}$  随着  $\xi \sim B_e^2$  的减少而增加。这个曲线现在必须和由磁流体力学临界稳定性边界条件设定的最大允许的  $\beta$  值进行比较。对于托卡马克来说,稳定性边界由特鲁瓦永限制给定。严格地讲,应该采用对应于圆形截面等离子体的特鲁瓦永限制,因为这是简单反应堆的几何结构。然而,为提高磁流体力学  $\beta$  极限,托卡马克反应堆几乎都毫无疑问地具有  $\kappa \approx 2$  量级的拉长。所以,虽然并不是完全自洽,但在对比过程中我们使用较高的  $\beta$  极限值。最终的结果是磁流体力学稳定性极限可以写作:

$$\beta \leq \beta_{MHD} \equiv 0.072 \left[ \frac{1 + \kappa^2}{2} \right] \frac{a}{R_0} = 0.018a^2 \quad (13.216)$$

这里为简单起见,忽略了  $\langle B^2 \rangle$  与特鲁瓦永  $\beta$  定义式中用到的  $B_0^2$  的区别。

$\beta_{MHD}$  与  $\xi$  的关系曲线如图 13.51 所示。稳定性要求反应堆运行于曲线以下。我们看到,  $\beta_{MHD}$  对于  $\xi$  的依赖要弱于  $\beta_{PB}$ 。图 13.51 的解释如下。必须谨记的关键一点是:反应堆的单位功率成本,如  $V_i/P_E$  所定义,应通过运行于尽可能小的  $\xi$  来最小化。现在假设选择了一个相对较高的  $\xi$  值,所以  $\beta_{PB} < \beta_{MHD}$ 。在这种运行体制下,需要的  $\beta$  与容许的  $\beta$  之间有充裕的安全余量,意味着无需运行于那么高的磁场强度。通过降低磁场,运行区间向左平移至一个较小的  $\xi$  值,对应较低的单位功率成本。

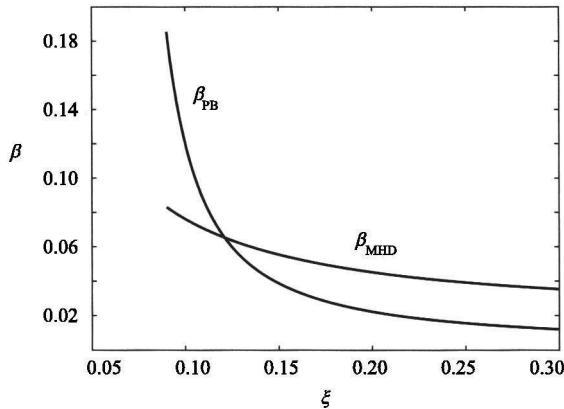


图 13.51 功率平衡所需的  $\beta$  值 ( $\beta_{PB}$ ) 与磁流体力学稳定性所容许的最大  $\beta$  值 ( $\beta_{MHD}$ ) 关于  $\xi \propto B_e^2$  的关系曲线的比较

另一方面,我们不能左移得太多。在小  $\xi$  值的运行体制下,需要的  $\beta$  大幅超出了磁流体力学容许的值,因而是难以达到的。我们最多只能向左平移到曲线的交点。这个交点决定了反应堆能够利用的磁场的最优值。然而,现在我们必须验证这个磁场的最优值与现有技术允许的最大值之间的一致性。与  $B_e \leq B_{\max} = 13 \text{ T}$  的磁场对应的  $\xi \leq \xi_{\max} = 0.11$ 。可以看出,或许有些偶然的是,对于托卡马克来说,最优的磁场强度近似地等于技术上所能达到的最大磁场强度。采用过小的磁场将有可能导致反应堆运行于磁流体力学稳定性极限之外,这是无法接受的。回到本节最初的目的,上述讨论毫无疑问地确认了简单反应堆设计中最初所用的假定,那就是反应堆应当运行于可实现的最大磁场强度下。

我们还应当得到另外一些要点。第一,具有更高磁流体力学  $\beta$  极限(假设电阻壁模可以被稳定)的替代性概念会使得  $\beta_{\text{PB}}$  与  $\beta_{\text{MHD}}$  曲线的交点进一步向左移动。这将降低单位功率成本,同时也是研究这些位形的主要动力。

第二,假设技术进步提高了超导线圈的  $B_{\max}$  值。我们怎样利用这些技术进步?答案是对于一个给定的  $\beta$  极限,更强的磁场允许更高的压强。接下来,这使得较小体积的等离子体就可产生同样的热核聚变功率。最终降低了单位功率成本。然而,同样的聚变中子能量通过较小的等离子体腔体的第一壁时,将会导致较大的壁负荷。所以,为充分地利用磁体技术的进步,必须在第一壁材料方面也有相应的进步,以便容许更高的壁负荷。

## 13.10 本章总结

本章描述了当前作为潜在的聚变反应堆考虑的主要磁场位形。提出了各个磁约束概念关键磁流体力学属性的推导,包括平衡与稳定性  $\beta$  极限。下面给出这些结果的概要。

### 1. 托卡马克

托卡马克是成为第一代聚变功率反应堆的最领先的竞争者。它具有良好的磁流体力学性质、输运性质和加热性质,这些条件对于反应堆来说可能已经足够。它的最大问题是需要使用电流驱动方法来实现稳态运行,此外还需要大型超导强磁体。

### 2. 先进托卡马克(AT)

AT 采用了一种调节剖面分布使之有利于产生大比例自举电流的运行模式。这降低了对电流驱动系统的要求,有可能实现更有利的总体功率平衡。然而,这种运行体制下的等离子体对于电阻壁模永远是不稳定的,必须通过反馈调节来稳定。

### 3. 球形托卡马克(ST)

ST是具有非常紧凑环径比的托卡马克。由于磁流体力学稳定性极限具有

$\beta \sim \epsilon$ 的定标关系,ST具有实现高 $\beta$ 的能力。尽管如此,由于铜质中心柱的技术限制,可以作如下结论:ST所具有的预期超越标准托卡马克的优势在作为反应堆应用时最多也只能说勉强勉强。尽管如此,ST作为先进聚变材料测试需要用到的大量中子源或许具有确定的优势。

#### 4. 仿星器

当前,仿星器是托卡马克的主要竞争对手。它是一种环形螺旋装置,具有天然的三维几何结构,天然地具备稳态运行的能力,因此消除了托卡马克必须面对的电驱动问题。该位形的三维本性可能导致非常差的单粒子约束性能,除非在磁场设计过程中特别加以注意。已经证实,具有高约束性能的概念分别是串接磁镜对称和准轴对称。仿星器面临的最大问题是与设计和建造模块式超导线圈有关的不断增加的技术复杂度和成本。

#### 5. 反向场箍缩(RFP)

RFP是一种环径比相对较大但对环向磁场的需求非常低的轴对称环形位形。这是它技术上超越托卡马克的优势所在。然而,较低的环向磁场导致较低的边界安全因子。这会带来激发多种电阻壁模的潜在风险,最终需要通过反馈控制来稳定。此外,较低的安全因子导致电阻性磁流体湍流,从而增加了输运损失。最后,RFP中的环向电流较大,意味着需要有大量非感应电流驱动。尽管存在这些问题,但研究人员仍在不断通过一些创新的实验想法来改进RFP的性能。

#### 6. 球马克

球马克没有中心欧姆变压器,也没有环向磁场系统,但具有相对较为紧凑的环径比。球马克通过一个复杂的弛豫过程来产生等离子体,在使用三个直流电源的情形下具备稳态运行的潜力。这些特点代表了球马克相对托卡马克的重要技术改进。然而,与RFP相似,球马克的边界安全因子较低,导致相对较强的输运并存在一种电阻壁倾斜模。此外,目前还需要很大的功率来驱动等离子体电流。球马克目前处于早期实验阶段,不久将告诉我们它的真正性能。

#### 7. 场反位形(FRC)

FRC本质上是一种拉长的环向Z箍缩装置。它对于理想磁流体力学模可能非常不稳定的。然而,在动力学对磁流体力学行为的修正变得重要的小装置上进行的实验结果体现出了远高于预期的稳定性。这引导研究者们考虑将FRC作为MTF概念中的最佳等离子体源。在MTF中,先形成一个较小的FRC等离子体,然后将柱状外壳迅速爆聚来压缩等离子体。尽管外推至反应堆尺寸还存在很多问题,但MTF为创造燃烧等离子体提供了一种快速而便宜的办法。MTF同样处于早期发展阶段。

#### 8. 悬浮偶极器(LDX)

LDX位形最基本的组成部分是一个携带环向电流的悬浮线圈。从磁流体力学



的观点来看,LDX 近似于实心的 Z 箍缩装置,由于等离子体的可压缩性效因而具有良好的稳定性。线圈结构的简单性为它提供了一个超越托卡马克的重要优点。然而,采用悬浮线圈明显增加了技术复杂性。一个主要的问题是,为保护悬浮超导线圈免受聚变中子的轰击,LDX 概念不能使用氘-氚作为燃料。使用氘-氚燃料将  $p \tau_E$  的要求增加一个数量级还多。LDX 即将投入运行,所以我们在看到它的实际性能之前还需要稍作等待。

全面总结本章我们可以发现,聚变研究者们极具创造力,为聚变反应堆发明了大量的位形。所有这些概念都牵涉等离子体物理与聚变工程的各种各样的折中。目前,托卡马克处于领导地位,但还需要继续观察是否存在一种超越托卡马克并承担这一角色的替代方案。

## 参考书目

第 13 章主要从磁流体力学的观点描述了多种多样的磁约束聚变概念。下面列出的参考文献更深入地论述了磁流体力学平衡和稳定性极限理论。同时我们也列出了针对本章讨论的各个概念更为具体的参考文献。

### 1. 高级磁流体力学理论

- Bateman, G. (1978). *MHD Instabilities*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Bernstein, I. B. *et al.* (1958). An energy principle for hydromagnetic stability problems. *Proceedings of the Royal Society*, **A223**, 17.
- Connor, J. W., Hastie, R. J., and Taylor, J. B. (1978). Shear, periodicity, and plasma ballooning modes. *Physical Review Letters*, **40**, 396.
- Coppi, B. (1977). Topology of ballooning modes. *Physical Review Letters*, **39**, 939.
- Freidberg, J. P. (1987). *Ideal Magnetohydrodynamics*. New York: Plenum Press.
- Goedbloed, H. and Poedts, S. (2004). *Principles of Magnetohydrodynamics*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Laval, G., Pellat, R., and Soule, J. S. (1974). Hydromagnetic stability of a current-carrying pinch with noncircular cross section. *Physics of Fluids*, **17**, 835.
- Menard, J. E., Bell, M. G., *et al.* (2004). Aspect ratio scaling of ideal no-wall stability limits in high bootstrap fraction tokamak plasmas. *Physics of Plasmas*, **11**, 639.
- Sykes, A. and Wesson, J. A. (1974). Two-dimensional calculation of tokamak stability. *Nuclear Fusion*, **14**, 645.
- Troyon, F. (1984). MHD limits to plasma confinement. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **26** (1A), 209.
- Wesson, J. A. (1978). Hydromagnetic stability of tokamaks. *Nuclear Fusion*, **18**, 87.
- Wesson, J. (2004). *Tokamaks*, third edn. Oxford: Oxford University Press.

### 2. LDX

- LDX Group (1998). Levitated Dipole Whitepaper. *Innovative Confinement Concepts Workshop*, Princeton Plasma Physics Laboratory, Princeton, New Jersey.

### 3. FRC-MTF

- Barnes, D. C. (1997). Scaling relations for high gain, magnetized target fusion systems. *Comments on Plasma Physics and Controlled Fusion*, **18**, 17.
- Barnes, D. C. *et al.* (2002). Field-Reversed Configuration (FRC) equilibrium and Stability. 19th IAEA Fusion Energy Conference, Lyon, France. Paper TH/4–5. Vienna: IAEA.
- FRC community (1998). FRC Development Whitepaper. *Innovative Confinement Concepts Workshop*. Princeton: New Jersey Princeton Plasma Physics Laboratory.
- Siemon, R. E., Lindemuth, I. R., and Schoenberg, K. F. (1999). Why magnetized target fusion offers a low-cost development path for fusion energy. *Comments on Plasma Physics and Controlled Fusion*, **18**, 363.

### 4. RFP

- Bodin, H. A. B. and Newton, A. A. (1980). Reversed field pinch research. *Nuclear Fusion*, **20**, 1255.
- Miyamoto, K. (2001). *Fundamentals of Plasma Physics and Controlled Fusion*, revised edn. Toki City: National Institute for Fusion Science.
- RFP Research Community (1998). The Reversed Field Pinch Whitepaper. *Innovative Confinement Concepts Workshop*. Princeton: New Jersey Princeton Plasma Physics Laboratory.

### 5. 球马克

- Bellan, P. M. (2000). *Spheromaks*. London, England: Imperial College Press.
- Hooper, E. B., Pearlstein, L. D., and Ryutov, D. D. (1998). The spheromak path to fusion energy. *Innovative Confinement Concepts Workshop*. Princeton, New Jersey: Princeton Plasma Physics Laboratory.
- Hooper, E. B. (1999). Spheromak overview. *Fusion Summer Study*. Colorado: Snowmass.

### 6. 托卡马克

- Wesson, J. (2004). *Tokamaks*, third edn. Oxford: Oxford University Press.

### 7. 球形托卡马克

- Peng, M. (1998). The spherical torus pathway to fusion power. *Innovative Confinement Concepts Workshop*. Princeton: New Jersey Princeton Plasma Physics Laboratory.
- Spherical Torus White Paper (1999). US Spherical Torus Fusion Energy Science Research. *Fusion Summer Study*, Snowmass, Colorado.

### 8. 仿星器

- Boozer, A. H. (1982). Establishment of magnetic coordinates for a given magnetic field. *Physics of Fluids*, **25**, 520.
- Boozer, A. H. (2004). Physics of magnetically confined plasmas. *Reviews of Modern Physics*, **76**, 1071.
- Miyamoto, K. (2001). *Fundamentals of Plasma Physics and Controlled Fusion*, revised edn. Toki City: National Institute for Fusion Science.
- National Stellarator Program Planning Committee (1998). US Stellarator program plan. *Innovative Confinement Concepts Workshop*. Princeton: New Jersey, Princeton Plasma Physics Laboratory.

## 习题

13.1 假设压强分布由下式给出,分别计算 LDX 在平衡、 $m = 1, m = 0$  等 3 种条件下的  $\beta$  极限。

$$p(r) = K \frac{r^{2(\gamma-1)} - r_1^{2(\gamma-1)}}{[r^{2(\gamma-1)} + r_2^{2(\gamma-1)}]^{(2\gamma-1)/(\gamma-1)}}$$

13.2 下述简单模型可以用来描述 RFP 的演化。假设直圆柱形等离子体位于一个半径  $b = 0.4 \text{ m}$  的理想导体壁内。开始时,腔体内充入了预电离的等离子体,参数为  $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ ,  $T_e = T_i = 10 \text{ eV}$ ,环向磁场偏置为  $B_z = 0.05 \text{ T}$ 。 $t = 0$  时刻,环向电流开始在等离子体表面流动。随着时间的推移, $I$  的幅度缓慢增长,但一直保持为表面电流。

① 利用质量、磁通、能量和动量等守恒关系,计算将等离子体压缩到半径  $r = 0.16 \text{ m}$  所需的环向电流  $I$ 。假设这是一个绝热过程并且  $\gamma = 5/3$ 。

② 计算  $\beta_p$  的最终值。

③ 计算  $B_z(0)$  的最终值。

13.3 强磁场托卡马克 Alcator C-Mod 的高性能运行性质为  $\bar{n} = 2 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ ,  $\bar{T}_e = \bar{T}_i = 3 \text{ keV}$ ,  $B_\phi = 8 \text{ T}$ 。假设密度为均匀分布,温度分布具有  $T = 2T(1 - r^2/a^2)$  的形式。为简单起见,假设为圆柱位形。

① 以大气压为单位计算平均粒子压强。

② 计算  $\beta$  的值。

③ 假设  $q(0) = 1, q(a) = 3, R_0 = 0.68 \text{ m}$ , 等效圆截面小半径  $a = 0.3 \text{ m}$ 。如果环向电流密度分布为  $J_z = J_0(1 - r^2/a^2)^v$ , 计算  $v$  的值以及等离子体中总的环向电流  $I$ 。

④ 计算  $r = a$  处极向磁场与环向磁场之比。

13.4 一个超导托卡马克反应堆的设计指标如下:①  $P_w = 4 \text{ MW/m}^2$  (最大壁负荷);②  $B_{\max} = 13 \text{ T}$  (线圈处最大环向磁场强度);③  $b = 1.2 \text{ m}$  (包层和屏蔽的厚度),以及  $\bar{T}_e = \bar{T}_i = 15 \text{ keV}$ 。假设为圆截面反应堆。为高效利用包层,小半径选择为  $a = (3/2)b$ 。试证明:为达到想要的壁负荷,存在一个最佳的逆环径比  $\varepsilon = a/R_0$ ,使得  $\beta/\varepsilon$  的值最小化。

13.5 托卡马克欧姆加热变压器电路的一个简单模型由下面的方程给出:

$$V = R_1 I_1 + L_1 \dot{I}_1 - M \dot{I}_2 \quad \text{初级电路(电源)}$$

$$0 = R_2 I_2 + L_2 \dot{I}_2 - M \dot{I}_1 \quad \text{次级电路(等离子体)}$$

为简单起见,忽略  $R_1$  并假定  $V = \text{常量}$ 。

① 推导等离子体电流  $I_2$  达到其  $t \rightarrow \infty$  时的最终值的 95% 所需时间的表达式,假定  $I_2(0) = 0$ 。

② 步骤①中,假设等离子体电阻  $R_2$  在整个演化过程中保持为常数。但实际上,起始阶段等离子体比较冷,电流也比较小,  $R_2$  较大。随着时间的推移,  $R_2$  随着等离子体加热的增加而逐渐减小。这个效应可以通过假定  $R_2 = R_2(I_2) = R_f(I_f/I_2)^{1/2}$  来模拟,这里的下标  $f$  表示其  $t \rightarrow \infty$  时的值。使用这个模型,推导  $I_2$  达到其终值的 95% 所需的时间的表达式,并与步骤①的结果作比较。

13.6 一个小半径为  $a$  的圆柱形托卡马克,它的安全因子分布由  $q(r) = q_0(1 + 2r^2/a^2)$  给出。如

果  $a = 0.2 \text{ m}$ ,  $R_0 = 0.8 \text{ m}$ , 计算等离子体的平均半径, 其定义为  $\langle a^2 \rangle \equiv I/\pi J_\phi(0)$ 。

**13.7** 经常有人说磁轴附近具有椭圆形磁面的托卡马克能够在存在锯齿振荡时维持更高的轴上电流密度。这个说法可通过如下步骤验证。假定一个椭圆形托卡马克的长度为  $2\pi R_0$ , 给出磁轴附近极向磁场的矢量势为  $A(x, y) \approx A_{xx}(0, 0)(x^2/2) + A_{yy}(0, 0)(y^2/2)$ 。现在, 定义磁面拉长比  $\kappa = (A_{xx}/A_{yy})^{1/2}$  以及轴上电流密度  $\mu_0 J_0 = -\nabla^2 A = -(A_{xx} + A_{yy})$ 。

① 计算轴上的安全因子, 并且证明它可以表示为  $q_0 = K/(A_{xx}A_{yy})^{1/2}$ 。求出  $K$ 。

② 证明轴上电流密度可以表示为  $J_0 = 2B_0 f(\kappa)/\mu_0 R_0 q_0$ 。求出  $f(\kappa)$ , 并且判断当  $q_0 = 1$  时更高的  $\kappa$  是否可以容许更大的  $J_0$ 。

**13.8** 本题估算环向电流从零增加到最终值  $I$  的过程中, 欧姆放电增加了多少顺磁性。为简化分析, 假定即使电流不断增加, 等离子体压强仍然可以忽略不计。这样, 演化过程中的任意时刻都可以认为一维径向压力平衡关系是无净力的,  $\mu_0 \mathbf{J} = \alpha \mathbf{B}$ 。并进一步简化, 假设在演化过程中  $\alpha(r, t) \approx \alpha(t)$  与径向位置无关并随时间缓慢变化。

① 对于任意  $\alpha(t)$ , 计算  $B_z(r, t)$  与  $B_\theta(r, t)$ 。假定等离子体边界位于  $r = a$  并且  $B_z(a, t) = B_0$ 。

② 计算逆磁性  $\Delta B_z/B_0$ , 这里  $\Delta B_z$  是  $B_z(0, t)$  从初始状态到最终状态的变化。推导  $\Delta B_z/B_0$  关于  $\varepsilon$  和  $q_\alpha$  的函数解析表达式。并求出  $\varepsilon = 1/4$  并且  $q_\alpha = 3$  时  $\Delta B_z/B_0$  的值。

**13.9** 本题的目的是计算一个变压器驱动的托卡马克放电脉冲的平顶时间。考虑图 13.52 所示的装置。

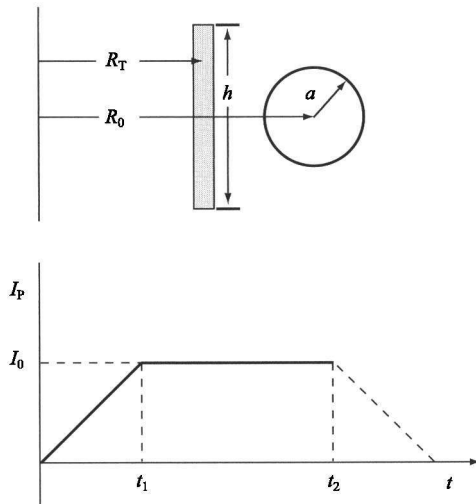


图 13.52

① 变压器运行于“双边”模式。也就是说,  $t = 0$  时刻, 变压器中存在一个负的直流电流, 并在线圈中产生一个  $B(0) = -8 \text{ T}$  的磁场。随后给变压器线圈施加一个电压, 让线圈电流过零并在  $t = t_2$  时刻增加到最大值, 此时线圈中的磁场强度为  $B(t_2) = +8 \text{ T}$ 。系统的相关尺寸如下:  $a = 0.2 \text{ m}$ ,  $R_0 = 0.8 \text{ m}$ ,  $R_T = 0.5 \text{ m}$ ,  $h = 1 \text{ m}$ 。从  $t = 0$  时刻到  $t = t_2$  时刻, 变压器能够提供多少伏秒数?

② 下一步涉及欧姆加热与热传导损失的稳态功率平衡。忽略所有其他的源或汇。如果能量约束时间  $\tau_E = 0.05 \text{ s}$ , 等离子体密度  $n = 2 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ , 等离子体电阻率  $\eta = 2.5 \times 10^{-8} / T_k^{3/2} \Omega \cdot \text{m}$ , 计算等离子体电阻  $R_p$ 。答案应当具有  $R_p = R_p(I)$  的形式, 这里  $I$  是等离子体环向电流。注意:  $R_p$  是非线性电阻。

③ 变压器与等离子体的自感分别为  $L_T = 1.0 \times 10^{-6} \text{ H}$  和  $L_p = 2 \times 10^{-6} \text{ H}$ 。它们之间的互感为  $M = 0.8 \times 10^{-6} \text{ H}$ 。写出一组描述变压器初级与次级耦合的电路方程, 包含步骤②计算的等离子体电阻, 但忽略初级的电阻。

④ 假定我们想要的电流具有图 13.52 所示的形式, 平顶处电流  $I_0 = 1 \text{ MA}$ 。令  $t_1 = 1 \text{ s}$  以免电流爬升太快。计算平顶宽度  $\Delta t = t_2 - t_1$ , 并与步骤①一样计算  $t = t_2$  时刻已经消耗的总的伏秒数。完成这部分问题之前, 你必须计算  $t = 0$  时刻能够在线圈中产生  $B(0) = -8 \text{ T}$  的磁场的初始初级电流的大小。

**13.10** 理论分析表明, 大环径比、圆截面环形位形的气球模磁流体学稳定性极限由  $\alpha \leq 0.6$  大致给出, 这里  $s(r) = rq'/q$  是剪切而  $\alpha(r) = -q^2 R_0 \beta'$  是归一化的环向  $\beta$  梯度。这是在等离子体内的任意径向位置都必须满足的一个局部不等式。

① 假定在各径向位置均满足临界稳定性条件, 也就是说, 对于  $0 < r < a$ ,  $\alpha(r) = 0.6$ , 计算气球模稳定性容许的最大  $\beta$ 。如果安全因子由  $q(r) = q_0 / (1 - kr^3/a^3)^{1/2}$  给出,  $\kappa$  由  $q_\alpha = q_0 / (1 - k)^{1/2}$  条件决定, 导出可能的最大体积平均  $\beta$  与  $a, R_0, q_0, q_\alpha$  的函数关系。

② 当  $a = 2 \text{ m}$ ,  $R_0 = 6 \text{ m}$ ,  $q_0 = 1$ ,  $q_\alpha = 2.5$  时, 最大体积平均  $\beta$  的数值是多少? 将你的结果与特鲁瓦永极限进行比较。

# 第 14 章 输 运

## 14.1 引 言

对于聚变反应堆中温度  $T = 15 \text{ keV}$  的自持燃烧的等离子体,  $\alpha$  粒子加热必须与下述热传导损失相平衡:

$$P\tau_E = \frac{24}{E_\alpha} \frac{T^2}{\langle \sigma v \rangle} \quad (14.1)$$

我们知道,在反应堆内,压强由预定输出功率所需的功率密度确定,而温度则由令比值  $T^2/\langle \sigma v \rangle$  取极小值来确定。因此,要实现自持点火运行,就需要对能量约束时间  $\tau_E$  的值提出要求。

输运理论的目的是理解和控制能量约束,这便是第 14 章的主要内容。在等离子体内,存在三种重要的输运类型:热传导、粒子扩散和磁场扩散。其中,热传导是最严重的能量损失机制,因此也是我们重点要讨论的对象。此外,这里的大部分分析都与托卡马克有关,因为现有的大部分理论都是针对这种位形展开的,而且有关这种位形的数据也最多。

在聚变界,一般认为,在建立反应堆过程中,最困难的挑战是如何理解热传导。原因是等离子体输运几乎总是由微观不稳定性驱动的等离子体湍流主导,而不是由库仑碰撞主导。理解这种由湍流导致的反常输运需要运用复杂的动理学模型和非线性多维数值模拟技术。

经过多年研究,人类在确定反常热传导基本原理方面已经取得了长足的进步。即便如此,在理论能够成为指导新装置设计的有用工具方面还有很长的路要走。总的来说,新的设计是基于由大量实验测量数据导出的经验定标关系。这些经验定标关系预言,尽管超出自持点火条件不多,但托卡马克位形在实现自持点火运行方面具有相当大的机会。而且需要提醒的是,这种预言是对实验数据范围之外情形的一种外推。

为了使我们能够循序渐进地理解等离子体输运问题,本章将从简单模型开始,然后是一维直圆柱情形下的经典输运,接着是更复杂的情形,最后阐述托卡马克反应堆的输运。内容结构如下。

首先,通过将低  $\beta$  托卡马克位形展开取直,来导出描述一维直圆柱情形下热、粒子和磁场等扩散的流体模型。这一分析将阐明如何从电阻性磁流体力学模型中自然地导出粒子扩散项和磁场扩散项。但热扩散系数不是从该模型中导出的,而是通过基于“随机行走”模型的简单的启发式计算独立给出的。分析表明,热输运远远大于粒子输运,而且这种热输运主要受离子成分支配。讨论的最终结果是给出一组简洁的一维输运方程。

其次,尽管实验观察到的扩散系数要远远大于上述简单一维模型导出的值,但我们的主要目的是预备性地学习如何在假定扩散系数已知的情形下从数学上导出并求解输运方程。为此我们将研究一维输运模型的几种简单应用,包括温度平衡、离轴加热和欧姆加热到点火。

第三个主题是关于新经典输运理论的,它相当于环形几何下的经典库仑碰撞输运。虽然人们最初认为环效应不过是在直圆柱结果上增加了小的  $a/R_0$  修正项,但实际结果远非如此。环效应的典型表现是导致离子热扩散的大小提高了两个量级,它是环形几何中的粒子,尤其是俘获粒子的导心漂移效应的结果。但即使考虑到这种大的增长,新经典离子热扩散率仍比实验观测值明显要小。新经典输运部分的最后一项任务是关于自举电流  $J_B$  的简单推导。我们知道,  $J_B$  是在先进托卡马克运行模式下,由输运引起的自发的环向等离子体电流,它可以减少对外部电流驱动系统的需求。

按照逻辑发展顺序,本章下一个议题是讨论微观不稳定性引起的反常输运。但这显然超出了本书范围,因此我们把注意力集中在反常输运的宏观结果上,这就是能量约束时间  $\tau_E$  的经验定标关系。我们给出了如何将广义一维输运方程简化为零维形式,即用  $\tau_E$  表示的热输运模型的方法,描述了在实际情形下如何计算  $\tau_E$ ,以及在两种典型的托卡马克运行模式(即低约束的 L 模和高约束的 H 模)下的表达式。值得指出的是,  $\tau_E$  反映的只是等离子体芯部的总体热输运状态。除此之外,也存在一些与等离子体边界有关的重要输运现象,它们也会直接或间接地影响到芯部的输运。关于这些输运过程的处理同样主要是经验性的。我们将简单描述这些边缘区输运现象。

最后,我们将这些结果综合起来,用以研究几种与聚变功率产生有关的实际输运情形。首先是设计一项简单优化的托卡马克点火实验,其参数非常类似于 ITER 的参数指标。分析表明,点火实验的规模与全尺寸聚变堆相当。其次是通过经验定标关系对热稳定性问题和点火所需的最小辅助加热功率问题进行再检验。其结果明显要比第 4 章导出的结果更令人欣慰。最后是对标准托卡马克运行模式和先进托卡马克模式下自举电流占总电流的比重进行计算。结果表明,在标准运行模式下,这部分电流贡献很小。在先进模式下则有可能实现高的自举电

流,但这时装置要运行在电阻性壁模被激发的参数区间,因此需要采取反馈稳定措施。

## 14.2 一维柱形等离子体中的输运

### 14.2.1 流体模型

#### 1. 初始方程

在这一小节里,我们推导描述等离子体质量、能量和磁通量输运的流体方程组。这里忽略了与黏滞性有关的动量输运,因为通常它不是主要因素。为了简单起见,分析在一维柱坐标系下进行。但即使这样,由于涉及的物理变量很多,因此初始模型相当复杂,需要通过进一步近似来简化方程,使之变为较易处理的形式。最终目标是要得到一组类似于如下形式的扩散方程:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r D \frac{\partial Q}{\partial r} \right) + S(Q, r, t) \quad (14.2)$$

其中, $Q$ 是各物理变量; $D$ 是待定扩散系数; $S$ 是源或汇项。

这种输运行为由经过调整的单流体电阻性磁流体力学模型描述,这些调整可概括如下:

① 由于与理想磁流体力学的时间尺度相比,输运的特征时间尺度很长,因此忽略磁流体力学动量方程里的惯性项不失为一种好的近似。这样,当系统随时间缓变时,等离子体输运过程可以看作由一系列准静态磁流体力学平衡态构成的,每一步都满足  $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p$ 。

② 对欧姆定律做了以下调整:将电阻率分成垂直分量和平行分量  $\eta \mathbf{J} \rightarrow \eta_{\perp} \mathbf{J}_{\perp} + \eta_{\parallel} \mathbf{J}_{\parallel}$ 。这一分解使我们可以将粒子扩散(与  $\eta_{\perp}$  有关)与磁场扩散(与  $\eta_{\parallel}$  有关)区分开来。对于经典输运情形,可以证明,  $\eta_{\perp} \approx 2\eta_{\parallel}$ , 因此区分二者意义不大。但在实际实验中,粒子扩散是严重反常的,相当于需要做  $\eta_{\perp} \gg \eta_{\parallel}$  的调整。

③ 能量方程可从理想磁流体力学模型下的简单绝热形式推广为流体动力学里常见的一般形式(见 4.2 节),其中除了绝热对流项和压缩项外,加上了热传导项和源或汇项。聚变等离子体之所以可以采用单一的能量方程来描述,是基于  $T_e \approx T_i \equiv T$  的考虑。这种温度平衡问题我们将在本节稍后进行讨论。

考虑到这些调整,我们得到柱坐标系下的一维磁流体力学方程。非平庸物理变量均为  $(r, t)$  的函数,对应于  $n, T, \mathbf{v} = v\mathbf{e}_r, \mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_0 + B_z\mathbf{e}_z, \mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_0 + E_z\mathbf{e}_z$ 。于是,描述输运模型的初始方程可写为:



$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r n v) &= 0 && \text{质量守恒} \\
 \frac{\partial}{\partial r} \left( p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta}{\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_\theta) &= 0 && \text{动量守恒} \\
 \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= \eta_\perp \mathbf{J}_\perp + \eta_\parallel \frac{J_\parallel}{B} \mathbf{B} && \text{欧姆定律} \\
 3n \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{2nT}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v) &= \bar{\nabla} \cdot \mathbf{q} + S && \text{能量守恒} \\
 \partial B_\theta / \partial t &= \partial E_z / \partial r \\
 \frac{\partial B_z}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r E_\theta) && \text{麦克斯韦方程组} \\
 \mu_0 J_\theta &= -\partial B_z / \partial r \\
 \mu_0 J_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_\theta)
 \end{aligned} \right\} (14.3)$$

在这些方程里,  $p = 2nT$ , 出现在欧姆定律里的电流  $\mathbf{J}_\perp$  和  $J_\parallel$  由下式给出<sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{J}_\perp &= \frac{J_\theta B_z - J_z B_\theta}{B^2} (B_z \mathbf{e}_\theta - B_\theta \mathbf{e}_z) = \frac{1}{B^2} \frac{\partial p}{\partial r} (B_z \mathbf{e}_\theta - B_\theta \mathbf{e}_z) \\
 J_\parallel &= \frac{J_\theta B_\theta + J_z B_z}{B}
 \end{aligned} \right\} (14.4)$$

能量方程中的源或汇项  $S$  由欧姆加热、外部加热、聚变  $\alpha$  粒子加热和辐射损失等组成。最后, 热流矢量按通常形式用热扩散系数表示为:

$$\mathbf{q} = -n \chi \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{e}_r \quad (14.5)$$

其中热扩散系数  $\chi$  待定。我们在下一小节里来导出并讨论它的值, 眼下可将它视为已知量。

现在我们有具体的初始方程。我们看到, 它们在数学上依然相当复杂。原因是, 4 个物理量  $n, T, B_\theta, B_z$  需要有 4 个时间演化方程。但这些量是通过第五个方程即准静态压强平衡方程相互耦合的。方程的数目应等于未知量的数目, 因此出现在方程中的第五个未知量  $v$  的行为并不由时间演化方程决定。一般来说, 要消去  $v$  得到一组封闭的输运方程并不容易。克服这一困难的一种处理办法是在模型里引入

1) 通常欧姆定律里还应有一项称为“热电效应”的附加项, 但在这里, 这一项不起主要作用, 因此为了简单起见, 被略去。

低  $\beta$  托卡马克展开, 由此来明确确定  $v$ 。以后我们再来讨论这一点。

## 2. 模型的简化

模型简化的第一步是通过欧姆定律消去法拉第定律中的电场项。经过简单计算, 可得如下  $B_\theta$  和  $B_z$  的时间演化方程。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_\theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(B_\theta v) &= - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\eta_\perp B_\theta}{B^2} \frac{\partial p}{\partial r} - \eta_\parallel \frac{B_z}{B} J_\parallel \right] \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_z v) &= - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left[ \frac{\eta_\perp B_z}{B^2} \frac{\partial p}{\partial r} + \eta_\parallel \frac{B_\theta}{B} J_\parallel \right] \right] \end{aligned} \right\} \quad (14.6)$$

下一步是引入低  $\beta$  托卡马克展开, 其基本假设是, 磁场主要部分沿轴向, 且与  $r$  和  $t$  无关。具体来看就是,  $B_z(r, t) = B_0 + \delta B_z(r, t)$ , 这里  $B_0 = \text{常数}$ ,  $\delta B_z \ll B_0$ 。其他各物理量依次有:

$$2\mu_0 p/B_0^2 \sim B_\theta^2/B_0^2 \sim \delta B_z/B_0 \ll 1 \quad (14.7)$$

从这个基本假设出发, 可以看到,  $B_z$  演化方程的左边可作如下简化:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_z v) \approx \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right] \delta B_z + \frac{B_0}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v) \approx \frac{B_0}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v) \quad (14.8)$$

利用这一近似关系, 我们可以通过对  $B_z$  演化方程求关于  $r$  的积分来得到  $v$  的显性表达式:

$$v \approx - \frac{\eta_\parallel B_\theta}{\mu_0 B_0^2} \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_\theta) - \frac{\eta_\perp}{B_0^2} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (14.9)$$

这里利用了近似关系  $J_\parallel \approx J_z$ 。现在将这个  $v$  的表达式代入  $n$ ,  $T$  和  $B_\theta$  的时间演化方程, 由此导出一组简化了的输运方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r D_n \left[ \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{n}{T} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2\eta_\parallel}{\beta_r \eta_\perp} \frac{n}{r B_\theta} \frac{\partial(r B_\theta)}{\partial r} \right] \right] \\ 3n \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r n \chi \frac{\partial T}{\partial r} \right] + S \\ \frac{\partial(r B_\theta)}{\partial t} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{D_B}{r} \frac{\partial(r B_\theta)}{\partial r} \right] \end{aligned} \right\} \quad (14.10)$$

其中,  $\beta_r = 4\mu_0 n T/B_0^2 \sim 1$ ; 磁场扩散系数  $D_B$  和离子扩散系数  $D_n$  分别为:

$$\left. \begin{aligned} D_B &= \frac{\eta_\parallel}{\mu_0} \\ D_n &= \frac{2nT\eta_\perp}{B_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (14.11)$$

在能量方程中,我们仍利用经典输运理论中  $\chi \gg D_n$  这一事实,也就是说,对流项和压缩项均为小量。在下一小节里我们将证明  $\chi \gg D_n$  这一条件。

上述这些方程就是所需的一维柱坐标系下的经典输运方程。它们是3个耦合的非线性偏微分方程,其形式类似于式(14.2)给出的一般输运方程。一般来讲,输运系数不是常数,而是  $n, T$  和  $B_0$  的函数。除了圆柱几何带来的某些修正外,上述方程与一般方程的主要差异在密度方程。这一方程表明,密度演化也是与温度梯度和磁场梯度耦合在一起的。最后,可以看出,量  $\delta B_z$  并不出现在这些方程中。一旦其他各量确定后,我们可以从压强平衡关系来得到  $\delta B_z$ 。

虽然简化后的输运方程要比初始方程有了很大简化,但它仍复杂难解。下面我们来讨论几个具体例子。但首先我们来看看  $\chi$  的计算,并将它与其他输运系数进行比较。

## 14.2.2 利用随机行走模型计算输运系数

### 1. 概述

流体模型的简化表明,粒子扩散和磁场扩散均源于电阻性,而电阻性则源于净的库仑碰撞动量交换。但是对库仑碰撞的相应分析(见第9章)并不能给出热扩散系数、黏滞系数以及  $\eta_{\parallel}$  和  $\eta_{\perp}$  的不同的值,原因是第9章的推导中的分布函数要么是纯麦克斯韦型的,要么是带有少量平均速度位移和少量温度变动的麦克斯韦型的。而上面提到的“缺失”的现象则源自非麦克斯韦修正,而这一点没能包括在第9章的分析中。计算这些非麦克斯韦修正需要直接求解更基本的动理学模型来确定分布函数  $f_{e,i}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 。这些更为复杂的计算超出了本书的范围。

但在这里,我们采用简单得多的所谓“随机行走模型”来导出各种输运系数。结果是得到一组电子和离子的热导系数  $\chi_e$  和  $\chi_i$ 。我们也可以从式(14.11)描述的流体理论得到粒子扩散系数  $D_n$ 。随机行走模型包含了扩散过程的基本物理。只有需要精确确定每一种输运系数的数值系数时,我们才需要用到更为复杂的动理学理论。

### 2. 随机行走模型

随机行走模型的基础是分析粒子经过一系列随机碰撞后是如何从原初位置扩散开的。这一扩散过程由“扩散系数  $D$ ”来刻画,  $D$  的确定取决于碰撞间的平均时间和平均距离。

考虑图 14.1 所示的处于随机碰撞中的粒子的运动。粒子以平稳恒定的速度运动直到经历一次碰撞,此后它的运动方向突然改变。假定每次碰撞引起的方向改变是随机的,为此我们定义量  $\Delta \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j$ , 它表示粒子在碰撞前(用下标  $j+1$  表示)后(用下标  $j$  表示)的位置矢量之差。经过  $N$  次碰撞后粒子位置的总的变化为:

$$\Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{x}_1 + \Delta \mathbf{x}_2 + \Delta \mathbf{x}_3 + \cdots + \Delta \mathbf{x}_N = \sum_j \Delta \mathbf{x}_j \quad (14.12)$$

如果碰撞是纯粹随机的,则对粒子系统有:

$$\langle \Delta \mathbf{x} \rangle = 0 \quad (14.13)$$

即粒子大致分布在原初位置的上下左右各处。

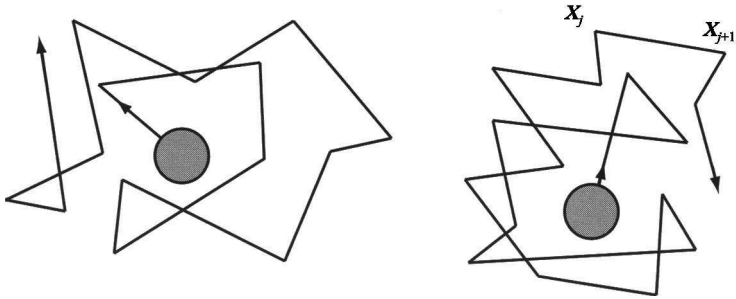


图 14.1 处于随机碰撞中的两个粒子的轨迹(注意,粒子的平均位移  $\Delta \mathbf{x} = 0$ , 但  $(\Delta \mathbf{x})^2 \neq 0$ )

另一方面,粒子自初始位置出发走过的距离平方的均值却不为零。这个方均距离定义为:

$$(\Delta x)^2 = \sum_{i,j} \Delta \mathbf{x}_i \cdot \Delta \mathbf{x}_j \quad (14.14)$$

求和号下  $i \neq j$  的各项之和平均后为零,这是因为碰撞具有随机性质。但  $i = j$  项之和则不为零,由此得到系综平均:

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \sum_j (\Delta x_j)^2 \quad (14.15)$$

现在我们定义  $(\Delta l)^2 \equiv [(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_N)^2]/N$  为碰撞间平均步长的幅度。因此,经过  $N$  次碰撞后,粒子扩散的方均距离为:

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \sum_j (\Delta x_j)^2 = N(\Delta l)^2 \quad (14.16)$$

下一步,假定两次碰撞间的平均时间为  $\tau$ 。于是出现  $N$  次碰撞所需的时间  $\Delta t$  为:

$$\Delta t = N\tau \quad (14.17)$$

消去  $N$ , 可导出  $\Delta x$  和  $\Delta t$  之间的关系:

$$(\Delta x)^2 = D\Delta t \quad (14.18)$$

这里,

$$D = \frac{(\Delta l)^2}{\tau} \quad (14.19)$$

定义为扩散系数。注意,粒子因随机碰撞走过的平均距离为  $\Delta x \sim (\Delta t)^{1/2}$ 。相比之下,对于无碰撞情形我们有  $\Delta x \sim \Delta t$ 。碰撞扩散的平方根依赖关系使粒子运动要慢得多,这是因为运动方向频繁发生随机变化的缘故。

这一分析的结论是:要计算随机碰撞的扩散系数,我们需要知道碰撞间的平均步长  $\Delta l$  和平均时间  $\tau$ 。然后由式(14.19)求得扩散系数。现在我们用这套方程式来推导磁化等离子体柱中粒子和能量的扩散系数。

### 14.2.3 磁化等离子体中的粒子扩散

磁化等离子体中粒子的垂直扩散系数可按上述方法直接导出,只是需要做两点调整。首先,在垂直于磁场的方向上,两次碰撞间的粒子轨道不是直线,而是圆形回旋轨道;其次,与普通粒子碰撞相似,碰撞前后粒子的轨道有明显的改变。因此,粒子的平均步长必须考虑每次碰撞期间两粒子的相对运动,这是与上小节描述的单粒子分析不同的地方。

基于这些考虑,我们可对粒子垂直方向上的扩散系数做如下估计。考虑图 14.2 所示的两粒子间碰撞。假定二者均为离子。在碰撞前,粒子 1 具有回旋半径  $r_{L1}$  的轨道,碰撞后,粒子 1 被散射到任意方向上,并仍做回旋运动。平均而言,粒

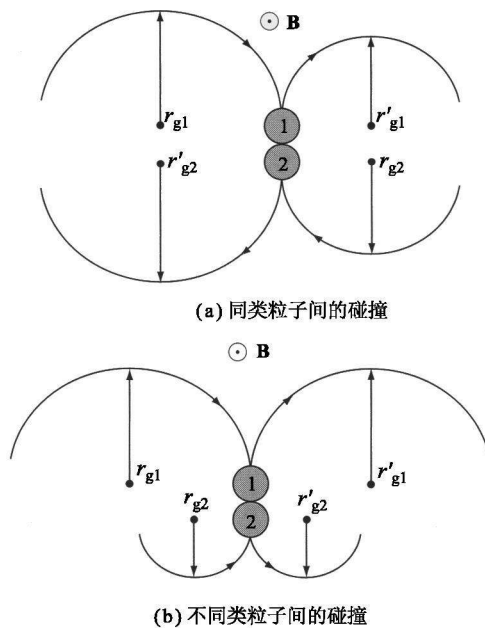


图 14.2 磁场中两粒子间的碰撞(注意,同类粒子的质心在碰撞前后没有改变)

子的导心偏移了一个可与回旋半径比拟的距离。粒子2也经历了类似过程。结果,我们可导出两次碰撞间的平均步长为  $\Delta l \approx r_{Li}$ 。将这个估计与两次碰撞间的平均时间间隔  $\tau_{ii} = (v_{ii})^{-1}$  结合起来似乎可以导出离子的粒子扩散系数为  $D_i \approx r_{Li}^2 / \tau_{ii}$ 。但这个结论是错的!

通过对物理图像的下述简单分析可以看出,同类粒子间的碰撞并不导致粒子扩散,只有不同类粒子间的碰撞才引起粒子输运。实际上,粒子的扩散系数就一个,也就是说,电子和离子以相同速率扩散。

这里分析的关键是两个同质量粒子之间碰撞引起的步长的定义。有物理意义的恰当定义是将这个步长定义为碰撞前后两粒子质心位置的变化。如果两粒子质心存在扩散,那么这两个粒子经过一系列碰撞之后会最终损失掉。如果不是这样,那么粒子就不存在逃逸。

下述分析计算了两个同种粒子以任意相对夹角碰撞并发生随机碰撞散射所引起的质心位移的步长。结果表明,就全部碰撞平均而言,同种粒子间的碰撞不造成粒子扩散。将此分析运用到不同种粒子碰撞上,则可看出存在粒子扩散。

假定整个碰撞过程为垂直于磁场的二维平面上的运动,那么分析可简化。换言之,可以人为假设碰撞前后粒子的平行速度不发生变化。这个假定对最终结果不是必要的,但可以大大简化代数运算的复杂性。

### 1. 同种粒子分析

考虑图 14.3 所示的两个碰撞离子。首先我们来计算每个粒子导心的位置,假定取坐标系为碰撞开始前粒子处于  $x = 0, y = 0$  的原点。由第 8 章知,离子轨道为:

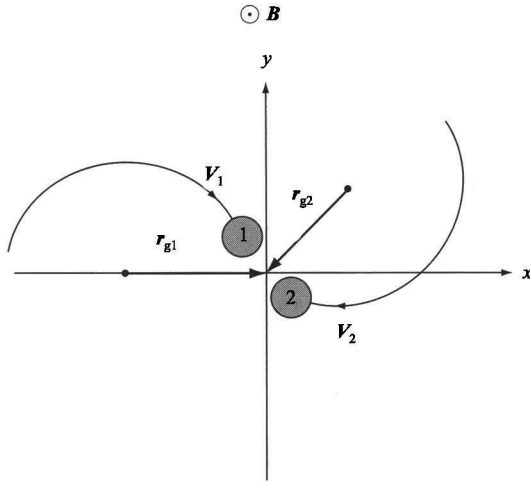


图 14.3 实验室参照系下离子-离子碰撞的几何图像

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{\perp} \cos(\omega_c t - \phi) \\ v_y &= -v_{\perp} \sin(\omega_c t - \phi) \\ x &= x_g + r_L \sin(\omega_c t - \phi) \\ y &= y_g + r_L \cos(\omega_c t - \phi) \end{aligned} \right\} \quad (14.20)$$

这里,  $\omega_c = eB_0/m$ ,  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$  (对电子分析相同, 只需做  $\omega_c \rightarrow -\omega_c$  代换即可)。如果两粒子在原点发生碰撞, 则在碰撞处每个粒子的导心位置为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{g1} &= x_{g1} \mathbf{e}_x + y_{g1} \mathbf{e}_y = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{e}_z}{\omega_c} \\ \mathbf{r}_{g2} &= x_{g2} \mathbf{e}_x + y_{g2} \mathbf{e}_y = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{e}_z}{\omega_c} \end{aligned} \right\} \quad (14.21)$$

其中,  $\mathbf{v}_1$  和  $\mathbf{v}_2$  分别为两粒子的垂直速度。

下一步是计算随机库仑碰撞后瞬间粒子的导心位置。在质心系下这很容易求出, 对同类粒子, 它由如下变换确定:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2} + \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2}{2} = \mathbf{V} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2} - \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2}{2} = \mathbf{V} - \frac{1}{2} \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (14.22)$$

$\odot \mathbf{B}$

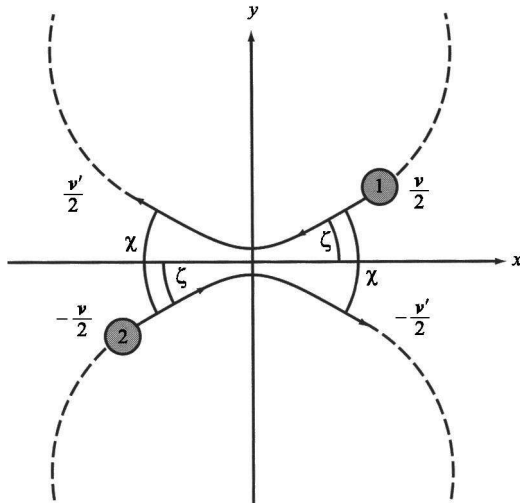


图 14.4 质心系下离子-离子碰撞的几何图像

(这里  $\zeta$  是相对速度与实验室系之间的夹角,  $\chi$  是随机散射角)

在以  $\mathbf{V}$  运动的质心系下,碰撞如图 14.4 所示。这里  $\mathbf{e}_\zeta = \mathbf{e}_x \cos \zeta + \mathbf{e}_y \sin \zeta$ , 其中  $\zeta$  是相对速度矢量方向与实验室坐标系方向之间的任意夹角,碰撞将粒子散射到随机角度  $\chi$  上。由于碰撞前后粒子有动量守恒和能量守恒,因此要求每个粒子以相同的角度  $\chi$  散射,且有  $v'^2 = v^2$ 。这里和以下不带撇和带撇的分别指碰撞前后的量。因此碰撞后粒子速度变换到实验室系下为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{V} + \frac{1}{2}(\mathbf{v} \cos \chi + \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} \sin \chi) \\ \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{V} - \frac{1}{2}(\mathbf{v} \cos \chi + \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} \sin \chi) \end{aligned} \right\} \quad (14.23)$$

实验室系下粒子的导心位置用质心速度可以写成:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{g1} &= \frac{1}{\omega_c} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{e}_z = \frac{1}{\omega_c} \left[ \mathbf{V} \times \mathbf{e}_z + \frac{1}{2} \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z \right] \\ \mathbf{r}_{g2} &= \frac{1}{\omega_c} \mathbf{v}_2 \times \mathbf{e}_z = \frac{1}{\omega_c} \left[ \mathbf{V} \times \mathbf{e}_z - \frac{1}{2} \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z \right] \\ \mathbf{r}'_{g1} &= \frac{1}{\omega_c} \mathbf{v}'_1 \times \mathbf{e}_z = \frac{1}{\omega_c} \left[ \mathbf{V} \times \mathbf{e}_z + \frac{1}{2} \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z \cos \chi + \frac{1}{2} v \sin \chi \right] \\ \mathbf{r}'_{g2} &= \frac{1}{\omega_c} \mathbf{v}'_2 \times \mathbf{e}_z = \frac{1}{\omega_c} \left[ \mathbf{V} \times \mathbf{e}_z - \frac{1}{2} \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z \cos \chi - \frac{1}{2} v \sin \chi \right] \end{aligned} \right\} \quad (14.24)$$

现在我们可以估算碰撞前后两粒子的质心位置了。由质心的标准定义式可导出下式:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{cm} &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{g1} + \mathbf{r}_{g2}) = \frac{2}{\omega_c} \mathbf{V} \times \mathbf{e}_z \\ \mathbf{r}'_{cm} &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}'_{g1} + \mathbf{r}'_{g2}) = \frac{2}{\omega_c} \mathbf{V} \times \mathbf{e}_z \end{aligned} \right\} \quad (14.25)$$

注意,这里消去了所有相对速度项。

下一步是计算每次碰撞的  $\Delta \mathbf{r}$ , 然后对所有碰撞平均。 $\Delta \mathbf{r}$  定义为两粒子碰撞前后质心位置矢量之差。于是有:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_{cm} - \mathbf{r}'_{cm} = 0 \quad (14.26)$$

显然,同种粒子间每次碰撞引起的质心位移均为零。正是基于这一点,随机行走模型预言同种粒子间的库仑碰撞不造成粒子扩散。

## 2. 不同种粒子分析

上述分析可用于不同种粒子的碰撞,但需做两点调整。首先,对每种粒子引入分离质量;其次,必须考虑相反电荷效应。类比于同种粒子分析得到的处理步骤罗列如下。



首先,质心坐标变换定义如下:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \frac{m_i \mathbf{v}_i + m_e \mathbf{v}_e}{m_i + m_e} - \frac{m_e}{m_i + m_e} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) = \mathbf{V} - \frac{m_e}{m_i + m_e} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_e &= \frac{m_i \mathbf{v}_i + m_e \mathbf{v}_e}{m_i + m_e} + \frac{m_i}{m_i + m_e} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) = \mathbf{V} + \frac{m_i}{m_i + m_e} \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (14.27)$$

质心系下的碰撞图像如图 14.5 所示。动量守恒和能量守恒同样要求两粒子的散射角  $\chi$  相同,且  $v' = v$ 。因此碰撞后粒子速度为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}'_i &= \mathbf{V} - \frac{m_e}{m_i + m_e} (\mathbf{v} \cos \chi + \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} \sin \chi) \\ \mathbf{v}'_e &= \mathbf{V} + \frac{m_i}{m_i + m_e} (\mathbf{v} \cos \chi + \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} \sin \chi) \end{aligned} \right\} \quad (14.28)$$

相应地,质量导心位置矢量可写为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{gi} &= \frac{1}{\omega_{ci}} \left[ \mathbf{V} \times \mathbf{e}_z - \frac{m_e}{m_i + m_e} \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z \right] \\ \mathbf{r}_{ge} &= -\frac{1}{\omega_{ce}} \left[ \mathbf{V} \times \mathbf{e}_z + \frac{m_i}{m_i + m_e} \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z \right] \\ \mathbf{r}'_{gi} &= \frac{1}{\omega_{ci}} \left[ \mathbf{V} \times \mathbf{e}_z - \frac{m_e}{m_i + m_e} (\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z \cos \chi + \mathbf{v} \sin \chi) \right] \\ \mathbf{r}'_{ge} &= -\frac{1}{\omega_{ce}} \left[ \mathbf{V} \times \mathbf{e}_z + \frac{m_i}{m_i + m_e} (\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z \cos \chi + \mathbf{v} \sin \chi) \right] \end{aligned} \right\} \quad (14.29)$$

这里  $\omega_{cj} = |e| B_0 / m_j$ , 考虑了电荷符号。

下一步同样是计算两粒子碰撞前后质心位置矢量之差  $\Delta \mathbf{r}$ :

$$\Delta \mathbf{r} = \frac{m_i \mathbf{r}_{gi} + m_e \mathbf{r}_{ge}}{m_i + m_e} - \frac{m_i \mathbf{r}'_{gi} + m_e \mathbf{r}'_{ge}}{m_i + m_e} \quad (14.30)$$

简单计算可得:

$$\Delta \mathbf{r} = -\frac{1}{\omega_{cr}} \left[ \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z (1 - \cos \chi) - \mathbf{v} \sin \chi \right] \quad (14.31)$$

这里,  $\omega_{cr} = eB_0 / m_r$ ;  $m_r = m_e m_i / (m_i + m_e)$  是约化质量。注意,对于不同种粒子的碰撞,即使质量相同,  $\Delta \mathbf{r}$  不为零。这种性质与异号电荷有关。

分析的最后一步是要求对所有碰撞和所有散射角进行平均,这里假定所有角都是等概率的。显然,如所预料,由碰撞平均(即对初始角  $\zeta$  进行平均)得  $\langle \Delta \mathbf{r} \rangle = 0$ 。

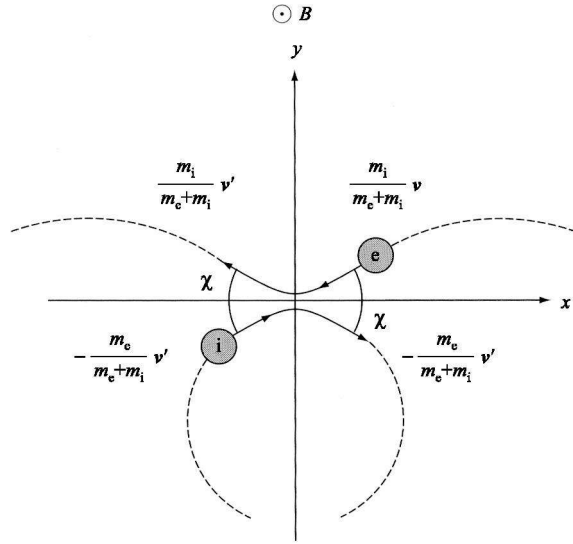


图 14.5 质心系下电子和离子碰撞的几何图像(注意,电子和离子的转动方向相反)

但散射步长与方均值有关:

$$(\Delta l)^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\zeta \int_0^{2\pi} d\chi (\Delta r)^2 \quad (14.32)$$

直接计算可得:

$$(\Delta l)^2 = 2 \frac{v^2}{\omega_{cr}} \approx 2 \frac{v^2}{\omega_{ce}} \quad (14.33)$$

利用速度  $v = |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i| \approx |\mathbf{v}_e| \sim (2T_e/m_e)^{1/2}$  的麦克斯韦分布函数,最后可得:

$$(\Delta l)^2 = 4 \frac{m_e T_e}{e^2 B_0^2} \quad (14.34)$$

利用碰撞平均时间  $\bar{\tau}_{ei} = (\nu_{ei})^{-1}$  很容易得到粒子扩散系数  $D_n$ , 这里  $\nu_{ei}$  是式 (9.110) 给出的动量交换碰撞频率。因此有:

$$D_n = \frac{(\Delta l)^2}{\bar{\tau}_{ei}} = 4 \frac{\nu_{ei} m_e T_e}{e^2 B_0^2} \sim \frac{r_{Le}^2}{\bar{\tau}_{ei}} \quad (14.35)$$

这就是要求的结果。根据定义,  $D_n$  的值包括电子和离子的作用, 因此两种成分是以相同的速率扩散, 这种现象称为双极扩散。物理上说, 两种成分必定一起扩散, 因为如果一种成分扩散得比另一种成分快, 那么就会出现大的电荷不平衡。这种电荷

不平衡将感应出电场,其方向所指使得跑得快的成分被拉回,跑得慢的成分被加速,最后变成二者以同一速度扩散。

更有趣的是, $D_n$  值要比原先不正确的估计值  $D_n \sim r_{Li}^2/\tau_{ii}$  小一个  $(m_e/m_i)^{1/2}$  因子。粒子扩散以较慢的时间尺度出现,也就是说,原本以为离子会扩散得较快,因为它们的回旋半径较大,因而每次碰撞后的步长较大。但实际上,离子-离子碰撞的质心在碰撞前后不变,因此原初的这种预期不成立。

### 3. 流体模型与数值计算结果的比较

为了检验随机行走模型的有效性,有必要将由式(14.35)求得的  $D_n$  值与流体模型的计算结果进行比较。为方便起见,现将流体模型结果复述如下:

$$D_n = \frac{2nT\eta_{\perp}}{B_0^2} \quad (14.36)$$

如果我们还记得  $\eta_{\perp} = m_e \bar{v}_{ei}/n e^2$ , 则流体模型给出的  $D_n$  值可写成:

$$D_n = 2 \frac{\bar{v}_{ei} m_e T}{e^2 B_0^2} \quad (14.37)$$

流体模型不同于随机行走模型之处仅在于相差一个不重要的数值因子“2”。这意味着流体模型是自洽的,能够自动给出粒子扩散是双极型这一事实。

最后,作为参考,我们将具体数值代入  $D_n$ , 这样它对密度、温度和磁场的定标关系就变得很明白了。布拉金斯基(Braginskii)在一篇经典文献中对此进行了精确计算,其中考虑了动理学效应。他的结果可以写成:

$$D_n = 2.0 \times 10^{-3} \frac{n_{20}}{B_0^2 T_k^{1/2}} \quad (\text{m}^2/\text{s}) \quad (14.38)$$

从  $D_n$  的流体模型[式(14.37)]可以得到与布拉金斯基相同的数值系数。我们注意到,  $D_n$  随  $T$  下降(较少的碰撞),随  $n$  上升(较频繁的碰撞),随  $B$  下降(小回旋半径情形)。

对于  $T_k = 15$ ,  $n_{20} = 1.5$ ,  $B_0 = 4.7$  的简单聚变反应堆情形,  $D_n = 3.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 。这个值相当乐观,比托卡马克实验测得的典型值  $D_n \sim 1 \text{ m}^2/\text{s}$  要小 5 个量级。造成这种差别的部分原因与环效应(新经典输运)有关,但最主要的是没考虑到等离子体驱动的微观湍流的影响。但不管怎么说,这种计算展示了如何运用随机行走模型,给出了直柱等离子体纯经典输运的参考值。

#### 14.2.4 磁化等离子体的热导

上一小节对粒子扩散的分析令人鼓舞:随机行走模型尽管简单,但是能够可靠地预言输运系数。现在我们将这一模型运用到研究热扩散问题上,以求得满足封闭

的自洽流体方程组所需的最后一个未知输运系数。与应用于粒子扩散情形一样,我们用二维碰撞模型来计算步长,其中粒子具有回旋轨道,并在每次碰撞后被散射到任意方向上。

基于与前述分析类似的考虑,乍一看我们会认为同种粒子碰撞不会导致热扩散。质心位置变动同样会抵消,由此说明不存在同种粒子的热扩散,这个结论也是错的!

理由如下。计算粒子扩散的正确方法是根据碰撞前后两粒子质心位置的变化来定义步长。但是对于热扩散,步长必须根据碰撞前后两粒子“能量中心”的变化来定义。因此,前述对同种粒子扩散的全部分析基本上仍有效,唯一的重大差别就是  $\Delta r$  的定义。热扩散的  $\Delta r$  定义为:

$$\Delta r = r_{cE} - r'_{cE} \quad (14.39)$$

这里,

$$\left. \begin{aligned} r_{cE} &= \frac{v_1^2 r_{g1} + v_2^2 r_{g2}}{v_1^2 + v_2^2} \\ r'_{cE} &= \frac{v_1'^2 r'_{g1} + v_2'^2 r'_{g2}}{v_1'^2 + v_2'^2} \end{aligned} \right\} \quad (14.40)$$

经过冗长但简单的计算,并代换所有的量得到用质心速度变量表示的  $(\Delta l)^2$ , 然后对角求平均,得到:

$$(\Delta l)^2 = \frac{2v^4 V^2}{\omega_c^2 (4V^2 + v^2)^2} \quad (14.41)$$

最后一步是对  $v_1$  和  $v_2$  或等价地对  $v$  和  $V$  求平均。由此得到对均值的合理估计:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_1^2 + v_2^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \sim 2v_T^2 \\ V^2 &= \frac{1}{4}(v_1^2 + v_2^2 + 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \sim \frac{v_T^2}{2} \end{aligned} \quad (14.42)$$

这里假定  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$  项的均值为零。由这个估计产生如下的步长方均值表达式:

$$(\Delta l)^2 = \frac{1}{4} \frac{v_T^2}{\omega_c^2} \quad (14.43)$$

再由碰撞的平均时间间隔,对离子是  $\tau_{ii} = (v_{ii})^{-1}$ , 对电子是  $\tau_{ee} = (v_{ee})^{-1}$ , 我们很容易估计出热扩散系数。由于  $\tau_{ij} = \tau_{ij}(v)$  是速度的函数,我们还可以通过定义  $\bar{\tau}_{ij} = \tau_{ij}(v_T)$  来得到对  $v$  的大致平均。由此,利用随机行走模型可以得到下列离子和电子的热扩散系数:

$$\left. \begin{aligned} \chi_i &= \frac{1}{4} \frac{v_{Ti}^2}{\omega_{ci} \tau_{ii}} \sim \frac{r_{Li}^2}{\tau_{ii}} \\ \chi_e &= \frac{1}{4} \frac{v_{Te}^2}{\omega_{ce} \tau_{ee}} \sim \frac{r_{Le}^2}{\tau_{ee}} \end{aligned} \right\} \quad (14.44)$$

我们注意到,电子热扩散系数与粒子扩散系数相当即  $\chi_e \sim D_n$ , 而离子热扩散系数则要大一个质量比方根因子:  $\chi_i \sim \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \chi_e$ 。在下一小节里可以证明,出现在输运方程[式(14.10)]里的单一的热扩散系数实际应为  $\chi = \chi_i + \chi_e \approx \chi_i$ 。在粒子扩散中出现的  $\Delta r$  值的显著抵消并不出现在热扩散中。这就是碰撞热扩散会远远大于粒子扩散的基本原因。

利用布拉金斯基更精确的系数可以得到热扩散系数的数值表达式(对 50%-50% 的 D-T 等离子体):

$$\left. \begin{aligned} \chi_i &= 0.10 \frac{n_{20}}{B_0^2 T_k^{1/2}} \quad (\text{m}^2/\text{s}) \\ \chi_e &= 4.8 \times 10^{-3} \frac{n_{20}}{B_0^2 T_k^{1/2}} \quad (\text{m}^2/\text{s}) \end{aligned} \right\} \quad (14.45)$$

对于主要的离子扩散系数,这个数值要比简单的随机行走模型导出的结果大一个 2.4 的因子。对于前述的简单聚变反应堆的参数值,可导出粒子热扩散系数为  $\chi = 1.8 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ 。这个值也过于乐观了,要比典型实验值  $\chi_i \sim 1 \text{ m}^2/\text{s}$  大 3 个数量级。

### 14.2.5 小结

上面给出了一维等离子体柱情形下的经典输运公式,见式(14.10)。该模型采用了低比压托卡马克展开的近似。它由一组闭合的关于密度、温度和极向磁场相互耦合的时间演化方程组成。粒子和磁场的扩散系数可以直接从流体方程和电子-离子动量的碰撞交换中取得。 $D_n$  和  $D_B$  的表达式由式(14.11)给定。热输运主要是离子的贡献,其主要机制是离子-离子碰撞。通过随机行走模型可得到对  $\chi$  的简单估计[式(14.44)]。与实验测量值相比,经典的粒子输运系数和热输运系数均过于乐观了,但它们毕竟提供了一种参考。

## 14.3 求解输运方程

上节导出的输运方程描述了由托卡马克圆环取直简化后的一维柱形等离子体

的经典输运。本节我们要利用这一模型给出几个具体问题的解析解。目的有两个：第一，详细了解如何将每个问题变成易解的形式，这个工作的意义在于由此得到的大多数概念都可以应用到更一般的环形位形中去，通常这种情形只能通过数值计算来求解；第二，所提出问题的答案都不是一目了然的。例如，尽管从量纲分析明显可知，任何扩散过程的特征弛豫时间尺度为  $\tau \approx a^2/D$ ，但仍有很多更微妙的问题需要回答。

本节讨论三个问题。第一个是温度平衡问题。截至目前，我们在所有分析里一直假定  $T_e \approx T_i = T$ 。现在我们要导出这一条件能够满足的定量判据。答案并不显然，因为  $\chi_e$  和  $\chi_i$  的值相差很大。

第二个问题与外部加热功率沉积分布对中心等离子体温度的作用有关。例如，高度离轴峰化的加热源是否会导致相应的离轴峰化的温度分布？

第三个问题是关于在仅有欧姆加热情形下一维模型的稳态解。这里是要确定，在无需外部辅助加热源的情形下，仅用欧姆加热方式加热到点火是否可行。这显然是一个高度期盼的情形。

### 14.3.1 温度平衡

作为研究温度平衡的模型问题，我们考虑二流体稳态能量方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r n \chi_e \frac{\partial T_e}{\partial r} \right] + S_e + \frac{3}{2} \frac{n(T_i - T_e)}{\bar{\tau}_{eq}} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r n \chi_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \right] - \frac{3}{2} \frac{n(T_i - T_e)}{\bar{\tau}_{eq}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.46)$$

这个模型相当于，电子受到源  $S_e$  加热；获得的能量由电子热传导损失和通过碰撞传递给离子的能量所平衡；离子没有外部加热源，它们通过与电子的能量交换而被加热，并通过离子热传导而损失能量。为了简单起见，这里忽略了压缩和对流效应，因为它们不是主要的。为了得到解析解，输运系数  $\chi_e$ 、 $\chi_i$  和  $\bar{\tau}_{eq}$  均视为常数，而且如果需要的话， $\chi_e$  和  $\chi_i$  的值取反常输运情形下的大值。类似地，我们还假定密度分布  $n(r)$  和热沉积分布  $S_e(r)$  也都是常数。

这个简化模型的目标是要求出电子和离子温度的平衡分布，然后得到电子和离子温度相等是好的近似的条件。具体来说，我们要确定满足下式的条件：

$$R \equiv \frac{T_e(0) - T_i(0)}{T_e(0) + T_i(0)} \ll 1 \quad (14.47)$$

这个解可以通过两步来取得。第一步，将方程加起来消去能量交换项：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} (n\chi_e T_e + n\chi_i T_i) \right] = -S_e \quad (14.48)$$

至于边界条件,我们要求在原点平坦,即  $T'_e(0) = T'_i(0) = 0$ ; 在  $r = a$  处有理想沉积条件  $T_e(a) = T_i(a) = 0$ 。这样,式(14.48)的解很容易求得:

$$n(\chi_e T_e + \chi_i T_i) = \frac{S_e}{4}(a^2 - r^2) \quad (14.49)$$

第二步是求  $T_i$  和  $T_e$ 。将上述解代入离子方程,经过简短的计算可得:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x \frac{\partial T_i}{\partial x} \right] - \alpha^2 T_i = \alpha^2 T_0 (1 - x^2) \quad (14.50)$$

这里,  $x = r/a$ , 且

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{3}{2} \left[ \frac{\chi_e + \chi_i}{\chi_e \chi_i} \right] \frac{a^2}{\bar{\tau}_{\text{eq}}} \\ T_0 &= \frac{1}{4} \frac{S_e a^2}{n(\chi_e + \chi_i)} \end{aligned} \right\} \quad (14.51)$$

利用修正的贝塞尔函数,可将满足边界条件的  $T_i$  (及  $T_e$ ) 的解写成:

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_i}{T_0} &= 1 - x^2 - \frac{4}{\alpha^2} \left[ 1 - \frac{I_0(\alpha x)}{I_0(\alpha)} \right] \\ \frac{T_e}{T_0} &= 1 - x^2 + \frac{4}{\alpha^2} \frac{\chi_i}{\chi_e} \left[ 1 - \frac{I_0(\alpha x)}{I_0(\alpha)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (14.52)$$

图 14.6 给出了  $\chi_i/\chi_e = 10$  和  $\alpha = 10$  情形下的这些分布。

现在我们来计算平衡参数  $R$ 。代入式(14.47)得:

$$R(\alpha, \chi_i/\chi_e) = \frac{(\chi_i/\chi_e + 1)F(\alpha)}{2 + (\chi_i/\chi_e - 1)F(\alpha)} \quad (14.53)$$

这里,

$$F(\alpha) = \frac{4}{\alpha^2} \left[ 1 - \frac{1}{I_0(\alpha)} \right] \approx \frac{4}{4 + \alpha^2} \quad (14.54)$$

最后的约等号表示的近似表达式对小  $\alpha$  和大  $\alpha$  都成立。注意,当  $\alpha \gg 2$  时,  $F \ll 1$ , 且  $F(\alpha)$  是一个递减函数。

对于比值  $\chi_i/\chi_e$  的不同的值,电子和离子热平衡的条件可由式(14.53)来确定。

具体来说,条件  $R \ll 1$  确立了  $\alpha^2$  的必要条件(见表 14.1)。由表 14.1 可知,对于  $\chi_i/\chi_e$  的所有值,  $\alpha^2$  的条件具有如下简单形式:

$$\alpha^2 \gg 2 \frac{\chi_i + \chi_e}{\chi_e} \quad (14.55)$$

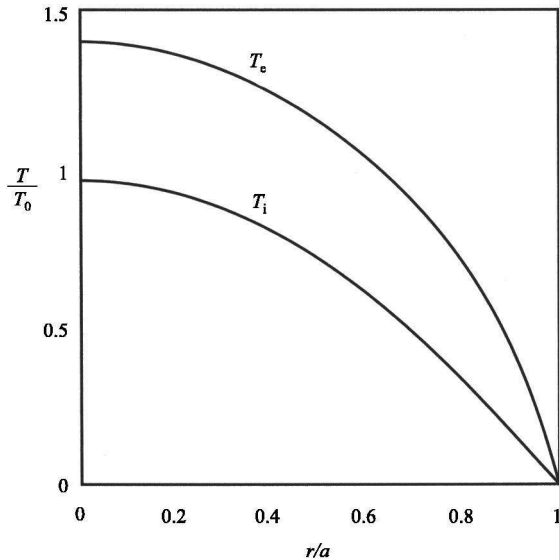


图 14.6  $\alpha = 10, \chi_i/\chi_e = 10$  情形下  $T_e$  和  $T_i$  对  $r/a$  的分布

表 14.1 确保  $R \ll 1$  条件成立的  $\alpha^2$  与  $\chi_i/\chi_e$  的关系

$\chi_i/\chi_e$ 的范围	$R = R(F)$	$R = R(\alpha, \chi_i/\chi_e)$	$R \ll 1$ 的条件
$\chi_i/\chi_e \gg 1$	$R \approx \frac{F}{F + 2\chi_e/\chi_i}$	$R \approx \frac{4}{4 + 2\alpha^2 \chi_e/\chi_i}$	$\alpha^2 \gg 2\chi_i/\chi_e$
$\chi_i/\chi_e = 1$	$R = F$	$R \approx \frac{4}{4 + \alpha^2}$	$\alpha^2 \gg 4$
$\chi_i/\chi_e \ll 1$	$R \approx \frac{F}{2 - F}$	$R \approx \frac{2}{2 + \alpha^2}$	$\alpha^2 \gg 2$

在非归一化单位下,式(14.55)可简化为:

$$\bar{\tau}_{\text{eq}} \ll \frac{3a^2}{4\chi_e} \quad (14.56)$$

物理上说,如果平衡时间  $\bar{\tau}_{\text{eq}}$  远小于离子的能量约束时间  $a^2/\chi_e$ , 那么就能够达到电子和离子的温度平衡。电子的能量约束时间  $a^2/\chi_e$  对芯部的最终温度有很强的影响。但不管中心温度是多少,只要离子不过快地通过离子热传导将电子传递来



的能量损失掉,那么电子和离子就能达到热平衡。

现在要问,在大多数等离子体实验中中式(14.56)是否满足?对于经典扩散,我们有  $\bar{\tau}_{eq} \sim (m_i/m_e)\bar{\tau}_{ei}$ ,  $\chi_i \sim r_{Li}^2/\bar{\tau}_{ii}$  和  $\bar{\tau}_{ii} \sim (m_i/m_e)^{1/2}\bar{\tau}_{ei}$ 。这样平衡方程简化为:

$$\frac{a^2}{r_{Li}^2} \gg \left[ \frac{m_i}{m_e} \right]^{1/2} \quad (14.57)$$

这个条件在大多数实验中均是满足的。但是,当  $\chi$  是反常的时候,这个条件就很难满足。在此情形下,利用式(9.119)的  $\bar{\tau}_{eq}$  值,我们可以将平衡条件重写为:

$$n_{20} \gg 0.017 \frac{T_k^{3/2} \chi_i}{a} = 0.25 \chi \quad (14.58)$$

这里等号后的值对应于简单聚变堆 ( $a = 2$ ,  $T_k = 15$ ) 情形。对于聚变堆,  $n_{20} = 1.5$  已足够大,假定  $\chi \sim 1 \text{ m}^2/\text{s}$  (当前托卡马克的典型实验值),那么这个条件是能够满足的。有意思的是,目前的大部分托卡马克通常运行在较低密度 ( $n_{20} \sim 0.5$ ) 下,因此电子和离子热平衡条件仅仅勉强得到满足。

最后,我们讨论在电子和离子达到良好的热平衡条件下单个能量方程的推导。数学上看,这种平衡意味着  $\bar{\tau}_{eq} \rightarrow 0$  以及  $T_i \rightarrow T_e$ 。因此每个方程里的能量平衡项都变得不确定 [ $(T_e - T_i)/\bar{\tau}_{eq} \rightarrow 0/0$ ]。这个困难可通过加上能量方程以严格抵消平衡项并令  $T_e = T_i = T$  来解决。由此得到单个的能量方程:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r n (\chi_e + \chi_i) \frac{\partial T}{\partial r} \right] + S_e = 0 \quad (14.59)$$

我们看到,最后得到的这个方程在热传导损失和加热源项之间取得了平衡。热扩散系数正是各项的和 ( $\chi = \chi_e + \chi_i \approx \chi_i$ ),并且由最大贡献项(通常是离子)主导。

以上分析表明,当考察聚变级等离子体的行为时,可以用单一的能量方程。

### 14.3.2 加热分布对芯部温度的影响

下面我们来研究外部加热源的分布对等离子体峰值温度和温度分布的影响。我们主要关心高度局域性的离轴加热源是否会造成相应的峰值离轴的温度分布。要回答这个问题,有两点必须考虑:第一,计算空间均匀的加热源的温度分布;第二,用  $\delta$  函数从数学上拟合具有相同总功率但空间上高度局域的离轴加热源进行重复计算。通过对这两个解的比较来给出答案。

已取得很好热平衡的等离子体可用如下稳态能量方程来描述:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r n \chi \frac{\partial T}{\partial r} \right] = -S(r) \quad (14.60)$$

如前所述,这里对流、压缩均忽略, $n$ 和 $\chi$ 均视同常数。

首先,假定等离子体对总功率 $P_h$ 的吸收在整个截面上是均匀的。设等离子体体积为 $V = 2\pi^2 a^2 R_0$ ,则在此情形下, $S(r) = P_h/2\pi^2 a^2 R_0 = \text{常数}$ 。同样,边界条件要求在原点平坦,并在 $r = a$ 处有理想热沉积: $T'(0) = 0, T(a) = 0$ 。于是输运方程的解很容易求出:

$$T = T_0 \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} \right] \quad (14.61)$$

其中,

$$T_0 = \frac{P_h}{8\pi^2 n \chi R_0} \quad (14.62)$$

我们看到,温度分布随半径下降。为了估计峰值因子,我们将其定义为峰值温度 $T_0$ 的半径与平均温度 $\bar{T}$ 之比,这里,

$$\bar{T} = \frac{2}{a^2} \int_0^a T(r) r dr \quad (14.63)$$

对于常数型加热分布情形,峰值因子的值为:

$$T_0/\bar{T} = 2 \quad (14.64)$$

这个结果可用作参考值。下一步是计算局域离轴热源的温度分布,这种加热源可用一个 $\delta$ 函数来拟合:

$$S(r) = K\delta(r - \alpha a) = \frac{P_h}{4\pi^2 R_0 a \alpha} \delta(r - \alpha a) \quad (14.65)$$

注意,热源的峰值位置为 $r = \alpha a$ ,其中, $0 < \alpha < 1$ 。 $\delta$ 函数的系数仍由等离子体吸收的总功率 $P_h$ 确定。

通过分别在 $\delta$ 函数两边区域中求解式(14.60),并令温度在界面 $r = \alpha a$ 上连续,即可求得温度分布。对于 $0 \leq r \leq \alpha a^-$ 区域,解在 origin 平坦,故有:

$$T = C_1 \quad (14.66)$$

这里, $C_1$ 是待定系数。对于 $\alpha a^+ \leq r \leq a$ 区域,满足 $r = a$ 处理想沉积条件的解为:

$$T = C_2 \ln(a/r) \quad (14.67)$$

这里, $C_2$ 也是待定系数。

下一步,在界面 $r = \alpha a$ 上必须满足两个匹配条件。首先,温度应连续,因此有

$C_2 \ln(1/\alpha) = C_1$ ; 其次,  $\delta$  函数的积分产生一个热流阶跃条件, 由此得到:

$$\left[ r n \chi \partial T / \partial r \right]_{\alpha a^-}^{\alpha a^+} = - \int_{\alpha a^-}^{\alpha a^+} K \delta(r - \alpha a) r dr = - P_h / 4 \pi^2 R_0 \quad (14.68)$$

由每个区域中的分布很容易求出这个温度导数, 故有:

$$C_1 = \frac{P_h \ln(1/\alpha)}{4 \pi^2 n \chi R_0} = 2 T_0 \ln(1/\alpha) \quad (14.69)$$

其中  $T_0$  由式(14.62)确定。

由此得到温度分布:

$$\left. \begin{aligned} T &= 2 T_0 \ln(1/\alpha) & 0 \leq r \leq \alpha a^- \\ T &= 2 T_0 \ln(a/r) & \alpha a^+ \leq r \leq a \end{aligned} \right\} \quad (14.70)$$

图 14.7 给出了  $\alpha = 0.5$  情形下解的图像。由图可知, 即使加热源的峰值分布很陡, 等离子体的温度分布也没有峰。物理上分析其原因如下。最初, 加热源分布的确产生一个峰值的离轴温度分布。随后热开始从源沿两方向扩散。在等离子体边界, 热能因沉积(sink)边界条件而被吸收, 但在芯部不存在热沉积, 只有热聚集。在稳态情形下, 中心区沿任何方向都不存在净能流, 故达到平衡, 相当于均匀温度分布。

最后, 我们来比较一下两种情形下的温度峰值因子。对于局域热源, 峰值因子很容易估算, 表达式为:

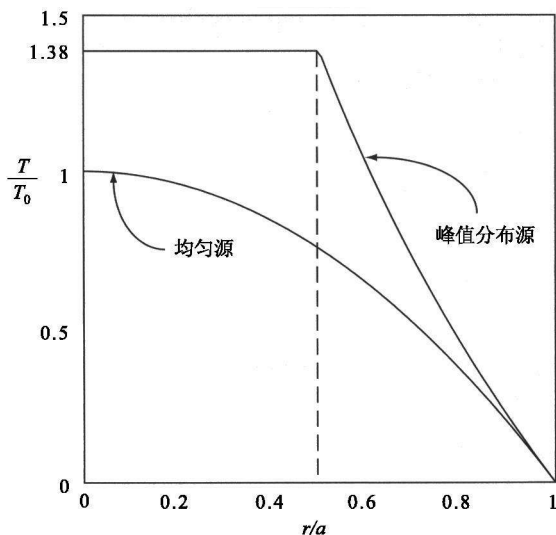


图 14.7 均匀的和峰值分布的加热源形成的温度分布

$$\frac{T(0)}{\bar{T}} = \frac{2\ln(1/\alpha)}{1 - \alpha^2} \quad (14.71)$$

峰值因子对  $\alpha$  的函数关系如图 14.8 所示。我们注意到,与加热分布的巨大差异相比,两种情形下峰值因子之间的差异并不大。

由此得到的主要结论是:尽管等离子体平均温度直接依赖于总的加热功率(即  $\bar{T} \sim P_h$ ),但实际温度分布对加热功率分布是相当不敏感的(除非是特殊的极限  $\alpha \rightarrow 0$  情形下)。

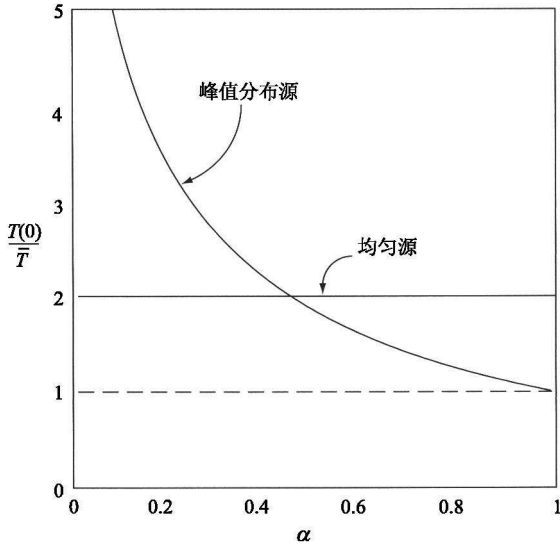


图 14.8 峰值因子对归一化位置半径的函数关系

### 14.3.3 欧姆加热到点火

节要讨论的最后一个问题是:是否有可能在无外部加热功率源的条件下将等离子体加热到点火?从聚变工程的角度看,能做到这一点是相当诱人的。在本节里,我们在经典输运的框架下讨论这一问题,得到的结果比起实际的实验结果要乐观得多。尽管如此,我们不妨将其作为一个好的参照,并用来展示寻求输运方程近似解的过程。

计算的目标是要确定将等离子体加热到 7 keV 的半点火温度需要多大的欧姆加热功率。计算中忽略了  $\alpha$  粒子加热贡献,这在低温下是一种好的近似,虽然一旦温度达到 7 keV,  $\alpha$  粒子加热将取代欧姆加热,后者的贡献可忽略。在单纯的欧姆加热情形下,我们还可以计算另一些等离子体参数,包括等离子体电流  $I$ , 等离子体压强  $p$ , 等离子体比压  $\beta$ , 安全因子  $q$  和能量约束时间  $\tau_E$ , 这些值均可用来与工程上和

等离子体物理上的约束条件相比较。分析表明,在经典输运假定下,通过欧姆加热到点火是可能的,虽然进一步的研究表明这一结论是喜忧参半。

### 1. 模型

欧姆加热模型可用前一节里导出的一组完整的一维柱体输运方程来表示。为简单起见,我们再次假定等离子体处于稳态,并忽略压缩和对流等过程。此外,为了避免求解耦合微分方程,这里假定等离子体密度是均匀的: $n = \text{常数}$ 。这样我们就可以从计算中去掉密度方程来简化分析,这是一种实验上可接受的假设<sup>1)</sup>。由此欧姆加热模型简化为:

$$\left. \begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{D_B}{r} \frac{\partial (rB_\theta)}{\partial r} \right] &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rn \chi \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \eta_{\parallel} J^2 &= 0 \\ \mu_0 J &= \frac{1}{r} \frac{\partial (rB_\theta)}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (14.72)$$

注意,加热源相应于欧姆功率耗散项。

现在的任务是将这组方程化简为一个关于温度的二阶微分方程。第一步是对磁场方程进行积分,我们知道, $D_B = \eta_{\parallel} / \mu_0 \sim 1/T^{3/2}$ 。因此有:

$$D_B J = \text{常数} \quad (14.73)$$

或

$$J = K \frac{\mu_0}{\eta_{\parallel}} = J_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \quad (14.74)$$

其中, $J_0, T_0$ 均为取磁轴上值的常数。它们暂时是未知的,但最终将与等离子体电流  $I$  和设定的平均温度  $\bar{T} = 7 \text{ keV}$  联系起来。

下一步是将  $J$  的表达式代入能量方程,其中  $\chi \approx \chi$  的经典值由式(14.45)给定。经过简单计算,可得归一化温度  $U = T / T_0$  的微分方程为:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x}{U^{1/2}} \frac{\partial U}{\partial x} \right] + 2\alpha U^{3/2} = 0 \quad (14.75)$$

其中, $x = r/a$ ;  $\alpha$ 是按如下定义(实用单位制下)的无量纲数:

1) 在更复杂的分析中,可以将密度考虑进来,但是这时需要非常仔细地考虑边界条件,并需要在处理  $r = a$  附近区域时对物理模型做出更切合实际的调整。这是因为如果采用理想化沉积边界条件, $\chi$ 中会出现不定比值。

$$\alpha = 10.3 \left[ \frac{B_0 J_{M0} a}{\bar{n}_{20} T_{k0}} \right]^2 \quad (14.76)$$

其中,  $T_{k0} = T_0$  (keV);  $J_{M0} = J_0$  (MA/m<sup>2</sup>)。

模型简化的最后一步是引入新的独立变量  $V = U^{1/2}$ 。于是式(14.75)简化为:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \alpha V^3 = 0 \quad (14.77)$$

边界条件同样要求在原点满足平坦分布,在等离子体边界满足汇条件:  $V'(0) = 0$ ,  $V(1) = 0$ 。归一化条件  $V(0) = 1$  是额外的约束,只是在选取适当的  $\alpha$  值时才满足。实际上,分析的下一步是要确定  $V(x)$  的近似解以及相应的  $\alpha$  值。一旦  $V(x)$  和  $\alpha$  值已知,则所有待定的欧姆加热等离子体的性质就都很容易确定了。

## 2. 问题的近似解

式(14.77)是非线性微分方程,没有简单的闭合形式解。虽然可以对它进行数值求解,但从提高物理认识上来看未必是最佳的。这里我们采用一种不同的处理来得到近似解。这种方法是基于数学上的两点考虑。第一,  $V(x)$  的解在定性上应是简单的,它从原点处的值 1 出发单调减到等离子体边界处的零;第二,所有物理量都是由对  $V(x)$  的不同函数进行等离子体体积分得到的。由于涉及的是积分值,因此结果应对  $V(x)$  的具体分布不是十分敏感。

按这种数学观点,采用矩方法就足以精确求得所要的解。具体来说,我们可将  $V(x)$  的分布近似为:

$$V(x) = (1 - x^2)^v \quad (14.78)$$

其中  $v$  是待定参数。显然,定性上看,  $V(x)$  具有精确解所应具备的函数性态。

$v$  和  $\alpha$  的值可通过要求这一微分方程满足低阶矩来确定。这些矩的定义如下:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 V \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \alpha V^3 \right] x dx &= 0 \\ \int_0^1 x^2 V \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \alpha V^3 \right] x dx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.79)$$

虽然这里矩方程的选择不是唯一的,但用低阶矩足以把握精确解的主要宏观性质。

将  $V(x)$  的近似分布代入式(14.79),我们得到两个关于未知量  $v$  和  $\alpha$  的相互耦合的代数方程。解此代数方程即可得到二者的值:

$$v = 2, \quad \alpha = 12 \quad (14.80)$$

下面我们就用这两个值来推导待求的欧姆加热等离子体的物理性质。

### 3. 解的物理性质

首先考虑温度的近似分布。从  $v = 2$  的值和关系  $U = V^2$  我们有：

$$T_k(r) = T_{k0}(1 - r^2/a^2)^4 \quad (14.81)$$

注意,这是一个陡峭的峰值分布,它是在等离子体边界  $\chi \sim T^{-1/2} \rightarrow \infty$  的结果。高热导率总是使边界附近温度分布变得平坦,从而使得分布中心的峰变得愈发陡峭。对峰的量度可采用峰值因子,它定义为峰值对平均温度的比值。平均温度定义如下：

$$\bar{T}_k = 2 \int_0^1 T_k x dx = T_{k0}/5 \quad (14.82)$$

因此峰值因子为  $T_{k0}/\bar{T}_k = 5$ 。 $\bar{T}_k$  的未来值可设定为  $\bar{T}_k = 7 \text{ keV}$ , 这是欧姆加热到点火的目标温度。

其次,我们来考虑电流密度分布。它要比温度分布更加峰化：

$$J_M(r) = J_{M0}(1 - r^2/a^2)^6 \quad (14.83)$$

其中,常数  $J_{M0}$  可用如下的总等离子体电流定义式来表示：

$$I_M = 2\pi a^2 \int_0^1 J_M x dx = \pi a^2 J_{M0}/7 \quad (14.84)$$

因此,  $J_{M0} = 7I_M/\pi a^2$ 。

这些结果加上  $\alpha = 12$ , 即得到所需的等离子体电流与期望的欧姆加热温度之间的关系：

$$I_M = \left[ \frac{\alpha}{2.05} \right]^{1/2} \frac{a \bar{n}_{20} \bar{T}_k}{B_0} = 2.4 \frac{a \bar{n}_{20} \bar{T}_k}{B_0} = 10.7 \quad (\text{MA}) \quad (14.85)$$

我们看到,对于经典输运,电流与温度之间呈线性关系。最后等式给出的数值对应于如下简单反应堆的设计参数值： $n_{20} = 1.5$ ,  $a = 2$ ,  $R_0 = 5$ ,  $B_0 = 4.7$ 。现在我们可以问  $q_*$  的值是否高到足以抑制磁流体力学不稳定性。 $q_*$  的值为(假定拉长比  $\kappa = 2$ )：

$$q_* = \frac{2\pi a^2 \kappa B_0}{\mu_0 R_0 I} = 5 \frac{a^2 \kappa B_0}{R_0 I_M} = 3.5 \quad (14.86)$$

这个值明显高于激发气球-扭曲模的极限值。换句话说,在经典输运条件下,托卡马克达到  $7 \text{ keV}$  温度所需的欧姆加热电流远低于不稳定阈值,这的确是个可喜的结论。

下面考虑等离子体压强和  $\beta$  值。二者的平均值很容易算得如下：

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= 2\bar{n}\bar{T} = 0.32\bar{n}_{20}\bar{T}_k = 3.4 \quad (\text{atm}) \\ \bar{\beta} &= 2\mu_0\bar{p}/B_0^2 = 0.25\bar{p}_a/B_0^2 = 0.038 \end{aligned} \right\} \quad (14.87)$$

这些值只是我们预期在 7 keV 下的值,即等离子体完全点火后稳态运行时的 15 keV 的一半条件下的值。可以看到,这里的  $\bar{\beta}$  也低于磁流体力学不稳定性的阈值。

现在我们来计算要达到 7 keV 所需的总的欧姆加热功率,并将其与反应堆输出的正常电功率 1000 MW 进行比较。欧姆加热功率定义为:

$$P_\Omega = \int \eta_{\parallel} J^2 dr \quad (14.88)$$

利用关系  $\eta_{\parallel} = 3.3 \times 10^{-8} / T_k^{3/2} \Omega \cdot \text{m}$  即可求得:

$$P_\Omega = 4.1 \times 10^{-2} \frac{R_0 I_M^2}{a^2 T_k^{3/2}} = 0.32 \quad (\text{MW}) \quad (14.89)$$

由此可见,与电输出功率相比,所需的欧姆加热功率并不大。这是等离子体约束好到只存在经典输运情形下的结果。也就是说,如果等离子体状态好到能够约束住其热能(即  $\chi$  很小),那么只需很少一部分欧姆加热功率即可将等离子体加热到高温。显然,对  $P_\Omega$  的很低需求是我们期待的结果。

我们感兴趣的最后一个参数,即用来衡量约束好坏的指标,是能量约束时间  $\tau_E$ 。这个量可通过对能量平衡方程[式(14.72)]进行等离子体体积分来定义:

$$P_\Omega = -4\pi^2 R_0 a n \chi \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_a \equiv \frac{3}{2} \frac{\int p dr}{\tau_E} \quad (14.90)$$

我们看到,能量约束时间可根据流过等离子体边界的热流量来确定。如果我们确切知道等离子体温度分布,那么通过简单计算其边界导数即可求得所需的  $\tau_E$  的值。但是,前面计算中所用的近似分布很难用来求  $\tau_E$ ,那样的话将导致  $\tau_E = \infty$ 。利用近似平衡解的一种好得多的方法是利用对分布不敏感的积分关系。因此,用式(14.90)来计算能量约束时间是一种好的选择:

$$\tau_E = \frac{3}{2} \frac{p\bar{V}}{P_\Omega} = 23 \frac{a^4 \bar{n}_{20} \bar{T}_k^{5/2}}{I_M^2} = 6.3 \times 10^2 \quad (\text{s}) \quad (14.91)$$

经典约束理论预期,能量约束时间将超过 600 s,这比当前的实验值乐观得多。

最后应指出,实际上,在密度、电流、环向磁场和磁约束位形确定后, $\tau_E$  经常被用来预言实验所达到的温度。作为输运理论的另一种应用,在当前情形下,温度通常通过式(14.85)而从  $\tau_E$  中约去,这样导出的表达式就只与实验可直接控制的参



数有关。对于仅存在经典输运的约束情形,  $\tau_E$  的新形式可以写成:

$$\tau_E = 2.6 \frac{a^{3/2} B_0^{5/2} I_M^{1/2}}{n_{20}^{-3/2}} \quad (\text{s}) \quad (14.92)$$

在与实验测得的实际值进行比较时, 能量约束时间的这种形式是非常有用的。

#### 4. 过度约束并不是好事

迄今为止的分析似乎表明, 经典约束加欧姆加热就可以得到我们梦寐以求的聚变反应堆。然而, 进一步研究表明, 过度约束其实并不是好事。

可以有几种思路来理解这个问题。这个问题实质是过度约束将导致很大的  $p\tau_E$  值。对于上述经典约束情形, 7 keV 下的  $p\tau_E$  值是  $2.1 \times 10^3 \text{ atm s}$ 。这要比以  $\alpha$  功率平衡热导损失为特征的等离子体稳态平衡下的  $p\tau_E$  值大 200 多倍。具体地说就是,  $\alpha$  粒子放出的热要比热传导损失的大得多。这种状况一旦出现, 等离子体就将不断地被加热到更高的温度, 从而使得等离子体压强和功率密度均持续攀升。这样很快就会超出稳定性所允许的临界等离子体  $\beta$  值, 壁能承受的最大中子负荷极限也将遭到破坏。

另一种办法是降低等离子体数密度, 由此使得  $p\tau_E$  值降到稳态点火所需的值:  $p\tau_E \approx 8.3 \text{ atm s}$ 。但这种做法的困难是, 降低数密度相当于降低等离子体压强, 这反过来又导致功率密度的降低。而在功率密度大大降低的情形下, 要维持同样的总功率输出, 就需要更大的等离子体体积。这样, 更大的反应堆将导致单位输出功率需要更高的发电成本, 这是我们所不愿看到的。

还有另一种办法, 就是用改善约束来减小等离子体体积。由于  $\tau_E \sim a^2/\chi$ , 因此我们可以减小等离子体体积直到  $\tau_E$  值短到仅需满足稳态功率平衡即可。但是如果压强以及相应的功率密度维持不变 (即  $p \sim 7 \text{ atm}$ ), 那么总的输出功率就会降低, 因为等离子体体积减小了。即便如此, 反应堆体积还是很大, 因为包层和屏蔽的厚度必须保持在  $b = 1.2 \text{ m}$ , 这个值是由核物理而非等离子体物理决定的。这样, 净效果仍然是因为包层和屏蔽的低效运用而使得单位发电的成本提高了。提高等离子体压强也无助于缓解这一问题, 因为这会使  $\beta$  值超出磁流体力学稳定性极限, 使得中子通量超出壁负载的极限。

当然, 我们的这些讨论要除去一种例外情形, 那就是如果采用像 D-D 这样的先进燃料, 由于它的聚变反应截面要比 D-T 的小得多, 这就意味着等离子体点火需要更高的  $p\tau_E$  值。

上述讨论表明, 不论哪种情形, 都不存在一种明确的方法可以实现 D-T 聚变反应堆的甚长的能量约束时间。同时我们又知道, 当前聚变研究的很大一部分工作就是寻求如何提高能量约束时间。其实这二者之间并不矛盾, 因为目前实验取得的能量约束时间还短于反应堆所需的值。但一旦实现了反应堆所需的能量约束时间, 我

们就没有理由再来大幅度提高  $\tau_E$  值了。

### 14.3.4 小 结

在经典输运框架下,我们借助一维圆柱模型解决了若干能量扩散的问题。这些问题包括:温度平衡、加热分布效应和欧姆加热到点火等。由于能量损失是聚变堆级等离子体的主要损失机制,因此所有这些问题都集中反映在能量输运方程上。

分析表明:①电子和离子的能量平衡要求离子能量约束时间必须长到可与能量平衡时间相比;②温度分布对加热分布的依赖关系不大;③如果仅考虑经典输运,我们很容易通过欧姆加热将等离子体加热到点火,虽然从反应堆的角度看,过度约束实际上并不有利。

理想化的经典输运模型对实验能够取得的  $\chi$  过于乐观了,但不管怎么说,这个估计可作为一个有用的参考。下一节我们将在模型里加入更切实际的因素,因此理论预期与实验数据也更加接近。

## 14.4 新经典输运

### 14.4.1 概 述

新经典输运是一种包括了环形几何因素的经典输运。输运仍是纯粹由库仑碰撞驱动——即仍不考虑由等离子体微观不稳定性引起的反常输运。新经典输运理论的发展堪称等离子体动理学理论完美而复杂的分析的结果。其最终得到的模型相当完备。它是一种二流体描述,包括了电阻率、黏滞性和热传导等因素。这一模型对任意碰撞区间均适用。

本节包含对新经典输运中与聚变反应堆最相关的几个重要特征量的推导。其中包括粒子扩散系数、热扩散系数以及自举电流的产生。分析将不采用求解复杂的动理学方程的方法,而代之以用导心理论和随机行走模型。此外,分析仍将只针对大环径比、圆截面和低碰撞率的情形。

乍一看,我们可能会以为,在大环径比极限情形下,环效应可以简单地在圆柱模型结果上添加  $r/R_0$  修正即可。这是一个不正确的结论。实际上可能出乎你的预料,新经典效应将等离子体输运系数的大小提高了近乎两个量级。定性上,其原因可以解释如下。在圆柱系统下,粒子被约束在磁面的回旋半径尺度内,因此相应的步长由库仑碰撞决定,仅在回旋半径量级上。而在环形系统中,粒子因为环向  $B$  漂移和曲率漂移的关系漂离磁面,这种漂移引起的径向偏离会远大于回旋半径,从而使得碰撞步长加大,输运系数也相应增大。更令人惊奇的是,少量俘获粒子引起的输运实际上要比大量通行粒子(即非俘获粒子)引起的输运更显著。

下面我们用随机步长方法导出粒子和热的输运系数。首先考察通行粒子引起

的输运,随后是俘获粒子引起的输运,最后,我们导出非常重要的自举电流,这在简单柱形系统下是没有的。自举电流对于降低托卡马克电流驱动的要求是非常重要的,其性质与第 11 章中讨论的磁化电流密切相关。

### 14.4.2 通行粒子引起的新经典输运

我们可以用随机行走模型来计算环形几何下通行粒子引起的新经典输运。这里的关键是求得粒子导心漂离磁面的平均步长。

为此,我们来考虑图 14.9 所示的大环径比圆截面托卡马克。图中画出了磁面和两种通行粒子的导心轨道。我们知道,对于托卡马克,  $B \approx B_0(R)$ , 因此  $\nabla B$  漂移和曲率漂移均在  $\mathbf{e}_z$  方向,也就是说,离子的导心漂移总是在向上的正方向。现在,假定磁场线的倾角是正的,则具有正  $v_{\parallel}$  的粒子从  $\theta = 0$  的位置出发后画出一个类似圆的轨道,其半径要稍大于它初始所在的磁面的半径。类似地,在同一磁场下,具有负  $v_{\parallel}$  的粒子也画出一个较小的圆轨道。我们还注意到,轨道是闭合的,所有这些结果都可以用正则环向动量守恒严格地推导出来。

按照输运理论,如果粒子经历了  $90^\circ$  偏转的弹性碰撞,速度改变为  $v_{\parallel} \rightarrow -v_{\parallel}$ ,那么其轨道就会从一个磁面跳到另一个磁面上。这些磁面的平均半径要相差一个相当于径向偏离磁面的量:  $\Delta r = r_i - r_f$ 。显然,  $\Delta r$  代表了环形几何下径向输运的恰当的步长。

我们通过以下步骤来计算  $(\Delta l)^2 = \langle (\Delta r)^2 \rangle$  的值。首先,我们需要定义时间  $\tau_{1/2}$ ,它表示粒子完成极向截面上半迁移的时间。其次,在  $\tau_{1/2}$  时间内,由于存在  $\nabla B$  漂移和曲率漂移,粒子以其导心漂移速度  $v_D$  漂离磁面,因此相应的径向偏离距离为  $\Delta r \sim v_D \tau_{1/2}$  量级。第三,对所有碰撞求平均得到待求的步长。具体计算如下。

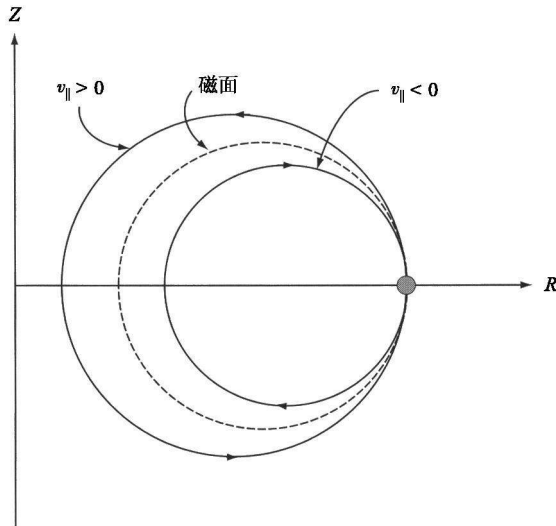


图 14.9 两种通行粒子(一种  $v_{\parallel} > 0$ , 另一种  $v_{\parallel} < 0$ )的导心轨道的极向投影

### 1. 半迁移时间

粒子进行半迁移的时间为  $\tau_{1/2} = l/v_{\parallel}$ , 这里  $l$  是粒子沿极向走过  $l_p = \pi r$  弧长所对应的径向距离。对于大环径比托卡马克有:

$$dl/B \approx dl/B_0 \approx dl_p/B_0 \quad (14.93)$$

因此,

$$l(r) \approx \frac{B_0}{B_0(r)} l_p = \frac{B_0}{B_0(r)} \pi r = \pi R_0 q(r) \quad (14.94)$$

因此对应的半迁移时间为:

$$\tau_{1/2}(r) = l/v_{\parallel} = \pi R_0 q/v_{\parallel} \quad (14.95)$$

### 2. 径向偏离

下一步是计算粒子对磁面的径向偏离。在托卡马克里, 由主要是环向磁场(基本上可视为真空磁场)引起的  $\nabla B$  漂移和曲率漂移可以写成:

$$v_D = \frac{m_i}{e} \left[ v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right] \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B} \approx \frac{1}{\omega_{ci} R_0} \left[ v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right] (\mathbf{e}_r \sin\theta + \mathbf{e}_\theta \cos\theta) \quad (14.96)$$

为简单起见, 这里粒子设为正离子。假定粒子轨道从某个任意初始角  $\theta = \theta_0$  开始(即不必从  $\theta = 0$  开始), 轨道由  $\theta(t) = \omega_r t + \theta_0$  确定, 这里  $\omega_r = \pi/\tau_{1/2}$  是全迁移频率。相应的径向速度分量为:

$$v_{Dr}(t) \approx |v_{Dr}| \sin(\omega_r t + \theta_0) \quad (14.97)$$

其中,

$$|v_{Dr}| = \frac{1}{\omega_{ci} R_0} \left[ v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right] \quad (14.98)$$

可以预料, 这个速度的符号是不断变换的, 一半时间向等离子体轴运动, 一半时间做离开等离子体轴的运动。

假定粒子初始位置为  $r = r_0$ , 通过积分  $\dot{r} = v_{Dr}$  即可得导心的径向位置。如果  $v_{\parallel}$  和  $v_{\perp}$  在通行粒子的一个轨道周期内变化不大, 则可得:

$$r(t) \approx r_0 - \frac{|v_{Dr}|}{\omega_r} [\cos(\omega_r t + \theta_0) - \cos(\theta_0)] \quad (14.99)$$

式(14.99)表明, 粒子的径向位置在时间上是围绕一个平均值振荡的, 这个均值对应于粒子导心所在磁面的半径  $r_i$ , 其大小由下式给出:

$$r_i = r_0 + \frac{|v_{Dr}|}{\omega_T} \cos(\theta_0) \quad (14.100)$$

### 3. 步 长

假定在位置  $r = r_0, \theta = \theta_0$  发生了实际库仑碰撞, 则步长可最终计算出来。为简单起见, 假定粒子经历了一次典型的弹性碰撞, 其速度由初始值  $\mathbf{v}_i = v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}_{\perp}$  散射到末态值  $\mathbf{v}_f = -v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}_{\perp}$ 。换言之, 碰撞使  $v_{\parallel}$  的符号反向。由于对通行粒子  $v_{\parallel} \sim |v_{\perp}|$ , 这相当于图 14.10 所示的  $90^\circ$  偏转的弹性碰撞。

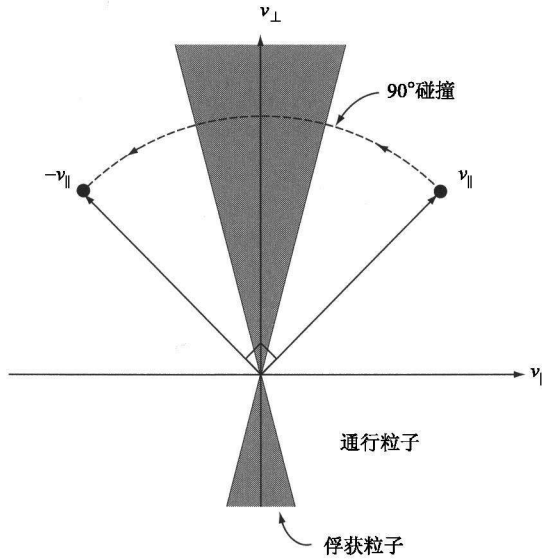


图 14.10 速度空间显示的具有  $v_{\parallel} \sim v_{\perp}$  的典型粒子经历  $90^\circ$  碰撞造成  $v_{\parallel}$  反号

通过在式 (14.100) 中令  $v_{\parallel} \rightarrow -v_{\parallel}$  (等价于令  $\omega_T \rightarrow -\omega_T$ ), 我们很容易求出末态磁面的半径为:

$$r_f = r_0 - \frac{|v_{Dr}|}{\omega_T} \cos(\theta_0) \quad (14.101)$$

步长  $\Delta r$  定义为碰撞前后两个磁面的半径之差:

$$\Delta r = r_i - r_f = 2 \frac{|v_{Dr}|}{\omega_T} \cos\theta_0 \quad (14.102)$$

下一步我们将它对所有碰撞平均, 这相当于对所有起始位置  $\theta_0$  和速度进行平均。正如所料, 由于  $\omega_T$  是奇对称的, 故对  $v_{\parallel}$  的平均有  $\langle \Delta r \rangle = 0$ 。但步长平方的平均则不为零:

$$(\Delta l)^2 = \langle (\Delta r)^2 \rangle = 4 \frac{|v_{Dr}|^2}{\omega_r^2} \langle \cos^2 \theta_0 \rangle = 2 \frac{|v_{Dr}|^2}{\omega_r^2} \quad (14.103)$$

代入  $v_{Dr}$  和  $\omega_r$  的表达式,得到:

$$(\Delta l)^2 = 2 \frac{q^2}{\omega_{ci}^2} \frac{(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2)^2}{v_{\parallel}^2} \approx 4 \frac{q^2 v_{Ti}^2}{\omega_{ci}^2} \sim q^2 r_{Li}^2 \quad (14.104)$$

这里速度平均已由近似式  $v_{\perp}^2/2 \approx v_{\parallel}^2 v_{Ti}^2/2$  取代。我们注意到,方均步长要比经典输运值大一个  $q^2$  因子。类似公式对电子也成立。

#### 4. 输运系数

在随机行走模型下,输运系数由  $(\Delta l)^2/\tau$  给出,这里  $\tau$  是两次碰撞之间的平均时间。对通行粒子, $\tau$  对应于形成  $90^\circ$  偏转的弹性碰撞时间。如同经典扩散的情形,更仔细的步长推导表明,双极性仍成立。在新经典理论中,同类粒子之间的碰撞不造成密度扩散。粒子的扩散是由电子-离子动量交换碰撞引起的。因此,在随机行走模型下,通行粒子碰撞引起的新经典粒子扩散系数为:

$$D_n^{(NC)} = \frac{(\Delta l)_c^2}{\tau_{ei}} = 4q^2 \left[ \frac{2m_e T_e}{e^2 B_0^2 \tau_{ei}} \right] = 4q^2 D_n^{(CL)} \quad (14.105)$$

我们看到,新经典系数要比经典系数值大  $4q^2 \sim 30$  倍。

类似的结论对同类粒子碰撞引起的热扩散也成立:

$$\left. \begin{aligned} \chi_e^{(NC)} &\sim q^2 \chi_e^{(CL)} \sim q^2 \frac{r_{Le}^2}{\tau_{ee}} \\ \chi_i^{(NC)} &\sim q^2 \chi_i^{(CL)} \sim q^2 \frac{r_{Li}^2}{\tau_{ii}} \end{aligned} \right\} \quad (14.106)$$

数值计算表明,由通行粒子造成的离子热扩散系数  $\chi_i^{(NC)} \approx 1.6 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$ 。这个值仍比实验观察到的结果要小约 60 倍。但在环形几何下,通行粒子引起的输运不是主要的损失机制,少数俘获粒子引起的输运才是粒子和热损失的主要原因,下面我们就来讨论这个问题。

#### 14.4.3 俘获粒子引起的新经典输运

俘获粒子引起的新经典输运损失也可以用随机行走模型来计算。在进行分析之前,我们先搞清楚为什么会存在俘获粒子,以及为什么俘获粒子引起的新经典损失在库仑碰撞输运中是主要的。定性上我们可以这么来回答:存在俘获粒子是因为托卡马克的  $B \approx B_\phi \approx B_0(R_0/R)$ , 因此环外侧的磁场弱,内侧的磁场强,这样,初始时比值  $v_{\parallel}/v_{\perp}$  小的环外侧的粒子在沿磁场线转动到环内侧强场区时将因磁镜效应

折返回来。我们说这类粒子在环外侧被“俘获”。

俘获粒子的输运损失大有几个原因。一个主要原因是它们的平行速度小。俘获粒子完成其磁镜运动一个完整周期所需的时间比典型通行粒子走完一个极向截面路径要长。由于俘获粒子的磁镜周期更长,因此需要更长的时间使得离子在  $\nabla B$  漂移和曲率漂移力的驱动下漂离磁面,这样就加大了步长。

对俘获粒子输运的分析类似于通行粒子情形,只是在随机行走模型上必须做三个修正。第一,在大环径比极限情形下,仅有一小部分等离子体粒子被俘获,我们需要知道这一比例;第二,必须在考虑俘获粒子的  $v_{\parallel}/v_{\perp}$  典型比值后重新计算其径向步长;第三,俘获粒子只能以较小的角度(远小于  $90^{\circ}$ ) 散射才能挪“一步”。具体分析过程描述如下。

### 1. 俘获粒子比例

考虑图 14.11 我们很容易算出俘获粒子的比例。图中最小(环外侧)和最大(环内侧)磁场分别为:

$$\left. \begin{aligned} B_{\min} &= B_0 \frac{R_0}{R_0 + r} \\ B_{\max} &= B_0 \frac{R_0}{R_0 - r} \end{aligned} \right\} \quad (14.107)$$

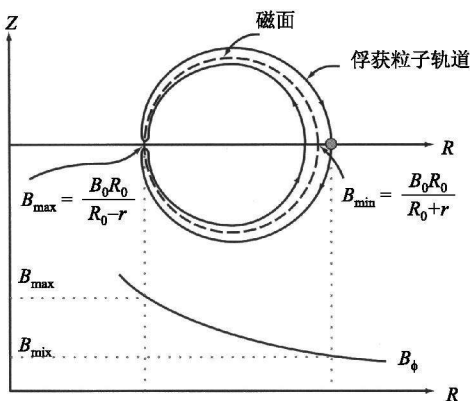


图 14.11 俘获粒子轨道以及最大和最小磁场位置关系  $B \approx B_{\phi} \approx B_0 (R_0/R)$

现在考虑具有速度  $\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}_{\perp}$  的环外侧粒子 ( $\theta = 0$ ) 的偏离。由能量守恒和磁矩守恒(见第 8 章),粒子被俘获的条件可以写成:

$$\frac{v_{\parallel}^2}{v^2} < 1 - \frac{B_{\min}}{B_{\max}} = 1 - \frac{R_0 - r}{R_0 + r} \approx 2 \frac{r}{R_0} \quad (14.108)$$

其中  $v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$ , 最后这步等式缘于大环径比假设  $r/R_0 \ll 1$ 。

图 14.12 显示了速度空间下俘获粒子与非俘获粒子之间的边界。注意到临界角  $\theta_c$  定义为  $\cos\theta_c = v_{\parallel}/v \approx (2r/R_0)^{1/2}$ , 因此对分布函数的俘获部分进行积分即可求得俘获粒子的所占比例  $f$ 。对于麦克斯韦分布函数  $F_M(v)$  有:

$$f = \frac{1}{n} \int_{\theta_c}^{\pi - \theta_c} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} F_M(v) v^2 dv = \cos\theta_c \approx \left[ \frac{2r}{R_0} \right]^{1/2} \quad (14.109)$$

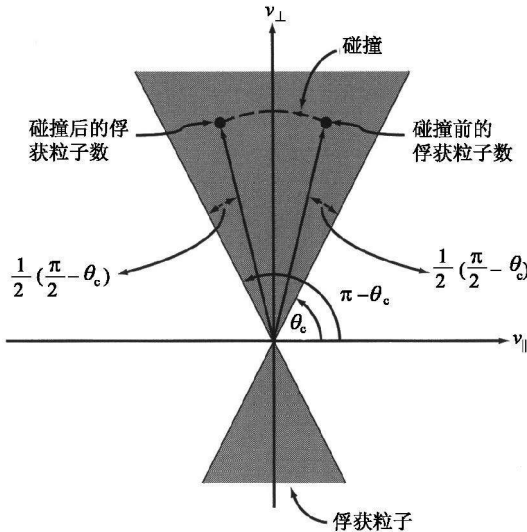


图 14.12 速度空间下显示的俘获-非俘获之间的边界,一定数量的俘获粒子经碰撞后其  $v_{\parallel}$  反号

由倒环径比  $\epsilon = a/R_0$  可知,式(14.109)意味着  $f \sim \epsilon^{1/2}$ 。即在大环径比极限下,只有很小一部分粒子被俘获,虽然实际情形  $f$  很容易超过 1/2。即便如此,维持  $\epsilon \ll 1$  展开对理解物理是非常有用的。

### 2. 回弹频率

粒子漂离磁面的距离正比于其导心走过一个完整的磁镜俘获周期所需的时间。这个时间可通过考察图 14.13 计算出来。图中显示了强俘获粒子、中等程度俘获粒子和弱俘获粒子等三种轨道。平均来看,俘获粒子的行为近似等于中等程度俘获粒子的行为。因此我们将注意力集中在这类粒子上。由于导心轨道的形状类似于香蕉,因此文献中几乎总是将俘获粒子轨道称为“香蕉”轨道。俘获周期则称为“回弹”周期。

与通行粒子情形类似,俘获粒子总是在半个回弹周期里单调地漂离磁面,在另外半个周期漂回来。图 14.14 展示了具有大小相等方向相反的初速度  $v_{\parallel}$  的两个粒子的香蕉轨道。可以看出,对于  $v_{\parallel} > 0$  情形,香蕉轨道向外漂移,而对于  $v_{\parallel} < 0$  情形则相反。



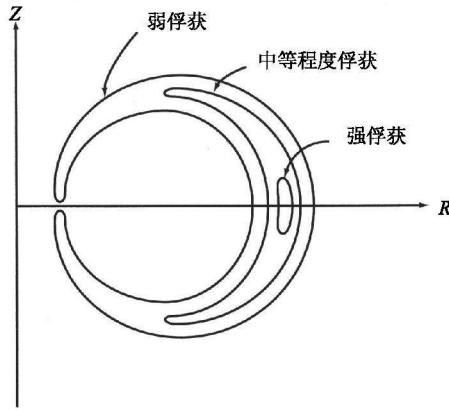


图 14.13 强俘获粒子、中等程度俘获粒子和弱俘获粒子等所对应的三种香蕉轨道

现在,半回弹周期即为中等程度俘获粒子沿极向走过相当于磁面半圆周  $l_p = \pi r$  距离所花的时间。而俘获粒子实际沿磁场线走过的距离为  $l \approx (B_0/B_\theta) l_p$ , 因此,半回弹周期可写为:

$$\tau_{1/2} \approx \frac{l}{v_{\parallel}} \approx \frac{2l}{v_{\parallel}} \approx \frac{2\pi R_0 q}{v_{\parallel}} \quad (14.110)$$

这里  $v_{\parallel} \approx v_{\parallel}/2$  是粒子做回弹运动的平均平行速度,而  $v_{\parallel}$  是  $\theta = 0$  处的外缘平行速度。整个周期的回弹频率定义为  $\omega_B = \pi/\tau_{1/2}$ , 因此有:

$$\omega_B = \frac{v_{\parallel}}{2R_0 q} \quad (14.111)$$

这个量就是我们计算步长所需的量。

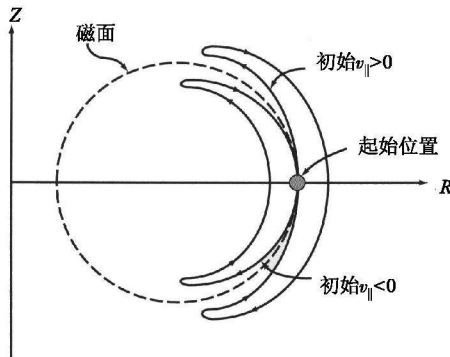


图 14.14 从同一位置出发、具有大小相等方向相反初速度  $v_{\parallel}$  的两个粒子的香蕉轨道 (可以看出,  $v_{\parallel} > 0$  粒子的香蕉轨道向外漂移, 而  $v_{\parallel} < 0$  粒子的香蕉轨道则向内漂移)

### 3. 步 长

步长  $\Delta r$  定义为具有相同大小但方向相反的  $v_{\parallel}$  的两个俘获粒子的香蕉轨道中心之间的距离。它的计算基本与通行粒子的情形相同。考虑从  $\theta = \theta_0, r = r_0$  位置出发的一个粒子, 对于中等俘获粒子,  $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ 。导心漂移速度的径向分量可以表示为:

$$v_{Dr}(t) \approx |v_{Dr}| \sin(\omega_B t + \theta_0) \quad (14.112)$$

这里, 如果考虑到对于俘获粒子有  $v_{\parallel} \ll v_{\perp} \approx v$ , 则  $|v_{Dr}|$  主要由  $\nabla B$  漂移确定, 即

$$|v_{Dr}| = \frac{m_i}{e} \left[ v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right] \left| \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B} \right| \approx \frac{v^2}{2\omega_{ci} R_0} \quad (14.113)$$

导心相应的径向位置同样可由积分  $\dot{r} = v_{Dr}$  得到:

$$r(t) \approx r_0 - \frac{|v_{Dr}|}{\omega_B} [\cos(\omega_B t + \theta_0) - \cos(\theta_0)] \quad (14.114)$$

对于  $v_{\parallel} > 0$  的粒子, 香蕉轨道中心的半径  $r_B^+$  由下式给出:

$$r_B^+ = \frac{1}{2}(r_{\max} + r_{\min}) = r_0 + \frac{|v_{Dr}|}{\omega_B} \cos\theta_0 \quad (14.115)$$

现在假定碰撞发生在  $r = r_0, \theta = \theta_0$  位置, 在此  $v_{\parallel}$  变号。碰撞后粒子以  $v_{\parallel} \rightarrow -v_{\parallel}$  (等价于  $\omega_B \rightarrow -\omega_B$ ) 速度开始新的香蕉轨道。新香蕉轨道的半径  $r_B^-$  为:

$$r_B^- = \frac{1}{2}(r_{\max} + r_{\min}) = r_0 - \frac{|v_{Dr}|}{\omega_B} \cos\theta_0 \quad (14.116)$$

现在我们很容易计算出如下定义的步长:

$$\Delta r = r_B^+ - r_B^- = 2 \frac{|v_{Dr}|}{\omega_B} \cos\theta_0 \quad (14.117)$$

随机行走模型所需的方均值为:

$$(\Delta l)^2 = \langle (\Delta r)^2 \rangle = 4 \frac{|v_{Dr}|^2}{\omega_B^2} \langle \cos^2 \theta_0 \rangle = 2 \frac{q^2 v^4}{\omega_{ci}^2 v_{\parallel}^2} \quad (14.118)$$

对速度的平均是在如下近似下进行的。总的粒子能量为  $v^2 \sim 3T/m = (3/2)v_{Ti}^2$ , 而中等俘获粒子的平行能量为  $v_{\parallel}^2 \approx (r/R_0)v^2 \sim (r/R_0)(3v_{Ti}^2/2)$ 。将这些近似式代入式(14.118):

$$(\Delta l)^2 \approx 3 \left[ q^2 \frac{R_0}{r} \right] \frac{v_{Ti}^2}{\omega_{ci}^2} \sim \left[ q^2 \frac{R_0}{r} \right] r_{Li}^2 \quad (14.119)$$

我们看到,俘获粒子的平均步长正比于  $(q^2 r_{Li}^2 / \varepsilon)^{1/2}$ , 因此平均步长的平方要比通行粒子大  $1/\varepsilon$  倍, 比经典输运大  $50 \sim 100$  倍。

#### 4. 有效碰撞频率

随机行走模型所需的最后一个量是两次碰撞之间的平均间隔。对俘获粒子, 这个时间间隔远小于积累到  $90^\circ$  偏转的弹性碰撞时间。原因是俘获粒子的特点是  $v_{\parallel}$  小, 因此这种粒子只需散射很小的角即变成通行粒子。

具体来看, 我们不妨回到图 14.12, 注意到中等俘获粒子的初始倾角  $\theta_i \approx \theta_c + (1/2)(\pi/2 - \theta_c) = \pi/4 + \theta_c/2$ 。产生平均平方步长  $\langle (\Delta r)^2 \rangle$  的库仑碰撞要求  $v_{\parallel}$  变号。因此, 经过典型的散射碰撞, 粒子的出射倾角为  $\theta_f = \pi - \theta_c - (1/2)(\pi/2 - \theta_c) = 3\pi/4 - \theta_c/2$ 。倾角的变化为  $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \pi/2 - \theta_c$ 。

碰撞之间的平均时间间隔称为“有效碰撞时间”, 它由众多小角度碰撞积累起来的速度空间里的角扩散确定。这种过程的扩散性质意味着  $\theta - \theta_i$  方均值可以写成:

$$\langle (\theta - \theta_i)^2 \rangle = D_\theta t \quad (14.120)$$

这里  $D_\theta$  由积累到  $90^\circ$  的碰撞时间  $\tau_{90}$  确定, 此时设  $\theta - \theta_i = \pi/2$ ,  $t = \tau_{90}$ 。这里  $\tau_{90}$  是等于  $\bar{\tau}_{ci}$ , 还是等于  $\bar{\tau}_{ii}$  或  $\bar{\tau}_{ce}$  取决于所考虑的碰撞性质。简单计算给出  $D_\theta = \pi^2 / (4\tau_{90})$ , 且

$$\langle (\theta - \theta_i)^2 \rangle = \frac{\pi^2}{4} \left[ \frac{t}{\tau_{90}} \right] \quad (14.121)$$

现在我们设  $t = \tau_{\text{eff}}$ ,  $\theta = \theta_f$ , 即可求得有效碰撞时间:

$$\tau_{\text{eff}} = \frac{8}{\pi^2} \left[ \frac{r}{R_0} \tau_{90} \right] \sim \varepsilon \tau_{90} \quad (14.122)$$

这里采用了近似  $\theta_c \approx \pi/2 - (2r/R_0)^{1/2}$ 。我们看到, 有效碰撞时间要比完全的  $90^\circ$  碰撞时间小  $\varepsilon$  倍。

#### 5. 俘获粒子新经典输运系数

现在, 用来求随机行走模型下俘获粒子新经典输运系数的所有各项都已准备好。扩散系数等于  $(\Delta l)^2$  与  $\tau_{\text{eff}}$  的比再乘以俘获粒子比例  $f$  (因为只有这部分粒子与输运有关)。数学上它等价于:

$$D = f \frac{\langle (\Delta r)^2 \rangle}{\tau_{\text{eff}}} \quad (14.123)$$

先考虑粒子扩散。俘获粒子的双极性仍然保留,这意味着粒子扩散是由电子-离子碰撞引起的。由此得到下述粒子扩散系数:

$$D_n^{(\text{NC})} = 5.2q^2 \left[ \frac{R_0}{r} \right]^{3/2} \left[ \frac{2m_e T_e}{e^2 B_0^2 \tau_{ei}} \right] = 5.2q^2 \left[ \frac{R_0}{r} \right]^{3/2} D_n^{(\text{CL})} \quad (14.124)$$

由罗森布鲁斯 (Rosenbluth)、黑兹尔坦 (Hazeltine) 和欣顿 (Hinton) 发展起来的优美、自洽的关于新经典输运的动理学理论给出同样的  $D_n^{(\text{NC})}$  定标关系,只是修正了数值系数:

$$D_n^{(\text{NC})} = 2.2q^2 \left[ \frac{R_0}{r} \right]^{3/2} D_n^{(\text{CL})} \quad (14.125)$$

我们看到,对于  $q = 3$ ,  $R_0 = 5$  和  $r \approx a/2 = 1$ , 俘获粒子的新经典输运要比经典输运大 220 倍。

类似的分析对热扩散系数也成立,它们也是由同类粒子碰撞引起的,只是每种扩散系数前要乘以因子  $q^2 (R_0/r)^{3/2}$ 。罗森布鲁斯、黑兹尔坦和欣顿给出的修正了的数值系数为:

$$\left. \begin{aligned} \chi_e^{(\text{NC})} &= 0.89q^2 \left[ \frac{R_0}{r} \right]^{3/2} \chi_e^{(\text{CL})} = 4.3 \times 10^{-3} q^2 \left[ \frac{R_0}{r} \right]^{3/2} \left[ \frac{n_{20}}{B_0^2 T_k^{1/2}} \right] \quad (\text{m}^2/\text{s}) \\ \chi_i^{(\text{NC})} &= 0.68q^2 \left[ \frac{R_0}{r} \right]^{3/2} \chi_i^{(\text{CL})} = 0.068q^2 \left[ \frac{R_0}{r} \right]^{3/2} \left[ \frac{n_{20}}{B_0^2 T_k^{1/2}} \right] \quad (\text{m}^2/\text{s}) \end{aligned} \right\} \quad (14.126)$$

我们看到,对于前述的参数取值情形,新经典离子扩散系数是经典值的 68 倍。在绝对单位制下,对于简单反应堆设计参数,  $\chi_i \approx 0.12 \text{ m}^2/\text{s}$ 。

俘获粒子新经典输运理论中要考虑的最后一点是有效区域。随机行走模型的基本假设是,俘获粒子在遭遇碰撞前有足够长的时间来完成一个回弹周期。因此“香蕉”区输运有效的条件是  $v_{\text{eff}} \ll \omega_B$  (这里  $v_{\text{eff}} = \tau_{\text{eff}}^{-1}$ ),它与粒子的质量无关,可以写成:

$$v_* \equiv \frac{v_{\text{eff}}}{\omega_B} \sim \left[ \frac{R_0}{r} \right]^{3/2} \left[ \frac{qR_0}{v_T \tau_{90}} \right] \sim 0.01 \left[ \frac{R_0}{r} \right]^{3/2} \left[ \frac{qR_0 n_{20}}{T_k} \right] \ll 1 \quad (14.127)$$

对于简单反应堆,  $v_* \approx 0.01$ , 显然满足低碰撞频率条件。

总之,根据新经典输运理论在当今托卡马克实验结果中的应用,可以得出以下

几点:离子热扩散系数略小于典型的实验观察值,后者大约在  $\chi \sim 1 \text{ m}^2/\text{s}$  量级。然而,实验中发现存在着湍流较弱的运行模式,在此情形下,部分等离子体区观测到的离子热扩散系数接近于不能再小的新经典值。但对于大多数高参数运行情形,  $\chi$  的值仍是反常的,这是因为等离子体中存在微观不稳定性。离子热传导代表着最快的能量损失途径,它大于电子热传导和粒子扩散带来的损失。但实验测得的  $\chi_e$  和  $D_n$  只比  $\chi$  小一点点,约为后者的三分之一,而不是像理论预期的那样只是后者的  $(m_e/m_i)^{1/2}$  倍。因此,由于微湍流的缘故,电子热传导和粒子扩散是非常反常的。

由此得出结论:新经典理论对于评估能量输运的下限是一个有用的参考,但对于实际托卡马克运行来说则显得过于乐观了。

#### 14.4.4 自举电流

自举电流  $J_B$  是新经典输运理论最有趣也是最重要的预言之一。说它重要是因为它是由等离子体径向输运自发产生的,有了它托卡马克就有可能在无需昂贵的外部电流驱动的情形下获得稳态的环向电流。从经济上讲,没有大比例自举电流的托卡马克很难作为反应堆存活下来。

自举电流还是一种相当微妙的现象,因为虽然  $J_B$  的最终形式与碰撞频率无关,但它却是碰撞输运的结果。本节里将给出自举电流起源的直观图像。可以看出,自举电流的流动方向平行于主环向电流而不是反向。其数值可以相当大,理论上可以达到 100% 的环向电流。这一点是非常重要的,因为经济可行性可能要求自举电流比例超过  $f_B > 0.7$ 。

为简单计,我们假定离子的质量是无穷大,这样直观上仅需考虑三种电子电流,即俘获电子的磁化电流、通行电子的磁化电流和俘获电子与通行电子因摩擦发生动量交换引起的电流。最终结果表明,自举电流由通行电子在与俘获电子发生碰撞摩擦产生的流动所携带。

##### 1. 俘获电子磁化电流

磁化电流的简单推导见第 11 章。类似的分析在这里也适用,只是需要分别估算俘获粒子和通行粒子的贡献。先考虑俘获粒子。从图 14.15 的托卡马克顶视图很容易看出沿磁场方向流动的磁化电流成分。因为  $B_\phi \gg B_\theta$ , 导心运动的投影基本上反映了粒子的平行运动,其轨道也具有香蕉形状。

由于导心密度(或温度)梯度的缘故,磁化电流产生于半径  $r = r_0$  位置。具体说来,  $r = r_0$  处的平行速度  $v_\parallel > 0$  的香蕉轨道电子的导心向外漂移到  $r = r_g^+ = r_0 + \Delta r/2$ 。这些电子在  $r = r_0$  位置产生的平行电流近似为  $J^+ = -ef_c(r_g^+, \mathbf{v})v_\parallel d\mathbf{v}$ 。类似地,在  $r = r_0$  位置  $v_\parallel$  大小相等方向相反的电子的香蕉轨道的导心向内漂移到  $r = r_g^- = r_0 - \Delta r/2$ , 这些电子在  $r = r_0$  位置也产生电流,其大小为  $J^- = -ef_c(r_g^-, \mathbf{v})v_\parallel d\mathbf{v} = +ef_c(r_g^-, \mathbf{v})|v_\parallel| d\mathbf{v}$ 。

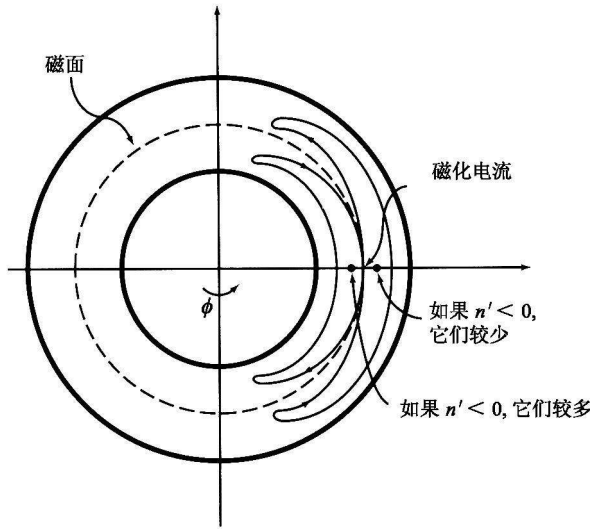


图 14.15 托卡马克顶视图显示的两条香蕉轨道的环向投影[如果  $\partial n/\partial r < 0$ , 则向内漂移的香蕉轨道较多, 由此在切点产生净的向下的磁化电流(对正粒子而言)]

如果向内漂移的导心数目多于向外漂移的数目(即负密度梯度), 那么在  $r = r_0$  位置就会出现净的磁化电流。这个净电流是两项贡献相加的结果:

$$J^+ + J^- = -e [f_c(r_g^+, \mathbf{v}) - f_c(r_g^-, \mathbf{v})] v_{\parallel} d\mathbf{v} \quad v_{\parallel} > 0 \quad (14.128)$$

这个表达式可通过泰勒展开(假定  $\Delta r$  是小量)而简化:

$$J^+ + J^- \approx -e \frac{df_c(r_0, \mathbf{v})}{\partial r_0} \Delta r v_{\parallel} d\mathbf{v} \quad v_{\parallel} > 0 \quad (14.129)$$

我们知道, 对俘获粒子有  $\Delta r \approx \langle (\Delta r)^2 \rangle^{1/2} \approx q(R_0/r_0)^{1/2} r_{Li}$ 。将此式代入式(14.129)并对速度空间积分, 即可求出磁化电流。对俘获电子, 有  $0 < |v_{\parallel}| < (2r_0/R_0)^{1/2} v$ , 因此对于麦克斯韦分布函数(为简单起见, 设  $T$  为常数), 俘获粒子的磁化电流  $J_i$  可写成:

$$\begin{aligned} J_i &= -\frac{m_e q}{B_0} \left[ \frac{R_0}{r} \right]^{1/2} \int \frac{\partial F_M}{\partial r} v_{\perp} v_{\parallel} d\mathbf{v} \quad v_{\parallel} > 0 \\ &= -\frac{3}{2} q \left[ \frac{R_0}{r} \right]^{1/2} \frac{T}{B_0} \frac{\partial n}{\partial r} \int_{\theta_c}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \\ &\approx -q \left[ \frac{r}{R_0} \right]^{1/2} \frac{T}{B_0} \frac{\partial n}{\partial r} \end{aligned} \quad (14.130)$$

其中,  $\cos \theta_c = (2r/R_0)^{1/2}$  是定义俘获粒子区域的临界角。同样, 为简单起见,  $r_0$  的

下标“0”被略去;在最后的表达式里,不重要的数值系数亦被略去。

式(14.130)即所要求的表达式。我们看到, $J_i$ 不依赖于碰撞,而且即使导心关于 $v_{\parallel}$ 的分布函数是对称的,即 $F_M(r_g, v_{\parallel}) = F_M(r_g, -v_{\parallel})$ , $J_i$ 仍不为零。这个电流的产生只与导心的密度(或温度)梯度有关。形式上,这一电流的产生是因为 $v_{\parallel}$ 对 $r_g$ 的依赖关系,即 $r_g = r + (v_{\parallel}/|v_{\parallel}|)\Delta r/2$ ,看起来好像是平行和反平行的粒子漂移对电流都有贡献,但仔细考虑到① $\nabla B$ 漂移速度的正负号;② $B_0/B_{\phi}$ 的正负号规定的平行方向的取向,可知负密度梯度产生的 $J_i$ 的方向与产生 $B_0$ 的 $J_{\phi}$ 是同一个方向,换句话说,对于负密度梯度, $J_i$ 与 $J_{\phi}$ 是平行而非反平行的。

$J_i$ 不仅对驱动自举电流具有重要作用,而且它本身就是 $J_B$ 的一小部分,一会儿我们会来说明这一点。

## 2. 通行电子磁化电流

对于通行粒子,我们可以进行完全类似的计算,如图14.16所示。在此情形下,通行粒子磁化电流可写为:

$$J_p \approx -e \int \frac{\partial f_e(r_0, v)}{\partial r_0} \Delta r v_{\parallel} dv \quad v_{\parallel} > 0 \quad (14.131)$$

考虑到对于通行粒子, $\Delta r \approx q r_{Li}$ ,且在大环径比极限情形下,通行粒子占据几乎全部速度空间, $(2r_0/R_0)^{1/2} v < |v_{\parallel}| < v$ ,这个积分很容易计算出来。由此我们得到

$$\begin{aligned} J_p &= -\frac{m_e q}{B_0} \int \frac{\partial F_M}{\partial r} v_{\perp} v_{\parallel} dv \quad v_{\parallel} > 0 \\ &= -\frac{3}{2} q \frac{T}{B_0} \frac{\partial n}{\partial r} \int_0^{\theta_c} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \\ &\approx -q \frac{T}{B_0} \frac{\partial n}{\partial r} \end{aligned} \quad (14.132)$$

式(14.132)表明,通行粒子的磁化电流也在平行于而非反平行于 $J_{\phi}$ 的方向上,而且其大小要比俘获粒子的贡献大 $1/\epsilon^{1/2}$ 倍: $J_p \sim \epsilon^{-1/2} J_i$ 。但即便如此,这个较大的磁化电流成分也并不代表自举电流,下面将说明,自举电流不仅还要大,而且是电子-电子碰撞动量守恒的结果。

## 3. 碰撞驱动自举电流

自举电流是通行电子与俘获电子之间碰撞摩擦引起的。在上面磁化电流的推导中,我们完全略去了碰撞效应。但在稳态分析中,即使碰撞不是很频繁,它们仍对电子电流有着很强的制约作用。具体来说就是,俘获粒子和通行粒子电流的大小必须满足所有发生动量交换的电子之间的总动量为零这一条件。换句话说,不论是俘获电子还是通行电子,其总动量对同种粒子碰撞是严格守恒的,因为库仑相互作用是纯粹的弹性碰撞。

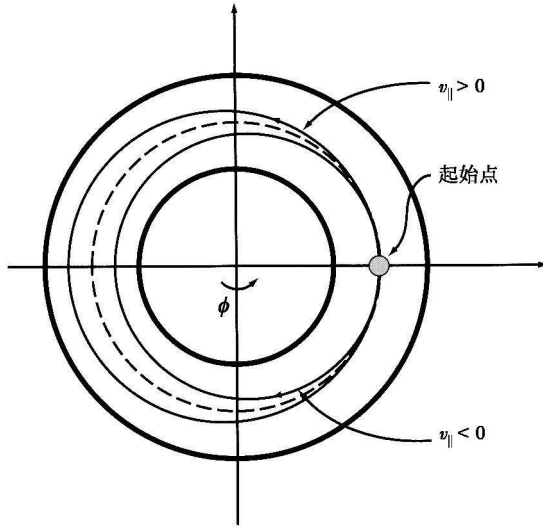


图 14.16 托卡马克顶视图显示的两条通行粒子轨道的环向投影  
 (一条对应于  $v_{\parallel} > 0$ , 另一条对应于  $v_{\parallel} < 0$ 。我们看到,  $v_{\parallel} < 0$  轨道的半径较小, 这意味着如果  $\partial n / \partial r < 0$ , 则在切点有向下的磁化电流)

在下述推导中, 我们首先说明, 如果俘获粒子和通行粒子只能携带前述计算的磁化电流, 那么碰撞动量平衡是不成立的。随后的推导将说明如何通过改变电流来解决这一问题。

我们先来考虑仅由磁化电流引起的碰撞动量平衡。如果我们想象这种电子流体仅由两种成分——俘获粒子和通行粒子——组成, 那么其中的物理就很容易理解。对于通行粒子, 每个粒子在与俘获粒子发生一次库仑碰撞时造成的平均平行动量损失为  $\langle m_e v_{\parallel} \rangle_p = m_e u_p$ , 其中,  $u_p = -J_p / e n_p$  表示宏观流速。现在, 通行粒子的密度是  $n_p$ , 平均来看, 它们的平行动量损失发生在碰撞时间  $(\bar{\nu}_{pi})^{-1}$  内。因此, 单位时间单位立方米体积内通行粒子的动量损失为:

$$(\Delta P_{\parallel})_p = (m_e u_p) (n_p) (\bar{\nu}_{pi}) \tag{14.133}$$

由于通行粒子必须散射到  $90^\circ$  来损失其动量, 这意味着  $\bar{\nu}_{pi} \sim \bar{\nu}_{ee}$ 。于是式(14.133)简化为:

$$(\Delta P_{\parallel})_p \approx -\frac{m_e}{e} J_p \bar{\nu}_{ee} \approx qT \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\bar{\nu}_{ee}}{|\omega_{ce}|} \tag{14.134}$$

这里用了近似  $n_p \approx n_0$ 。

俘获粒子的动量损失  $(\Delta P_{\parallel})_i$  可以采用类似的估计。对于俘获粒子,  $\langle m_e v_{\parallel} \rangle_i = m_e u_i = -m_e J_i / e n_i$ 。俘获粒子密度为  $n_i$ , 它们的动量损失发生在时间  $(\bar{\nu}_{ip})^{-1}$  内。因



此,单位时间单位立方米体积内的动量损失为:

$$(\Delta P_{\parallel})_i \approx -\frac{m_e}{e} J_{\parallel} \bar{v}_{ip} \quad (14.135)$$

考虑到  $n_i \approx (r/R_0)^{-1/2} n$ , 并且俘获粒子是在较通行粒子更短的时间内损失其动量 [因为它们是小角度散射:  $\bar{v}_{ip} \approx (R_0/r) \bar{v}_{ec}$ ], 式(14.135)可以简化为:

$$(\Delta P_{\parallel})_i \approx qT \left[ \frac{R_0}{r} \right]^{1/2} \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\bar{v}_{ec}}{|\omega_{ce}|} \quad (14.136)$$

由于碰撞动量平衡,我们要求二者损失相等,因为一种成分的损失表示另一种成分的获得。换句话说,在稳态情形下,电子-电子碰撞的总动量守恒意味着从通行粒子转移到俘获粒子的动量等于从俘获粒子转移到通行粒子的动量:  $(\Delta P_{\parallel})_p = (\Delta P_{\parallel})_i$ 。但是这个基本关系却并不能满足,因为:

$$(\Delta P_{\parallel})_p \approx \left[ \frac{r}{R_0} \right]^{1/2} (\Delta P_{\parallel})_i \quad (14.137)$$

因此结论是:仅通过磁化电流不可能实现动量平衡。

这到底是怎么回事,如何解决这一困难呢? 问题出在:有这么一小撮俘获粒子 ( $n_i/n_p \sim \epsilon^{1/2}$ ), 它们以很快的速率 ( $\bar{v}_{ip}/\bar{v}_{pi} \sim 1/\epsilon$ ) 来损失其与磁化电流相关的动量,正是这一点造成了与通行粒子之间的动量不平衡。我们可以通过放宽约束来解决这一困难,也就是说,在导心参照系内,通行粒子有**纯稳态**的麦克斯韦分布函数。而通行电子则因其逆磁性质从而必须有净的平行流,这一点可通过**平移**的麦克斯韦分布函数来近似拟合,这样就平衡了俘获电子多出的动量。这个平移的  $u_B$  必定在通行粒子这边,因为俘获粒子被“俘获”,不允许沿环向漂移。

数学上说,这要求在通行粒子电流的推导中作如下替换:

$$f_p(r_g, \mathbf{v}) = \frac{n(r_g)}{\pi^{3/2} v_T^3} \exp\left[-\frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{v_T^2}\right] \rightarrow \frac{n(r_g)}{\pi^{3/2} v_T^3} \exp\left[-\frac{v_{\perp}^2 + (v_{\parallel} - u_B)^2}{v_T^2}\right] \quad (14.138)$$

在小  $\Delta r$  和小  $u_B$  极限情形下,可对分布函数作泰勒展开,得到:

$$f_p(r_g, \mathbf{v}) \approx \frac{n(r)}{\pi^{3/2} v_T^3} \left[ 1 + \frac{v_{\parallel}}{|v_{\parallel}|} \left[ \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} \right] (\Delta r)_p + 2 \frac{v_{\parallel} u_B}{v_T} \right] \exp\left[-\frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{v_T^2}\right] \quad (14.139)$$

在计算  $J_{\parallel}$  时我们发现,上式方括号里的第一项(即“1”)在乘以  $v_{\parallel}$  并对速度空间积分后平均为零。第二项给出对通行粒子磁化电流的贡献。最后一项是新的项,代表碰撞不平衡驱动的通行粒子流。

这一修正的净结果是,式(14.133)中表示每次通行粒子碰撞损失的平均动量  $m_e u_p$  必须替换为:

$$m_e u_p = -m_e \left[ \frac{J_p}{en_p} \right] \rightarrow m_e \left[ -\frac{J_p}{en_p} + u_B \right] \quad (14.140)$$

反过来,这又意味着单位时间单位立方米体积内通行粒子碰撞损失的动量[式(14.134)]变为:

$$(\Delta P_{\parallel})_p \approx m_e \left[ -\frac{J_p}{e} + n_p u_B \right] \bar{v}_{ec} \quad (14.141)$$

最后,  $u_B$  的值可通过碰撞动量平衡要求  $(\Delta P_{\parallel})_p = (\Delta P_{\parallel})_i$  得到。为了实现平衡,我们发现,  $u_B \gg |J_p/e n_p|$ , 由此导出下列  $J_B = -en_p u_B$  的表达式:

$$J_B \approx -q \left[ \frac{R_0}{r} \right]^{1/2} \frac{T}{B_0} \frac{\partial n}{\partial r} \quad (14.142)$$

量  $J_B$  是自举电流。我们看到,它要比俘获粒子磁化电流大  $1/\varepsilon$  倍,比通行粒子磁化电流大  $1/\varepsilon^{1/2}$  倍。

式(14.142)实际上只是总自举电流的一部分,因为在推导中我们假设了温度是均匀的且离子具有无穷大质量。将这两条限制放宽将使得  $J_B$  更大。有趣的是,离子的和电子的密度梯度的贡献是累加的,而二者的温度梯度的贡献却是抵消的。但不管怎样,所有这些额外的贡献都与式(14.142)同量级,因此基本定标关系维持不变。包括上述所有项的任意截面下的自举电流的一般表达式,都可从动理学理论中自洽地求出。在大环径比、圆截面极限情形下,自举电流的更精确的形式是:

$$J_B = -4.71q \left[ \frac{R_0}{r} \right]^{1/2} \frac{T}{B_0} \left[ \frac{\partial n}{\partial r} + 0.04 \frac{n}{T} \frac{\partial T}{\partial r} \right] \quad (14.143)$$

这就是我们要求的、以后计算中要用到的低碰撞情形下的表达式。从中可见,自举电流有一个重要特性,就是它的峰值位置通常是离轴的,因为当  $r \rightarrow 0$  时,  $n'/r^{1/2} \rightarrow 0$ 。

我们关心的最后一点是自举电流比例  $f_b$  这一重要问题。由于流过等离子体的总的环电流为  $\mu_0 J_{\phi} \approx (1/r) \partial r B_{\theta} / \partial r$ , 因此有

$$f_b(r) = \frac{J_B}{J_{\phi}} \approx -1.18G \left[ \frac{r}{R_0} \right]^{1/2} \beta_p \sim \varepsilon^{1/2} \beta_p \quad (14.144)$$

其中,  $\beta_p(r) = 4\mu_0 n T / B_0^2$  是局部极向比压;  $G(r)$  是如下定义分布因子:

$$G(r) = (\ln n + 0.04 \ln T)' / (\ln r B_0)' \quad (14.145)$$

我们看到,自举电流的比例可以相当大。这是因为对高  $\beta$  托卡马克有  $\beta_p \sim 1/\epsilon$ , 它意味着  $f_B \sim 1/\epsilon^{1/2} \gg 1$ 。理论上说,自举电流可以驱动起过高的总电流。但实际情形更为复杂。首先,  $\epsilon^{1/2}$  并不一定很小;其次,对于典型的平坦密度分布,分布因子会变小;第三,碰撞频率可能很低但仍会造成  $J_B$  的数值系数修正,由此造成自举电流比例的相应减小;第四,实现高  $\beta_p$  的方法是高等离子体压强加上低环向电流,但低环向电流缩短了能量约束时间,使得高压强的实现变得更困难。因此,最终的自举电流比例需斟酌和详细分析各种参数分布的效应等因素。14.6.4 节描述了一个简单的例子。

目前,我们从分析中得出的主要结论是:新经典俘获粒子效应产生一种由通行粒子携带、由输运驱动的环向等离子体电流。这种电流可以在无需欧姆变压器或外部电流驱动的情形下稳态地维持。此外,托卡马克实验表明,新经典理论对  $J_B$  的预言与实验观测结果是一致的,不存在明显的由微湍流引起的对  $J_B$  的“反常”破坏。这是一个令人高兴的结果,它提供了一种无需强大的外部电流驱动功率即可实现稳态运行的可能性。

#### 14.4.5 小结

新经典理论描述了环形几何下各种等离子体输运现象里的库仑碰撞效应。新经典输运与直柱输运理论之间的最大区别是俘获粒子的香蕉轨道效应。业已证明,环效应使得等离子体中每种成分的粒子输运和热输运均增强了  $q^2 (R_0/r)^{3/2}$  倍,相当于实际情形下大小提高了近两个量级。

然而,实验数据表明,微湍流驱动的离子热传导代表了最快的能量损失,其系数大得反常,要比新经典输运系数  $\chi$  大 1 ~ 10 个量级。电子热传导和粒子扩散系数也是反常的,均要比经典情形大约两个量级。最终结果是实际上  $\chi \sim \chi \sim D_n$ 。尽管关于离子的新经典理论用来预言实验上的能量损失不可信,但这个模型对于理解输运理论仍是一种靠得住的参照物。而且人们从经验中发现,在特定运行模式下会形成内部输运垒,在某些情形下这种现象会使得离子输运接近新经典水平。

最后,新经典理论的最重要预言之一是存在自举电流。这是一种因俘获粒子与通行粒子之间库仑摩擦引起的自发电流。这种电流实际上是由通行粒子携带,其大小可以大到仅需很小的外部电流驱动功率即可维持等离子体的稳态运行。实验测得的新经典自举电流大小与理论预言值有着很好的一致性。这是一个令人高兴的结果,目前来看,这是托卡马克可以被接受作为经济可行的反应堆途径的一个重要因素。

## 14.5 经验定标关系

### 14.5.1 概述

对于聚变反应堆,我们必须理解和控制的最重要的输运损失是热传导。具体来说,自持燃烧的聚变堆所要求的条件  $p\tau_E \approx 8.3 \text{ atm s}$  可通过  $p \approx 7.2 \text{ atm}$  和  $\tau_E \approx 1.2 \text{ s}$  来满足,而热传导正是  $\tau_E$  值受限的主要损失机制。

到目前为止,我们的分析都是假定输运损失是由库仑碰撞造成的,得出的结论是  $\tau_E \sim a^2/\chi^{(NC)}$ , 这里  $\chi^{(NC)}$  是离子新经典热扩散系数。不幸的是,  $\tau_E$  的新经典值比起实验观测值太过乐观。主要由离子温度梯度驱动的等离子体微湍流产生电场和磁场涨落,这种涨落引起粒子导心轨道的随机扰动。涨落的随机性导致粒子和能量发生类似于碰撞的扩散,这种扩散通常称为“反常输运”。反常热输运几乎总是大大超过新经典热输运。

理解反常输运通常被认为是等离子体物理学面临的“巨大挑战”。它涉及对实际磁场位形下的复杂动力学模型进行线性和非线性分析。此外,微观不稳定性通常包括几种不同的种类,它们可以同时等离子体中被激发,我们必须找出其中在目前情形下最危险的模式。反过来,这又需要了解微湍流驱动的非线性饱和态方面的知识。高速、大内存计算机的诞生大大改善了我们对反常输运的理解。但即便如此,这个问题仍远远没有得到完全解决。要取得对这一问题的充分理解需要大规模的数值模拟,并将其与理论分析结合起来,才有可能得到易于掌握的、自洽的离子反常热传导的数学形式。要达到这一目标还需要数年的努力。

面对这些困难,我们不妨看看等离子体物理学家们过去是如何处理热输运问题的,在近期和不远的将来,他们又将如何处理。在许多其他科学和工程领域,当基于第一性原理的理论无法运用时,人们往往通过经验定标关系来获取必要的信息。具体到能量输运问题上,就是收集许多不同实验的大量数据,然后确定对这些数据的最佳经验拟合。当我们在现有实验运行指标范围内进行外推预测时,这些经验定标关系通常能给出很好的预言。但要外推到新的参数区间或外推到超出现有数据库的新的大型实验上时,经验定标关系就不那么可信了。不过这毕竟是目前最好的选择。下一代大型燃烧等离子体聚变实验装置如 ITER 的设计,在能量输运方面主要就是基于经验定标关系。

本节的目的是描述用来确定经验拟合  $\tau_E$  的方法,给出用于不同运行参数区间的定标关系的具体形式,然后将这些公式与新经典热输运公式进行比较。值得再次强调的是,  $\tau_E$  表示的是等离子体芯部的总体热输运。不过,有几种重要的等离子体边界输运现象也会直接或间接地影响到芯部输运。对这些边界输运现象的理解主要

也是基于经验定标关系。作为芯部输运讨论的前奏,我们先来简要说明几种与输运有关的边界现象,看看它们是如何影响  $\tau_E$  的。

### 14.5.2 托卡马克边缘区输运现象

下面介绍 4 种直接影响到托卡马克芯部输运的重要现象。它们是:①密度上限;②使得能量约束得到大幅度改善的低模(L模)到高模(H模)转换的阈值条件;③等离子体边界磁流体力学模式的激发,它们会影响到等离子体的能量约束;④在特定内部输运垒条件下出现的热能流出等离子体减缓的现象。

#### 1. 密度极限

磁流体力学不稳定性的讨论表明,过高的电流值会在托卡马克中造成大破裂。依据具体条件,等离子体中的不稳定性模式可以是扭曲模、气球-扭曲模或这些模的电阻性版本。不论哪一种情形,大破裂都将导致等离子体压强和电流的灾难性崩溃,这显然是反应堆运行时必须避免的。

在托卡马克的实际运行中,还有一种机制会造成大破裂。具体来说就是,如果等离子体边界密度变得过大,则等离子体就会遭遇破裂。为了避免这种情况,托卡马克等离子体的运行必须低于临界密度极限。这直接影响到芯部输运,因为在 14.5.3 小节将会看到,  $\tau_E$  是等离子体密度的增函数。因此,  $\tau_E$  随密度提高能改善到什么程度是有上限的。

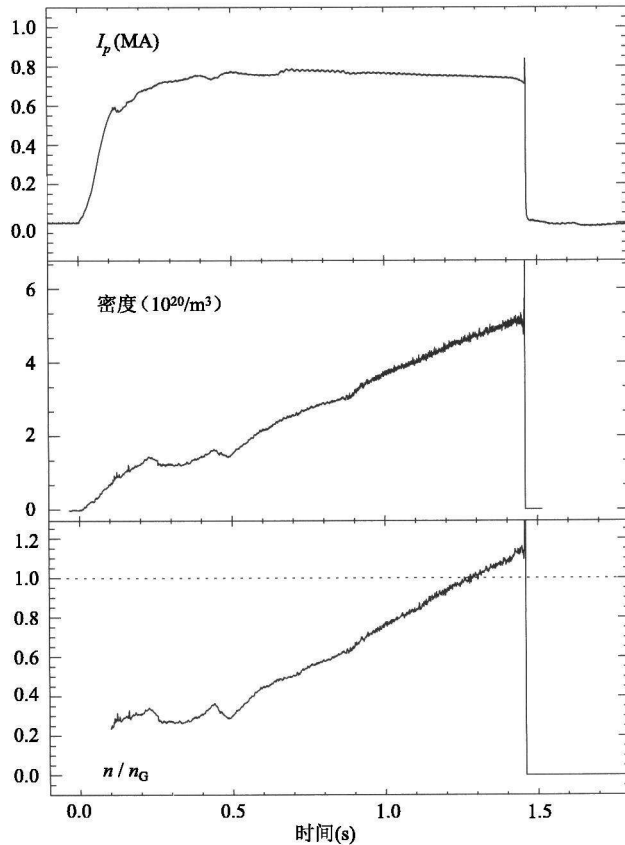
造成高密度破裂的物理机制通常与低温等离子体边界附近的辐射坍塌有关,这种坍塌是由游离出第一壁的杂质造成的。对于欧姆加热等离子体的情形可定性解释如下。如果固定的加热功率使等离子体边界密度增加,则边界温度会因为等离子体压强维持不变而明显下降。当温度变得足够小,例如在 10 eV 量级时,杂质辐射会大大增加,这时能量损失变成以辐射为主而不是热传导为主。这种情形一旦发生,等离子体基本上变成脱离第一壁。强烈的边界辐射区使得芯部等离子半径缩小(即  $a$  变小,因为现在  $a$  变得由辐射边界而不是第一壁确定)。等离子体半径减小而总电流固定不变则造成边缘  $q(a)$  值下降,并最终导致磁流体力学不稳定性和发生破裂。

虽然具有辅助加热的托卡马克也会发生类似的现象,但理论上解释起来则要复杂得多,可能还需要将边界湍流考虑进来。事实上,目前用于说明辅助加热密度极限的基于第一性原理的自洽模型还不存在,而从众多托卡马克实验收集到的数据则非常充分,我们可以利用这些数据经验地确定密度极限。对这些大量数据进行分析最先是由格林沃尔德(M. Greenwald)进行的,他导出了一个相当简单的密度极限经验公式,通常称为“格林沃尔德极限”。这一公式如下:

$$\bar{n}_{20} \leq n_G \equiv \frac{I_M}{\pi a^2} \quad (14.146)$$

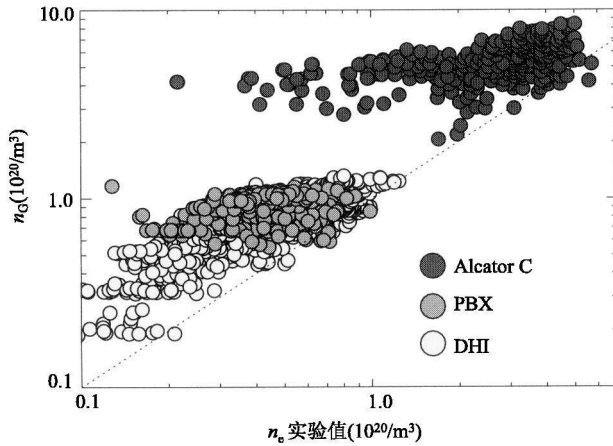
图 14.17 显示的是当格林沃尔德极限遭到破坏、大破裂开始时的一组实验测量数据。我们看到,等离子体内能和等离子体电流迅速终止。

显然,对于现有实验装置的运行或设计新的实验时,必须确保所需的数密度低于格林沃尔德极限。对于运行在最大允许电流(相当于  $q_* = 2\pi a^2 \kappa B_0 / \mu_0 R_0 I = 2$ ) 条件下的简单聚变反应堆,这个电流(对  $\kappa = 2$ ) 的值是  $I_M = 18.8 \text{ MA}$ 。由此给出的格林沃尔德密度值为  $n_G = 1.5 (10^{20} / \text{m}^3)$ 。这就是该反应堆所需的值。虽然这个反应堆模型显得简单,但我们不应就此认为在这个问题上不存在准确、起码的安全余量。从另一方面看,正因为缺乏大的安全余量,才需要我们在进行未来的实验设计时认真考虑密度极限这一问题。



(a) 实验数据显示,当格林沃尔德极限遭到破坏时,大破裂瞬间开始(承蒙M.Greenwald提供)

图 14.17



(b) 几个托卡马克上的实验数据给出的密度运行区间与格林沃尔德极限的函数关系  
(Greenwald, M. (2002). *Plasma Physics and controlled Fusion*, 44, R27)

续图 14.17

## 2. L-H 模转换

定性来说,托卡马克实验中存在两种截然不同的运行模式,即所谓“L 模”(低约束模式)和“H 模”(高约束模式)。H 模的  $\tau_E$  值大约是 L 模的 2 倍。

现有的托卡马克都能按这两种模式运行,具体是哪一种模式取决于具体的实验条件。决定运行模式的关键因素是外部加热功率的大小和等离子体与第一壁材料表面接触的方式。现分别论述如下。在托卡马克实验中,当外部加热功率增加时,等离子体状态会突然从 L 模转换到 H 模。这种模转换最先是在德国的 ASDEX 托卡马克上发现的,随后在其他所有大型托卡马克上都观察到这一现象。一组典型的实验测量结果如图 14.18 所示。我们看到,随着外加功率超过临界值,等离子体的能量突然增大。

等离子体与第一壁材料表面的接触有两种广泛采用的方式:“限制器”和“偏滤器”,如图 14.19 所示。限制器的工作原理是,当等离子体慢慢因扩散而横越最后闭合磁面(LCFS)时,粒子和能量因为巨大的平行输运而迅速沉积在限制器表面上,由此将等离子体与第一壁隔离开来。限制器的优点是较简单,结构较紧凑,但由于它处在等离子体附近区域,几乎总是增加了扩散进入等离子体的杂质数量。

偏滤器位形是由附加的线圈产生的,这种磁场位形在等离子体边界附近有一个极向磁场零点。当等离子体扩散跨过分界线后,粒子和能量就会沿着磁场线迅速沉积在图 14.19(b)所示的靶板上而损失掉。偏滤器因其位置较远,故能够较好地将等离子体与杂质、等离子体与第一壁隔离开来。但它的体积庞大,而且热负荷往往容易集中于靶板的一个狭窄区域。大多数等离子体实验人员认为,杂质隔离是主要问题。因此,大多数托卡马克运行都采用某种偏滤器的形式。回到 LH 模转换问题

上来,人们发现,在偏滤器位形下更容易获得 H 模。

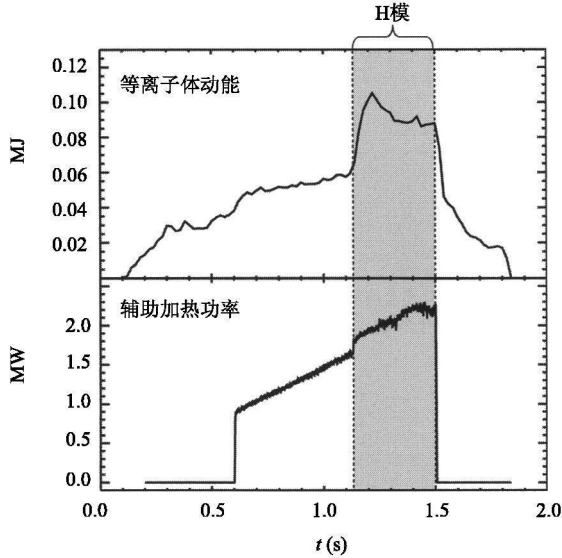


图 14.18 实验数据显示,当外加功率达到阈值时,等离子体约束态突然从 L 模转换为 H 模 (承蒙 M. Greenwald 提供)

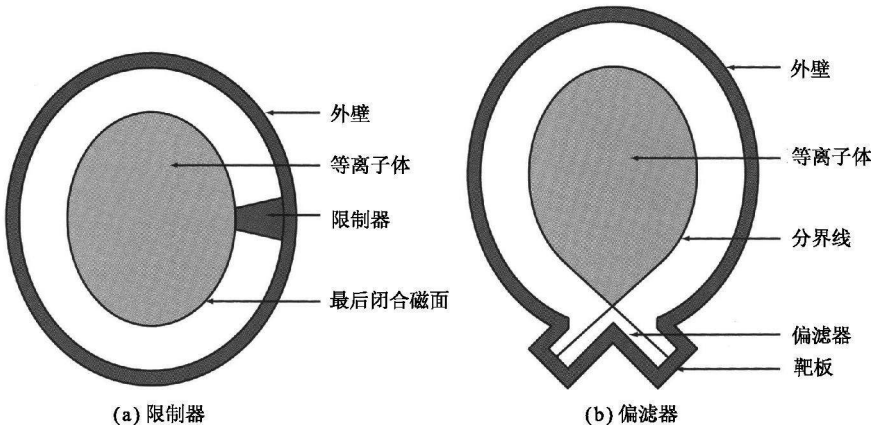


图 14.19

因此,人们希望将高的外部加热功率与偏滤器几何结合起来来实现 H 模式运行。同样,与等离子体、第一壁材料表面相互作用有关的边缘区输运物理也直接影响到芯部输运,特别是 L 模或 H 模下的  $\tau_E$  值。

L-H 模转换的条件确定了之后,接下来我们可以问:约束改善了的 H 模是如何影响等离子体分布的,是什么实际原因导致了模转换? H 模下参数分布发展的典型



特征是边缘密度和边缘温度明显升高。特别是密度在整个剖面上几近平坦。最终结果是边缘压强得到提高。因此在等离子体与实际第一壁材料表面之间狭窄的转换层呈现一个边缘压强的台基。等离子体能够支撑相当大的边缘压强,说明此处已形成边缘“运输垒”,它阻止了能量的快速损失。总之,这个运输垒使得平均密度增大,中心温度提高。二者都对  $\tau_E$  值的改善有贡献。

L-H 模转换的原因物理上还不十分清楚。一种流行的观点认为,大功率辅助加热会在等离子体边缘区附近发展出强的剪切流速,从而稳定了微湍流。但是,这种理论还远未完善。因此,L-H 模转换仍然是一个活跃的聚变研究领域。

在这种基本理论完善之前,实验工作者和装置设计者必须依靠经验定标关系来给出 H 模运行所需的最小加热功率阈值。通过对大型实验数据库的分析,我们得到了如下 L-H 模转换的经验阈值:

$$P_{LH} = 1.38 \bar{n}_{20}^{-0.77} B_0^{0.92} R_0^{1.23} a^{0.76} \quad (\text{MW}) \quad (14.147)$$

对于简单反应堆设计参数,可知  $P_{LH} \approx 100 \text{ MW}$ 。这个值,正如我们将在 14.6.3 小节要说明的,远远大于在 H 模下将等离子体加热到点火所需的实际辅助加热功率,也就是说,这个阈值非常高。这意味着我们可有如下这么一条更微妙的途径到达点火:①开始时等离子体处于低密度(例如,  $\bar{n}_{20} \approx 0.3$ )以便于在低功率下进入 H 模约束;②加热等离子体到 5 ~ 7 keV;③逐步将密度提高到所需的运行值,在此期间, $\alpha$  粒子逐渐成为主要加热源。这样,如果假设  $P_{LH} = P_h + P_\alpha$  (即总加热功率等于辅助加热功率加上  $\alpha$  加热功率),那么整个运行就可以在满足 H 模阈值的条件下进行。

总之,L-H 模转换是托卡马克物理学的一个重要现象。存在两种不同的(虽然有些相似) $\tau_E$  值定标关系,它们分别对应于不同的约束模式,下面就将论述这些问题。二者的大小相差 2 倍,这个差别看起来似乎不是很大,但令人惊奇的是这对于预言如 ITER 这样的实验装置的性能至关重要。事实上,大多数研究人员相信,ITER 不会在 L 模下点火,而只可能在 H 模下运行。

### 3. 边缘局域模(ELM)

H 模约束的发现代表着托卡马克运行水平的重大改善。较高的  $\tau_E$  值意味着可以在规模较小、成本较低的条件下实现点火,也更接近聚变堆所需的  $\tau_E$  值。不过,H 模运行也有一些潜在的缺点。例如如果对边缘密度抬高不加控制,那么密度最终会高到超出格林沃尔德密度极限从而导致放电中断。通常,在达到这一密度极限之前,等离子体中就会激发起一类水平较低但却很重要的边缘局域不稳定性。这些不稳定性称为边缘局域模(ELM)。等离子体物理学家认为,这些模属磁流体力学不稳定性性质,是由与 H 模运行相关的大的边缘压强梯度和电流梯度驱动的。理论上还无法对这一问题作出完满解释,因此它仍是当前活跃的研究领域。

ELM 如何影响到等离子体的性能呢? 定性上看, 这些模起着减压阀的作用。当边缘压强梯度变得过高时, 就会激发起一阵 ELM, 从而释放掉过剩的压强。重要的是, 这种能量阵发还会使杂质从等离子体中排出。ELM 会持续 (即减压阀保持打开状态) 直到压强降到足够低的值 (相当于减压阀较低的关断值)。通过这种方式, ELM 稳定了边缘压强的时间平均值  $\bar{p}(a, t)$ 。这么来看, ELM 的出现似乎是有利的, 有时它确实是这样, 但 ELM 行为也有不同类型, 其中大多数从总体上看是不利的。下面我们对 ELM 行为作一综述, 如图 14.20 所示。

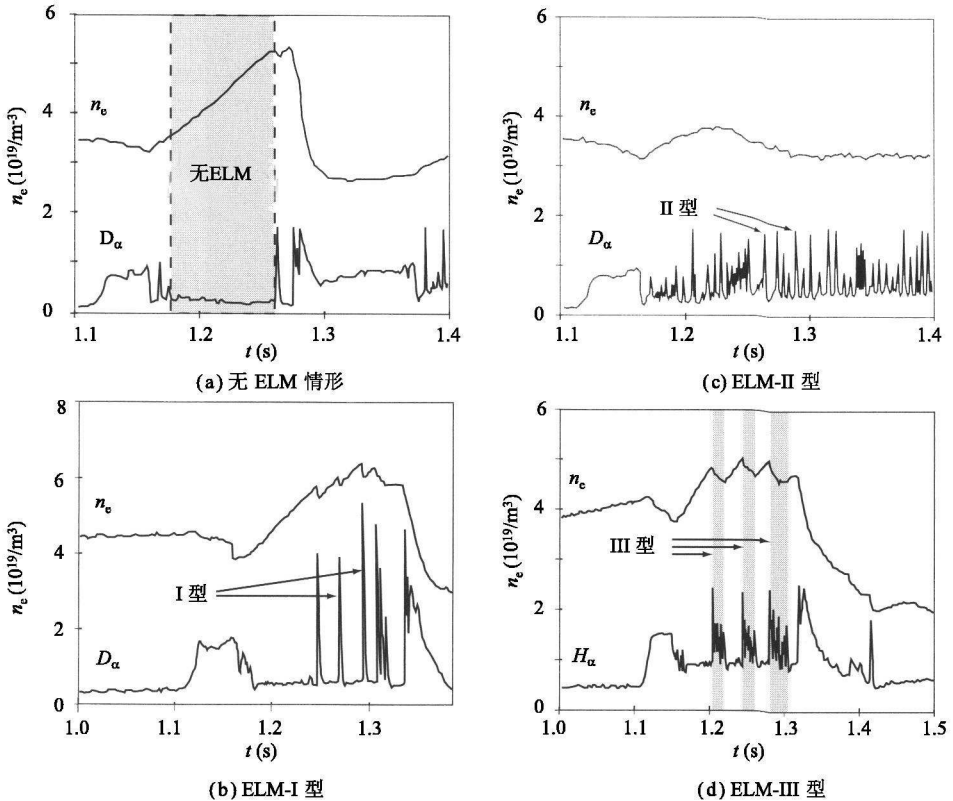


图 14.20 实验测得的电子密度、 $D_\alpha$  或  $H_\alpha$  辐射的时间演化谱  
(ASDEX team. 1989. *Nuclear Fusion*, **29**, 1959)

图 14.20(a) 是无 ELM 放电。通常这是一种导致边缘密度和杂质明显增大的短暂行为。最终这些杂质导致边缘密度因轻微辐射而下降, 并使芯部等离子体受到污染。杂质的积累抵消了偏滤器带来的好处, 因此, 无 ELM 的稳态运行并不是聚变等离子体非常可取的目标, 如果杂质累积问题无法消除的话。

图 14.20(d) 则是另一种运行模式: ELM 几乎是被不断地激发, 我们称其为 ELM-III 型放电。在这种情形下, 边缘压强的时间均值  $\bar{p}(a, t)$  变得稳定, 但由于

ELM 持续存在,因此  $\bar{p}(a, t)$  的值较低。如果用机械类比的话,这相当于减压阀的上、下临界压强值相当接近,都设置在一个非常低的水平上,因而允许压强近乎连续释放。III 型 ELM 的问题是,较低的边缘压强时间均值抵消了 H 模式运行的好处,因此也不是一种非常理想的运行模式。

ELM-II 型代表了中庸的运行模式。它们的活动幅度中等,时间上明显可分辨;边缘压强均值维持在一个相当高的水平上,使得 H 模约束的优势得到充分体现; $\tau_E$  值较 L 模约束明显提高。此外,第一壁杂质的净释放也因 ELM 的向外运输而保持在一个可接受的低水平。用机械类比的话说,就是减压阀的上临界压强设置得恰到好处,与关闭的下临界值有明显的区分。这是最理想的运行模式。

最后一种运行模式称为 ELM-I 型。这种 ELM 产生阵发性活动,其振幅比 ELM-II 型要大,周期要短,相当于减压阀的上临界压强值设定得过高,且上下临界压差过宽。一般来说, I 型 ELM 不会导致总体能量约束时间大幅减少。换言之, I 型和 II 型 ELM 都具有改善的 H 模的特点,但大振幅短周期振荡造成偏滤器靶板受到很高的脉冲式热负荷,从热系统冷却的观点看,这是不可接受的。因此, I 型 ELM 也不是理想的运行模式。

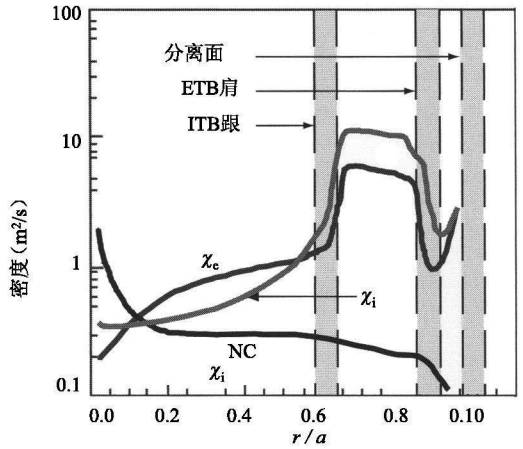
目前还无法准确预言未来实验装置上 ELM 的类型和活动水平。因此,了解 ELM 是一个活跃的聚变等离子体物理研究领域。

总的结论是,ELM 在限定边缘等离子体压强方面起着重要作用,中等水平的 ELM 活动实际上是可取的。稍后我们将给出与 H 模运行有关的总体  $\tau_E$  的经验值,并讨论 ELM 对它的直接影响。给出的表达式对应于 II 型而非 III 型 ELM 的情形。

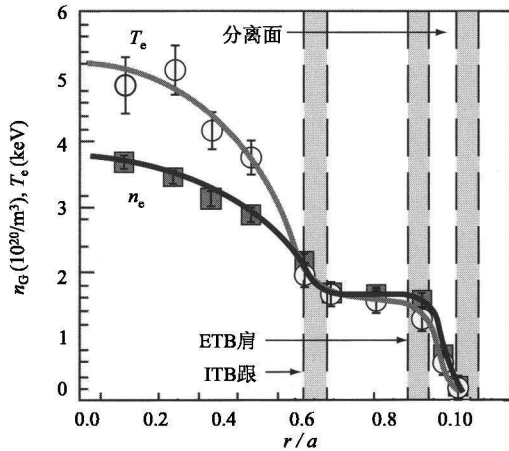
#### 4. 内部输运垒

最后要谈的一种现象是“内部输运垒”。这是一种从托卡马克运行经验中发现的模式,它有一些非常理想的特点。首先,它的  $\tau_E$  值在 H 模基础上有了进一步改善;其次是当内部输运壁垒与先进托卡马克模式结合起来运行时,电流分布往往自然地与由此产生的高比例自举电流相叠加。目前已在许多托卡马克上观察到内部输运垒,而第一次发现这一现象的则是 1984 年在麻省理工学院的 Alcator 装置上。

正如其名,内部输运垒位于等离子体芯部的某个区域,虽然通常离等离子体边缘并不远。在此处,局部离子热传导系数大大减小到接近离子热传导的新经典值。内部输运垒产生一个很强的温度梯度,使得中心温度提高, $\tau_E$  值也相应增大。图 14.21(a) 显示的是  $\chi$  和  $\chi^{(NC)}$  的实验测量值以及用于比较的  $\chi^{(NC)}$ 。我们看到,  $\chi$  刚越过输运垒就突然增大,而在等离子体芯区的很宽范围内,  $\chi$  不仅变得与  $\chi^{(NC)}$  可比,而且它的值低到比  $\chi$  的值还要小。



(a) 实验测得的  $\chi_c$  和  $\chi_i$  的分布显示出存在内部输运垒



(b) 同等放电条件下测得的  $n_e$  和  $T_e$  的分布

图 14.21

(O'Connor et al. 2004. *Nuclear Fusion*, **44**, R1)

先进托卡马克运行模式下内部输运垒放电有两个非常值得注意的特点,这就是电流通常呈中空分布,并且流速存在很大剪切。中空的电流分布往往导致极小点不在磁轴上的  $q(r)$  分布,这样的等离子体被称为具有“反剪切”特性(即  $dq/dr$  在极小值处反号)。实际上,内部输运垒可以通过实验人为地产生:①实施离轴电流驱动或加热;②使等离子体电流迅速提高,从而通过趋肤效应产生中空的电流分布;③向等离子体芯部注入高密度固体氘弹丸来对等离子体进行加料。到底是什么触发形成了内部输运垒,尚没有明确可接受的解释,虽然有些迹象表明大的流剪切可能在减少或消除某些微湍流方面起作用。此外,从现有实验结果看,内部输运垒是一种变化多端的现象,因此还不可能得出如 L 模和 H 模那样的经验定标关系。

内部输运垒的存在为先进托卡马克运行带来很大希望。高  $\tau_E$  值所需的中空电流分布与自发产生的自举电流分布具有协同作用。等离子体实验工作者正在积极进行研究,试图弄清楚如何延长内部输运垒的寿命,使得目前的瞬态行为转变为稳态运行。

对密度极限、L-H 模转换、ELM 和内部输运垒的讨论业已完成,现在我们将注意力放到如何确定  $\tau_E$  的经验定标关系问题上来。

### 14.5.3 $\tau_E$ 的经验定标关系

#### 1. 实验过程

实验上确定  $\tau_E$  的经验定标关系是基于形式略微简化的单流体能量平衡方程:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot (n \chi \nabla T) + S_\Omega + S_h \quad (14.148)$$

请注意,这里忽略了对流和压缩项,因为它们在托卡马克放电过程中通常不起太大的作用。此外,我们还忽略了辐射效应。辐射对能量平衡的贡献通常甚为有限,而且辐射一般发生在等离子体边缘区,而  $\tau_E$  针对的是等离子体的总体约束水平。统计研究表明,剔除辐射项得到的对实验数据的经验拟合更可靠。从实用的观点来看,这是分析中不将它包括进来的主要动机。

在整个等离子体积分上对式(14.148)进行积分,即可得到一般的能量约束时间的函数关系,它对任意几何均有效:

$$dW/dt = \int n \chi (\mathbf{n} \cdot \nabla T) dS + P \quad (14.149)$$

其中,

$$W = \int \frac{3}{2} p d\mathbf{r} \quad (14.150)$$

是等离子体总的储能。

$$P = \int (S_\Omega + S_h) d\mathbf{r} \quad (14.151)$$

是提供给等离子体的欧姆加热功率和辅助加热功率的总和。现在,我们依据热传导损失来定义能量约束时间如下:

$$W/\tau_E = - \int n \chi (\mathbf{n} \cdot \nabla T) dS \quad (14.152)$$

由此得到有用的能量约束时间表达式:

$$\tau_E = \frac{W}{P - \dot{W}} \quad (14.153)$$

这个表达式之所以有用,是因为其右侧的每一项均可由实验测量来确定。因此,对于给定的等离子体放电,通常由放电脉冲的平顶区数据即可求得  $\tau_E$ 。待测的其他等离子体参数有  $B_0, I, \bar{n}, a, R_0, \kappa, A$  (这里  $A$  是等离子体中离子的原子质量)。 $\tau_E$  值代表了放电中这组数据的综合信息。

## 2. 确定 $\tau_E$

$\tau_E$  的经验定标关系的确定有以下三个步骤:首先,需要对同一装置不同放电的大量数据进行收集;其次,将给定装置的完整数据与来自许多其他装置的类似成套数据结合,形成总的数据库;由这些总体数据来确定  $\tau_E$  的经验定标关系。

这方面的开拓性工作是由戈德斯顿 (R. J. Goldston) 最先进行的。他推测,由总体数据可以得到如下形式的  $\tau_E$  的经验定标关系:

$$\tau_E = C B_0^{\alpha_1} I^{\alpha_2} \bar{n}^{\alpha_3} a^{\alpha_4} R_0^{\alpha_5} \kappa^{\alpha_6} A^{\alpha_7} P^{\alpha_8} \quad (14.154)$$

通过数值回归分析,戈德斯顿能够确定常数  $C$  和指数  $\alpha_j$  的值。自从他的这一原创性工作发轫以来,数据库已极大丰富。事实上,现在有一个相当大的数据库,其中包括了数以千计的 L 模和 H 模放电数据。随着更多的数据包括进来,这些未知参数正在缓慢而持续地得到改进。

$\tau_E$  有两种广为聚变界所认可的形式。由于复杂的历史原因,它们分别被称为关于 L 模的  $\tau_E^{ITER89-P}$  和关于 H 模的  $\tau_E^{IBP98(y,2)}$ 。为简单起见,这里分别改写为  $\tau_L$  和  $\tau_H$ ,具体形式如下:

$$\left. \begin{aligned} \tau_L &= 0.048 \frac{I_M^{0.85} R_0^{1.2} a^{0.3} \kappa^{0.5} n_{20}^{-0.1} B_0^{0.2} A^{0.5}}{P_M^{0.5}} \quad (s) \\ \tau_H &= 0.145 \frac{I_M^{0.93} R_0^{1.39} a^{0.58} \kappa^{0.78} n_{20}^{-0.41} B_0^{0.15} A^{0.19}}{P_M^{0.69}} \quad (s) \end{aligned} \right\} \quad (14.155)$$

这里采用标准的实用单位制 ( $I_M$  [MA],  $P_M$  [MW])。我们看到,这两种形式定性上是类似的,在分子和分母上出现的相关物理量均相同,指数  $\alpha_j$  亦类似。我们可以通过作图比较(实验数据库得出的  $\tau_E$  对  $\tau_E$  的经验预测值)来检验这一定标关系的近似精度。图 14.22 展示的 H 模数据库的  $\tau_E^{\text{exp}}$  对  $\tau_E^{\text{emp}}$  图就是这样的一个例子。可以看到,二者符合得非常好。

对于  $P_M$  主要由辅助加热主导的现有托卡马克,  $\tau_E$  的上述形式特别有用。它们还可以用于外推到以  $\alpha$  粒子加热为主的点火实验或核聚变反应堆上。在此情形下,  $P_M$  必须包括  $P_\alpha$ 。虽然  $P_\alpha$  是温度的强函数,但上述公式尽管正确,却没有明确

显示出  $\tau_E$  对温度的依赖关系。

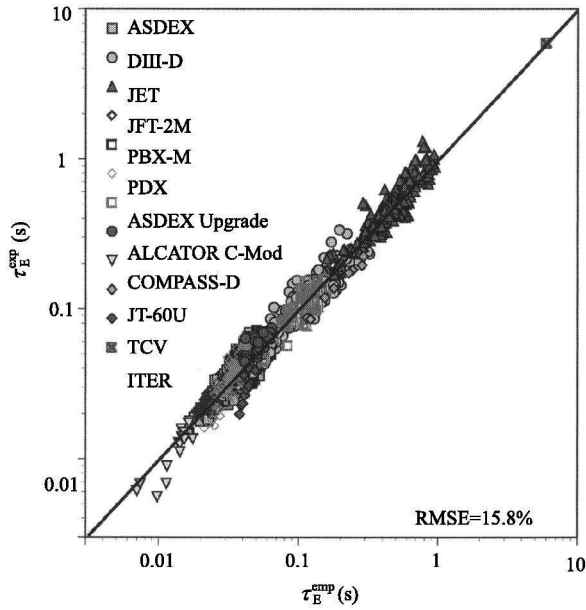


图 14.22 由实验数据库得出的  $\tau_E$  的 H 模定标律与经验预测值之间的比较  
(ITER Physics Experts Groups on Confinement Modelling and Database(1998).  
*Nuclear Fusion*, **39**,21 75)

这个问题可以通过  $\tau_E$  的另一种形式(仅对稳态情形有效)来解决,就是按下述方法用  $T_k$  来消去  $P_M$ 。式(14.155)表明,L 模或 H 模下的  $\tau_E$  的经验公式可写成:

$$\tau_E = K/P_M^v \quad (14.156)$$

将这一关系与  $\tau_E$  的基本定义结合起来,并假定暂态项可忽略,得到:

$$\tau_E = \frac{W}{P - W} \approx \frac{W}{P} \quad (14.157)$$

接下来,如果假定密度分布近似为均匀分布,那么上式可改写为:

$$\tau_E = \frac{3nTV}{P} = 0.95 \frac{\bar{n}_{20} \bar{T}_k R_0 a^2 \kappa}{P_M} = \frac{D}{P_M} \quad (14.158)$$

其中,  $\bar{T}_k$  是分布平均温度。由式(14.156)和式(14.158)消去  $P_M$ ,即得到形为  $\tau_E = \tau_E(\bar{T}_k)$  的关系式:

$$\tau_E = \left[ \frac{K}{D^v} \right]^{\frac{1}{1-v}} \quad (14.159)$$

直接代换即可得到如下  $\tau_L$  和  $\tau_H$  的表达式:

$$\left. \begin{aligned} \tau_L &= 0.037 \frac{\varepsilon^{0.3} a^{1.7} \kappa^{1.7} B_0^{2.1} A}{q_*^{1.7} \bar{n}_{20}^{-0.8} \bar{T}_k} \quad (\text{s}) \\ \tau_H &= 0.28 \frac{\varepsilon^{0.74} a^{2.67} \kappa^{3.29} B_0^{3.48} A^{0.61}}{q_*^3 \bar{n}_{20}^{-0.91} \bar{T}_k^{2.23}} \quad (\text{s}) \end{aligned} \right\} \quad (14.160)$$

在这些式子里,  $\varepsilon = a/R_0$  和  $q_* = 2\pi a^2 \kappa B_0 / \mu_0 R_0 I$  被明确提到了前面, 因为这些参数随不同托卡马克装置的变化不是很大, 而且这样做会使得与新经典运输的比较变得更易理解。我们再次看到, L 模和 H 模的表达式定性上是一致的, 出现在两式分子和分母上的相关物理量均相同, 只是个别指数的变化大了一些。

接下来, 我们将上式运用到简单实验堆上。反应堆的参数为  $a = 2$ ,  $B_0 = 4.7$ ,  $\bar{n}_{20} = 1.5$ ,  $\bar{T}_k = 15$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\kappa = 2$ ,  $q_* = 2$  和  $A = 2.5$ 。我们发现:

$$\tau_L = 0.29 \quad (\text{s}), \quad \tau_H = 0.68 \quad (\text{s}) \quad (14.161)$$

两者都低于点火所需的值  $\tau_E \approx 1.2 \text{ s}$ , 其中 H 模的值小了约 1.8 倍。尽管如此, 定标关系对  $B_0, q_*$  用和  $\bar{T}_k$  的强依赖关系意味着这些量的相对较小的变化都可以改善这种局面。比如  $q_*$  由 2 降低到 1.7,  $\bar{T}_k$  由 15 降低到 10,  $B_0$  由 4.7 提高到 5.7 或它们的适当组合, 就可以将  $\tau_E$  提高到所需的值。同样, 保持上述参数值不变, 但考虑到它们的分布作用,  $\tau_E$  值也能够得到提高。作为例子, 我们来考虑峰形压强分布  $p = p_0(1 - r^2/a^2)^2$ 。可以得到  $\langle p^2 \rangle = (9/4)(\bar{p})^2$ 。因子 9/4 直接倍增了功率平衡所需的  $S_\alpha$  的值。

这种情形对 L 模定标关系就更为困难。这里  $\tau_L$  比点火所需的值小了约 4.1 倍, 而且定标关系对不同物理量的指数依赖关系也弱于 H 模情形。因此, 从工程和经济的角度来看, 反应堆基本参数所需的调整可能大到难以给出可行的设计。

总之, H 模定标关系对参数的强烈依赖关系是有利的, 小的参数值变化即可实现所需的能量约束时间。另一方面, 我们必须承认, 将这种变化的敏感性外推到远离目前数据所适用的区域不是那么可靠。

最后, 我们将经验定标关系与经典和新经典理论预言作一比较。特别令人感兴趣的是对温度的依赖性。如果采用关系  $\tau_E \sim a^2 \kappa / \chi$ ,  $\chi \sim A^{1/2}$ , 则这个比较(忽略掉数值系数)可以写成:



$$\left. \begin{aligned}
 \tau_E^{(CL)} &\sim \frac{a^2 \kappa B^2 T^{1/2}}{n A^{1/2}} \\
 \tau_E^{(NC)} &\sim \frac{\varepsilon^{3/2} a^2 \kappa B^2 T^{1/2}}{q^2 n A^{1/2}} \\
 \tau_L &\sim \frac{\varepsilon^{0.3} a^{1.7} \kappa^{1.7} B^{2.1} A}{q^{1.7} n^{0.8} T} \\
 \tau_H &\sim \frac{\varepsilon^{0.74} a^{2.67} \kappa^{3.29} B^{3.48} A^{0.61}}{q^3 n^{0.91} T^{2.23}}
 \end{aligned} \right\} \quad (14.162)$$

定性上看,库仑碰撞驱动的输运关系与经验导出的输运关系的主要差别是对  $T$  和  $A$  的依赖性相反。我们非常遗憾地看到,按照经典和新经典理论乐观的定标关系,  $\tau_E$  应随温度  $T$  的提高而改善,但这与经验定标关系不符。经验观察到的是  $\tau_E$  随温度的提高而变差,这也是在小的、成本相对较低的实验装置上很难实现等离子体点火的一个重要原因。我们需要加大实验反应堆的尺寸,以补偿这种定标关系对温度的依赖性。

#### 14.5.4 小结

关于等离子体热输运的湍性行为的理论和实验研究相当复杂,迫使聚变界发展出关于  $\tau_E$  的经验定标关系。这些关系是基于大型数据库建立起来的,它们为预言现有实验的性能提供了合理的准则。这一经验定标关系也被用来预测下一代燃烧等离子体实验的性能,但不是十分可靠,因为燃烧实验是运行在以  $\alpha$  粒子加热为主的外推参数区域。即便如此,经验定标关系仍然是目前最好的选择。理论研究虽然有了长足的进展,但要建立起完善的基于第一性原理的理论还有待时日。

对托卡马克数据的分析表明,存在两种基本运行模式——L 模和 H 模。实际放电运行在何种模式下取决于外部加热功率的水平,以及等离子体最初接触面是偏滤器还是限制器。大功率偏滤器放电通常运行在 H 模下,其约束时间大约是 L 模的 2 倍。H 模约束定标关系预言的  $\tau_E$  值接近自持  $\alpha$  粒子加热等离子体反应堆的要求。

最后,早先发现的内部输运垒与先进托卡马克运行模式概念的结合使得约束得到进一步改善,已接近离子新经典值,并可能最终实现托卡马克稳态点火。先进托卡马克运行模式的另一附加优势是其具有中空的电流分布,它与自然形成的自举电流的分布相同。先进托卡马克运行模式是当前聚变研究的重要领域,实验工作者们希望能找出这种放电的长脉冲运行的方法,并发展出相应的  $\tau_E$  值经验定标关系。

## 14.6 输运理论在聚变点火实验中的应用

### 14.6.1 引 言

掌握了  $\tau_E$  的经验定标关系和新经典自举电流概念,现在我们可以更切实际地研究托卡马克聚变反应堆(或称托卡马克点火实验)设计的某些重要方面。这里所说的应用主要集中在点火实验的近期目标上。我们将讨论三个重要议题。

首先,根据经验定标关系  $\tau_E = \tau_E(T)$  进行自持的超导点火实验装置的设计。设计受到几个临界磁流体学稳定性极限的约束。分析表明,最终的设计参数与实际动力反应堆十分相似,换言之,托卡马克聚变堆的发展路径的成本会很高,因为我们很难通过小尺寸、低成本的点火实验装置来了解  $\alpha$  粒子燃烧物理学。要获得大功率  $\alpha$  粒子加热反应堆的运行经验,就需要建造反应堆规模的实验装置。这虽非情愿,但却是托卡马克物理研究必须面对的现实。

第二,有必要对点火装置中等离子体从冷的初始状态到热的自持终态的演化过程进行研究。其中实现点火所需的最低辅助加热功率要求和点火后的热稳定性问题尤为重要。研究表明,与第4章  $\tau_E$  为常数的情形的简单分析相比, $\tau_E$  对温度的依赖性实际上改善了局面。

第三,最大自举电流比例的问题。研究表明,自举电流比例超过  $f_b > 0.75$ ,通常将突破特鲁瓦永无壁磁流体学  $\beta$  极限。这意味着大  $f_b$  的经济约束将导致等离子体中激发起电阻壁模。因此,需要采取某种稳定电阻壁模的措施,例如反馈稳定方法。

### 14.6.2 超导点火实验

这里的讨论紧接着第5章内容。但在目前情形下,我们把注意力主要集中在超导点火装置上。目标是要设计一个能满足适当限定条件的造价最低的装置。这里造价仍假定正比于包层-屏蔽与环向磁场线圈的总体积。作为简单反应堆,核物理方面的约束要求包层-屏蔽的厚度  $b = 1.2$  m,而工程方面的约束要求线圈内侧磁场达到  $B_{\max} = 13$  T,假定磁体支撑结构所允许的最大应力为  $\sigma_{\max} = 300$  MPa。

反应堆与点火装置设计上的主要区别如下。对于点火装置,对输出功率和最大壁负荷等不作要求,而是代之以一组新的等离子体物理约束,具体来说就是,在完全点火状态,等离子体必须满足磁流体学特鲁瓦永  $\beta$  极限、磁流体学  $q^*$  电流极限、磁流体学  $n = 0$  的垂直稳定性极限和格林沃尔德密度极限  $n_c$ 。而且,在点火实验中这一点至关重要:等离子体必须满足 H 模定标律( $\tau_E = \tau_H$ ),相比之下,早期聚变堆设计中, $\tau_E$  值由所需的输出功率而不是规定的输入功率决定。

对点火实验的分析相对较为直接。其思想是利用约束条件将所有待设计参数都表示成温度  $T$  的函数,然后将这些公式代入装置体积的表达式,并求关于  $T$  的

极小值,即可求得所需的设计参数。

这里分析所用的模型要比第4章中的简单反应堆模型复杂一些。我们引入了两项修正。第一项是,从一开始就假定等离子体截面是拉长的;第二项是不再假定所有量均等于其均值,而是用目前实验观测到的简单分布来表示。这些分布不改变基本定标关系,但在为求得零维功率平衡关系而进行平均时,得到的数值系数更精确。一般来说,与热传导损失相比,更接近实际的峰值分布改善了 $\alpha$ 粒子加热水平。

### 1. 装置体积

简单的截面拉长型点火装置的示意图如图14.23所示。为简单起见,等离子体截面假定为拉长比 $\kappa$ 的椭圆。装置造价假定正比于包层-屏蔽与环向磁场线圈的总体积:

$$V = 2\pi^2 R_0 [(a+b+c)(\kappa a+b+c) - \kappa a^2] \quad (14.163)$$

量 $V$ 是有待极小化的基本“成本函数”。眼下,我们基于核物理方面的约束只知道 $b = 1.2 \text{ m}$ 。

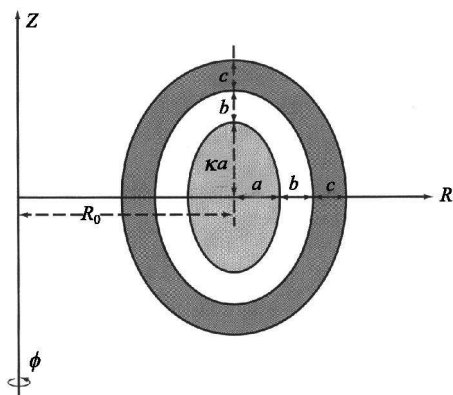


图 14.23 聚变点火实验装置截面示意图

### 2. 约束条件

设计必须满足一系列约束条件。首先,等离子体不能拉得太长,否则就会激发起 $n = 0$ 的垂直不稳定性。这要求:

$$\kappa \leq \kappa_{\max} = 2 \quad (14.164)$$

为了保证合理的安全余量,拉长比取 $\kappa = 1.7$ 。

其次,等离子体电流不能太大,否则会激发起磁流体力学外扭曲模。这个约束条件写为:

$$q_* = \frac{5a^2 \kappa B_0}{R_0 I_M} \geq q_{* \min} = 1.7 \quad (14.165)$$

出于合理的安全余量考虑,安全因子取为  $q_* = 2$ 。

第三,密度不能太高,否则就会突破格林沃尔德密度极限。这要求取的平均密度满足下式:

$$\bar{n}_{20} = N_G \frac{I_M}{\pi a^2} = \left( \frac{5 \kappa N_G}{\pi q_*} \right) \frac{B_0}{R_0} \quad N_G \leq 1 \quad (14.166)$$

其中,  $N_G$  是安全余量,其值取 0.8。

第四,等离子体压强不能太高,否则会违反特鲁瓦永  $\beta$  极限。因此要求:

$$\beta = \beta_N \frac{I_M}{a B_0} \quad \beta_N \leq \beta_{N \max} = 0.03 \quad (14.167)$$

利用  $\beta$  定义式  $\beta \equiv 2\mu_0 \bar{p} / B_0^2$  并利用公式(14.165)消去  $I_M$ , 上式可改写成平均压强的形式(实用单位制下):

$$\bar{p}_a = \left[ 19.9 \frac{\kappa \beta_N}{q_*} \right] \frac{a B_0^2}{R_0} \quad (\text{atm}) \quad (14.168)$$

出于安全余量考虑,取  $\beta_N = 0.025$ 。

最后一个约束条件是线圈厚度  $c$ , 它由最大可允许应力极限  $\sigma_{\max}$  确定。分析与第5章中的类似,唯一差别是需要考虑线圈的非圆截面因素。对非圆截面情形,最大应力出现在磁体的拉长侧。直接计算可得:

$$c = \frac{2\xi}{1-\xi} (\kappa a + b) \quad \xi = \frac{B_{\max}^2}{4\mu_0 \sigma_{\max}} = 0.11 \quad (14.169)$$

安全余量要求取  $B_{\max} = 13 \text{ T}$ ,  $\sigma_{\max} = 300 \text{ MPa}$ 。而  $B_0$  和  $B_{\max}$  之间通常有关系:

$$B_0 = B_{\max} \left[ 1 - \frac{a+b}{R_0} \right] \quad (14.170)$$

这样,我们就完成了约束条件的规定。现在,已知量有  $\kappa = 1.7$ ,  $q_* = 2$ ,  $N_G = 0.8$ ,  $\beta_N = 0.025$  和  $\xi = 0.11$ 。待求的未知设计参数有  $a, R_0, B_0, \bar{p}_a, \bar{n}_{20}, \bar{T}_k$ 。它们可通过约束条件表示出来,并利用功率平衡条件和装置体积极小化来求得。

### 3. 功率平衡

功率平衡关系的分析有点复杂,需要进行一系列替换和简化。在下面的讨论中读者应记住,这里分析的目的是要最终确定作为  $T$  的函数的两个量  $R_0$  和  $a$ 。一旦它们确定下来,即可代入装置体积的表达式,然后求得对  $T$  的极小值。

点火实验中的稳态功率平衡要求  $\alpha$  加热能够平衡热传导和韧致辐射损失的总

和。在稳态运行阶段,不存在欧姆加热功率。而且,如果等离子体是自持的,那么辅助加热功率也为零。数学上讲,就是零维功率平衡要求:

$$\langle S_\alpha \rangle = \langle S_\kappa \rangle + \langle S_B \rangle \quad (14.171)$$

其中 $\langle S \rangle$ 是对体积的平均。

各项贡献计算如下。如前所述,密度和温度是根据实验所要求的分布确定的,而不是取它们的平均量。具体说来,密度和温度的分布分别为:

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{4}{3} \bar{n} (1 - \rho^2)^{1/3} \\ T &= \frac{5}{3} \bar{T} (1 - \rho^2)^{2/3} \end{aligned} \right\} \quad (14.172)$$

其中,

$$\rho^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\kappa a^2} \quad (14.173)$$

等离子体表面由 $\rho = 1$ 定义。即

$$\langle S \rangle = 2 \int_0^1 S \rho d\rho \quad (14.174)$$

且 $\langle n \rangle = \bar{n}$ ,  $\langle T \rangle = \bar{T}$ 。可以看出,密度分布较为平坦。温度分布稍显峰化。分数指数取决于H模下边缘根部的特性。

有了这两个分布,我们就可以计算功率平衡关系中的各项。第一步是确定均值压强、密度和温度之间的关系: $\langle p \rangle = 2 \langle nT \rangle$ 。我们发现 $\bar{p} = (10/9)(2\bar{n}\bar{T})$ ,或在实用单位之下写成:

$$\bar{p}_a = 0.356 \bar{n}_{20} \bar{T}_k \quad (\text{atm}) \quad (14.175)$$

这个关系式可通过格林沃尔德密度极限[式(14.166)]消去 $\bar{n}_{20}$ 来进一步简化:

$$\bar{p}_a \left[ 0.567 \frac{\kappa N_c}{q_*} \right] \frac{B_0 \bar{T}_k}{R_0} = 0.386 \frac{B_0 \bar{T}_k}{R_0} \quad (\text{atm}) \quad (14.176)$$

第二步是要给出后面简化分析所需的相关信息。这可以通过令 $\bar{p}_a$ 的表达式(14.168)与式(14.176)相等来得到,由此导出 $B_0 a$ 关于 $\bar{T}_k$ 的函数关系:

$$B_0 a = \left[ 0.0285 \frac{N_c}{\beta_N} \right] \bar{T}_k = 0.912 \bar{T}_k \quad (\text{Tm}) \quad (14.177)$$

下一步考虑 $\alpha$ 粒子的加热功率:

$$\langle S_\alpha \rangle = \frac{1}{16} E_\alpha \left[ 2 \int_0^1 p^2 \frac{\langle \sigma v \rangle}{T^2} \rho d\rho \right] \quad (14.178)$$

在感兴趣的温度区域,有合理近似关系  $\langle \sigma v \rangle / T^2 \approx \langle \sigma v \rangle / T^2 |_{\bar{T}} = \text{常数}$ , 并注意到  $\langle p^2 \rangle = (4/3)p^2$  (这里 4/3 是峰值分布带来的增益), 因此上面的积分可计算出来。在实用单位之下有:

$$\langle S_\alpha \rangle = 1.82 \times 10^6 p_a^2 \frac{\langle \sigma v \rangle_n}{\bar{T}_k^2} \quad (\text{W/m}^3) \quad (14.179)$$

其中, 归一化量  $\langle \sigma v \rangle_n$  等于以  $10^{-22} \text{ m}^3/\text{s}$  为单位测得的  $\langle \sigma v \rangle$ 。

通过类比的方法, 可得到韧致辐射损失为:

$$\langle S_B \rangle = 4.84 \times 10^4 \frac{P_a^2}{\bar{T}_k^{3/2}} \quad (\text{W/m}^3) \quad (14.180)$$

最后一项是热传导损失。对 H 模约束, 这项为:

$$\langle S_k \rangle = 1.5 \times 10^5 \frac{P_a^{3/2}}{\tau_H} \quad (\text{W/m}^3) \quad (14.181)$$

现在将这些项代入功率平衡关系式, 得到  $p_a \tau_H$  的表达式:

$$p_a \tau_H = 0.0824 \frac{\bar{T}_k^2}{\langle \sigma v \rangle_n - K_B \bar{T}_k^{1/2}} \quad (\text{atm s}) \quad (14.182)$$

其中  $K_B = 0.0266$ 。

分析的下一步是通过代入  $\tau_H$  的实际经验定标关系式(14.155)及  $P = \langle S_\alpha \rangle V_p$  来简化  $p_a \tau_H$ , 计算得到:

$$p_a \tau_H = \left[ 0.0978 \frac{B_0^{0.02} \kappa^{1.05} N_G^{0.03}}{a^{0.03} q_*^{0.96}} \right] \frac{(B_0 a)^{1.09} \bar{T}_k}{R_0^{0.26} \langle \sigma v \rangle_n^{0.69}} \quad (\text{atm s}) \quad (14.183)$$

这个表达式有意思的地方是, 对于待定的  $B_0$  和  $a$ , 除了弱相关的  $B_0^{0.02}$  和  $a^{0.03}$ ,  $p_a \tau_H$  只取决于  $B_0 a$  的组合。因此, 如果将  $B_0 \approx 6$  和  $a \approx 2$  代入弱相关项, 并将  $B_0 a$  项替换为式(14.177), 经过整理后得:

$$\begin{aligned} p_a \tau_H &= \left[ 2.05 \times 10^{-3} \frac{\kappa^{1.05} N_G^{1.12}}{q_*^{0.96} \beta_N^{1.09}} \right] \frac{\bar{T}_k^{2.09}}{R_0^{0.26} \langle \sigma v \rangle_n^{0.69}} \quad (\text{atm s}) \\ &= 0.0799 \frac{\bar{T}_k^{2.09}}{R_0^{0.26} \langle \sigma v \rangle_n^{0.69}} \quad (\text{atm s}) \end{aligned} \quad (14.184)$$

功率平衡关系的最后一步是令  $p_a \bar{\tau}_H$  的两个表达式(14.182)与(14.184)相等,由此导出  $R_0 = R_0(\bar{T}_k)$  的显性表达式:

$$\begin{aligned} R_0 &= \left[ 6.80 \times 10^{-7} \frac{\kappa^{4.04} N_G^{4.31}}{q_*^{3.69} \beta_N^{4.19}} \right] \bar{T}_k^{0.35} \langle \sigma v \rangle_n^{1.19} (1 - K_B \bar{T}_k^{1/2} / \langle \sigma v \rangle_n)^{3.85} \\ &= 0.886 \bar{T}_k^{0.35} \langle \sigma v \rangle_n^{1.19} (1 - K_B \bar{T}_k^{1/2} / \langle \sigma v \rangle_n)^{3.85} \quad (\text{m}) \end{aligned} \quad (14.185)$$

剩下的任务是导出  $a$  与  $T$  之间的关系。将  $B_0 a$  的表达式(14.177)与  $B_0$  和  $B_{\max}$  之间的关系式(14.170)结合起来,就很容易导出这一关系:

$$a \left[ 1 - \frac{a+b}{R_0} \right] = 0.0285 \frac{N_G}{B_{\max} \beta_N} \bar{T}_k \quad (14.186)$$

由此解得:

$$a = \frac{R_0 - b}{2} - \frac{1}{2} [(R_0 - b)^2 - K_M R_0 \bar{T}_k]^{1/2} \quad (\text{m}) \quad (14.187)$$

其中  $K_M = 0.114 N_G / B_{\max} \beta_N = 0.281$ 。

经过冗长的推导,我们终于得到了所需的  $R_0(\bar{T}_k)$  和  $a(\bar{T}_k)$ 。

#### 4. 装置体积小化

现在,将  $R_0$ 、 $a$  和  $c$  的表达式[式(14.185)、式(14.187)和式(14.169)]代入装置体积  $V$  的表达式[式(14.163)],可见  $V$  只是  $\bar{T}_k$  的函数,如图 14.24 所示。求导可知在  $\bar{T}_k \approx 15.7 \text{ keV}$  处体积  $V$  有极小值。将这个值代回到各参数表达式,即可确定各参数。总结见表 14.2 和表 14.3,前者是输入参数表,后者是输出参数表。

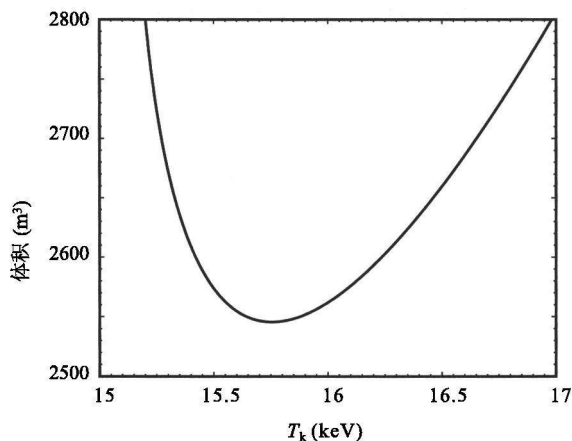


图 14.24 点火实验装置的体积对温度的函数曲线(最佳温度在 15.7 keV)

表 14.2 超导点火装置的输入参数表

物理量	符 号	值
包层-屏蔽厚度	$b$	1.2 m
线圈最大磁场	$B_{\max}$	13 T
磁体最小应力	$\sigma_{\max}$	300 MPa
拉长比	$\kappa$	1.7
扭曲模安全因子	$q_*$	2
格林沃尔德密度极限	$N_G$	0.8
物鲁瓦永 $\beta$ 因子	$\beta_N$	0.025

表 14.3 超导点火装置的输出参数表

物理量	符 号	值
平均温度	$\bar{T}_k$	15.7 keV
大半径	$R_0$	7.1 m
小半径	$a$	2.0 m
环径比	$R_0/a$	3.5
线圈厚度	$c$	1.1 m
装置体积	$V$	2500 m <sup>3</sup>
等离子体体积	$V_p$	960 m <sup>3</sup>
等离子体表面积	$S_p$	790 m <sup>2</sup>
轴上磁场	$B_0$	7.1 T
等离子体电流	$I_M$	17 MA
等离子体平均压强	$p_a$	6.1 atm
等离子体平均密度	$\bar{n}_{20}$	$1.1 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$
H 模约束时间	$\tau_H$	1.2 s
$\alpha$ 加热总功率	$P_\alpha$	760 MW
聚变总功率	$P_f$	3800 MW
总的韧致辐射损失	$P_B$	28 MW
壁负载	$P_w$	3.9 MW/m <sup>2</sup>

对比点火装置与第5章讨论的简单反应堆的设计参数,可以看出,二者的体积相当。实际上,点火装置还要大点,原因是由反应堆参数得到的  $\tau_H$  值只有 0.68 s,比点火装置所需的值 ( $\tau_H = 1.2 \text{ s}$ ) 小了一倍。点火装置的设计目标是自持功率平衡,这要求通过增大装置体积来提高较小的  $\tau_H$  值到规定值。另外值得一提的是,这里讨论的简单模型给出的参数接近 ITER 预想的设计参数。

上述简单分析说明了聚变点火装置或聚变堆的大小和造价是如何与  $\tau_E$  值紧密联系的。要求  $\tau_H$  值增加到 2 倍,就会使装置的体积与简单反应堆相比也增加近 2 倍。由此人们很容易明白为什么理解、控制和改善输运会成为聚变研究的重要领域。

最后要重申的一点是,超导托卡马克点火装置的大小类似于全功率反应堆。物理和工程不允许我们建立一个较小较便宜的点火实验装置来研究燃烧等离子体科



学。这意味着,托卡马克聚变反应堆的发展成本会很高,因为从点火直至实验反应堆,规模相当。这在经济上不是很有利,尽管非我所愿,但是无法逾越。

### 14.6.3 加热至点火

下一项应用是关于超导点火装置中等离子体从冷的初始状态到稳态运行的终态的时间演化。这里有两个主要问题需要考虑。首先,终态工作点是热稳定的吗?或者说需要采用某种方式的燃烧控制吗?第二,需要多大的外部加热功率才能使等离子体加热到足够高的温度,使得顺利过渡到 $\alpha$ 粒子加热占主导并完成充分点火?

第4章提出过这些问题,在那里是假设能量约束时间 $\tau_E$ 是常数,其值等于点火所需值 $\tau_E = 1.2\text{s}$ 。当时的分析结果表明,稳态点火点是热不稳定的,所需的辅助加热功率大约相当于点火后 $\alpha$ 粒子加热功率的25%,这是一笔很大的开销。在本节中,我们用H模下的经验定标关系[它是温度的函数: $\tau_E = \tau_E(T)$ ]来重新确定这些问题。其结果如下所示,有些令人吃惊。

#### 1. 热稳定性

上述两个问题都可以从审视时变零维能量平衡方程来回答。分析的关键假设是,整个演化发生在恒定密度等于最终预期值 $\bar{n}_{20} = 1.1$ 的条件下。这种近似并非不合理,因为通常粒子约束时间略低于能量约束时间。因此,密度的外部控制往往会滞后于温度变化,使控制变得困难。

基本零维能量平衡包括 $\alpha$ 加热功率、外部加热功率、韧致辐射损失和热传导损失等项。欧姆加热被略去,因为它只是在非常低的温度下才有小贡献(见下一章所述)。在上述预设分布下,能量平衡方程可以写成:

$$\frac{dW}{dt} = \langle S_\alpha \rangle - \langle S_B \rangle - \langle S_\kappa \rangle + \frac{P_h}{V_p} \quad (14.188)$$

这里,

$$\left. \begin{aligned} W &= \langle 3nT \rangle = 5.34 \times 10^4 \bar{n}_{20} \bar{T}_k \quad (\text{J/m}^3) \\ \langle S_\alpha \rangle &= \langle E_\alpha n^2 \langle \sigma v \rangle / 4 \rangle = 2.31 \times 10^5 \bar{n}_{20}^2 \langle \sigma v \rangle_n \quad (\text{W/m}^3) \\ \langle S_B \rangle &= \langle C_B n^2 T^{1/2} \rangle = 6.14 \times 10^3 \bar{n}_{20}^2 \bar{T}_k^{1/2} \quad (\text{W/m}^3) \\ \langle S_\kappa \rangle &= \langle 3nT \rangle / \tau_H = 5.34 \times 10^4 \bar{n}_{20} \bar{T}_k / \tau_H \quad (\text{W/m}^3) \end{aligned} \right\} \quad (14.189)$$

等离子体体积仍为 $V_p = 960 \text{ m}^3$ ,  $P_h(\bar{T}_k)$ 是总的外部加热功率(单位:W),为方便起见,重写 $\tau_H$ 如下:

$$\tau_H = 0.145 \frac{I_M^{0.93} R_0^{1.39} a^{0.58} \kappa^{0.78} n_{20}^{-0.41} B_0^{0.15} A^{0.19}}{P_M^{0.69}} \quad (\text{s})$$

$$= \frac{117}{P_M^{0.69}} \quad (\text{s}) \tag{14.190}$$

这里,  $\tau_H$  的第二种形式是由上小节导出的设计参数得出的;  $P_M$  是测得的沉积于等离子体的总功率(单位: MW):  $P_M(\bar{T}_k) = [\langle S_\alpha \rangle V_p + P_h] \times 10^{-6}$ 。

现在, 我们可以通过绘制  $P_h = 0$  时的  $dW/dt$  对  $\bar{T}_k$  曲线, 并检查其在平衡点火位置的斜率来确定这一系统的热稳定性。从第4章的讨论可知, 正斜率对应于热不稳定, 而负斜率是稳定的。对于密度设计值  $\bar{n}_{20} = 1.1$  的曲线如图 14.25 所示。图中还给出了第4章中  $\tau_E = 1.2 \text{ s} = \text{常数}$  情形下的相应曲线。

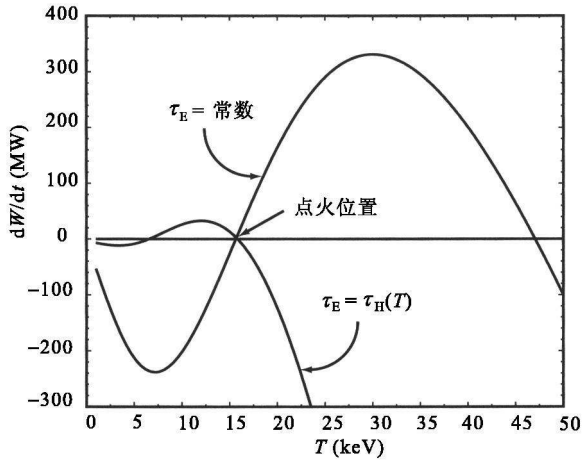


图 14.25  $\tau_E = \tau_H(T)$  和  $\tau_E = \text{常数} = 1.2 \text{ s}$  两种情形下 (假定  $P_h = 0$ ) 的  $dW/dt$  对  $T$  曲线

从时间依赖性方面看,  $\bar{n}_{20} = \text{常数}$ , 加上  $\bar{T}_k = \bar{T}_k(t)$ , 表明  $dW/dt \propto d\bar{T}_k/dt$ 。

我们看到, 两条曲线相交于同一平衡点火位置  $\bar{T}_k = 15.7 \text{ keV}$ 。然而,  $\tau_E = \text{常数}$  曲线在交点处斜率为正, 说明是热不稳定的; 而  $\tau_E = \tau_H$  曲线在此斜率为负, 说明是热稳定的。其原因是  $\tau_H$  随  $\bar{T}_k$  提高而退化使得曲线  $dW/dt$  对  $\bar{T}_k$  曲线移到了左边。 $\tau_E = \text{常数}$  曲线的稳定的高温交点 (这一点我们不是很感兴趣, 因为相应的  $\beta$  值远远超出了磁流体力学稳定极限) 则对应于  $\tau_E = \tau_H$  曲线上一个更可接受的值。 $\tau_E = \tau_H$  曲线的低温交点则对应于  $\alpha$  功率与韧致辐射损失和相对较小的热传导损失之和相平衡的情形 (因为在较低温度下  $\tau_H$  值大)。在这个低温点, 净功率不大, 因此从能量角度看, 它不是很令人感兴趣。等离子体一旦越过这一温度, 就会激发起热不稳定性, 自发地推动等离子体趋向稳定的高温平衡点  $\bar{T}_k = 15.7 \text{ keV}$ 。结论是, 如果将

H 模经验定标关系外推到由  $\alpha$  加热为主的等离子体,则自持点火是热稳定的,这个非常理想的结果正好与第 4 章由  $\tau_E = \text{常数}$  导出的结论相反。

## 2. 最低点火功率

现在考虑将  $\bar{T}_k$  提高到足够高从而使  $\alpha$  加热成为主导所需的最低外部加热功率。从  $\tau_E = \tau_H$  曲线来看,在  $0 < \bar{T}_k < 15.7 \text{ keV}$  温度范围,必须有足够高的  $P_h$  才能使  $dW/dt > 0$ 。正的  $dW/dt$  意味着温度必须持续提高,直到达到着火点。显然,在  $\bar{T}_k = 15.7 \text{ keV}$  时,  $P_h$  必须为零才能维持等离子体平衡。

对图 14.25 分析表明,在低温处,外加功率必须增加直到等离子体越过约  $\bar{T}_k = 15.7 \text{ keV}$  的韧致辐射损失平衡点。高于这一点之后,  $\alpha$  粒子加热开始占支配地位,外部功率可逐渐减小到零。具有这一性质的  $P_h(\bar{T}_k)$  简单模型由下式给出:

$$P_h = \begin{cases} P_0 & \bar{T}_k < T_B \\ P_0 \left[ 1 - \left[ \frac{\bar{T}_k - T_B}{T_1 - T_B} \right]^2 \right] & T_B < \bar{T}_k < T_1 \end{cases} \quad (14.191)$$

其中,  $T_B = 5 \text{ keV}$  是韧致辐射温度;  $T_1 = 15.7 \text{ keV}$  是点火温度;  $P_0$  是实施的最大外部加热功率。

不同  $P_0$  值下的  $dW/dt$  对  $\bar{T}_k$  曲线如图 14.26 所示。图中还给出了  $P_h(\bar{T}_k)$  曲线。图 14.26 表明,点火所需的最低  $P_0$  值约为  $P_0 = 22.2 \text{ MW}$ 。对于这个  $P_0$  值,  $dW/dt$  对  $\bar{T}_k$  曲线处处为正,且其极小点恰好与  $dW/dt = 0$  轴相切。从实用上考虑,

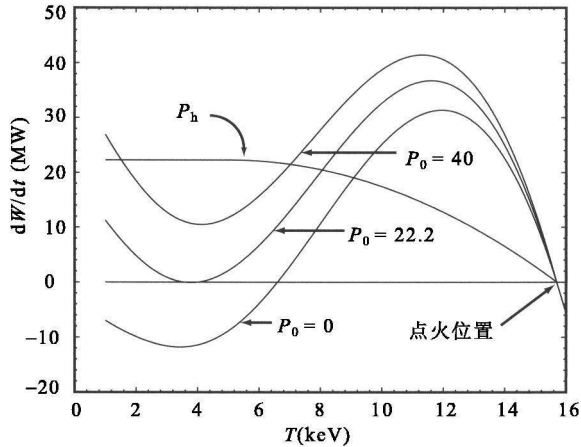


图 14.26  $\tau_E = \tau_H(T)$  情形下不同  $P_0$  值的  $dW/dt \sim T$  曲线  
(图中还给出了  $P_0 = 22.2 \text{ MW}$  情形下的  $P_h \sim T$  曲线)

我们希望  $P_0$  值明显要高,以便很快通过极小点(假设我们只能取穿过  $dW/dt = 0$  的曲线上点的话,就将需要无限长的时间才能到达点火位置)。因此  $P_0 = 40 \text{ MW}$  的曲线是更现实的  $P_0$  选择。如果功率吸收效率假定为 0.7,那么这将意味着注入等离子体的外部加热功率必须大约是 60 MW。

将  $P_0 = 22.2 \text{ MW}$  与第 4 章由  $\tau_E = \text{常数}$  模型导出的值进行比较是有趣的。 $\tau_E = \text{常数}$  模型显示,点火时等离子体吸收的功率约为  $\alpha$  加热功率的 25%,对于眼下的超导设计,这相当于  $P_0 = 190 \text{ MW}$ 。因此,采用 H 模约束时间将所需的辅助加热功率减少了近 10 倍。这真是十分理想的结果。其原因是  $\tau_H$  随  $\bar{T}_k$  提高而明显变差。从追求高温这一点来说,这种退化明显是不可取的,但另一方面看,它意味着在低温下  $\tau_H$  明显增大。具体来说,如果将温度从 15 keV 降到 5 keV,则能量约束时间增大近 11 倍。低  $\bar{T}_k$  下较长的约束时间意味着只需要相当少的外加功率就可以将等离子体加热到韧致辐射温度  $\bar{T}_k \approx 5 \text{ keV}$ 。

总之,  $\tau_H$  随  $\bar{T}_k$  提高而退化的不良影响可以从等离子体加热到点火这一动态演变的改善得到补偿。首先,最后平衡点火点是热稳定的,其次,用比预期值低得多的外部辅助功率就可能足以加热等离子体到点火。

#### 14.6.4 自举电流比例

输运理论在聚变点火实验上的最后一项应用是对自举电流比例  $f_B$  的计算。我们的目标是要评估自举电流比例,以确定经济可行性条件  $f_B \approx 0.75$ 。计算相对简单,思路是先将有一定实验依据的分布代入自举电流表达式,然后对整个等离子体区域积分以取得总自举电流。结果表明,标准的单调电流密度分布给出的值通常小于 0.4。要将  $f_B$  提高到预期值 0.75,需要采取以中空电流分布和超过特鲁瓦永无壁  $\beta$  极限的压强分布为特征的先进托卡马克运行模式。换言之,所需的高  $\beta$  值将激起电阻壁模,因此必须采取反馈稳定措施。

分析中值得注意的是,自举电流比例对密度和温度分布相当敏感。为了取得不是过分悲观的结果,本小节里我们取比点火实验设计中使用的更为乐观的密度和温度分布。

##### 1. 自举电流比例的推导

为方便起见,我们将大环径比、圆截面托卡马克的自举电流密度公式复述如下(其中忽略了温度梯度的贡献):

$$J_B(r) = -4.71q \left[ \frac{R_0}{r} \right]^{1/2} \frac{T}{B_0} \frac{\partial n}{\partial r} \quad (14.192)$$

为了评估  $J_B$ ,我们需要规定  $n, T, q$  的分布。实际上,先规定总环形电流密度分布  $J$ ,

然后由此直接计算  $q$  会更简单。

首先考虑密度、温度和压强的分布。可以合理假定压强分布为峰型,峰值因子  $p(0)/\bar{p} = 3$ 。这一分布对本节所有情形均不变。密度分布是带有参数  $\nu$  的平缓分布,调整  $\nu$  可以改变密度的峰值因子:  $n(0)/\bar{n} = 1 + \nu$ 。此外,较大的非圆截面调整为小半径为  $r_0 = \kappa^{1/2} a$  的圆截面等离子体模型。根据这些假设,压强、密度和温度分布可以写成:

$$\left. \begin{aligned} p(\rho) &= 3\bar{p}(1 - \rho^2)^2 \\ n(\rho) &= (1 + \nu)\bar{n}(1 - \rho^2)^\nu \\ T(\rho) &= (3 - \nu)\bar{T}(1 - \rho^2)^{2-\nu} \end{aligned} \right\} \quad (14.193)$$

其中,  $\rho = r/r_0$ ;  $\bar{p} = (2/3)(1 + \nu)(3 - \nu)\bar{n}\bar{T}$ 。

总电流密度依据分布函数  $g(\rho)$  规定为:

$$J(\rho) = \frac{1}{\pi r_0^2} \frac{g(\rho)}{g} \quad (14.194)$$

其中,

$$g = 2 \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho \quad (14.195)$$

$g(\rho)$  按是标准运行还是先进模式运行而有不同的选择。一旦  $g(\rho)$  确定了,就可以根据安全因子  $q$  的标准定义  $q = rB_0/R_0B_\theta(r)$  来计算  $q$ :

$$q(\rho) = \frac{\pi r_0^2 B_0}{\mu_0 R_0 I} \frac{\rho^2 g}{\int_0^\rho g(\rho) \rho d\rho} = q_* \frac{\rho^2 g}{\int_0^\rho g(\rho) \rho d\rho} \quad (14.196)$$

将这些分布代入自举电流密度  $J_B(\rho)$ , 然后对等离子体区域积分,即可获得总的自举电流  $I_B$ 。 $I_B$  除以等离子体总电流即得到所需的自举电流所占比例  $f_B$ :

$$f_B = \frac{I_B}{I} = 17.7G \frac{\nu \kappa^{1/4} \beta_N q_*}{\varepsilon} \quad (14.197)$$

其中  $G$  是按如下定义的几何因子:

$$G = g \int_0^1 \left[ \rho^{5/2} (1 - \rho^2) \right] / \left[ \int_0^\rho g(\rho') \rho' d\rho' \right] \rho d\rho \quad (14.198)$$

式(14.197)中  $\beta_N$  是从特鲁瓦永稳定性极限消去  $p$  得到的。

现在我们可以用式(14.197)来计算标准模式和先进模式两种电流分布情形下

的自举电流比例了。

## 2. 标准单调分布

托卡马克的标准电流密度分布是半径的单调递减函数,可用  $g(\rho)$  建模如下:

$$g(\rho) = 1 - \rho^2 \quad (14.199)$$

简单数值计算表明,对于这种选择,几何因子为  $G = 0.255$ 。因此自举电流比例为:

$$f_B = 4.0 \frac{\kappa^{1/4} \beta_N q_* \nu}{\varepsilon^{1/2}} \quad (14.200)$$

对于设计值  $\kappa = 1.7$ ,  $\beta_N = 0.025$ ,  $q_* = 2$ ,  $\varepsilon = 1/3.5$ ,  $\nu = 1/3$ ,可求得  $f_B = 0.14$ 。这个值远远低于预期值  $f_B = 0.75$ 。

怎么才能提高自举电流比例呢?可能的办法有几种,但都困难重重。首先,我们可以想象存在更峰化的密度分布,例如相当于  $\nu = 1$  的分布。但是,在通过外部喷气进行加料时,实验密度分布往往是相当平坦。对于 H 模放电情形尤为如此。内部弹丸注入加料应该能够产生更峰化的分布,但这种峰化可以维持多长时间目前还不确定。另外,由于高密度和大尺寸,因此不太可能深度穿透反应堆等离子体。

另一种方法是通过提高  $q_*$  来降低电流。提高安全余量还有另外的好处,就是能够抑制电流驱动的破裂。不利的方面是,降低电流意味着缩短约束时间,因为  $\tau_H \sim I^{1.06}$ 。实际上,约束问题更为紧要。没有好的约束,等离子体就无法加热到足够高的点火温度。

第三种可能性是提高  $\beta_N$ 。如果等离子体由理想导体壁包裹着,则  $\beta_N$  可以大幅提高。实际上,导体壁的电导率必定是有限的,这将激发电阻壁模不稳定性。如果  $\beta_N$  不比无壁情形下的值高很多,就有可能通过反馈措施来稳定这种电阻壁模。在目前情况下,  $\beta_N$  必须提高 5 倍才能达到  $f_B = 0.75$ 。这就大得无理了。

这些制约因素导致了先进运行模式的发现。如果成功的话,反应堆就有可能实现先进模式运行,这样,自举电流的比例将大幅提高。下面我们就来讨论这个问题。

## 3. 先进模式分布

先进运行模式是一种由外部功率输入来对参数分布(主要是电流密度分布)实施控制的运行模式。其目标是要实现中空电流分布。如果可实现的话,这种中空电流分布会带来两方面的好处。首先,中空电流分布形状上非常类似于自发形成的自举电流分布,这意味着二者有很好的替代性。换句话说,各处出现的自举电流一点都没浪费。

第二,等离子体芯部电流的减小意味着总等离子体电流的降低。因此,即使自举电流比例固定不变,待驱动的总电流仍减小了。与此相关的是,相应的安全因子

的优化分布显示,  $q(\psi)$  应有一个离轴的极小点(即剪切应形成离轴反向点)。通常,对于优化的反剪切分布,数值研究发现,在极小点,  $q_{\min}(\psi_{\min}) > 2$ 。对于这些分布,扭曲模安全因子的值必须满足  $q_* > 3$ 。显然,  $q_*$  的提高必然引起自举电流的增大。这是一个理想的结果。然而,人们可能会担心,较高的  $q_*$  或(等价地)较低的电流可能会导致约束时间的缩短,因为 H 模的定标律为  $\tau_H \sim I^{1.06}$ 。有趣的是,实验对反剪切区域的观测表明,输运已改善到接近新经典输运的水平。因此结论是,  $\tau_H$  值可能不会减小,当然我们还需要有更多的实验数据来证实这一点。

就眼下而言,我们不妨规定一个中空电流分布,然后问怎样做才能产生比例  $f_B = 0.75$  的自举电流。由分布因子  $g(\rho)$  给出的电流分布的简单模型如下:

$$g(\rho) = (\rho^2 + \alpha)(1 - \rho^2) \quad (14.201)$$

$\alpha$  是任意参数,在下面的例子里设为  $\alpha = 0.2$ 。  $g(\rho)$  曲线如图 14.27 所示。这种情况下,直接的数值计算表明,相应的几何因子的值提高到  $G = 0.34$ 。中空电流分布的自举电流比例也相应增加,并由下式给出:

$$f_B = 5.9 \frac{\kappa^{1/4} \beta_N q_* \nu}{\varepsilon^{1/2}} \quad (14.202)$$

现在,假设中空电流分布为  $q_* = 3.5$ 。其他参数固定为标准值:  $\kappa = 1.7$ ,  $\beta_N = 0.025$ ,  $\varepsilon = 1/3.5$ ,  $\nu = 1/3$ 。可求得  $f_B = 0.37$ ,显然,自举电流比例有了较大幅度的改善,但仍低于预期值  $f_B = 0.75$ 。

解决  $f_B$  过小的方法在于将等离子体运行置于更高的  $\beta$  值(取  $\beta_N = 0.05$ )下。

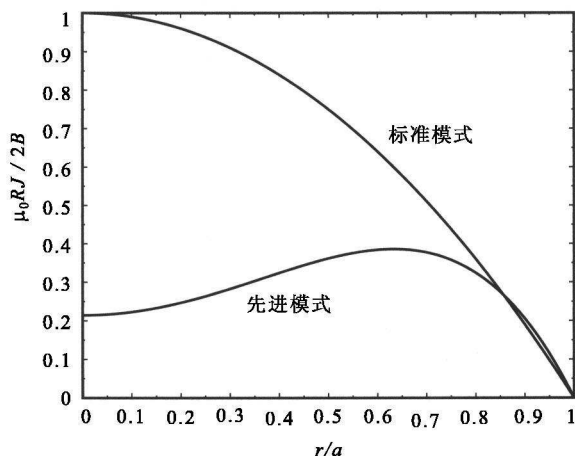


图 14.27  $\alpha = 2$  的先进模式和标准模式两种情形下的  $g(\rho)$  分布曲线

这相当于2倍于无壁特鲁瓦永 $\beta$ 极限,必将激发起电阻壁模不稳定性。但考虑到反馈控制和/或等离子体旋转等综合因素,应该能够稳定住这种适当增长的 $\beta_n$ 下的电阻壁模。

### 14.6.5 小结

稳态运行的需要已导致先进托卡马克运行模式的发现。在这种运行模式下,很大一部分环电流由自举电流担当: $f_B = 0.75$ 。不幸的是,在标准分布下要产生这么大比例的自举电流很不容易。为此,需要采取具有反剪切安全因子分布的高度中空的电流密度分布。此外,输运必须不因中空电流分布使得总电流变小而变差。为了达到 $f_B = 0.75$ ,还必须稳定因高 $\beta_n$ 值而出现的电阻壁模。这些困难的约束条件使得先进托卡马克模式运行成为托卡马克研究的重要任务之一。

## 14.7 本章总结

要实现聚变反应堆等离子体的自持点火,能量约束时间必须在 $\tau_E = 1$  s量级。实际上, $\tau_E$ 主要受到热传导损失的限制。实验给出的热传导系数要比一维柱形模型下经典库仑输运理论预言的值大,这是因为存在微观不稳定驱动的湍流输运。因此,虽然我们已发展出一套精致、优美的关于柱形和环形位形下库仑碰撞的基本理论,但实践上主要还是依靠经验定标关系来确定新的实验设计参数。这种经验定标关系显示,在尺寸略大于第5章的简单反应堆的装置上,以H模运行的托卡马克应能够实现自持点火。展望未来,应当指出的是,我们在发展反常输运基本理论方面正取得巨大进步。这一理论得到充分发展,将大大提高我们在预言新的大型实验装置方面的信心。目前距离实现这一理想目标仍有一段路要走。

有关托卡马克反应堆输运的第二个主要问题是自举电流的产生。我们给出了对 $J_B$ 的一个简单推导,并应用到实验情形,但结果显示,相应的自举电流比例 $f_B$ 太小,不足以经济地维持标准托卡马克运行。在先进托卡马克模式下应能够实现高比例的自举电流,但可能会激发起电阻壁模不稳定,为此需要采取反馈和/或等离子体旋转等措施来致稳。

最后,我们用经验定标律研究了热稳定性以及达到点火所需的最低功率。这里, $\tau_E(T)$ 的温度依赖性给出了比第4章假定 $\tau_E$ 为常数情形下所取得的更有利的结果。新结果表明,等离子体在点火点是热稳定的,将等离子体加热到点火所需的外加辅助功率是完全可接受的,其大小比第4章预言的值几乎低了一个量级。

总之,托卡马克输运仍然是实现点火道路上最困难的等离子体物理问题,但迄今取得的进展表明,聚变反应堆运行所要求的指标应该是可以实现的。



## 参考书目

由于研究磁化等离子体输运对于实现聚变能源的极端重要性,因此关于输运研究的文献可谓汗牛充栋。下面列出若干一般性参考文献以及关于具体输运现象的参考文献。

### 1. 一般性参考文献

- Chen, F. F. (1984). *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, second edn. New York: Plenum Press.
- Hazeltine, R. D., and Meiss, J. D. (1992). *Plasma Confinement*. Redwood City, California: Addison-Wesley.
- Helander, P., and Sigmar, D. J. (2002). *Collisional Transport in Magnetized Plasmas*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Hinton, F. L., and Hazeltine, R. D. (1976). Theory of plasma transport. *Reviews of Modern Physics*, **48**, 239.
- ITER Physics Basis (1999), Chapter 2, Plasma confinement and transport, *Nuclear Fusion*, **39**, 2175.
- Itoh, K., Itoh, I. S., and Fukuyama, A. (1999). *Transport and Structural Formation in Plasmas*. Bristol: Institute of Physics Publishing.
- Spitzer, L. (1962). *The Physics of Fully Ionized Gases*, second edn. New York: Interscience.
- Wesson, J. (2004). *Tokamaks*, third edn. Oxford: Oxford University Press.

### 2. 新经典输运

- Galeev, A. A., and Sagdeev, R. Z. (1968). Transport phenomena in a collisionless plasma in a toroidal magnetic system. *Soviet Physics JETP*, **26**, 233.

### 3. 香蕉区输运

- Kadomstev, B. B., and Pogutse, O. P. (1971). Trapped particles in toroidal magnetic systems. *Nuclear Fusion*, **11**, 67.
- Rosenbluth, M. N., Hazeltine, R. D., and Hinton, F. L. (1972). Plasma transport in toroidal confinement systems. *Physics of Fluids*, **15**, 116.

### 4. 密度极限

- Greenwald, M., Terry, J., *et al.* (1988). A new look at density limits. *Nuclear Fusion*, **28**, 2199.
- Greenwald, M. (2002). Density limits in toroidal plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **44**, R27.

### 5. H 模

- Wagner, F., Becker, G., *et al.* (1982). Regime of improved confinement and high beta in neutral beam heated divertor discharges in the Asdex tokamak. *Physical Review Letters*, **49**, 1408.

## 6. 内部输运垒

- Greenwald, M., Gwinn, D., *et al.* (1984). Energy confinement of high density pellet fueled plasmas in the Alcator C tokamak. *Physical Review Letters*, **53**, 352.
- Synakowski, E. J. (1998). Formation and structure of internal and edge transport barriers. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **40**, 581.

## 7. 反剪切

- Levinton, F. M., Zarnstorff, M. C., *et al.* (1995). Improved confinement with reversed shear in TFTR. *Physical Review Letters*, **75**, 4417.

## 8. 定标关系

- Goldston, R. J. (1984). Energy confinement scaling in tokamaks: some implications of recent experiments with ohmic and strong auxiliary heating. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **26**, No. 1A, 87.

## 习 题

**14.1** 本题研究辅助加热沉积分布对约束时间的影响。考虑一维等离子体平板模型,其中热传导和辅助加热是等离子体能量平衡的主要影响因素。假设辅助加热功率密度由下式给出  $S_h = (1 + \nu) \bar{S} (1 - x/a)^\nu$ , 其中,  $0 < x < a$ ,  $\nu$  是描述沉积分布的分布参数。并假定热扩散系数  $\chi$  和数密度  $n$  均为给定常数。边界条件为  $dT(0)/dx = 0$  和  $T(a) = 0$ 。试导出作为  $\nu, n, \chi$  和  $a$  的函数的能量约束时间  $\tau_E$  的表达式, 并比较  $\nu \rightarrow 0$  和  $\nu \rightarrow \infty$  时  $\tau_E$  的值。

**14.2** 考虑欧姆加热托卡马克中电子和离子的双流体稳态零维功率平衡关系。为简单起见, 假定所有分布均为空间均匀分布。两种成分的能量约束时间分别记为  $\tau_{Ee}$  和  $\tau_{Ei}$ , 并假定为已知常数。此外, 假定托卡马克装置运行锯齿活动方式下, 故电流密度  $J_0$  (假定为常数) 与  $T_e$  和  $T_i$  均无关。我们知道, 电阻率和能量平衡时间与温度的函数关系分别为  $\eta = K_\eta/T_e^{3/2}$  和  $\tau_{eq} = K_\tau T_e^{3/2}/n$ 。现假定  $\tau_{eq}$  对应于很短但有限的时间, 求  $T_e$  和  $1 - T_i/T_e$  作为  $\tau_{Ee}, \tau_{Ei}, J_0, n, K_\eta$  和  $K_\tau$  的函数的稳态值的近似表达式。

**14.3** 在托卡马克放电的平顶区, 测得环电压  $V_\phi = 2\pi R_0 E_\phi$  为 0.8V, 如果托卡马克装置以锯齿活动方式运行, 环向磁场  $B_0 = 4$  T, 试求磁轴上电子温度。假设斯必泽电阻率为  $\eta = 3.3 \times 10^{-8}/T_k^{3/2}$ 。

**14.4** 半径为  $a$  的圆柱形等离子体的初始密度分布为  $n(r, 0) = n_0 (0 < r < a)$ 。密度分布满足扩散方程:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial n}{\partial r} \right)$$

其中  $D$  为常数。假设所有粒子均被等离子体边界吸收且不存在粒子源。计算经过长(但有限)时间后的密度分布。提示: 复习傅里叶-贝塞尔级数。

**14.5** 本题描述通过外部气体喷入来给托卡马克加料的简单方法。燃气射流将粒子通量  $\Gamma$  已知的中性氖原子均匀地注入圆柱形等离子体表面。在穿透约 1 个平均自由程的距离后, 这些中性粒

子被电离。因此质量守恒方程必须包括这个新的分布式等离子体粒子源  $S_n(r)$ 。注意,在等离子体中心附近,  $S_n(r) = 0$ , 因为此处所有入射粒子均已被电离。因此描述源项的一个简单模型是:  $S_n(r) = 0, 0 < r < a - \lambda; S_n(r) = S_0, a - \lambda < r < a$ , 这里为简单起见, 设  $\lambda$  为常数。描述密度分布的一维稳态方程为:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rD \frac{\partial n}{\partial r} \right) + S_n(r) = 0$$

其中  $D$  为常数。

① 给出源强大小  $S_0$  与入射粒子通量  $\Gamma$  的关系。

② 假设在  $r = a$  处满足理想沉积条件, 试利用  $\Gamma, a, \lambda$  和  $D$  等参数来表示稳态密度分布和轴上的密度。

**14.6** 考虑一维单流体等离子体平板模型的能量输运。影响能量平衡的主要因素项为欧姆加热、热传导损失和外部辅助加热。为简单起见, 假设辅助加热功率密度为  $S_h(x) = S_0$ , 等离子体数密度为  $n(x) = n_0$ 。本题要求的是: 要达到规定的轴上温度  $T_0$ , 需要多大的辅助加热功率密度  $S_0$ ? 假设等离子体处于放电的稳态平顶区间。输运系数设为: 电阻率  $\eta = C_\eta / T^{3/2}$ , 反常热扩散系数  $\chi_\perp = C_\chi T^{1/2}$ 。此外, 假定温度与电流密度之间的关系为  $J = J_0 (T/T_0)^{3/2}$ , 其中,  $J_0$  和  $T_0$  为轴上的值。边界条件为在  $x = -a$  和  $x = a$  处,  $T(x) = 0$ 。

① 设  $S_0 = 0$ , 试计算纯欧姆加热条件下的轴上温度  $T_0 \equiv T_\Omega$ 。

② 求出实现特定中心温度  $T_0 > T_\Omega$  所需的  $S_0$  的值。

**14.7** 本题研究热功率平衡下等离子体边缘的线辐射效应。几何位形设为  $0 < x < a$  区间的一维等离子体平板。影响功率平衡的主要因素为外部加热 ( $S_h = S_0$ )、热传导 ( $\kappa = \kappa_0$ ) 和线辐射损失  $S_{LR}(T)$ , 如图 14.28 所示。并设温度  $T_R$  约  $10 \sim 30$  eV,  $S_R \gg S_0$ 。

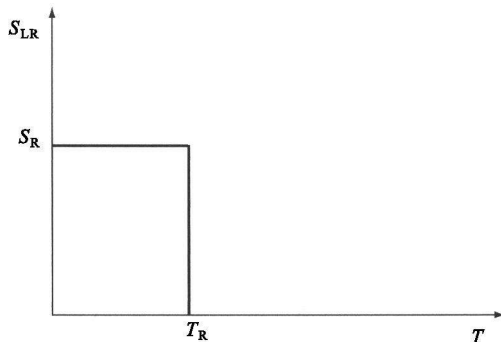


图 14.28

① 作为参考, 忽略辐射损失, 并假定  $T'(0) = 0, T(a) = 0$ , 试计算平衡温度分布。

② 考虑有限辐射损失, 重复①。证明: 存在临界  $S_0$  值, 使得全部等离子体能量损失全由辐射造成, 没有热传导损失。当  $S_0$  低于这个临界值时会发生什么情况?

**14.8** 考虑一个大环径比圆截面托卡马克装置。在放电平顶区, 能量平衡主要由热传导损失和辅助加热功率决定。

① 假设热扩散系数  $\chi$ 、辅助加热功率密度  $S_h$  和数密度  $n$  均为空间均匀分布。推导作为  $\chi, n, R_0, a$  和总辅助加热功率  $P_h$  [MW] 等参数的函数的温度表达式 [以 keV 为单位, 且  $T_e(r) = T_i(r) \equiv T(r)$ ];

② 利用总能量约束时间的定义导出一个  $\chi$  与  $\tau_E$  之间的关系。

③ 假设  $\tau_E$  由 L 模定标律的简化形式给出:  $\tau_E \approx 0.06 I_M R_0^{3/2} / P_h^{1/2}$  s。推导  $\chi$  作为  $n, a, R_0$  和  $\bar{T}$  的函数的表达式。答案中  $\chi$  不应是  $P_h$  的函数。

**14.9** 考虑一个大半径  $R_0 = 0.6$  m, 小半径  $a = 0.2$  m, 轴上环向磁场  $B_0 = 10$  T 的圆截面托卡马克装置。当欧姆加热功率为 500 kW, 环电压  $V_\phi = 0.5$  V 时, 装置运行的边缘安全因子  $q_a$  是多大? 假设电流密度分布为  $J_\phi = J_0(1 - r^2/a^2)$ , 你认为会激发起锯齿振荡吗? 解释原因。

# 第 15 章 加热与电流驱动

## 15.1 引言

在稳态聚变反应堆中,等离子体必须满足点火条件:

$$p \tau_E = \frac{24}{E_\alpha} \frac{T^2}{\langle \sigma v \rangle} \quad (15.1)$$

当等离子体温度  $T$  等于 15 keV 时,  $T^2/\langle \sigma v \rangle$  取最小值, 此时对等离子体压强和能量约束时间的要求最低。达到这个温度的过程包含两个阶段。首先, 通过欧姆加热和辅助加热把等离子体温度提高到 5 ~ 7 keV。在这个过程中, 聚变产生的  $\alpha$  粒子对加热的贡献可以忽略, 而加热功率需要克服由于热传导和韧致辐射导致的功率损失。当等离子体温度超过 5 ~ 7 keV 后,  $\alpha$  粒子加热功率成为主要力量, 它将加热等离子体到最终的点火温度 15 keV。

本章的主要目的是要探讨将等离子体加热到 5 ~ 7 keV 这个过渡温度的各种方法。本章还将讨论另一个相关问题, 即电流驱动。我们知道, 托卡马克要稳态运行, 就必须要有某种形式的非感应电流驱动。由于大多数的等离子体加热方法都可以用来驱动等离子体电流, 因此可以很自然地把对等离子体加热的讨论推广到电流驱动问题上来。另外, 大部分等离子体加热和电流驱动的研究都是在托卡马克上进行的, 因此本章的分析也将会集中在托卡马克位形上, 尽管大部分研究结果同样适用于其他位形。

需要指出的是, 加热和电流驱动问题涵盖了非常广泛的问题, 限于篇幅不能全部包含在本书中。这里我们将集中于那些在 ITER 和聚变堆中更具现实意义的方法上。具体而言, 加热部分包括欧姆加热、中性束加热、电子回旋加热和离子回旋加热; 而电流驱动部分, 我们感兴趣的是低杂波电流驱动。

要理解加热问题, 让我们首先考虑欧姆加热。托卡马克中通过变压器原理感应出环向电流, 同时产生欧姆加热。从技术角度来讲, 这是个最简单的方法。然而, 等离子体电阻率随着温度升高而减小:  $\eta \propto 1/T^{3/2}$ , 因此加热效率随着温度升高而降低。分析表明, 对于托卡马克反应堆的典型参数, 通过欧姆加热可以达到的最高温度不超过大约 3 keV。这个温度不足以达到  $\alpha$  粒子加热占优势的阶段, 因此, 必须要有其他辅助加热手段参与。

我们讨论的第一种辅助加热手段是中性束加热。这里,高能的中性氘束或者氦束被注入等离子体中。由于中性束原子不受磁场影响,束原子将会沿直线传播,直到它们通过与背景等离子体碰撞而被电离。而一旦被电离,束粒子将被磁场约束,其能量也会通过库仑碰撞逐渐转移到等离子体中。由于加热机制依赖于经典的碰撞过程,因此可以预料,中性束加热在反应堆规模的等离子体中仍然是有效的。就装置运行而言,为取得好的加热效果,束能量显然必须远高于背景等离子体温度。而束能量的实际值由穿透性决定,即束粒子必须能穿透等离子体中心从而实现芯部加热。这个要求本质上是个技术问题,但它带来了中性束加热面临的最大问题。现在的中性束系统是由正离子源驱动的,在能量大约为 100 keV 以下时可以保持很高的驱动效率。这个能量对于目前运行的装置是足够的,但是对于具有更高密度和更大尺寸的 ITER 和聚变反应堆来说,则需要能量高达 1 MeV 的中性束才能取得好的穿透效果。这个目标有可能通过利用负离子源驱动中性束的系统来实现。但这项技术非常困难,目前还没有完全实现。一个巨大的负离子源中性束系统研发计划正在进行,并期望能按照 ITER 需要的时刻表完成。

第二种辅助加热的选择是利用射频波。这里,外部射频功率源产生的高频电磁波被发射到等离子体中。加热的机制和微波炉工作原理类似。当外加电磁波的频率与食品或者等离子体的本征共振频率匹配时,能量被强烈吸收,并转化为热能。在等离子体中,我们感兴趣的本征共振频率包括电子和离子的回旋频率以及它们的谐频。在电子共振频率处的加热称为电子回旋加热(ECH);相应地,对于离子则称为离子回旋加热(ICH)。电子回旋加热和离子回旋加热的一个有趣的特点是,共振吸收都是由所谓“无碰撞阻尼”机制来实现的。就像在微波炉中一样,能量的吸收不依赖于碰撞。在后面讨论射频波加热时,我们会详细描述这种无碰撞阻尼机制。尽管电子回旋加热和离子回旋加热都能在等离子体芯部产生强的能量吸收,但这两种途径也都面临技术上的难题。对于电子回旋加热来说,难点在于 ITER 所需的、工作频率在 140 GHz 的大功率稳态回旋管还没有开发出来。对于离子回旋加热来说,困难在于天线必须放置得非常靠近等离子体,从而确保波能量可以很好地耦合到等离子体中。但这样就会导致起弧放电和等离子体击穿等问题。这方面大量的研究开发项目正在进行中,我们期望能在 ITER 应用时找到成功的解决办法。

总的来说,在 ITER 规模的实验中,加热系统的选择还没有明显的优胜者。从等离子体物理的角度考虑,上述几种方法都有很好的加热潜力;但是这几种方法又都面临着严峻的技术问题,尽管对这些技术问题的成功解决是可以期待的。基于这样的评估,ITER 设计了多种加热选择,从而可以通过实验最终确定哪种方法是最可取的,包括从等离子体物理上、从可靠性上以及从价格上各方面考虑。

现在,我们考虑电流驱动问题。刚才讨论的所有方法都可以用来驱动稳态的非感应电流。但这里的讨论主要集中在低杂波电流驱动上。这是因为低杂波电流驱

动和其他方法相比具有更高的效率,即在每瓦输入功率下获得的驱动电流最高。这里同样是无碰撞阻尼机制,即著名的朗道阻尼机制,导致稳态非共振电流的产生。简单地说,低杂波电流驱动的想法是沿等离子体的环向把波注入等离子体中。波推曳着跟随它一起的电子就如同波浪赶上并推动冲浪者那样。被波推曳的电子产生电流驱动。用来驱动低杂波的微波波段的源是存在的。像离子回旋加热一样,低杂波电流驱动也存在要求发射结构靠近等离子体边缘以获得好的耦合效果的问题。但更重要的是,低杂波的驱动效率尽管比其他方法要高,但从经济性考虑,这个驱动效率对于用来驱动托卡马克反应堆中的全部电流来说还是很低的。结论是托卡马克反应堆必须依靠显著的自举电流来降低对电流驱动系统的要求。

需要考虑的最后一点是各种辅助加热方式的相对成本。诚然,这是一个有点困难和具有推测性的任务。尽管如此,我们还是可以从经济学的观点来审视一下表 15.1 给出的各种加热方式的大致成本,这些数据主要来自 ITER 的成本分析。我们注意到,所有方式都包含着相当多的高技术设备,由此导致每瓦加热功率的成本都相当可观。离子回旋加热的成本最低,而电子回旋的成本最高,尽管所有值都是在同一量级,可以相比。需要强调的是,这里的值没有包含研发的成本,而仅仅是直接的硬件费用。显然,从经济性上考虑,保持辅助加热功率尽可能地低是非常重要的。

下面的分析将会按照刚才简述的顺序进行。大部分结果从基本原理出发推得。其中有些(欧姆加热和中性束加热)所需的分析相对简单,而另一些(电子回旋加热、离子回旋加热和低杂波电流驱动)则需要相对深入的分析。

表 15.1 每瓦辅助加热功率的近似成本

方 式	技术要求	成本(美元/W)
负离子束	1 MeV	4
离子回旋加热	40 MHz	2
电子回旋加热	140 GHz	6
低杂波电流驱动	3 GHz	3

## 15.2 欧姆加热

本节将计算只有欧姆加热时等离子体可以达到的最高温度,然后确定这个温度是否能在无需辅助加热功率情形下就足以达到点火。分析中,我们将会用到能量约束时间  $\tau_E$  的经验定标律和新经典电阻率。通过分析我们会看到,在典型的工程和等离子体物理限制下,要想仅仅通过欧姆加热来达到点火,将是非常困难的。最大的困难来自于这样一个事实,就是电阻率随着温度升高而减小: $\eta \sim 1/T^{3/2}$ 。因此,当等离子体被加热时,它的电阻率减小,这就意味着加热效率会相应减小。换句话

说,随着等离子体电流  $I$  增加,由于电阻  $R$  随着  $I$  增长而减小,因此欧姆加热功率 ( $P_\Omega = I^2 R$ ) 的增长要慢于  $I^2$  的增长。最后的结论是:需要有相当高的外部功率来加热等离子体才能实现点火。

下面分析的具体目标是,在假设无辅助功率、无  $\alpha$  粒子加热功率的条件下,推导等离子体温度与欧姆电流的关系。从这个关系的表达式,可以很容易得到上述结论。

### 15.2.1 欧姆加热模型

要考虑这个问题,一个有用的方法是假设通过欧姆加热达到点火是可能的,然后计算在忽略辐射、辅助功率和  $\alpha$  粒子加热的条件下,需要多大的电流才能加热等离子体到最后点火温度 ( $T \approx 15 \text{ keV}$ ) 的一半。一旦达到  $T \approx 7 \text{ keV}$ ,我们就可以假设  $\alpha$  粒子加热将起支配作用,并能将温度提高到最后希望得到的值  $T \approx 15 \text{ keV}$ 。而达到  $7 \text{ keV}$  的电流必须保证不违背磁流体力学稳定性的限制。从数学上说,我们分析的目标是要计算  $\bar{T}_k = \bar{T}_k(q_*)$ ,然后检验对于欧姆加热是否有望达到  $\bar{T}_k(q_* = 2) \geq 7 \text{ keV}$ 。

### 15.2.2 欧姆功率平衡

在上述假设下,稳态欧姆功率平衡定义为:

$$P_\kappa = P_\Omega \quad (15.2)$$

这里热传导损失和欧姆功率分别为:

$$\left. \begin{aligned} P_\kappa &= \frac{3}{\tau_L} \int n T d\mathbf{r} \\ P_\Omega &= \int \eta J^2 d\mathbf{r} \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

### 15.2.3 热传导损失

计算热传导损失需要假设密度和温度分布。为简单起见,假设密度分布是均匀的,温度分布由下式给出:

$$T = T_0 \left[ 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\kappa a^2} \right]^{4/3} \quad (15.4)$$

可以看出,温度分布略微峰化,并对应于椭圆截面。取指数  $4/3$  是为了稍后要进行的积分可以解析求得。如果引入变换  $x = a \rho \cos \theta$ ,  $y = \kappa a \rho \sin \theta$ ,则微分面积元变为  $dx dy = \kappa a^2 \rho d\rho d\theta$ 。通过简单计算可以看到,峰值温度和平均温度的关系是:

$$\bar{T} = (3/7) T_0$$

现在可以计算出热传导损失:



$$P_{\kappa} = 6V \frac{\bar{n}T_0}{\tau_L} \int_0^1 (1 - \rho^2)^{4/3} \rho d\rho = 3V \frac{\bar{n}T}{\tau_L} \quad (15.5)$$

这里  $V = 2\pi^2 R_0 a^2 \kappa$  是等离子体体积。

接下来,注意到欧姆加热的托卡马克通常运行在 L 模区间,因此  $\tau_L$  是与 L 模相关的经验定标律。把式(14.154)给出的  $\tau_L$  代入即可得到热传导损失的表达式:

$$P_{\kappa} = \frac{25.6}{\varepsilon^{1.3}} \left[ \frac{n_{20}^{-1.8} a^{1.3}}{\kappa^{0.7} B_0^{2.1} A} \right] q_*^{1.7} T_k^2 \quad (\text{MW}) \quad (15.6)$$

### 15.2.4 欧姆功率

计算欧姆功率需要几个步骤。第一步需要明确电流密度  $J$  与电阻率  $\eta$  的关系。在大环径比托卡马克中,  $J \approx J_{\phi} \approx J_{\parallel}$ , 同时在稳态下有  $E \approx E_{\phi} \approx E_{\parallel}$ , 这里  $E_{\phi} = E_0 (R_0/R) \approx E_0 = \text{常数}$ 。由平行欧姆定律得到  $\eta J \approx \eta_{\parallel} J_{\parallel} \approx E_0$ , 或者等效地,  $J_{\parallel} = E_0/\eta_{\parallel}$ 。

第二步涉及  $\eta_{\parallel}$  的表达式。前面在柱状等离子体中已经给出这个表达式。然而在环形系统中存在着电阻率的新经典修正。尽管这个修正不会改变基本的大环径比下的定标律  $\eta_{\parallel} \sim 1/T^{3/2}$ , 但它却导致真实环径比下数值上的定量差异。对新经典电阻率的一种好的近似如下:

$$\eta_{\parallel}^{(\text{NC})} = \frac{1}{[1 - (r/R_0)^{1/2}]^2} \eta_{\parallel}^{(\text{CL})} \quad (15.7)$$

我们注意到,新经典电阻率的值较静电电阻率的值要大。这是由于俘获粒子不能携带平行电流,较少的电流携带者导致电阻率的增加。有意思的是,与对离子热运输的预言相反,经典电阻率看起来和实验观测吻合得相当好。

综合上面的结果,可以得到  $J_{\parallel}$  有以下形式:

$$J_{\parallel} = J_0 (1 - \rho^2)^2 (1 - \varepsilon^{1/2} \rho^{1/2})^2 \quad (15.8)$$

这里  $J_0$  是一个新的常数,它用来代替  $E_0$ , 表示磁轴处的电流密度。实际上,更方便的是用整个等离子体电流  $I$  表示  $J_0$ ,  $I$  的定义如下:

$$\begin{aligned} I &= \int J_{\parallel} dx dy = 2\pi a^2 \kappa \int_0^1 J_{\parallel} \rho d\rho \\ &= \frac{\pi a^2 \kappa J_0}{3} (1 - 1.31 \varepsilon^{1/2} + 0.46 \varepsilon) \end{aligned} \quad (15.9)$$

最后一步是把这些关系带入式(15.3)给出的欧姆功率的表达式中。利用  $\eta_{\parallel}^{(\text{CL})} = 3.3 \times 10^{-8} / T_k^{3/2} \Omega \cdot \text{m}$ , 经过简短计算得到:

$$\begin{aligned}
 P_{\Omega} &= \left[ \frac{5.6 \times 10^{-2}}{1 - 1.31\varepsilon^{1/2} + 0.46\varepsilon} \right] \left[ \frac{R_0 I_M^2}{a^2 \kappa T_k^{3/2}} \right] \\
 &= \left[ \frac{1.4\varepsilon}{1 - 1.31\varepsilon^{1/2} + 0.46\varepsilon} \right] \left[ \frac{a^2 \kappa B_0^2}{q_*^2 T_k^{3/2}} \right] \quad (\text{MW}) \quad (15.10)
 \end{aligned}$$

在第二个等号后的表达式中,利用关系式  $I_M = 5a^2 \kappa B_0 / R_0 q_*$ ,由安全因子取代了电流。

### 15.2.5 欧姆功率平衡

分析的最后一步就是让式(15.6)给出的热传导损失等于式(15.10)的欧姆加热功率。经过直接计算可得要求得的温度和安全因子的关系:

$$\bar{T}_k = 1.1 \frac{\varepsilon^{0.66}}{(1 - 1.31\varepsilon^{1/2} + 0.46\varepsilon)^{0.29}} \left[ \frac{\kappa^{0.49} B_0^{1.17} A^{0.29}}{n_{20}^{-0.51} a^{0.09}} \right] \frac{1}{q_*^{1.06}} = \frac{6.9}{q_*^{1.06}} \quad (\text{keV}) \quad (15.11)$$

最后表达式中的数值是采用简化聚变反应堆参数并假设  $\kappa = 2$  得到的结果。注意到温度近似地和等离子体电流呈线性定标关系:  $\bar{T}_k \sim I_M^{1.06}$ 。人们曾一度期待能得到平方定标关系  $\bar{T}_k \sim I_M^2$ ,因为  $P_{\Omega} \sim I_M^2$ 。但是电阻率随温度提高而减小的特性削弱了这种依赖关系。

如果假设磁流体稳定性要求  $q_* \geq 2$  (对应于  $I_M \leq 18.8 \text{ MA}$ ),那么式(15.11)预测欧姆加热至多可以将温度提高到  $\bar{T}_k = 3.3 \text{ keV}$ 。注意,这个值低于  $\alpha$  功率超过韧致辐射所要求的临界温度 ( $\bar{T}_k > 4.4 \text{ keV}$ )。结论就是,对于聚变反应堆的典型参数,需要大量的辅助功率将等离子体加热到足够高的温度,这样才能使  $\alpha$  粒子加热成为起支配作用的加热源。

最后有一点需要指出,在通往反应堆的道路上,如果我们想在相对不那么昂贵的实验上研究点火物理,也有可能利用具有超高磁场  $B_0 \sim 10\text{T}$  的脉冲铜磁体来实现。根据式(15.11),这样的装置可以通过欧姆加热得到高于  $6 \text{ keV}$  的等离子体温度,这已经非常接近欧姆点火的条件。这个概念已经在 Ignitor 托卡马克上展开研究,原型部件也已经完成设计和制造,并在意大利进行了成功的测试。但是还没有最后的财政支持来全面保证 Ignitor 的建设。

## 15.3 中性束加热

### 15.3.1 综述

要把等离子体温度提高到远大于欧姆加热可以达到的最高温度,一种非常成功

的方法是利用中性束。这个想法是这样的:假设现在有一束高能中性束,例如氖原子。这里,“高能”意味着束能量远高于所要达到的等离子体温度 15 keV。现在把中性束注入等离子体。由于束粒子是电中性的,不会受到磁场的影响,因此它们一直沿直线进入等离子体,直到与背景等离子体发生碰撞被电离。一旦发生电离,这些原来的中性粒子就会被磁场约束住。换句话说,它们成了等离子体的一部分,而且是对应于氖分布函数高能尾巴上的那部分。这个高能尾巴被库仑碰撞慢化,从而以加热的方式把能量传递给背景等离子体。利用刚才描述的中性束加热,在 JET 实验中已成功实现了大约  $T_i \approx 20$  keV 的温度。

那么在聚变反应堆中利用中性束加热等离子体直至点火会有什么问题 and 前景呢? 这些问题既牵涉到物理又和技术有关,可以简单综述如下。

先考虑物理问题。对束的主要要求是高通量且能够在电离之前穿透等离子体中心。后者是为了能够把能量沉积在最需要的地方。凭直觉,我们可以预期穿透深度应该正比于束的能量。低能束会导致大部分能量沉积在等离子体外侧,这是我们不希望看到的。如果束的能量太高,就会穿过整个等离子体把能量沉积在对面壁上,这也是我们不希望看到的。因此,一个重要的物理问题就是确定束能量  $E_b$  的最优值使其能够穿透小半径  $a$  的距离到达等离子体中心,也就是要确定  $E_b = E_b(a)$ 。

第二个物理问题涉及束能量(在电离化后)向背景等离子体的转移,尽管这个过程相对简单。通过库仑碰撞,电离化后的束慢化并把能量沉积在背景等离子体中。正如在第 9 章中描述的那样,一部分束能量加热等离子体中的电子,剩下的部分加热离子。它们的份额依赖于束能量与等离子体温度的比值。高能束更倾向加热电子。但是不管怎么样,聚变反应堆中具有足够高的密度,可以使得电子和离子温度迅速平衡。基于这一点,我们可以假设所有的中性束能量事实上都沉积在等离子体中,然后平分给电子和离子。

现在考虑技术问题。目前的实验中,密度和小半径都比反应堆所要求的要小,现有的中性束技术是相当令人满意的。具体而言,目前可以产出优化能量 100 keV 量级的高效率束,并把大部分束能量沉积在等离子体中心。然而,在反应堆中,物理关系  $E_b = E_b(a)$  意味着要求更高的束能量(在 1 MeV 量级)以达到更大的穿透深度。这就造成了一个相当困难的技术问题。

具体来说就是,目前使用的大部分中性束是由初始的正离子源产生的。对应的效率是相当令人满意的(也就是说,  $\eta =$  束功率/输入功率相当高)。然而,随着束能量提高,转换效率迅速下降。这个不良的关系导致一种被广泛认同的结论,就是目前的正离子源技术不能够成功地外推到反应堆参数空间下。为解决这个问题,人们提出了一种不同的策略,就是从负离子源出发产生中性束。理论预测利用负离子源的总体效率随着能量的提高仍能保持很高的水平。但是产生这种源的技术更加复杂。

就正、负离子源而言,更进一步的问题是最后的中性束源都具有相当大的体积,而且涉及大量的高技术部件。换句话说,每瓦中性束功率的成本是相对较高的。

这些问题在 J. Wesson 的《托卡马克》一书中给予了仔细的分析。事实上,本章下面的讨论大部分都是那里对中性束分析的简单总结。这里会着重研究 3 个问题。第一是中性束源运行的定性描述;紧接着会是对  $E_b = E_b(a)$  进行定量计算;最后我们给出一个简短的计算,来说明为什么正离子源在高能下失去效率以及负离子源是怎么改善这种状况的。本节的主要结论是负离子源中性束提供了一种等离子体加热的好方法。然而,在完全评估中性束加热方法在聚变反应堆的用处之前,负离子源中性束还需要进一步发展。

### 15.3.2 中性束是如何产生的

中性束源是一种四级结构的设备,如图 15.1 所示。它是这样工作的:第一级的目的是产生低温离子源。正离子由标准技术产生,通过某种已经很成熟的技术(如潘宁放电、针式阴极放电、“套筒状源”等)产生低温等离子体,其正电荷部分即是正离子。一个已经被成功解决的难题是令分子离子  $D_2^+$  和  $D_3^+$  的数目相对于原子离子  $D^+$  的数目最小化。分子形式的离子由于其具有较重的质量,因此最终产生 1/2 或者 1/3 能量的中性粒子,从而导致低穿透性和不希望的边缘加热。

另一方面,产生负离子则更困难。典型的负离子产生是通过低温放电中电子附着在中性分子上得到的。这是负离子驱动中性束源所面临的主要技术挑战之一。尽管如此,负离子有一种特殊性质是至关重要的,同时也是我们所希望的,那就是电子只是微弱地黏附在中性原子上,因此它可以相对容易地剥落下来,即使在能量超过 100 keV 的时候。这个结果意味着高能量下有高的中性束转换效率,也是负离子源相对于正离子驱动源的最主要优点。

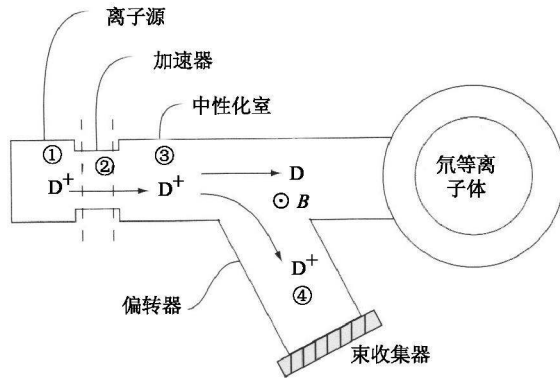


图 15.1 中性束系统原理图

(①离子源;②加速区;③中性化室;④带电离子偏转器)

现在,假设假设已经产生了一个低温离子源,无论是正离子或者负离子放电。

设备的第二级加速这些离子到高能量。离子在这一级到下一级之间通过一个包含许多小孔或者一些等电位栅格的薄面,从而被高电压加速。对于正离子,栅格上加的是负电压,对于负离子加正电压。输入的大部分电能都消耗在这个高电压加速极上。加速级的输出是高度定向的、几乎单能的高能离子束。

高能离子进入设备的第三级,即所谓中性化室。这里的基本构造是一个长管,其中充满了密度被精确控制的中性粒子。中性粒子通常和源离子是同一种元素,如氘。对于正离子,当它们经过中性化室时,会经历被称为“电荷交换”的非弹性碰撞过程。这时高能正离子从冷的中性粒子那里得到电子,也就是说中性粒子和离子基本上交换了它们的角色,结果就成了低能的离子和高能中性粒子。而负离子通过时,则由非弹性碰撞使得附着电子从原子上剥落而被中性化。值得再次强调的是,对于这两种类型的离子,中性化的效率非常不同。正离子中性化的效率随着束能量增加而减小,而对于负离子而言,中性化效率则近似保持常数。无论是正离子源还是负离子源,现在得到的都是我们希望注入等离子体中的高能中性束粒子。

设备的最后一级是磁偏转器。这一级也是必要的,因为中性化室的输出通常包含了高能中性束粒子和没有被中性化的高能离子。它们携带了相当强的功率。离子由于具有电荷,如果注入等离子体中,其直线轨道会被磁场强烈改变,因此很可能把它们的能量沉积在中性束注入端口处。这显然不是我们希望看到的情形。为避免这种情况发生,混合束就需要先通过偏转器的磁场,使得带电的离子被磁场偏转掉,其能量在束终端被收集,如图 15.1 所示。

然后,剩下的中性束被注入等离子体中。这里它们被重新电离并将能量沉积在背景等离子体中,有趣的是这个过程正是通过反向的电荷交换碰撞来实现的。我们注意到,如果可能的话,让中性束如图 15.2 那样沿平行于磁轴方向注入是有利的,尽管这样做在几何上更复杂,同时由于注入路径更长因而需要更高的束能量。垂直注入简单一点,但是会产生具有大的垂直速度分量的高能离子。如果环向场波纹度比较大时,这些粒子可能通过新经典输运而迅速损失。在实际实验中,中性束注入通常选取一个折中的角度,以便使几何上和束能量上的各种限制都能得到满足。

这样,对一个中性束源的定性描述就结束了。总结一下:高效率的正离子源系统已经建造出来,束能量可达 100 keV 水平,在将目前的托卡马克加热到聚变堆要求的温度水平方面取得了极大成功。但是,对于尺寸更大、密度更高的反应堆等离子体来说,要求的 1 MeV 源需要技术更负责的负离子源。发展负离子驱动的中性束源仍然是聚变技术研究中重要区域之一。

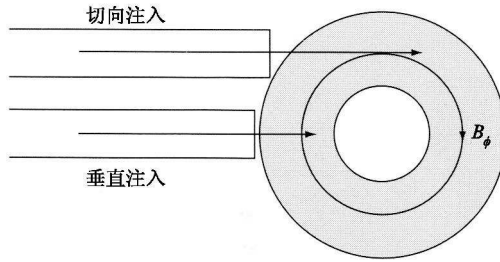


图 15.2 托卡马克顶视图,中性束切向注入和垂直注入示意

### 15.3.3 物理问题——束穿透对能量的要求

最主要的物理问题是计算需要多高的束能量才能使得高能中性束粒子在被电离化前可以穿透等离子体中心。具体来说,就是要推导  $E_b = E_b(a)$  的表达式。推导过程并不复杂,主要取决于不同电离机制的反应截面。计算过程如下。

通常来说,高能中性粒子有 3 种基本电离途径:电荷交换、离子碰撞电离和电子碰撞电离。其中,电子碰撞电离是最微弱的一种方式,为简单计可以忽略掉。现在先考虑电荷交换碰撞,这时高能中性粒子失去一个电子给冷离子。D-D 碰撞的能量交换反应是:



这里及后面的记号如下,下标“b”和“p”分别指“束”和“等离子体”。上标“+”表示正电荷,没有上标的表示中性原子。最后,不论有无电荷,束粒子总是高能的,而等离子体粒子总是低能的,它的能量大约是等离子体温度。电荷交换过程的反应截面  $\sigma$ 。可以从原子物理研究中知道,如图 15.3 所示。注意到在 50 ~ 100 keV 时,电荷交换截面开始迅速减小。

电离过程的第二个主要贡献来自于高能中性粒子与等离子体粒子的强烈碰撞。在这种情况下,中性粒子解体为一个离子和一个电子,二者速度都和原来中性粒子速度相当。由于离子具有较大的质量,因此主要能量由离子携带。相应的反应式为:



这个过程反应截面  $\sigma_i$  同样可以从原子物理中获得,也包含在图 15.3 中。在 90 keV 下,电荷交换是主要的电离机制。而且注意到,虽然上面的反应关系写的是氘中性粒子和氘离子碰撞,但无论是束粒子还是等离子体粒子都可以换成氦,关系不会有明显的变化。

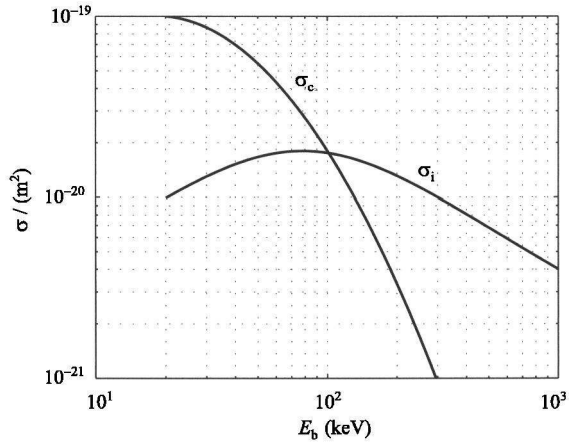


图 15.3 电荷交换和电离过程的反应截面

(Wesson J. (2004). *Tokamaks*, third edition, Oxford: Clarendon Press)

接下来,考虑反应截面和穿透深度的关系。我们知道,当中性束在等离子体中穿行并被吸收时,其通量  $\Gamma_b \equiv n_b v_b$  按下述关系随深度衰减:

$$d\Gamma_b/dx = -n_p(\sigma_c + \sigma_i)\Gamma_b \quad (15.14)$$

这里  $n_p$  是背景等离子体密度,它通常是  $x$  的函数。然而,由于密度分布经常是相当平坦的,因此可以假设  $n_p \approx$  常数。由于高能中性粒子( $\Gamma_b$ )的减少和高能带电粒子( $\Gamma_b^+$ )的增加是一一对应的,因此式(15.14)的解意味着:

$$\Gamma_b^+(x) = \Gamma_b(0)(1 - e^{-x/\lambda}) \quad (15.15)$$

这里衰减长度  $\lambda$  由下式给出:

$$\lambda = \frac{1}{n_p(\sigma_c + \sigma_i)} \quad (15.16)$$

穿透深度显然与衰减长度同量级。先来看垂直注入加热,对于中心加热,可令  $\lambda \sim a$ 。更量化的定义由下面的简单推导给出。我们不希望出现短的衰减长度(即  $\lambda$  小),因为那样的话大部分能量就会沉积在等离子体外侧。长的衰减长度(即  $\lambda$  大)则使得相对较高份额的能量沉积在等离子体芯部,但衰减长度过长则会导致大量能量从等离子体远端逃逸,这同样是不希望出现的情形。直观上看,最好是这样来选择束衰减长度:在远端逃逸的束能量可以忽略的前提下尽可能选取大的  $\lambda$ 。由于束离开等离子体之前要穿越  $2a$ ,三倍的衰减距离后束的损失能够降到可以接受的低水平,因此我们想要的关系  $E_b = E_b(a)$  可以写成下述的隐含方式:

$$a = \frac{3}{2}\lambda(E_b) \equiv a_p = \frac{1.5}{n_p(\sigma_e + \sigma_i)} \quad (15.17)$$

对于平行入射也有类似关系。最大的不同是,由于几何效应,束必须传播更长的距离,如图 15.2 所示。简单计算可以得到,这种情况下,式(15.17)可以替代为:

$$a_p = 1.5 \left[ \frac{\epsilon}{2 + \epsilon} \right]^{1/2} \lambda(E_b) \quad (15.18)$$

对于环径比为 2.5 的情形,平行入射时束穿越的路径长度是垂直入射的 2.4 倍。

图 15.4 画出了式(15.17)在两种不同密度下的情形。我们注意到,对于密度  $n_{20} = 0.3$ ,小半径  $a = 1$  m 的典型的 JET 等离子体,100 keV 的中性束的穿透深度为  $a_p = 1.3$  m,大约是垂直入射时需要的深度。完全平行入射需要大约 3 m 的深度,对应束能量为 200 keV,这正好超出了目前高效正离子源技术的上限。因此实验得出的结论是,目前的正离子源技术勉强可以做到将 JET 规模的等离子体加热到反应堆的温度。

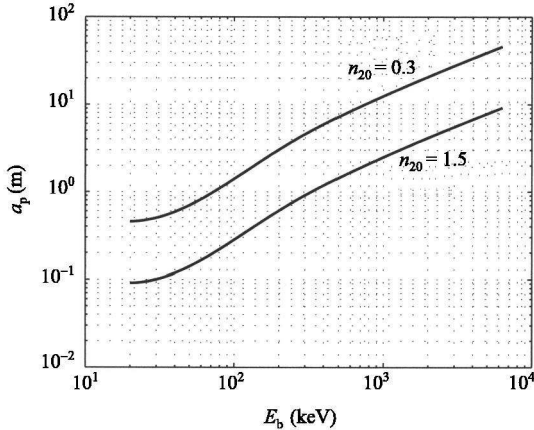


图 15.4 束穿透深度。两条曲线分别对应于典型 JET 放电参数:

$$n_{20} = 0.3, a = 1 \text{ 和简单反应堆 } n_{20} = 1.5, a = 2$$

(Wesson J. (2004). *Tokamaks*, third edition, Oxford: Clarendon Press)

另一方面,在密度  $n_{20} = 1.5$  的聚变反应堆中,垂直入射需要  $a_p = 2$  m 的穿透深度,对应的束能量是 0.8 MeV。而  $R_0/a = 2.5$  时的平行入射需要 6 m 的穿透深度和 3 MeV 的束能量。这些值远远超出了正离子源能有效使用的范围。结论就是,如果这种形式的辅助加热要在 ITER 或者聚变反应堆中应用,必须发展高能负离子源技术。

### 15.3.4 技术问题——中性化室中转换效率

我们已经几次提到在能量超过 100 keV 时正离子驱动中性束会丧失其效率,但是



负离子驱动源却能在高达 1 MeV 量级时仍然保持高效率。本小节将通过简单分析来定量说明这两点。计算很简单,就是基于各种过程的反应截面参数,这些截面信息已经被很好掌握。数学上的具体任务就是计算被中性化的入射带电粒子束的份额。

### 1. 正离子

先讨论正离子束的中性化。有两个重要的过程要考虑。首先,高能正离子可以与中性化室中的背景中性粒子发生电荷交换,从而产生希望得到的高能中性粒子。第二,高能中性粒子也可以通过和背景中性粒子碰撞被再次电离。后面这个反应是我们不希望的,因为它会降低被中性化的粒子的数目。现在分别考虑每一种反应。

电荷交换反应是:



这里  $D_b$  是希望得到的高能中性粒子,  $D_n$  是低温背景双原子分子[即  $D_n$  是  $(D_2)_n$  的简写]。这个过程反应截面是已经讨论过的  $\sigma_e$ 。读者应该不会怀疑这个事实,在中性化室中,电荷交换把高能带电粒子转化为高能中性束,然后在等离子体中,反过来,高能中性束转化为高能带电粒子。有效的电荷交换过程需要一种粒子是中性的,另一种是带电的,同时高能粒子必须有比低温背景粒子低得多的密度。

第二种过程是高能中性粒子的重新电离,反应如下:



相应的反应截面是已经讨论过的  $\sigma_i$ 。这里第一眼看上去同样显得有些矛盾。截面  $\sigma_i$  是第一次被用来描述高能中性粒子进入等离子体和正电荷背景离子碰撞发生的电离。在中性室中,高能中性粒子通过和电中性的背景分子碰撞而被电离。这里并不矛盾,由于两个过程都有高能电中性的束粒子,因此背景离子带不带电没有什么关系。也就是说,背景粒子电荷形成的电场对于电中性束粒子轨道的修正可以忽略不计。

接下来考虑高能带电粒子束在穿过中性化室时的演化。描述束通量的方程是:

$$\frac{d\Gamma_b^+}{dx} = -n_n \sigma_e \Gamma_b^+ + n_n \sigma_i \Gamma_b \quad (15.21)$$

这里  $n_n$  是中性化室中背景双原子中性粒子的密度。方程右侧第一项表示高能带电粒子通量  $\Gamma_b^+$  的减少,这个减少的通量转化成了我们要得到的高能中性束通量  $\Gamma_b$ 。右侧第二项则代表中性束通量  $\Gamma_b$  被重新电离导致  $\Gamma_b^+$  的增加。这个模型通过束粒子数守恒封闭,即要求:

$$\Gamma_b^+ + \Gamma_b = \Gamma_0 \equiv \Gamma_b^+(0) \quad (15.22)$$

现在,假设无论是中性粒子还是带电粒子都没有在穿过中性化室时损失太多能

量。在这个合理的近似下,  $\sigma_e$  和  $\sigma_i$  都可以近似认为是常数。因此我们很容易解出式(15.21)和式(15.22):

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_b^+(x) &= \Gamma_0 \left[ \frac{\lambda}{\lambda_i} + \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_i} \right) e^{-x/\lambda} \right] \\ \Gamma_b^-(x) &= \Gamma_0 \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_i} \right) (1 - e^{-x/\lambda}) \end{aligned} \right\} \quad (15.23)$$

这里  $\lambda = 1/n_n(\sigma_e + \sigma_i)$ ;  $\lambda_i = 1/n_n\sigma_i$ 。

现在很容易计算出中性化份额来。注意到中性化室的长度通常远大于  $\lambda$ , 因此在室的出口处, 指数项的作用可以忽略。中性粒子通量和带电粒子通量达到平衡, 中性化份额由下式给出:

$$f_n = \frac{\Gamma_b(x/\lambda \rightarrow \infty)}{\Gamma_0} = \frac{\sigma_e}{\sigma_e + \sigma_i} \quad (15.24)$$

这就是我们得到的结果。作为能量函数的中性化份额曲线见图 15.5。可以看到, 当能量高于 100 keV 后,  $f_n$  迅速下降, 这是因为此时电荷交换截面迅速减小。图中还画出了  $n_{20} = 1.5$  时垂直穿透深度对能量变化的曲线。在这样的高密度下, 对于正离子驱动的中性束, 很难做到既要求穿透深度超过 0.3 m, 又要求转换份额高于 50%。后者和中性束的整体效率直接相关。

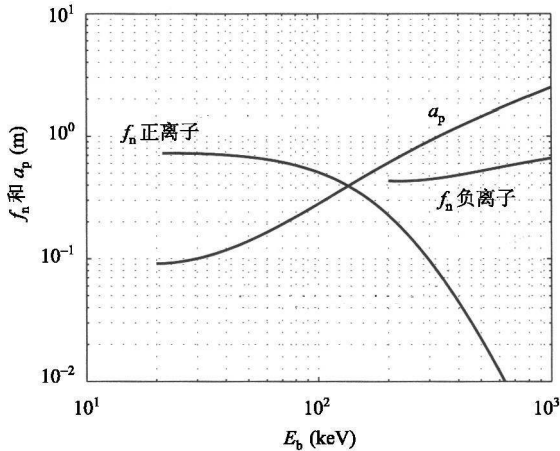


图 15.5 正离子束和负离子束下中性化份额与束能量的关系  
图中同时绘出了  $n_{20} = 1.5$  时垂直穿透深度对束能量的曲线  
(Wesson J. (2004). *Tokamaks*, third edition, Oxford: Clarendon Press)

## 2. 负离子

对负离子驱动中性束源进行类似的分析。同样, 这里有两个主要过程要考虑。

第一,负离子进入中性化室,通过和背景中性粒子碰撞把黏附的电子剥离下来。这个过程产生需要的高能中性束。这个反应截面  $\sigma_s$  不同于正离子电荷交换截面。黏附电子弱的附着作用使得即使对高能下的负离子也有比电荷交换大得多的反应截面。

第二个反应是高能中性束和背景中性粒子碰撞导致的重新电离,这和正离子时的情况一模一样。两种感兴趣的反应可以写为:



在感兴趣的高束能量区,相应的电子剥离截面如图 15.6 所示。注意,在高能区  $\sigma_s$  显著地大于  $\sigma_i$ 。

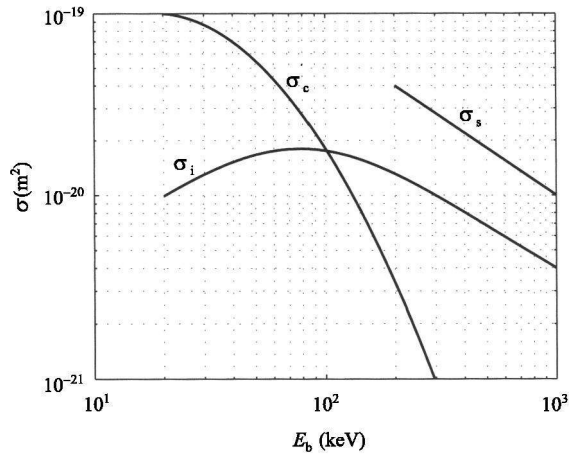


图 15.6 负离子的电子剥离反应截面和正离子电荷交换截面电离截面比较  
(Wesson J. (2004). *Tokamaks*, third edition, Oxford: Clarendon Press)

下一步就是计算高能负离子和中性束通量在通过中性化室时的演化。适当的模型由下式给出:

$$\left. \begin{aligned} d\Gamma_b^-/dx &= -n_n\sigma_s\Gamma_b^- \\ d\Gamma_b/dx &= -n_n\sigma_i\Gamma_b + n_n\sigma_s\Gamma_b^- \end{aligned} \right\} \quad (15.26)$$

第一个方程右侧表示由于与背景中性粒子碰撞造成电子剥离导致的负离子的减少。这个减少的通量出现在第二个方程右侧第二项,代表着高能中性粒子通量的增加。第二个方程右侧第一项代表由于和背景中性粒子碰撞重新电离导致的中性粒子通量的减少。

注意,和正离子情形不同,这里没有通过碰撞电离导致的负离子的补充,而是导

致新的高能正离子的产生。因此,如果一直在中性化室中穿行,高能负离子和高能中性粒子通量都会衰减到零。这里没有长尺度极限下的平衡存在。这就意味着一定要有一个最优的中性化室长度使得中性化份额取得最大值。

这个观点可以通过求解式(15.26)得到证实。简短的计算可以得到:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_b^- &= \Gamma_0 e^{-x/\lambda_s} \\ \Gamma_b &= \Gamma_0 \frac{\lambda_i}{\lambda_s - \lambda_i} (e^{-x/\lambda_i} - e^{-x/\lambda_s}) \end{aligned} \right\} \quad (15.27)$$

这里  $\Gamma_0 = \Gamma_b^-(0)$ ;  $\lambda_s = 1/n_n \sigma_s$ ;  $\lambda_i = 1/n_n \sigma_i$ 。中性化份额是  $x$  的如下函数:

$$f_n(x) = \frac{\Gamma_b(x)}{\Gamma_0} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_s} (e^{-x/\lambda_i} - e^{-x/\lambda_s}) \quad (15.28)$$

这个函数在

$$x_m = \frac{\lambda_i \lambda_s}{\lambda_i - \lambda_s} \ln \left[ \frac{\lambda_i}{\lambda_s} \right] = \frac{1}{n_n (\sigma_s - \sigma_i)} \ln \left[ \frac{\sigma_s}{\sigma_i} \right] \quad (15.29)$$

处取得最大值。这个  $x_m$  即对应于中性化室的最优长度。这样,在中性化室出口处,给出峰值的中性化份额:

$$f_n(x_m) = (\delta)^{\delta/(1-\delta)} \quad (15.30)$$

这里  $\delta = \sigma_i/\sigma_s$ 。

图 15.5 给出了函数  $f_n(x_m)$ 。注意到对于 1 MeV 的束能量,负离子中性化效率保持高水平,有大约 60% 的量级。而此时正离子源对应的效率则降到低于 1%。这个结果就是为什么大多数研究人员都相信正离子离散化不能很好地扩展到反应堆区域的原因,也是为什么未来的研究都集中在发展高效率负离子源的原因。

### 15.3.5 小 结

中性束辅助加热系统非常成功地把目前的托卡马克加热到了反应堆级温度。这些 100 keV 束系统由正离子源驱动。然而,典型的反应堆尺寸和等离子体密度远远高于目前的实验参数。反应堆参数需要更高的大约 1 MeV 量级的能量。不幸的是,当能量高于 100 keV 后,正离子中性束的效率迅速降低。这促使了制造高能负离子源的研究和开发计划,其目标是获得即使在 1 MeV 能量水平上仍然保持高效率的高能负离子源。这种源的技术发展是中性束加热面对的最困难的问题。尽管如此,对高功率的负离子中性束源可以在 ITER 需要的时候可用,我们仍然抱有相当的期望。

## 15.4 波加热和电流驱动的基本原理

### 15.4.1 概述

把射频波注入等离子体是将等离子体温度提高到点火所需水平的另一种可行的方法,同时它还可以驱动稳态的非感应电流。而且,射频源技术看起来可以很好地外推应用到反应堆规模上。射频波加热或电流驱动的思想 and 利用微波炉加热食品的道理是相似的。当注入波的频率被仔细选择后,射频波会和等离子体中的某个固有频率发生共振,功率被大量吸收,从而体现为等离子体加热。在特定条件下,这种功率的共振吸收还可以导致非感应电流驱动。

射频波加热理论包含了一些非常有趣的等离子体物理,也是等离子体物理在聚变发展中得到成功实践的范例之一。要理解射频波加热和电流驱动,我们就必须学习有关电磁波在等离子体中传播的知识。这个领域是如此之广,包含了非常多的物理现象,以至于有好几本书专门讨论这个话题。而本书要讨论的范围会窄得多,主要集中在利用电磁波去加热等离子体或者驱动非感应电流,特别是其中和聚变堆相关的具体问题上。因此,下面的讨论会集中在两个方面:①两种最有希望的射频波加热方法——电子回旋加热(ECH)和离子回旋加热(ICH);②最有效的电流驱动方法——低杂波电流驱动(LHCD)。我们的目标是要回答以下一些问题:

- 需要什么类型的射频源和发射装置才能让波在等离子体中传播?
  - 为达到最大加热吸收功率或者最大电流驱动,注入的射频波应该取什么频率?
  - 怎样才能确保射频波在最需要被加热的等离子体芯部被吸收?
  - 多大份额的入射加热功率被等离子体吸收?吸收机制是什么?
  - 怎样才能确保用于电流驱动的射频功率在等离子体外侧边界附近被吸收?
- 这里最需要用来匹配自然形成的自举电流。
- 驱动这种电流的机制是什么?
  - 驱动 1 A 电流需要多少 W 的低杂波功率?

要从聚变反应堆的经济可行性和循环功率份额上评估射频波加热和电流驱动的合理性,对这些问题的回答是必不可少的。

分析电子回旋加热、离子回旋加热和低杂波电流驱动在聚变中的应用是相当复杂的。造成这种复杂性的原因有三:①等离子体性质随空间变化;②等离子体处在复杂的环形几何位形下;③磁场导致等离子体的高度各向异性。

我们计划采取以下步骤来克服这些困难。首先,对电子回旋加热、离子回旋加热和低杂波电流驱动所需的源和发射结构做一简述,从而对相关的技术问题有一个大概的了解。然后回顾一下任意介质中电磁波传播的基本原理。这些原理会被应

用在“冷”等离子体中,并且可以得到一个出乎意外可靠的对波传播到等离子体芯部的路径的描述。但冷等离子体模型不能精确描述波被吸收或者驱动电流的方式。这个过程需要包含对“无碰撞”阻尼的分析。无碰撞和阻尼看起来似乎有些矛盾,但它的的确确会在等离子体中发生。因此,我们将通过一个简单模型在某些细节上对无碰撞阻尼作仔细描述。最后,将波的基本理论应用于聚变等离子体中的电子回旋加热、离子回旋加热和低杂波电流驱动上。从加热角度而言,首要的目标是判断输入功率有多少份额被吸收。而对电流驱动而言,相应的目标是判断每瓦低杂波功率可以驱动多少电流。

本节的主要结论是,电子回旋加热和离子回旋加热对于等离子体的有效加热都是可行的(也就是说有很大份额的吸收)。对于反应堆参数下的情形,电子回旋加热最大的困难在于缺乏所需的高频率下的大功率稳态微波源。对于离子回旋加热,源没有任何问题,最大的问题是需要在真空室内靠近等离子体边界的地方安装一套天线。离子回旋加热问题还涉及电磁屏蔽和阻止在天线附近起弧放电。针对电子回旋加热中的源问题和离子回旋加热中的天线问题,已经制定了庞大的研发计划。可行的解决方案必须在 ITER 需要的时候能得以实现。

对于低杂波电流驱动,源和发射装置都是很容易实现的。主要的技术问题就是需要把发射装置安装在非常靠近等离子体表面。这里面最大的问题是把波的功率转化为电流不具有非常高的效率。这意味着必须要有足够份额的自举电流参与才能达到经济性可观的稳态反应堆。

### 15.4.2 射频源和发射结构

对射频波加热的大多数分析都包含了对从等离子体外边界发射的电磁波传播到预期位置这一过程的了解。对于加热来说,这个预期位置是等离子体芯部,而对于电流驱动来说,是靠近边界的地方,在那里通过无碰撞阻尼被吸收。但是,在做这些分析之前,先简单讨论一下目前可用的各种射频源以及能量是如何从源传输到等离子体边界的无疑是有益的。

射频波加热或电流驱动的基本结构如图 15.7 所示。射频波从波源中出来,沿着传输线达到位于等离子体边界的发射结构。波源由高压电源驱动,高压电源又由标准的 60 Hz 工业电力驱动(这是美国的电网标准——译者注)。根据工作频率的不同,波源可有不同的类型。这里,正如它们名字里所指的那样,电子回旋加热和离子回旋加热分别需要射频波的工作频率在电子和离子的回旋频率处。对于一个 5 T 的磁场,电子回旋频率  $f_{ce} = \omega_{ce}/2\pi = 140 \text{ GHz}$ ;对于氦离子,离子回旋频率  $f_{ci} = \omega_{ci}/2\pi = 38 \text{ GHz}$ 。而低杂波对应于一个中间的频率,其典型值为  $f_{LH} = 3 \text{ GHz}$ 。这些频率刚好和不同的射频源可以产生的典型频率相匹配,如下所示:

高功率真空电子管:  $f < 100 \text{ MHz}$ 。

速调管(微波):  $f$  约为  $1 \sim 10$  GHz。

回旋管(亚毫米波):  $f$  约为  $10 \sim 300$  GHz。

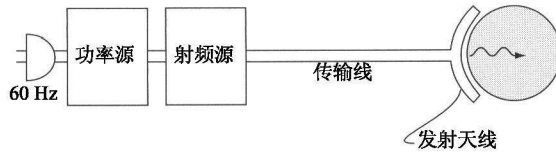


图 15.7 射频波加热或电流驱动系统示意图

图 15.8 给出了每一种类型的波源。注意到离子回旋加热由高功率真空电子管驱动,电子回旋加热则需要回旋管,而速调管驱动低杂波电流驱动所需的中间频率。

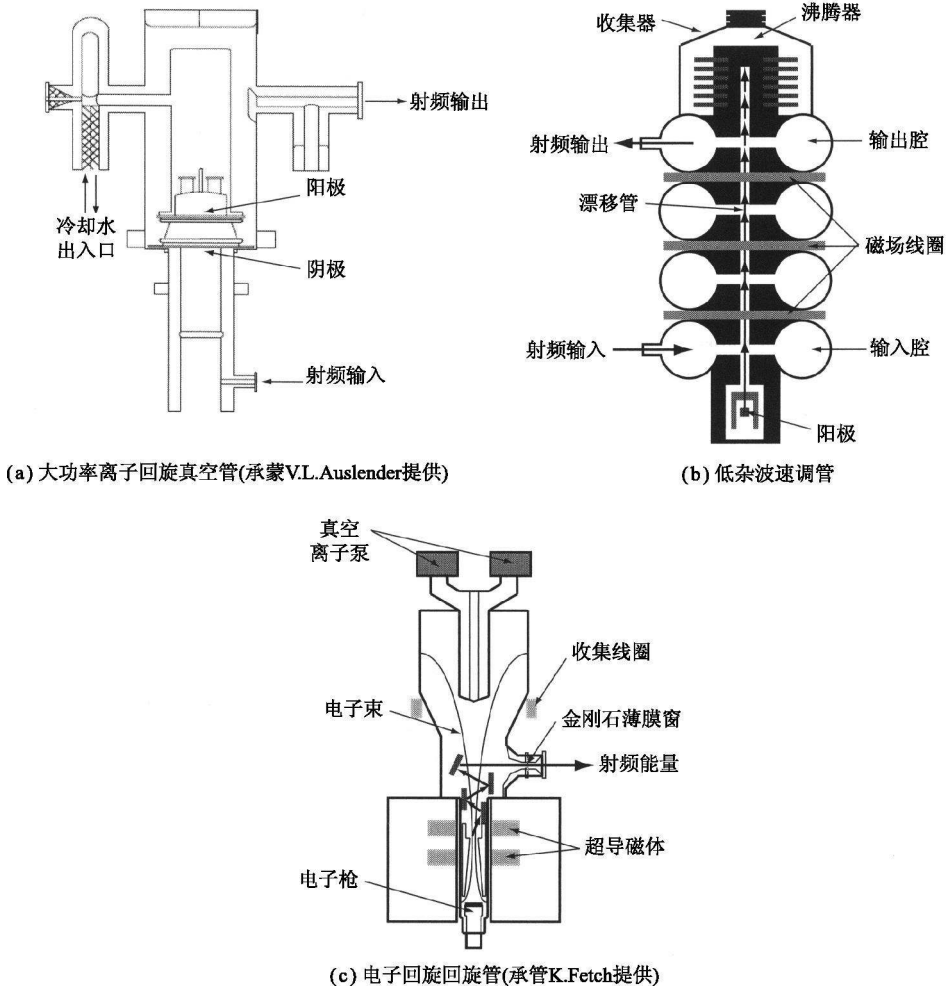


图 15.8

在技术上,高功率稳态真空管和回旋管都得到了充分开发,很容易得到。回旋管技术尽管也算不错,但需要进一步研发。目标是发展耐用可靠的 140 GHz, 1 MW 的稳态回旋管。

接下来考虑传输线。有 3 种将电磁波从源传输到等离子体的基本方法:标准电缆、双绞传输线和波导。传输方法的正确选择牵涉到射频功率的波长和传输线特征尺寸的比较,如图 15.9 所示。不同方法适用的范围不同,叙述如下。

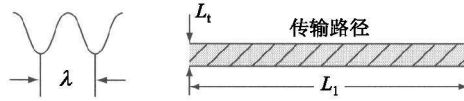


图 15.9 三种特征长度的比较

( $\lambda$  为波长;  $L_2$  为传输线横向尺寸;  $L_1$  为传输路径长度)

通常的家用或者工业用交流电路需要标准电缆传输电能,当满足下式时

$$\lambda \gg L_1 \gg L_2 \quad (15.31)$$

这是个合适的选择。例如,如果  $f = 60$  Hz, 那么波长  $\lambda = c/f = 5000$  km 显然满足上面的判据。因此,分析交流电路时,忽略麦克斯韦方程里的位移电流是个很好的假设。

平行线或者同轴线通常用来传输电视或调频信号。这种方法在下面式子得到满足时是个很好的选择:

$$L_1 \geq \lambda \gg L_2 \quad (15.32)$$

典型的离子回旋频率  $f = 40$  MHz, 对应波长  $\lambda = c/f = 7.5$  m, 满足上述不等式。对传输线的分析显示,位移电流必须保留在麦克斯韦方程组中。射频波以纯横向电磁波(TEM)的模式传播。其场结构,如同它的名字一样,没有平行于传播方向的电场或磁场分量:  $E_1 = B_1 = 0$ 。这种情况下利用双线结构传导电磁波是可行的。

最后,当波长落在下式所描述的范围时:

$$L_1 \gg L_2 \sim \lambda \quad (15.33)$$

波导被用来传输射频功率。对于反应堆规模下的电子回旋加热,其典型频率  $f = 140$  GHz, 对应波长  $\lambda = c/f = 2.1$  mm。对于低杂波,  $f = 3$  GHz, 对应波长  $\lambda = c/f = 10$  cm。因此电子回旋波功率通过具有较小截面尺寸的波导传输。通常用一种被称为“特大号波导”来最小化波导壁上的欧姆损耗。而低杂波可以利用标准尺寸的波导来传输。

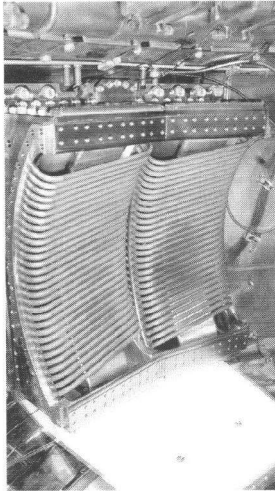
对于这两种情况,麦克斯韦方程中都必须保留位移电流。功率可以横电(TE)波模或者横磁(TM)波模传播,这两种模式分别对应于  $B_1 \neq 0$  和  $E_1 \neq 0$ 。在这样的高频下,功率的传输只能采用中空的方形或者圆形截面的金属管(即波导),中心导



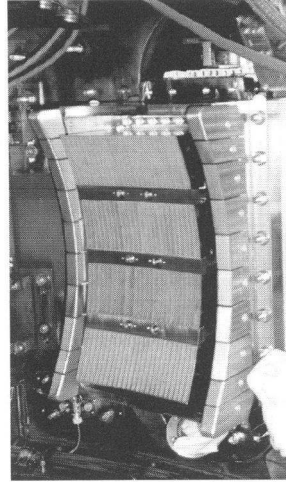
体是不需要的。

实际上,对传输线和波导的研究、开发和广泛应用已经有很多年了。因此结论是,一旦有了合适的射频源,其功率很容易传输到位于等离子体边界处的发射天线上。

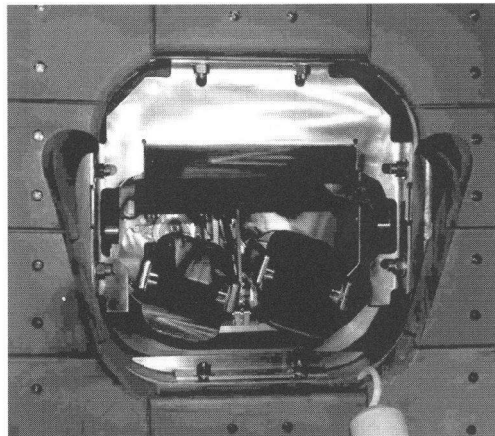
最后一个感兴趣的内容是发射天线本身。发射天线是一种在传输线路和等离子体边界之间充当接口的结构。它的形式与射频波的波长有很大关系。对于离子回旋加热,波是通过放置在真空室内的天线馈入等离子体的。对于低杂波,相应的结构是一个波导阵列。而对于电子回旋加热,则是利用了一套射频反射系统。每一种情况都在图 15.10 举例说明。通常来说,无论是离子回旋加热、电子回旋加热还



(a) 离子回旋波天线  
(承蒙 E.Marmor 提供)



(b) 低杂波段阵列  
(承蒙 E.Marmor 提供)



(c) 电子回旋波反射镜系统 (Lohr, J. et al., (2005). *Fusion Science and Technology*, 48, 1226)

图 15.10 各个波段的发射结构

是低杂波电流驱动,由于几何可近性方面的考虑,我们非常希望波从等离子体外侧注入(图 15.11)。这是因为大多数环形约束装置的中心部分都安装有大量部件,使得波无法顺畅地进入等离子体。除了这个普适的要求外,每一种发射天线还面临各自专门的问题,现描述如下。

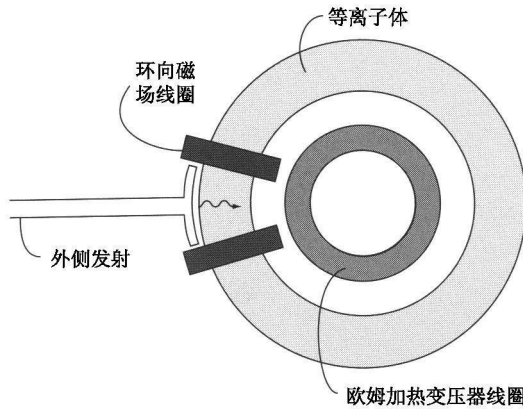


图 15.11 托卡马克顶视图,图中示意了从环的外侧(即弱场侧)发射射频波的情况  
(注意,托卡马克的环形几何结构和欧姆变压器的存在导致环内侧部件十分拥挤)

对于离子回旋加热,最大的问题是天线的金属结构靠近等离子体。要把大量功率耦合进等离子体就需要在天线上加载高的电压,但高电压会在天线附近导致起弧或者等离子体破裂。这两种效应都是我们所不愿看到的。但我们不能因此就将天线位置设置得远离等离子体,因为天线和等离子体必须紧密靠近,否则离子回旋波就不能很好地耦合到等离子体中,这一点我们不久就会看到。因此,具有防止高压起弧的屏蔽良好的天线设计对于离子回旋加热而言是一个重要的技术问题。另外需要注意的是,由于等离子体中的直流磁场是沿真空室壁的切线方向,所以天线的几何结构决定了电磁波进入等离子体中的平行波数  $k_{\parallel}$  的值。换言之,当波开始在等离子体中传播的时候,波的频率  $\omega$  和平行波数  $k_{\parallel}$  可以分别从射频源和天线结构获得。这个事实对于我们一会儿去了解波是如何传播到等离子体芯部的非常重要。

对于低杂波电流驱动,情况稍有不同。一般来说,我们希望射频波功率能够散布在足够大的面积上,这样高电压击穿的问题就不会发生。但现状是单一波导具有小的横向尺寸,而发射天线又需要靠近等离子体以便得到良好的耦合。这就需要由多个单波导组成一个天线阵列。同样困难的问题是在等离子体和波导阵之间维持一个绝缘的真空界面。解决办法是在阵列的每个波导的端口安装上密封窗,从而把发射天线与等离子体隔离开来。窗材料需要仔细选择,这样才能保证大部分射频功率都能通过窗口,只有很少一部分功率被反射回来,否则耦合效率会急剧降低。另外,只允许很少一部分功率在窗口处被吸收,否则由此形成的热应力会造成结构的

破坏。对于低杂波电流驱动,大功率窗口的发展是一项重要的技术问题。最后,和离子回旋加热一样,发射天线阵列边缘处的几何结构和电磁波的相对相位决定了电磁波进入等离子体的  $k_{\parallel}$  值。因此,在等离子体边缘处,频率  $\omega$  和平行波数  $k_{\parallel}$  都是已知的。

电子回旋加热所面临的问题和低杂波电流驱动类似,尽管其发射天线即使远离等离子体仍有良好的耦合。虽然电子回旋波波导的尺寸非常小,使得耦合问题得到缓解,但却使其他问题变得严重。

在目前的等离子体实验中,离子回旋波、电子回旋波和低杂波都已经被用来加热或者进行电流驱动。上述技术性问题经过艰苦努力在目前的脉冲运行实验中都已经得到成功解决。离子回旋加热因其容易得到大功率、高性价比的可靠的射频源因而比电子回旋加热应用得更普遍。尽管如此,国际上很多实验中也利用了电子回旋加热手段。低杂波电流驱动正引起极大的关注,尽管它还没能像离子回旋波那样被仔细地研究。原因在于电流驱动直到最近才被看作和加热同样关键的问题。

在下面的讨论中,假设射频波具有所需的功率水平和预期的工作频率,我们的任务是要理解射频功率是如何传播到等离子体芯部并被等离子体吸收的。

### 15.4.3 等离子体中电磁波传播的原理

为了开始后面的讨论,这一小节将简要描述电磁波在任意介质中传播的基本原理。对于很多读者而言,这里的大部分内容可以看作一个回顾和复习。其中有两点可能稍微不是那么为人熟知,但对于聚变研究格外重要,它们是:①波共振与波-粒子共振的区别;②可近性的概念。因此这一小节的内容包括:

- 介电张量;
- 色散关系;
- 相速度和群速度;
- 截止和波共振;
- 波-粒子共振;
- 偏振;
- 反射、透射、吸收和模转换;
- 可近性。

#### 1. 介电张量

我们来考虑电磁波在任意介质(譬如等离子体)中的传播。一般来说,等离子体的行为非常复杂,我们很难像对待简单电介质或者磁介质那样用一个简单的  $\epsilon$  或者  $\mu$  来描述。不过,我们可以假设等离子体中的粒子是沉浸在真空(真空下介电率  $\epsilon_0$ , 磁导率  $\mu_0$ ) 中,带电粒子对波传播特性的影响可以通过合适的等离子体模型来精确计算电流密度  $\mathbf{J}$  和电荷密度  $\sigma$  来确定。这样,等离子体行为的结果可以方便

地用导出的“介电张量”来描述。定义介电张量的出发点是麦克斯韦方程组：

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \sigma / \varepsilon_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.34)$$

接下来,注意到通常对等离子体波的处理都采用小振幅扰动的假设,这意味着波传播的问题可以作为平衡态附近的线性扰动问题来处理。而且,为简化起见,这种平衡态通常被假设成无限大且均匀的,而且与我们感兴趣的波长相比至少是缓变的。这些看似粗略的近似实际上却出人意料地精确,我们将在下一节里详细讨论这个问题。

利用小振幅假设,可以把所有量展开成为平衡量和扰动量之和:

$$Q(\mathbf{r}, t) = Q_0 + \tilde{Q}_1(\mathbf{r}, t) \quad (15.35)$$

这里  $Q_1 \ll Q_0$ 。均匀性假设意味着可以在时间和空间上做傅里叶分析:

$$\tilde{Q}_1(\mathbf{r}, t) = Q_1 \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (15.36)$$

这里,  $Q_1$  只是表示振幅。傅里叶分析加上线性化是非常有用的工具,因为它把麦克斯韦方程中的对时间和对空间的微分都化为:

$$\left. \begin{aligned} \partial / \partial t &\rightarrow -i\omega \\ \nabla &\rightarrow i\mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (15.37)$$

而且,所有的指数因子均可完全消去。也就是说,线性化下的傅里叶分析可以将偏微分方程组转化为一组关于未知场量的相互耦合的代数方程。这正是我们希望得到的。

对均匀的平衡态下的麦克斯韦方程组线性化,可以得到:

$$\left. \begin{aligned} i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 &= i\omega \mathbf{B}_1 \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1 &= \mu_0 \mathbf{J}_1 - \frac{i\omega}{c^2} \mathbf{E}_1 \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 &= \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.38)$$

这组方程可以通过消去  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 / \omega$  简化为关于  $\mathbf{E}_1$  的单个矢量方程:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1 - i\omega \mathbf{J}_1 \quad (15.39)$$

麦克斯韦方程组中其余的两个方程可以证明是用不着的。

这里,我们必须假设从等离子体的流体模型或者动理学模型中可以得到  $\mathbf{J}_1$  和  $\mathbf{E}_1$  的关系,这个关系通常不会是各向同性的,而是一种张量形式:

$$\mathbf{J}_1 = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{E}_1 \quad (15.40)$$

这里  $\vec{\sigma}$  被定义为电导率张量。现在假设  $\vec{\sigma}$  是已知的,这样式(15.39)可以写成:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1 - i\omega \mu_0 \vec{\sigma} \cdot \mathbf{E}_1 \quad (15.41)$$

更标准的表示方法是引入折射率矢量:

$$\mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \quad (15.42)$$

和介电张量:

$$\vec{\mathbf{K}} = \vec{\mathbf{I}} + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \vec{\sigma} \quad (15.43)$$

这样,式(15.41)简化为:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 + \vec{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{E}_1 = 0 \quad (15.44)$$

这就是我们要得到的关系式,其中介电张量  $\vec{\mathbf{K}}$  由式(15.43)定义。应当记住,引入  $\vec{\mathbf{K}}$  的作用是为了描述等离子体对波传播的作用,只有当我们从等离子体模型中得到  $\vec{\sigma}$  后才能真正得到  $\vec{\mathbf{K}}$ 。我们期待从麦克斯韦方程组的解得到  $\omega$  和  $\mathbf{k}$  的关系,这个关系具体由等离子体性质决定。例如,在没有等离子体的情况下(即真空中),这个关系式是  $\omega = kc$ 。对于通常情况下,这个关系被称为“色散关系”。它通常写成  $\omega = \omega(\mathbf{k})$ ,或者更一般地写成  $D(\omega, \mathbf{k}) = 0$  或其等价形式  $\hat{D}(\omega, \mathbf{n}) = 0$ 。

色散关系是怎么来的呢?要回答这个问题,我们要回到式(15.44)。这是一个关于未知振幅  $E_{1x}$ ,  $E_{1y}$  和  $E_{1z}$  的3个相互耦合的线性齐次代数方程。为了获得非平凡解,必须要求方程的系数行列式为零。系数行列式为零也等价于找到系统的特征值。这样得到的特征值关系就是色散关系  $D(\omega, \mathbf{k}) = 0$ 。

把矢量方程的3个独立分量写出来,很容易得到式(15.44)对应的色散关系。经过简短的推导,可以得到系数行列式:

$$\begin{vmatrix} n_y^2 + n_z^2 - K_{xx} & -n_x n_y - K_{xy} & -n_x n_z - K_{xz} \\ -n_x n_y - K_{yx} & n_x^2 + n_z^2 - K_{yy} & -n_y n_z - K_{yz} \\ -n_x n_z - K_{zx} & -n_y n_z - K_{zy} & n_x^2 + n_y^2 - K_{zz} \end{vmatrix} = 0 \quad (15.45)$$

如果采用冷等离子体流体模型,上面这个看起来有点庞大的行列式会变得非常简单。然而,现在我们只需要假设  $K_{ij}$  是已知的,令行列式等于零得到  $D(\omega, \mathbf{k}) = 0$  即可。关键问题是要认识到,求解色散关系时,通常会出现多个根。特别地,对于给定的  $\omega, n_y$  和  $n_z$  会导致  $n_x$  的多个解。每一个解对应于一个独立的具有不同传播特性的波。多解的存在对于我们试图理解等离子体中的射频加热和电流驱动是重要的。

## 2. 相速度和群速度

描述电磁波传播的两个重要参量是相速度和群速度,分别定义如下。相速度  $V_p$  是这样一个速度,如果观察者以这个速度运动,他看到的波的相位是不变的。换言之,由于波的相位定义为  $\phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ ,那么  $V_p$  就是令  $d\phi/dt = 0$  得到的速度。注意到:

$$d\phi/dt = \omega - \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}/dt = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_p = 0 \quad (15.46)$$

相速度可以很容易从色散关系  $\omega = \omega(\mathbf{k})$  中得到。因此相速度定义为:

$$\mathbf{V}_p = \frac{\omega}{k} \mathbf{e}_k = \frac{\omega}{k} \left( \frac{k_x}{k} \mathbf{e}_x + \frac{k_y}{k} \mathbf{e}_y + \frac{k_z}{k} \mathbf{e}_z \right) \quad (15.47)$$

可以看到,  $V_p$  的大小是  $\omega/k$ , 方向沿着  $\mathbf{k}$  的方向。而且,相速度既可以比光速大也可以比光速小。这一点并不与相对论相矛盾,因为单个单色波的相速度不代表任何物理量(例如信息或者能量)的传播。

相速度对于理解等离子体波的某些普遍性质是有用的,尤其是在研究波-粒子共振及相关的无碰撞阻尼现象时格外重要。

下面我们转向群速度。这是信息或者能量传播的速度,因此必然小于或者等于光速。那么“信息或者能量传播的速度”究竟是什么意思呢? 这个问题可以通过考虑一个振幅调制(AM)的射频波的一维传播来回答。这里有一个高频载波频率为  $\omega_0$ , 波数为  $k_0$ , 这个波的电场可以写成  $E = A \cos(\omega_0 t - k_0 x)$ 。信息通过调制载波的振幅  $A$  来传播。为了保持信息的相关性,调制波的频率  $\omega_1$  和波数  $k_1$  必须远小于载波的频率和波数,即  $\omega_1 \ll \omega_0, k_1 \ll k_0$ 。调制后的波场可以表示为:

$$\begin{aligned} E &= A_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) \cos(\omega_0 t - k_0 x) \\ &= \frac{A_0}{2} \{ \cos[(\omega_0 + \omega_1)t - (k_0 + k_1)x] + \cos[(\omega_0 - \omega_1)t - (k_0 - k_1)x] \} \end{aligned} \quad (15.48)$$

信息由谐波调制的振幅携带,根据定义,传播速度由  $\omega_1/k_1$  给出,这个就是所谓的群速度  $V_g$ 。注意到调制后的波可以写成两支单一波的和,一支频率(或波数)上移,另一支频率(或波数)下移,但每一支都必须满足色散关系,同时利用  $\omega_1$  和  $k_1$  是小量,可以从色散关系得到  $V_g$  的值。如果色散关系写成  $\omega = \omega(k)$ ,那么有:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \omega(k_0) \\ \omega_0 \pm \omega_1 &= \omega(k_0 \pm k_1) \approx \omega(k_0) \pm \frac{d\omega}{dk_0} k_1 \end{aligned} \right\} \quad (15.49)$$

这样,群速度就可以写成下面的形式:

$$V_g = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{d\omega(k_0)}{dk_0} \quad (15.50)$$

这个关系很容易推广到三维情形:

$$\mathbf{V}_g = \nabla_k \omega = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \mathbf{e}_z \quad (15.51)$$

这里,为了方便,波数  $k$  的下标 0 都去掉了。

式(15.51)就是我们要得到的群速度。这个量对于理解在等离子体中传播的电磁波的信息流和能量流非常重要。物理上,群速度必须小于光速  $V_g \leq c$ 。而且,尽管  $V_p$  和  $V_g$  常常同一方向,但这一点并不是必需的。当二者方向相反的时候,波称为“反向波”,低杂波电流驱动中就会发生这种情形。

### 3. 截止和波共振

截止和波共振指的是在  $\mathbf{k}$  的两种极值情形下,波的传播特性发生显著的变化。为了理解这种现象,我们不妨想象一下电磁波注入等离子体中的情况。这里,相比于波长  $\lambda = 2\pi/k$ ,等离子体性质(如  $n, B_0, T$ )沿空间缓变。波传播的特性由色散关系  $\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$  决定,其中对于  $\mathbf{r}$  的依赖关系来自于等离子体性质的空间变化。波以特定的频率  $\omega$  和平行波数  $k_{\parallel} \equiv k_{\parallel}$  进入等离子体外边界。这里  $\omega$  和  $k_{\parallel}$  由源和发射天线确定,而且对于行波而言,二者都是实数。在二维几何位形中,色散关系就可以用来确定  $k_x \equiv k_{\perp}$ 。由于等离子体参数的缓慢变化,  $k_{\perp}$  的值随着空间缓慢变化。我们需要记住的最关键的一点是,尽量保持  $k_{\perp}$  为实数,这样波就会在等离子体中传播得更远。

当等离子体参数逐渐变化,使得  $k_{\perp}^2 = 0$ , 或者等效地,  $n_{\perp}^2 = 0$  时,截止就发生了。在截止点,相速度变成无穷大(尽管群速度仍然是有限值),而越过这一点,等离子体参数的继续变化则会导致  $k_{\perp}^2$  变成负值。这时的解是纯虚数。如果没有其他的源存在,波就从截止点开始呈指数衰减(即波是逐渐耗散的)。波截止的一个典

型例子是调幅无线电波在电离层的反射现象,如图 15.12 所示。总而言之,截止发生在  $k_{\perp}^2$  经过零改变符号时,它阻止波在等离子体中的继续进入。

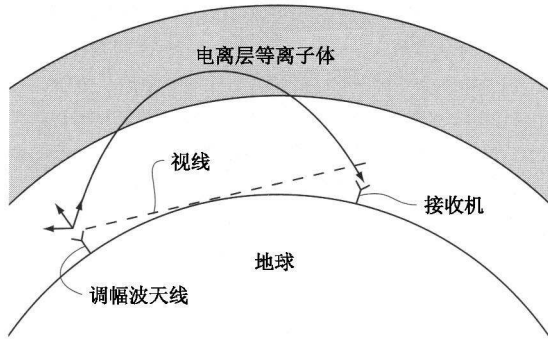


图 15.12 调幅无线电波被电离层反射的示意图

(正是这种反射使得我们能够接收到视线距离外的无线电发射机发射的信号)

波的共振对应于另一种极限情形。在这种情况下,  $k_{\perp}^2$  经过无穷而改变符号。更确切地说,波共振发生在  $k_{\perp}^2 = \infty$  (或等效地,  $n_{\perp}^2 = \infty$ ) 处。在这个极限下,相速度和群速度都趋近于零。能流变慢,理论上说,如果这时引入少量的耗散,都会造成能量被大量吸收。这个结论是我们从冷等离子体色散关系中得到的,我们稍后会给出这一关系。然而,更真实的等离子体模型显示,当包含动理学效应时,冷等离子体波的共振消失了,取而代之的是所谓的“模式转换”,即一种入射波转化为另外一种不同类型的等离子体波的过程。这里的关键是,除了字面上使用了“共振”这个词外,在波的共振处并没有直接的射频功率的吸收。

截止和共振在确定如何最优地把加热所需的射频波传播到等离子体中心时起着重要的作用。

#### 4. 波-粒子共振

波-粒子共振是等离子体从射频波中吸收能量的基本机制,也正是这种吸收产生射频加热和电流驱动。涉及吸收过程的是具有特定速度的一群粒子,这个特定的速度使得这些粒子处于和波的共振状态中。如果等离子体和波的参数都选择得合适,就会有一定量的粒子处于共振状态,从而导致功率的大量吸收。

这里我们不加证明直接给出波-粒子共振的条件:

$$\omega = k_{\parallel} v_{\parallel} + l \omega_c \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (15.52)$$

当平行方向上的多普勒频移后的频率等于回旋频率的谐频时,就会发生共振。包含在式(15.52)中的基本物理将在下一小节“无碰撞阻尼”中解释。

这其中  $l = 0$  共振就是著名的“朗道阻尼”,它在低杂波电流驱动中是重要的。而  $l = 1$  共振对应于“基频加热”,它是电子回旋加热的重要机制,有时对离子回旋加



热也是重要的。 $l=2$  共振正如其名产生“二次谐波加热”。这个过程对于电子回旋加热和离子回旋加热都是重要的。

波-粒子共振是决定射频波加热或者电流驱动最佳方法的关键机制。

### 5. 偏 振

当我们求得色散关系后,把结果直接代入  $\mathbf{E}_1$  的矩阵方程中,就可以根据其中的一个分量来确定另两个分量的关系,例如根据  $E_{1z}$  来确定  $E_{1x}$  和  $E_{1y}$  之间的关系。偏振描述的是电场各分量之间的各种可能关系,它有助于我们理解什么样的波能有效地产生波-粒子共振。

例如,在光学中,波的偏振定义为垂直于波矢  $\mathbf{k}$  的电场分量之间的比值。而在等离子体物理中,广泛使用的不同定义有几种,其中有两种定义对于描述垂直于背景磁场  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$  的传播特别有用。在第一种定义下,偏振通过电场的两个垂直分量  $E_{1x}$  和  $E_{1y}$  来定义。波的偏振度  $P$  定义为:

$$P = iE_{1x}/E_{1y} \quad (15.53)$$

它的值由等离子体模型和考虑的具体波确定。几种特殊情况包括:

$$\begin{aligned} P = 0 & \quad \text{线偏振波} \\ P = \infty & \quad \text{线偏振波} \\ P = \pm 1 & \quad \text{圆偏振波} \end{aligned}$$

线偏振波只在某一固定方向上有场(如  $E_{1x}$ )的分量。圆偏振波在两个正交方向上有分量,相互之间相位相差  $90^\circ$ ,这样就会有一个随时间做周期性旋转的电场。

在聚变物理里广泛运用的第二种定义用来区分感兴趣的波在平行于背景磁场的方向上有没有电场分量。根据这个定义,波被划分为 O 模,即寻常波 (ordinary wave); 或者 X 模,即非寻常波 (extraordinary wave)。具体的定义是:

$$\begin{aligned} \text{对于 O 模, } E_{\parallel} & \neq 0 \\ \text{对于 X 模, } E_{\parallel} & = 0 \end{aligned}$$

偏振的知识对于理解电子回旋加热、离子回旋加热和低杂波电流驱动都是非常重要的,随着分析的进行我们将会进行更详细的讨论。

### 6. 反射、透射、吸收和模转换

当波在等离子体中传播时,会有几种与波能量沉积有关的不同过程发生,包括反射、透射、吸收和模转换等。图 15.13 示出了在简单平板等离子体中的这几种过程。

例如,考虑加热问题。注意到入射波通常都是一部分被反射,一部分透射进去。显然,为了有效加热,反射波应该具有小的幅度。而透射波则继续无衰减地深入到等离子体内部。假设波在到达等离子体中心之前遇到了截止层,就会被完全反射回

来,这个现象是我们不希望看到的结果。另外一种情况,波可以继续等离子体中传播直到它到达等离子体中心。如果等离子体和波的参数都设置得恰当,则在等离子体中心就会发生强烈的波-等离子体共振,从而导致波的强吸收,这是我们预期的结果。第三种可能的情况是,波首先遇到波共振区,在这里通过模转换过程变成另一种类型的等离子体波。这支新波继续在等离子体中传播,或者遭遇截止(不希望的情况),或者到达等离子体中心实现波-粒子共振(希望的情况)。可以看到这里存在多种可能性。

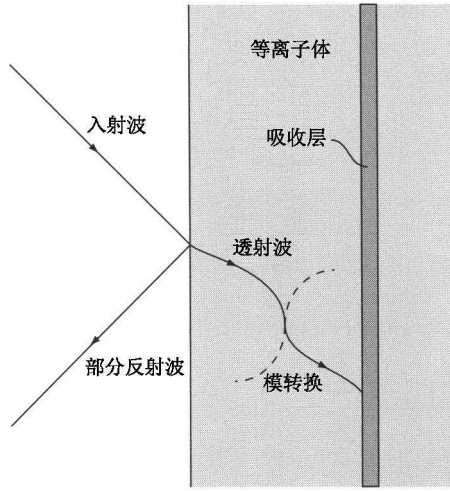


图 15.13 反射、透射、吸收和模转换示意图

这里有必要简单讨论一下模转换机制的一些细节。因为这一点可能并不那么为人熟知,但对于某些特定的加热方案却至关重要。模转换包含两种不同的等离子体波。例如,两支波都有同样的  $\omega$  和  $k_{\parallel}$ ,但是  $k_{\perp}$  不同,它们是同一色散关系  $k_{\perp} = k_{\perp}(\omega, k_{\parallel})$  的不同解。在  $k_{\perp}$  的值随波在等离子体中传播而演化的过程中,当两个  $k_{\perp}$  值恰好在演化分布的某一点合并在一起时,模转换就发生了。通常,模转换发生在某一支波正处于冷等离子体波共振处,而另一支波通常是一支由于更复杂的等离子体动力学导致的新的模。在模转换发生的结合点处,两支波都失去了各自的个性,从而发生强烈的模耦合。最后的结果是一部分能量从外部激励的第一支波传递到第二支波,第二支波则按照它自己的色散性质继续在等离子体中传播。这就是模转换的过程。

反射、透射、吸收和模转换的结合在决定不同射频加热方法的有效性上起着重要作用。

### 7. 可近性

可近性对于射频加热和电流驱动的实现至关重要。我们前面描述的所有过程

里都需要考虑可近性问题,即要问从等离子体外部注入的波能否到达等离子体内部的指定位置并在那里通过波-粒子共振作用被吸收。对于从外侧注入的情形,波在向等离子体中心传播的过程中将看到一个增长的等离子体密度。同时,波还会看到一个缓慢增长的磁场,因为  $B_0 \propto 1/R$ 。事实上,并不容易做到波不遭遇任何截止区就直接到达等离子体中心。而且,如果遭遇波共振区,我们就必须知道波耦合系数及转化后第二支波的传播特性。要实现良好的加热,理想的情况是,波从等离子体边缘到期待的吸收位置均满足  $n_{\perp}^2 > 0$ 。对于电子回旋加热和离子回旋加热,已经设计了巧妙的方法使得波能量能够达到等离子体芯部。对于离轴的低杂波电流驱动,情况更复杂一点,但也已经成功解决。这些方法会在 15.7 ~ 15.9 节讨论。结论是良好的可近性是实现所希望的射频加热和电流驱动的主要要求。

### 8. 小结

本节在射频波加热和电流驱动的背景下回顾了电磁波理论的若干基本性质。结论是,从外侧入射的波按照色散关系  $D(\omega, \mathbf{k}) = 0$  向等离子体中心传播。中心加热的关键问题包括:①波应该有良好的可近性以便到达等离子体中心;②当波到达中心后,应该有强的波-粒子共振产生对波能量的强烈吸收。对于电流驱动也有类似的结论。

#### 15.4.4 等离子体中电磁波传播的分析

我们下一个主要任务是应用上节介绍的电磁波基本原理,分析如何有效地加热等离子体或驱动等离子体电流,从而知道什么频率和什么入射波数的波才能无阻尼地传播到等离子体中的预期位置(比如,对于加热通常是等离子体中心,对于电流驱动则是离轴的位置),并在此发生强烈的波-粒子相互作用和波能量吸收。下面,我们将分几个步骤进行简单分析。

首先,必须认识到一个真实模型必须包含动理学效应、环形几何位形和扩散型的分布,这是一个相当有难度的挑战。多年来,人们开发了很多模型来达到这些要求。这些模型非常成功,不过可以想象到它们都涉及大规模数值代码。然而,对于我们这里介绍射频加热和电流驱动,利用简单模型会更合适一些。简单模型可以解析求解,因此可以提供更多物理上的理解。下面要描述的简单模型就可以半定量地重现更完整模型的基本特点。要理解这个简单模型,至关重要的步骤是色散关系的计算。为不失一般性,我们将色散关系写成以下形式:

$$D(\omega, \mathbf{k}) = D_r(\omega, \mathbf{k}) + iD_i(\omega, \mathbf{k}) \quad (15.54)$$

当  $\omega$  和  $\mathbf{k}$  为实数时,函数  $D_r$  和  $D_i$  均为实数。基本上,第一项  $D_r$  描述波的传播性质(如传播、截止、波共振),因此决定着给定类型的波到达预期位置的可近性。第二项,通常会假设  $D_i \ll D_r$ ,代表波-粒子共振引起的波的耗散。在简化的分析中,

$D_r(\omega, \mathbf{k})$  由双流体冷等离子体模型获得, 这里所有温度效应被忽略。而且, 为了简化几何, 等离子体被处理成为无限大、均匀的平板, 径向坐标  $r$  可以用  $x$  代替。这样得到的  $D_r(\omega, \mathbf{k})$  是平衡密度  $n_0$  和磁场  $B_0$  的函数。以后可以看到, 密度和磁场都可以在空间里缓慢变化:  $n_0 = n_0(x)$ ,  $B_0 = B_0(x)$ 。因此, 色散关系是空间坐标的局域函数:  $D_r(\omega, \mathbf{k}, x)$ 。这些简化相当粗糙, 以至于很难先验地判定。这样做的主要依据来自于事后的验证, 即通过数值求解更普遍的模型, 然后与冷等离子体模型预言的结果进行比较。比较显示, 对于可近性问题, 冷等离子体模型非常值得信赖。接下来考虑  $D_r(\omega, \mathbf{k})$ 。通常而言, 这需要完全的动理学处理, 从而可以准确地计算波-粒子共振吸收。幸运的是, 经过多年努力, 研究者已经开发出若干基于单粒子运动的简单模型, 它们同样可以得到动理学理论的波-粒子阻尼结果。这些模型并不确定  $D_r(\omega, \mathbf{k}, x)$ , 而是直接得到时间上的阻尼率  $\omega_i$ , 这里假设  $\mathbf{k}$  为实数。用来得到  $\omega_i = \omega_i[\omega, k_{\parallel}, k_{\perp}(x)]$  的模型就是所谓的“无碰撞阻尼模型”。

具备了关于  $D_r(\omega, \mathbf{k}, x)$  和  $\omega_i$  的知识, 我们就可以来研究电子回旋加热、离子回旋加热和低杂波驱动。对于每一种情况, 第一步都是研究其可近性, 即在冷等离子体模型中令  $D_r(\omega, \mathbf{k}, x) = 0$ 。为说明这一点, 我们考虑图 15.14 所示的简单几何位形。射频源给定了波的频率  $\omega$ , 发射结构给定了平行波数  $k_{\parallel}$  的值, 而波则以某一个轴向(即径向)波数  $k_{\perp}$  向等离子体中心传播。在这样一个简单模型中, 波数是这样一个矢量,  $\mathbf{k} = k_{\perp} \mathbf{e}_x + k_{\parallel} \mathbf{e}_z$ 。由  $D_r(\omega, \mathbf{k}, x) = 0$ , 可以得到其可近性条件:

$$k_{\perp} = k_{\perp}(\omega, k_{\parallel}, x) \quad (15.55)$$

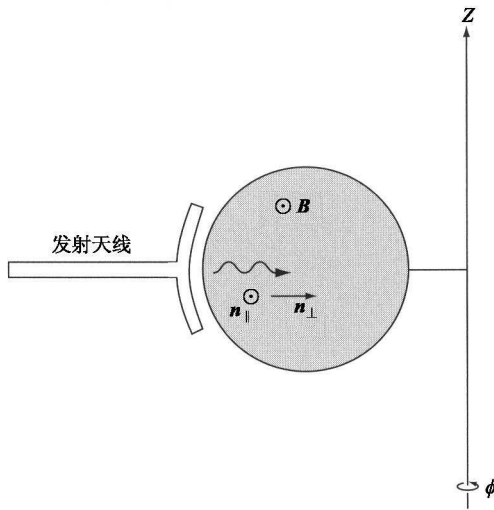


图 15.14 环形几何位形下低场侧外部入射示意图(注意  $n_{\perp}$  和  $n_{\parallel}$  的方向)

这里,对  $x$  的依赖关系来自于密度  $n_0(x)$  和温度  $B_0(x)$  这些平衡参量的空间变化。对于波加热,好的可近性是指:要求从等离子体的外部边界到等离子体中心,  $k_{\perp}$  均为实数;或者在最坏情况下,波只经过一个狭窄的截止区,从而能够通过大部分能量。

假设,具有好的可近性,接下来我们就必须计算波在空间上的阻尼衰减  $k_{\perp i}(x)$ 。这个量直接与波在时间上的阻尼率  $\omega_i$  相联系,而  $\omega_i$  可以由无碰撞阻尼模型确定。一旦  $k_{\perp i}(x)$  已知,直接利用功率平衡计算就可以得到功率吸收的份额。 $k_{\perp i}(x)$  与  $\omega_i$  的关系可以由下面的过程确定。如果考虑波随时间衰减,其阻尼率远小于实频  $\omega_i \ll \omega_r, D_i \ll D_r$ , 且  $k_{\perp}, k_{\parallel}$  为实数,那么对波的色散关系做泰勒展开得到:

$$D_r(\omega_r, k_{\perp r}, k_{\parallel}) + i \left[ \frac{\partial D_r(\omega_r, k_{\perp r}, k_{\parallel})}{\partial \omega_r} \omega_i + D_i(\omega_r, k_{\perp r}, k_{\parallel}) \right] \approx 0 \quad (15.56)$$

另一方面,如果考虑波随空间衰减,并有  $k_{\perp i} \ll k_{\perp r}, \omega$  和  $k_{\parallel}$  为实数,同样对色散关系做泰勒展开,得到另一个式子:

$$D_r(\omega_r, k_{\perp r}, k_{\parallel}) + i \left[ \frac{\partial D_r(\omega_r, k_{\perp r}, k_{\parallel})}{\partial k_{\perp r}} n_{\perp i} + D_i(\omega_r, k_{\perp r}, k_{\parallel}) \right] \approx 0 \quad (15.57)$$

令式(15.56)和式(15.57)两式相减,即得到  $k_{\perp i}(x)$  和  $\omega_i$  的关系:

$$k_{\perp i} = \left[ \frac{\partial D_r / \partial \omega_r}{\partial D_r / \partial k_{\perp r}} \right] \omega_i = - \frac{\omega_i}{(\partial \omega / \partial k_{\perp})} = - \frac{\omega_i}{V_{g\perp}} \quad (15.58)$$

可以看到,波在空间和时间上的阻尼衰减由垂直方向上的群速度联系起来。注意到,要得到  $k_{\perp i}$  需要知道冷等离子体色散关系  $D_r$  的形式和  $\omega_i$  的值,但是不需要  $D_i$  的具体表达式。最后分析一下坡印亭矢量和波的储能之间的关系。原则上来说,这一关系不是我们应用所感兴趣的,然而,这个关系可以极大地简化计算  $k_{\perp i}$  的代数计算过程,尤其是应用在低杂波驱动时。附录 D 给出了这个关系的推导,这里直接给出结果:

$$P_{\perp} = \frac{\omega_i}{k_{\perp i}} U = V_{g\perp} U \quad (15.59)$$

这里,

$$P_{\perp} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1^*) \quad (15.60)$$

是坡印亭矢量的垂直分量,而

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\mu_0} | \mathbf{B}_1^2 | + \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}_1^* \cdot \frac{\partial}{\partial \omega_r} [ \omega_r \ddot{\mathbf{K}}(\omega_r) ] \cdot \mathbf{E}_1 \right\} \quad (15.61)$$

是系统的总储能(包含波的能量和等离子体动能)。而且,  $\ddot{\mathbf{K}}(\omega)$  是冷等离子体介电张量, 系数 1/2 是由于这里所有量都是用峰值而不是均方根值表示。可以看到, 电磁能流坡印亭矢量等于储能与群速度的乘积。

总结一下, 为了得到电子回旋加热、离子回旋加热或低杂波驱动中的功率吸收份额, 一系列的步骤需要按照下面的顺序进行:

- ① 计算等离子体色散关系  $D_r(\omega, k_\perp, k_\parallel) = 0$ ;
- ② 分析可近性;
- ③ 计算无碰撞阻尼率  $\omega_i$ , 进而得到  $k_{\perp i}$ ;
- ④ 分析功率吸收。

后面的分析会看到, 电子回旋加热、离子回旋加热和低杂波驱动都可以得到高的吸收份额。

## 15.5 冷等离子体色散关系

从电磁波传播的基本性质出发, 通过①计算介电张量; ②令得到的电场矩阵行列式为零, 就可以得到色散关系。在这一节里, 色散关系从双流冷等离子体模型得到。最终, 我们会得到一个和  $D_r(\omega, k_\perp, k_\parallel)$  完全等效的  $\hat{D}_r(\omega, n_\perp, n_\parallel)$  的具体形式。在这一节, 我们没有令  $D_r = 0$  进行可近性分析, 而是在 15.7 ~ 15.9 几节中针对每一种加热或电流驱动模式进行了具体的分析。推导介电张量的出发点是双流冷等离子体模型。对于冷等离子体, 只需要动量方程:

$$\left. \begin{aligned} m_e (\partial \mathbf{u}_e / \partial t + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \mathbf{u}_e) &= -e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) \\ m_i (\partial \mathbf{u}_i / \partial t + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_i) &= e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) \end{aligned} \right\} \quad (15.62)$$

对应于均匀无界等离子体的平衡可以描述为:

$$\left. \begin{aligned} n_e &= n_i \equiv n_0 \\ \mathbf{B} &= B_0 \mathbf{e}_z \\ \mathbf{u}_e &= \mathbf{u}_i = \mathbf{E} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.63)$$

现在, 流体方程可以在平衡附近进行线性化。目标是计算  $\mathbf{u}_{e1}$  和  $\mathbf{u}_{i1}$  (表示成  $\mathbf{E}_1$  的函数), 从这些速度, 可以很容易计算电流  $\mathbf{J}_1$ , 进而得到电导率张量  $\ddot{\sigma}$ , 最后得到介电张量  $\ddot{\mathbf{K}}$ 。扰动速度的方程是:

$$m \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = q(\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) \quad (15.64)$$

这里  $m$  表示  $m_e$  和  $m_i$ ,  $q$  表示  $\pm e$ 。

为了和前面一节的讨论一致,选择这样的坐标系: $\mathbf{B}_0$  沿  $z$  轴,波在等离子体中的传播方向是  $x$  轴。这样,波矢具有  $\mathbf{k} = k_\perp \mathbf{e}_x + k_\parallel \mathbf{e}_z$  的形式。所有的扰动量可以在时间和空间上做傅里叶分析  $Q_1(\mathbf{r}, t) = Q_1 \exp(-i\omega t + ik_\perp x + ik_\parallel z)$ 。为不失一般性,后面我们只考虑频率为正的情况。扰动动量方程的各个分量为:

$$\left. \begin{aligned} -i\omega m u_{1x} &= q(E_{1x} + u_{1y} B_0) \\ -i\omega m u_{1y} &= q(E_{1y} - u_{1x} B_0) \\ -i\omega m u_{1z} &= qE_{1z} \end{aligned} \right\} \quad (15.65)$$

我们可以很容易地解出  $\mathbf{u}_1$ , 如下:

$$\left. \begin{aligned} u_{1x} &= \frac{q}{m} \frac{(i\omega E_{1x} - \omega_c E_{1y})}{\omega^2 - \omega_c^2} \\ u_{1y} &= \frac{q}{m} \frac{(\omega_c E_{1x} + i\omega E_{1y})}{\omega^2 - \omega_c^2} \\ u_{1z} &= \frac{iq}{m\omega} E_{1z} \end{aligned} \right\} \quad (15.66)$$

这里  $\omega_c = qB_0/m$  是回旋频率,它可正可负。电流密度由  $\mathbf{J}_1 = e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e)_1 = en_0(\mathbf{u}_{i1} - \mathbf{u}_{e1})$  给出。简短的计算显示电导率  $\vec{\sigma}$  (由  $\mathbf{J}_1 = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{E}_1$  定义) 可以表示成:

$$\vec{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (15.67)$$

这里,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = i \sum_j \frac{q_j^2 n_0}{m_j} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_{cj}^2} \\ \sigma_{xy} &= -\sigma_{yx} = - \sum_j \frac{q_j^2 n_0}{m_j} \frac{\omega_{cj}}{\omega^2 - \omega_{cj}^2} \\ \sigma_{zz} &= i \sum_j \frac{q_j^2 n_0}{m_j \omega} \end{aligned} \right\} \quad (15.68)$$

最后,得到介电张量  $\vec{\mathbf{K}} = \vec{\mathbf{I}} + (i/\omega \epsilon_0) \vec{\sigma}$ :

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} K_{xx} & K_{xy} & 0 \\ K_{yx} & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_{\perp} & -iK_A & 0 \\ iK_A & K_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\parallel} \end{vmatrix} \quad (15.69)$$

这里,

$$\left. \begin{aligned} K_{\perp} &= 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2 - \omega_{ej}^2} \\ K_A &= \sum_j \frac{\omega_{ej}}{\omega} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2 - \omega_{ej}^2} \\ K_{\parallel} &= 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (15.70)$$

其中  $\omega_{pj}^2 = n_0 q_j^2 / m_j \epsilon_0$  是等离子体频率的平方。

知道了介电张量,令  $\text{Det} | \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 + \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{E}_1 | = 0$ , 我们就可以计算出色散关系:

$$\begin{vmatrix} n_{\parallel}^2 - K_{\perp} & iK_A & -n_{\perp} n_{\parallel} \\ -iK_A & n_{\perp}^2 + n_{\parallel}^2 - K_{\perp} & 0 \\ -n_{\perp} n_{\parallel} & 0 & n_{\perp}^2 - K_{\parallel} \end{vmatrix} = 0 \quad (15.71)$$

经过简单的计算可以得到关于  $n_{\perp}^2$  的二次方程:

$$\left. \begin{aligned} D_{\perp}(\omega, n_{\parallel}, n_{\perp}) &\equiv A n_{\perp}^4 + B n_{\perp}^2 + C = 0 \\ A &= K_{\perp} \\ B &= (K_{\perp} + K_{\parallel})(n_{\parallel}^2 - K_{\perp}) + K_A^2 \\ C &= K_{\parallel} [(n_{\parallel}^2 - K_{\perp})^2 - K_A^2] \end{aligned} \right\} \quad (15.72)$$

这个相当复杂的表达式正是我们希望得到的冷等离子体色散关系。它可以在后面几节描述电子回旋加热、离子回旋加热和低杂波驱动时得到简化和分析。

## 15.6 无碰撞阻尼

假设具有冷等离子体色散关系的电磁波具有良好的可近性并到达等离子体中心,那么下一步就是计算有多少功率会通过无碰撞阻尼沉积在等离子体中。无碰撞阻尼是一个通过波-粒子共振作用把波能转移到等离子体中的过程。共振条件已经提到过,即  $\omega = k_{\parallel} v_{\parallel} + l\omega_c$ 。对于有效的加热模式而言,等离子体和电磁波参数都



应该合适选择使得共振发生在等离子体中心;而对于电流驱动而言,共振则需要发生在我们希望的离轴位置处。在这一节中,我们将利用简单的单粒子模型来预测波-粒子共振导致的波随时间的阻尼率  $\omega_i$ 。这个分析是按照 Stix 早期工作的思路进行。基本想法是考虑初值问题,计算带电粒子在小振幅电磁场的轨迹。可以发现,平行速度满足共振条件  $\omega = k_{\parallel} v_{\parallel} + l \omega_c$  的一小团粒子会和波发生共振,因此有可能吸收大量的波能。对一个波长范围内所有初始位置求平均,并对所有粒子速度做积分,即可得到等离子体吸收的净功率。最后,经过简单的功率平衡计算可以得到我们需要的时间阻尼率  $\omega_i$ 。

由于不同的波场结构,存在几种不同类型的共振作用。首先,对于 O 模,电场存在沿磁场  $B_0$  的分量,共振会发生。具有  $l=0, n_{\perp}=0$  的 O 模即为纯的静电波,对应于静电波会有最简单的一种无碰撞阻尼,即所谓的“朗道阻尼”。这就是下面要讨论的第一种阻尼。第二,对于  $l \geq 1$  的 X 模,当波的电场沿着垂直于  $B_0$  旋转时,也会有共振发生。这种共振产生 X 模回旋阻尼。这就是后面要讨论的第二种阻尼。最后一部分会把朗道阻尼的计算推广到  $l \geq 1, n_{\perp} \neq 0$  的 O 模共振,所产生的阻尼即为 O 模的回旋阻尼。

### 15.6.1 朗道阻尼

考虑带电粒子在小幅度静电场中的运动。这里,电场的方向沿着背景磁场的方向  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ , 即  $\mathbf{E} = E_{\parallel}(z, t) \mathbf{e}_z = E_{\parallel} \cos(k_{\parallel} z - \omega t) \mathbf{e}_z$ 。由于  $n_{\perp} = 0$ , 扰动磁场为零。电子的运动方程可以写为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{e}{m_e} E_{\parallel} \cos(\omega t - k_{\parallel} z) & v(0) &= v_{\parallel} \\ \frac{dz}{dt} &= v & z(0) &= z_i \end{aligned} \right\} \quad (15.73)$$

假设电场是个小量,我们可以通过直接展开求解这组方程,即  $v(t) = v_0(t) + v_1(t) + \dots$ ,  $z(t) = z_0(t) + z_1(t) + \dots$ 。

最低阶的解对应于未扰动轨道,即

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= v_{\parallel} \\ z_0 &= z_i + v_{\parallel} t \end{aligned} \right\} \quad (15.74)$$

一阶方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{e}{m_e} E_{\parallel} \cos(\omega t - k_{\parallel} v_{\parallel} t - k_{\parallel} z_i) & v_1(0) &= 0 \\ \frac{dz_1}{dt} &= v_1 & z_1(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.75)$$

则满足初始条件的解为:

$$\left. \begin{aligned} v_{\parallel} &= \frac{e}{m_e} E_{\parallel} \frac{\sin(k_{\parallel} z_i - \bar{\omega} t) - \sin(k_{\parallel} z_i)}{\bar{\omega}} \\ z_{\parallel} &= \frac{e}{m_e} E_{\parallel} \left[ \frac{\cos(k_{\parallel} z_i - \bar{\omega} t) - \cos(k_{\parallel} z_i)}{\bar{\omega}^2} - \frac{t \sin(k_{\parallel} z_i)}{\bar{\omega}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (15.76)$$

这里  $\bar{\omega} = \omega - k_{\parallel} v_{\parallel}$ 。

下一步的任务是计算每单位时间内粒子能量的变化(即能量增加的功率),它可以定义为:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_e v^2}{2} \right] = -e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad (15.77)$$

保留到二阶量,它具有如下形式:

$$\frac{dW}{dt} = -e \left[ v_0 E_{\parallel}(z_0, t) + v_0 \frac{\partial E_{\parallel}(z_0, t)}{\partial z_0} z_1 + v_1 E_{\parallel}(z_0, t) \right] \quad (15.78)$$

由于电子的初始位置  $z_i$  是假设随机分布在电场两个相邻峰值之间,因此有必要对所有的  $z_i$  进行平均以获得给定的初始速度  $v_{\parallel}$  的粒子的净能量改变。具体来看,我们需要计算下式:

$$\frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{k_{\parallel}}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_{\parallel}} \frac{dW}{dt} dz_i \quad (15.79)$$

简单计算可知①振幅的线性项平均为零;②振幅的二次方项可以简化为:

$$\frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{e^2 E_{\parallel}^2}{2m_e} \left[ \frac{\omega}{\bar{\omega}^2} \sin \bar{\omega} t - \frac{\omega t}{\bar{\omega}} \cos \bar{\omega} t + t \cos \bar{\omega} t \right] \quad (15.80)$$

注意到当  $\bar{\omega} \rightarrow 0$  时,  $d\bar{W}/dt$  不为零。而且,上式中存在随着时间  $t$  线性增长的项,这表示共振响应。这两个结论都是对初值问题求粒子轨迹得到的结果。如果这个问题用标准的“交流正弦波稳态分析”方法来解,最后两项随时间  $t$  线性增长的项就消失了,而第一项当  $\bar{\omega} \rightarrow 0$  时是发散的。

分析需要进一步对整个速度分布进行积分。对  $d\bar{W}/dt$  乘以  $f_0(v_{\perp}, v_{\parallel})$ , 然后对  $v_{\perp}$  和  $v_{\parallel}$  进行积分,得到的就是所有粒子在单位体积内获得能量的功率  $S_L$ 。利用下面的等式:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\bar{\omega}^2} \sin \bar{\omega} t - \frac{\omega t}{\bar{\omega}} \cos \bar{\omega} t + t \cos \bar{\omega} t &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} \left[ \frac{\omega \sin \bar{\omega} t}{\bar{\omega}} - \sin \bar{\omega} t \right] \\ &= \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left[ \frac{\omega \sin \bar{\omega} t}{\bar{\omega}} - \sin \bar{\omega} t \right] \end{aligned} \quad (15.81)$$

对速度分部积分,  $S_L$  的推导可以进行简化, 最终得到:

$$S_L(t) = -\frac{e^2 E_{\parallel}^2 n_0}{2m_e k_{\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\omega \sin \bar{\omega} t}{\bar{\omega}} - \sin \bar{\omega} t \right] \frac{\partial f_{\parallel}}{\partial v_{\parallel}} dv_{\parallel} \quad (15.82)$$

这里  $f_{\parallel}(v_{\parallel}) = (2\pi/n_0) \int f_0 v_{\perp} dv_{\perp}$  是对垂直速度进行积分后的归一化分布函数。

现在考虑长时间  $t$  时  $S_L$  的行为。这时所有的初始暂态行为都会衰减下去, 只留下长时间的渐近解。当  $t \rightarrow \infty$ , 那些  $\bar{\omega} \neq 0$  (即  $v_{\parallel} \neq \omega/k_{\parallel}$ ) 的粒子对于积分的贡献为零, 因为被积函数是快速振荡的。这部分是非共振粒子的贡献。波快速经过这些粒子, 先在波的半个周期里给粒子一个小的能量增长, 而后在下半个周期里, 电场改变符号, 这些能量又返回给波。然而, 那些  $\bar{\omega} \approx 0$  (即  $v_{\parallel} \approx \omega/k_{\parallel}$ ) 的粒子对于积分  $S_L(t)$  的贡献并不是零。这些共振粒子的贡献来自式(15.82)的第一项。由于共振区是狭窄的, 第二项的贡献是可以忽略的小量。事实上, 对于麦克斯韦分布, 第二项可以对任意  $t$  进行精确的积分, 积分结果正比于  $t \cos(\omega t) \exp(-k_{\parallel}^2 v_{\parallel}^2 t^2/4)$ 。可以看出, 当  $t \rightarrow \infty$ , 这一项迅速趋近于零。

计算第一项的贡献时需要注意到, 当  $t$  很大时, 共振速度范围非常小:  $\Delta v_{\parallel} \sim 1/k_{\parallel} t_0$ 。因此, 在这个小的速度空间范围内, 可以假设  $\partial f_{\parallel}(v_{\parallel})/\partial v_{\parallel} \approx \partial f_{\parallel}(v_{\parallel})/\partial v_{\parallel}|_{\omega/k_{\parallel}}$ , 从而把这个微分项从积分函数中提取出来。这样, 可以得到:

$$S_L(t) = -\frac{e^2 E_{\parallel}^2 n_0 \omega}{2m_e k_{\parallel}^2} \left[ \frac{\partial f_{\parallel}}{\partial v_{\parallel}} \right]_{\omega/k_{\parallel}} \int \frac{\sin x}{x} dx \quad (15.83)$$

这里  $x = -\bar{\omega} t = (k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega)t$ 。由于积分的主要贡献来自于  $x = 0$  附近, 因此考虑把积分限设成  $-\infty < x < +\infty$  只会引起一个可以忽略的误差。最后可以得到:

$$S_L(t) = -\frac{\pi e^2 E_{\parallel}^2 n_0 \omega}{2m_e k_{\parallel}^2} \left[ \frac{\partial f_{\parallel}}{\partial v_{\parallel}} \right]_{\omega/k_{\parallel}} \quad (15.84)$$

注意到  $S_L(t)$  与  $t$  不再有关。更重要的是, 通常情况下  $\partial f_{\parallel}/\partial v_{\parallel} < 0$ , 因此  $S_L > 0$ , 这表示粒子从波中得到能量。这个过程可以这么理解(图 15.15), 具有速度  $v_{\parallel} \approx \omega/k_{\parallel}$  的共振粒子对应于通用共振条件  $\omega = k_{\parallel} v_{\parallel} + l\omega_c$  中的  $l = 0$  谐波。之所以称这些粒子是共振的, 是因为在随着波移动的坐标系中, 粒子移动得非常缓慢, 因此看到一个近似直流电场。特别地, 比波的相速度稍慢的粒子将会在很长时间被加速从而导致粒子能量增加; 反过来, 比波的相速度稍快的粒子将会在很长时间被减速从而导致粒子能量减少。如果慢粒子比快粒子多, 即  $\partial f_{\parallel}/\partial v_{\parallel} < 0$ , 总体上会有粒子能量的增加, 则波被阻尼。

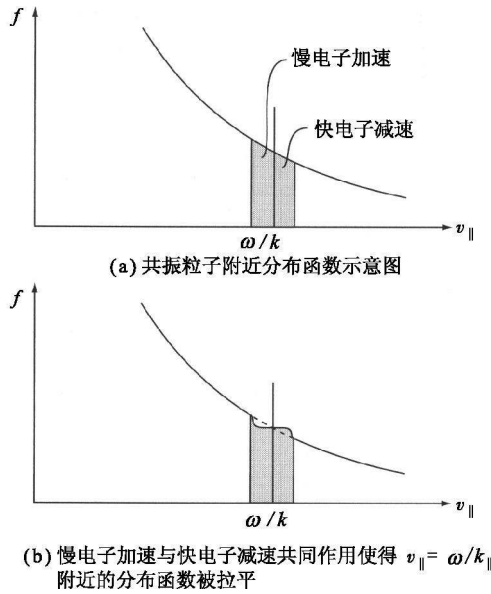


图 15.15

人们经常将这一图像与冲浪者赶上波浪进行类比,但是它过于简化了其中的物理。事实上,慢的粒子也能得到或者失去能量,这依赖于粒子相对于波的相位的初始位置  $z_i$ 。也就是说,粒子得到或者失去能量取决于粒子在初始位置看到的是一个正的还是负的电场。由于  $z_i$  是随机分布的,转移到慢粒子和快粒子的净能量平均起来应该是零。在数学上,这一部分对应于式 (15.79) 中振幅的线性项,其平均为零。真正的能量转移依赖于更小的效应,即振幅的平方项。正如我们预期的那样,通过上面的简单模型可以看到,经过  $z_i$  的平均后,慢粒子有净的能量增加,而快粒子有净的能量减少,因此利用冲浪图像解释  $\partial f_{||} / \partial v_{||} < 0$  导致能量吸收的讨论仍然成立,但是原因却更细致微妙。

分析的最后一步是通过简单的功率平衡关系计算阻尼率  $\omega_i$ 。这个功率平衡是这样的。通常,波在一个振荡周期内的总储能密度  $U$  包含电能、磁能和等离子体动能等能量密度。注意到等离子体动能密度来自于主体非共振粒子,可以由冷等离子体分析得到。因此,在没有阻尼的情况下,  $U$  可以写成:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left[ \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} + \sum_j \frac{n_j m_j u_j^2}{2} \right] dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\epsilon_0 |E_{||}|^2}{2} + \frac{|B_{||}|^2}{2\mu_0} + \sum_j \frac{n_0 m_j |u_{||j}|^2}{2} \right] \quad (15.85)
 \end{aligned}$$

在第二个等号后面中多出来的  $1/2$  来自于正弦函数的时间平均:  $\langle \sin^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \rangle =$

$\langle \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \rangle = 1/2$ , 也就是说, 这里  $U$  被表示成了场的峰值的形式而不是均方值。

如果存在无碰撞阻尼,  $U$  会随时间缓慢衰减, 即  $\omega_i \neq 0$ 。由于  $U$  是场的幅度的平方项, 在  $\omega_i \ll \omega$  的限制下,  $U$  随时间变化的关系将正比于形式  $E_{1z}^* E_{1z} \sim \exp$ , 其中  $\omega_i < 0$  表示阻尼, 即

$$U(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\epsilon_0 |E_1|^2}{2} + \frac{|B_1|^2}{2\mu_0} + \sum_j \frac{n_0 m_j |u_{1j}|^2}{2} \right] e^{2\omega_i t} = U_0 e^{2\omega_i t} \quad (15.86)$$

因此, 根据定义我们可以看到:

$$dU/dt = 2\omega_i U \quad (15.87)$$

这里  $2\omega_i U$  表示波的能量损失率。功率平衡要求波的功率损失等于共振粒子的功率所得:

$$(2\omega_i U_0 + S_L) e^{2\omega_i t} = 0 \quad (15.88)$$

所以, 可以得到波的阻尼率:

$$\omega_i = -S_L/2U_0 \quad (15.89)$$

从冷等离子体模型分析出发, 可以精确得到  $U_0$  这个量。对于更一般化的冷等离子体波 (即具有 3 个方向的非零电场), 经过简短的计算可得  $U_0 = (\epsilon_0/4) E_1^* \cdot \vec{M} \cdot E_1$ , 这里,

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} M_{\perp} + n_{\parallel}^2 & iM_A & -n_{\parallel} n_{\perp} \\ -iM_A & M_{\perp} + n_{\perp}^2 & 0 \\ -n_{\parallel} n_{\perp} & 0 & M_{\parallel} + n_{\perp}^2 \end{vmatrix} \quad (15.90)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} M_{\perp} &= 1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 (\omega^2 + \omega_{ej}^2)}{(\omega^2 - \omega_{ej}^2)^2} \\ M_A &= 2 \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 \omega \omega_{ej}}{(\omega^2 - \omega_{ej}^2)^2} \\ M_{\parallel} &= 1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (15.91)$$

注意到通过直接计算,  $U_0$  也可以写成这样的形式:

$$U_0 = \frac{\epsilon_0}{4} \mathbf{E}_1^* \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{\epsilon_0}{4} \left\{ c^2 |\mathbf{B}_1|^2 + \mathbf{E}_1^* \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \overleftrightarrow{\mathbf{K}}(\omega)] \cdot \mathbf{E}_1 \right\} \quad (15.92)$$

这个形式明白地指出,通过坡印亭定理即式(15.61)引入的物理量  $U$  的确就是整个波能量。

对于简单的静电波,考虑  $E_{1x} = E_{1y} = n_{\perp} = 0$ , 则  $\mathbf{E}_1^* \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{E}_1 = M_{\parallel} E_{\parallel}^2$ , 而且,

$$U_0 = \frac{\epsilon_0}{4} \left[ 1 + \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{\omega^2} \right] E_{\parallel}^2 \quad (15.93)$$

而且,此时等离子体色散关系简化为  $K_{\parallel} = 0$ , 即  $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2$ , 因此  $U_0 = \epsilon_0 E_{\parallel}^2 / 2$ 。利用  $U_0$  的表达式,并从式(15.84)得到  $S_{\parallel}$ , 就可以得到我们希望得到的阻尼率的表达式:

$$\frac{\omega_i}{\omega_{pe}} = \frac{\pi \omega_{pe}^2}{2k_{\parallel}^2} \left[ \frac{\partial f_{\parallel}^i}{\partial v_{\parallel}} \right]_{\omega_{pe}/k_{\parallel}} = -\pi^{1/2} \left[ \frac{\omega_{pe}^3}{k_{\parallel}^3 v_{Te}^3} \right] \exp \left[ -\frac{\omega_{pe}^2}{k_{\parallel}^2 v_{Te}^2} \right] \quad (15.94)$$

这里,第二个等号后对应于平衡麦克斯韦分布函数。这个著名的经典结果最早由朗道从动理学理论直接得到,即众所周知的“朗道阻尼”。式(15.94)的重要结论是,当相速度和热速度可比时,即  $\omega/k_{\parallel} \sim v_T$ , 强的朗道阻尼就会发生。另外,  $\omega/k_{\parallel} \gg v_T$  的波会在分布函数尾部产生共振,这时,只有极少数粒子参与共振,而且粒子数目随相速度呈指数下降,对应阻尼率也非常微弱。朗道阻尼是一种非常重要的等离子体物理现象,它不仅仅出现在加热与电流驱动中,而在许多等离子体应用中都会出现。

### 15.6.2 X 模回旋阻尼

X 模回旋阻尼的计算和朗道阻尼类似,尽管在数学上要更加复杂,这是由于直流磁场带来的复杂性。然而,推导的整个过程还是一样的:①计算波引起的粒子能量增加;②对所有初始条件平均;③乘以分布函数,对速度积分;④通过简单功率平衡关系得到  $\omega_i$ 。在下面的分析中,我们将假设等离子体只和  $l$  阶谐波  $\omega \approx l\omega_c$  共振。

需要注意的是,X 模回旋阻尼是由垂直于磁场  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$  的电场分量引起的,平行电场的贡献可以忽略。而且,在研究回旋阻尼这个问题上,把电场表示成一系列圆偏振波要比表示成线偏振波更方便。具体地,波的电场通常可以写成两个圆偏振波分量加上一个平行电场分量,如下所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_+ (\cos\phi \mathbf{e}_x + \sin\phi \mathbf{e}_y) + E_- (\cos\phi \mathbf{e}_x - \sin\phi \mathbf{e}_y) + E_{\parallel} \cos\phi \mathbf{e}_z \\ &\approx E_+ (\cos\phi \mathbf{e}_x + \sin\phi \mathbf{e}_y) \end{aligned} \quad (15.95)$$

这里  $E_{1x} = (E_+ + E_-) \operatorname{Re}(e^{i\phi})$ ,  $E_{1y} = \phi(E_+ - E_-) \operatorname{Re}(e^{i\phi})$ ,  $\phi(t) = k_{\perp}x + k_{\parallel}z - \omega t$ 。 $E_{\pm}$  对应于左旋圆偏振波和右旋圆偏振波, 它们分别与离子和电子发生共振。下面的分析将会对离子进行, 因此在无碰撞阻尼分析中只保留  $E_+$  项。对离子而言, 当  $\omega \approx l\omega_c$  时,  $E_-$  和  $E_{\parallel}$  并不会产生强的波-粒子共振。然而, 在计算波能  $U_0$  时  $E_-$ 、 $E_{\parallel}$  必须和  $E_+$  一样被包含在内。除了电场外, 还有波自身的磁场, 但在非相对论情况下, 这个磁场相对于背景磁场可以忽略, 因此  $\mathbf{B} \approx B_0 \mathbf{e}_z$ 。

在这些假设下, 描述回旋阻尼的单粒子运动可以简化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} - \Omega_i v \times \mathbf{e}_z &= \frac{eE_+}{m_i} (\cos\phi \mathbf{e}_x + \sin\phi \mathbf{e}_y), v(0) = v_{\perp} \mathbf{e}_x + v_{\parallel} \mathbf{e}_z \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= v, \quad \mathbf{r}(0) = x_i \mathbf{e}_x + y_i \mathbf{e}_y + z_i \mathbf{e}_z \end{aligned} \right\} \quad (15.96)$$

这里  $\Omega_i = \omega_{ci} = eB_0/m_i$ 。此后, 我们记  $\Omega_j = |\omega_{cj}| = |q_j B_0/m_j| > 0$ 。

平行运动很容易计算:  $v_z = v_{\parallel}$ ,  $z = z_i + v_{\parallel} t$ 。通过引入两个复变量  $v_+ = v_x + iv_y$  和  $r_+ = x + iy$ , 这样关于两个垂直速度的矢量方程可以变为标量方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_+}{dt} + i\Omega_i v_+ &= \frac{eE_+}{m_i} e^{i\phi}, v_+(0) = v_{\perp} \\ \frac{dr_+}{dt} &= v_+, \quad r_+(0) = r_i \end{aligned} \right\} \quad (15.97)$$

这里  $r_i = x_i + iy_i$ 。注意  $v_+$ ,  $r_+$  是复数, 而  $v_x, v_y, x, y, \phi$  都是实数。

和计算朗道阻尼式一样, 这些方程通过假设  $E_+$  为小量进行以下小振幅展开来解:  $v_+(t) = v_0(t) + v_1(t) + \dots$ ,  $r_+(t) = r_0(t) + r_1(t) + \dots$ 。这意味着  $\phi(t) = \phi_0(t) + \phi_1(t) + \dots$ , 其中  $\phi_0(t) = k_{\perp}x_0(t) + k_{\parallel}z(t) - \omega t$ ,  $\phi_1(t) = k_{\perp}x_1(t)$ ,  $x_0(t) = \operatorname{Re}[r_0(t)]$ ,  $x_1(t) = \operatorname{Re}[r_1(t)]$ 。

零阶方程对应于无扰动轨道:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_0}{dt} + i\Omega_i v_0 &= 0, \quad v_0(0) = v_{\perp} \\ \frac{dr_0}{dt} &= v_0, \quad r_0(0) = r_i \end{aligned} \right\} \quad (15.98)$$

其解为熟知的回旋运动。在现在的记号下, 具有以下形式:

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= v_{\perp} e^{-i\Omega_i t} \\ r_0 &= r_i + i \frac{v_{\perp}}{\Omega_i} (e^{-i\Omega_i t} - 1) \\ \phi_0 &= \phi_i + (k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) t + \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_i} \sin(\Omega_i t) \end{aligned} \right\} \quad (15.99)$$

这里  $\phi_i = k_{\perp} x_i + k_{\parallel} z_i$ 。一阶方程可以写成：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} + i\Omega_i v_1 &= \frac{eE_+}{m_i} e^{i\phi_0}, & v_1(0) &= 0 \\ \frac{dr_1}{dt} &= v_1, & r_1(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.100)$$

这里  $\exp(i\phi_0)$  有些复杂, 因为  $\sin(\Omega_i t)$  在指数上出现。这一项可以通过傅里叶分析化简。利用恒等式

$$e^{i\alpha \sin \tau} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) e^{in\tau} \quad (15.101)$$

其中  $J_n$  是  $n$  阶贝塞尔函数, 可以得到:

$$e^{i\phi_0} = e^{i\phi_i} \sum_n J_n(w) e^{-i\bar{\omega}_n t} \quad (15.102)$$

这里  $w = k_{\perp} v_{\perp} / \Omega_i$ ,  $\bar{\omega}_n = \omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega_i$ 。利用这个关系, 我们可以求解一阶运动方程, 其解为:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= i \frac{eE_+}{m_i} e^{i\phi_i} \sum_n \frac{J_n(w)}{\bar{\omega}_{n+1}} (e^{-i\bar{\omega}_{n+1} t} - e^{-i\Omega_i t}) \\ r_1 &= -\frac{eE_+}{m_i} e^{i\phi_i} \sum_n \frac{J_n(w)}{\bar{\omega}_{n+1}} \left[ \frac{e^{-i\bar{\omega}_{n+1} t} - 1}{\bar{\omega}_{n+1}} - \frac{e^{-i\Omega_i t} - 1}{\Omega_i} \right] \end{aligned} \right\} \quad (15.103)$$

下一步是利用轨迹的解去计算在单位时间内粒子由于和波共振相互作用所造成的能量改变。粒子能量改变可以从下面的关系得到:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_i v^2}{2} \right] = e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = eE_+ \operatorname{Re}(v_+^* e^{i\phi}) \quad (15.104)$$

和朗道阻尼时一样, 计算必须进行到振幅的二阶量, 从而可以得到:

$$\frac{dW}{dt} = eE_+ \operatorname{Re}(v_0^* e^{i\phi_0} + v_1^* e^{i\phi_0} + i\phi_1 v_0^* e^{i\phi_0}) \quad (15.105)$$

我们感兴趣的量是对所有初始条件平均的  $dW/dt$ :



$$\frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dW}{dt} d\phi_i \quad (15.106)$$

同样,振幅的线性项平均为零。经过稍显乏味的计算后,第二项和第三项的平均值可以得出来:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{W}}{dt} &= \frac{e^2 E_+^2}{m_i} \sum_{m,n} J_m(w) J_n(w) (T_1 + T_2) \\ T_1 &= \frac{1}{\bar{\omega}_{n+1}} [\sin(m-n)\Omega_i t + \sin\bar{\omega}_{m+1} t] \\ T_2 &= \frac{k_\perp v_\perp}{2} \left[ \frac{\sin(m-n)\Omega_i t}{\bar{\omega}_n \bar{\omega}_{n+1}} + \frac{\sin\bar{\omega}_{m+2} t}{\Omega_i \bar{\omega}_{n+1}} - \frac{\sin\bar{\omega}_{m+1} t}{\Omega_i \bar{\omega}_n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (15.107)$$

考虑到强的波-粒子相互作用只在特定的  $l$  下发生 ( $\bar{\omega}_l = 0$ ), 因此上面这个看起来有点复杂的表达式可以简化。这个条件等价于驱动等离子体的波具有  $\omega \approx l\Omega_i$  的频率。对于  $p \neq l$ , 条件  $\bar{\omega}_p = 0$  同样会产生一个共振, 但共振远在分布函数的尾部:  $v_\parallel / v_{Ti} = (p-l)\Omega_i / k_\parallel v_{Ti} \sim c/n_\parallel v_{Ti} \gg 1$ 。第二个可以进行的简化是只有  $\sin\bar{\omega}_l t$  的项才会对强共振相互作用有贡献。那些  $p \neq l$  的  $(\sin\bar{\omega}_p t) / \bar{\omega}_l$  项非常快速振荡, 因此不能连续地给予粒子能量。总之, 在双重求和号内, 只有那些包含  $(\sin\bar{\omega}_l t / \bar{\omega}_l)$  项的积分才会引起强的共振相互作用。把这些项从双重求和号中提取出来, 就得到  $d\bar{W}/dt$  的简单形式:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}}{dt} &= \frac{e^2 E_+^2}{m_i} \frac{\sin\bar{\omega}_l t}{\bar{\omega}_l} \left[ J_{l-1}^2 + \frac{w}{2} J_{l-1} (J_{l-2} - J_l) \right] \\ &= \frac{e^2 E_+^2}{2m_i} \frac{\sin\bar{\omega}_l t}{\bar{\omega}_l} \left[ \frac{1}{w} \frac{d}{dw} (w^2 J_{l-1}^2) \right] \end{aligned} \quad (15.108)$$

接下来是把平均能量变化乘以分布函数, 然后对速度空间积分, 由此得到粒子在单位体积内的功率吸收  $S_x$ 。为方便起见, 假设分布函数具有  $f_0(v_\parallel, v_\perp) = n_0 f_\parallel(v_\parallel) f_\perp(v_\perp)$ , 则功率密度的表达式可以写成:

$$S_x = \frac{\pi n_0 e^2 E_+^2}{m_i} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_\parallel \frac{\sin\bar{\omega}_l t}{\bar{\omega}_l} dv_\parallel \right] \left[ \int_0^\infty \frac{f_\perp}{w} \frac{d}{dw} (w^2 J_{l-1}^2) v_\perp dv_\perp \right] \quad (15.109)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 共振平行速度处于很窄的范围内, 因此, 如同在处理朗道阻尼时那样,  $f_\parallel$  可以从积分函数中提取出来, 剩余的积分就可以解析求得。注意  $w = k_\perp v_\perp / \Omega_i$ , 利用分部积分, 垂直速度空间的积分可以得到简化。经过这一系列简化, 可以得到:

$$S_x = - \frac{\pi^2 n_0 e^2 E_+^2}{m_i k_\parallel} \int_0^\infty v_\perp^2 J_{l-1}^2 \frac{\partial f_\perp}{\partial v_\perp} dv_\perp \quad (15.110)$$

这里  $v_l = (\omega - l\Omega_i)/k_{\parallel}$ 。

假设  $f_{\perp}$  为麦克斯韦分布,于是有下面的积分关系:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2/2\alpha} J_p^2(x) dx &= 2\alpha^2 \frac{d}{d\alpha} \int_0^{\infty} x e^{-x^2/2\alpha} J_p^2(x) dx \\ &= 2\alpha^2 \frac{d}{d\alpha} [\alpha e^{-\alpha} I_p(\alpha)] \end{aligned} \quad (15.111)$$

这里  $I_p$  为修正贝塞尔函数。这样对  $S_x$  的计算终于完成,最后的形式如下:

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\pi n_0 e^2 E_+^2 f_{\parallel}(v_l)}{m_i k_{\parallel}} \frac{d}{db} [b e^{-b} I_{l-1}(b)] \\ &= \frac{\pi^{1/2} n_0 e^2 E_+^2}{m_i k_{\parallel} v_{Ti}} \frac{d}{db} [b e^{-b} I_{l-1}(b)] \exp\left[-\left(\frac{\omega - l\Omega_i}{v_{Ti}}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (15.112)$$

这里  $b = k_{\perp}^2 v_{Ti}^2 / 2\Omega_i^2 = k_{\perp}^2 r_{Li}^2 / 2$ 。注意第二个等号后为麦克斯韦分布下的结果。

分析的最后一步是利用功率平衡求得阻尼率  $\omega_i$ 。回旋阻尼具有和朗道阻尼一样的功率平衡关系,则

$$\omega_i = -S_x / 2U_0 \quad (15.113)$$

这里  $U_0$  的一般表达式在式(15.92)中给出  $U_0 = (\epsilon_0/4) \mathbf{E}_1^* \cdot \vec{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{E}_1$ 。后面将会看到,在冷等离子体色散关系中假设  $n_{\parallel} = 0$  对于计算 X 模阻尼是个很好的假设。 $n_{\parallel} = 0$  也就意味着  $E_{\parallel} = 0$ 。而且,注意到  $E_{1x} = E_+ + E_-$ ,  $iE_{1y} = E_+ - E_-$ ,经过简短的计算可以得到:

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \frac{\epsilon_0}{4} M_x |E_+|^2 \\ M_x &= \frac{1}{|E_+|^2} [n_{\perp}^2 |E_+ - E_-|^2 + 2M_{\perp} (|E_+|^2 + |E_-|^2) \\ &\quad + 2M_A (|E_+|^2 - |E_-|^2)] \end{aligned} \right\} \quad (15.114)$$

当我们仔细分析色散关系,在给定  $n_{\perp}$  和偏振关系  $E_-/E_+$  时,可以精确地得到  $M_x$ 。现在,读者只需要假设  $M_x$  是个已知的量就行了。

最后,我们终于得到所需的阻尼率:

$$\frac{\omega_i}{\omega_{pi}} = -\frac{2\pi\omega_{pi} f_{\parallel}(v_l)}{M_x k_{\parallel}} \frac{d}{db} [b e^{-b} I_{l-1}(b)] \quad (15.115)$$

对于麦克斯韦分布的  $f_{\parallel}$ ,在小回旋半径假设下,最低两阶谐波的阻尼率分别为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_i}{\omega_{pi}} &= -\frac{2\pi^{1/2}}{M_X} \frac{\omega_{pi}}{k_{\parallel} v_{Ti}} \exp\left[-\left(\frac{\omega - \Omega_i}{k_{\parallel} v_{Ti}}\right)^2\right] & l=1 \\ \frac{\omega_i}{\omega_{pi}} &= -\frac{\pi^{1/2}}{M_X} \frac{\omega_{pi}}{k_{\parallel} v_{Ti}} \exp\left[-\left(\frac{\omega - 2\Omega_i}{k_{\parallel} v_{Ti}}\right)^2\right] \left[\frac{k_{\perp} v_{Ti}}{\Omega_i}\right]^2 & l=2 \end{aligned} \right\} \quad (15.116)$$

注意到二次谐波回旋加热的阻尼率比基波低  $k_{\perp}^2 r_{Li}^2$  量级,而且,当波的频率等于局域回旋谐波频率  $\omega = l\Omega_i$  时,得到最大阻尼率。对于 X 模电子回旋共振也有类似的关系。

前面提到在加热应用中,可以看到,我们更希望得到的是  $k_{\perp i}$ ,而不是  $\omega_i$ 。回忆起前面提到过,二者通过  $k_{\perp i} = -\omega_i/V_{g\perp}$  联系起来。而且  $U_0$  和  $V_{g\perp}$  也通过  $P_{\perp} = V_{g\perp} U_0$  和  $P_{\perp}$  联系起来。因此,可以得到:

$$k_{\perp i} = S_X/2P_{\perp} \quad (15.117)$$

对于 X 模,  $P_{\perp} = E_{1y} B_{1z}^*/2\mu_0 = n_{\perp} |E_{1y}|^2/c$ 。利用这些结果,可以得到  $k_{\perp i}$  的表达式:

$$\frac{k_{\perp i} c}{\omega_{pi}} = \frac{\pi^{1/2}}{n_{\perp}} \left| \frac{E_+}{E_{1y}} \right|^2 \frac{\omega_{pi}}{k_{\parallel} v_{Ti}} \frac{d}{db} [b e^{-b} I_{l-1}(b)] \exp\left[-\left(\frac{\omega - l\Omega_i}{k_{\parallel} v_{Ti}}\right)^2\right] \quad (15.118)$$

这里  $E_{1y} = E_+ - E_-$ 。

最后,考虑一下 X 模回旋阻尼的物理理解将会是件有趣的事。首先考虑基波频率下的共振,这和朗道阻尼有几分类似。先假设有一个圆偏振波,其电矢量沿着和离子回旋运动相同的方向旋转。在空间上给定点上,注意那些其平行速度的多普勒频移与局域回旋频率共振的离子。对于基波,  $k_{\perp}$  的效应是不重要的,可以假设为零  $k_{\perp} \approx 0$ 。描述  $v_{\perp}$  演化的方程简化为:

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} + i\Omega_i v_{\perp} = \frac{eE_+}{m_i} e^{-i\Omega_i t}, v_{\perp}(0) = v_{\perp} \quad (15.119)$$

方程的解是:

$$v_{\perp} = v_{\perp} e^{-i\Omega_i t} + \frac{eE_+}{m_i} t e^{-i\Omega_i t} \quad (15.120)$$

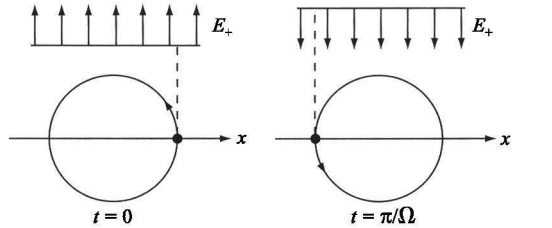
第二项很清晰地给出和共振相互作用有关的时间久期行为。在多普勒频移的坐标系中,离子看到一个一直和回旋运动同相的电场,因此导致定常的能量吸收。这就是基波的回旋阻尼。

高次谐波的情形稍微复杂一点。例如,对应于  $\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} = 2\Omega_i$  的多普勒频移后的频率并不和回旋频率共振。但是,当  $k_{\perp} \neq 0$  时,由于有限的垂直波长效应,粒子并不是由空间均匀而时间上正弦振荡的波场驱动。事实上,当垂直波长和回旋半

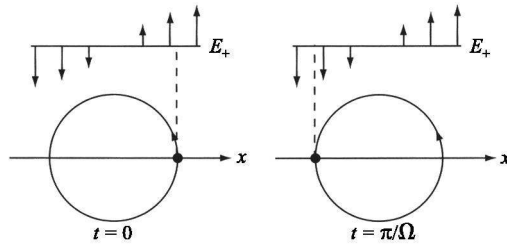
径可比时,在给定时间上,在回旋轨道两端的电场改变了符号(图 15.16)。这种空间导致的符号改变让粒子重新变成共振的。这个效应可以从包含小  $k_{\perp}r_L$  的  $v_{\perp}$  方程清晰地看出:

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\perp}}{dt} + i\Omega_i v_{\perp} &= \frac{eE_{\perp}}{m_i} e^{-i(2\Omega_i t - k_{\perp}x)} \\ &\approx \frac{eE_{\perp}}{m_i} e^{-i2\Omega_i t} \left[ 1 + \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{2\Omega_i} (e^{i\Omega_i t} - e^{-i\Omega_i t}) \right] \end{aligned} \quad (15.121)$$

正比于  $(k_{\perp} v_{\perp}/2\Omega_i) \exp(i\Omega_i t)$  的空间项和二次谐波合拍,从而产生一个和有限回旋半径相关的共振相互作用。这就是高次回旋谐波下能量被吸收的机制。



(a) 基波回旋共振:电场是空间均匀的,并总是和粒子轨道同相



(b) 二次谐波回旋共振:对于  $\omega = 2\Omega$ , 电场在  $t=0$  和  $t=\pi/\Omega$  有同样的波形。然而,  $E_{\parallel}$  的空间不均匀性使得波保持和粒子同相位

图 15.16

### 15.6.3 O 模回旋阻尼和推广的朗道阻尼

最后一种让我们感兴趣的波-粒子共振相互作用包含两种密切联系的现象:O 模回旋阻尼和推广的朗道阻尼,它们分别与电子回旋加热和低杂波驱动有关。相应的分析与 X 模回旋阻尼和简单的朗道阻尼类似。首先,O 模回旋阻尼发生在  $l \geq 1$  共振处,其中电场只有一个沿  $B_0$  的分量:  $E = E_{\parallel} \cos(k_{\perp}x + k_{\parallel}z - \omega t) e_z$ 。这种情况下,扰动磁场不为零,而是包含一个垂直分量  $B = B_0 e_z + B_{1y} \cos(k_{\perp}x + k_{\parallel}z - \omega t) e_y$ 。这里没有  $E_{\perp}$ ,但  $v_{\parallel} B_{1y}$  项会产生一个“等效垂直电场”驱动类似 X 模回旋阻尼的作用。第二,推广的朗道阻尼对应于  $l=0$  共振,它同样具有一个平行于背景磁场的非

零电场分量。然而,和简单朗道阻尼不同的是,通常情况下包含垂直于磁场的电场分量  $E_{1x}, E_{1y}$ 。由于  $l=0$ , 这些分量不和任何回旋谐波共振, 因此并不会产生 X 模回旋阻尼。

说到 O 模回旋阻尼, 注意到在 X 模回旋阻尼中也有类似的  $\mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{B}_1$  项, 但是这一项和  $E_{\pm}$  相比很小, 所以在那里被忽略了。而对于 O 模而言,  $\mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{B}_1$  项的大小差不多与  $E_{\pm}$  可比, 而且根据 O 模定义可知, 没有更大的  $E_{\pm}$  项来与之比较。因此, 由于 O 模中的  $v_{\parallel} B_{1y}$  与 X 模中的  $E_{\pm}$  相比相对较小, 所以大概看起来 O 模回旋阻尼比 X 模回旋阻尼要弱一些。

另一点需要记住的是, 我们感兴趣的 O 模回旋阻尼对应于  $k_{\parallel} \rightarrow 0$  的传播。后面将会看到, 这对应于加热时等离子体密度的最大化。但是允许  $k_{\parallel} \rightarrow 0$  并不是一个平凡的数学极限。由于这个原因, 计算 O 模回旋阻尼时需要先在有限  $k_{\parallel}$  下进行, 然后令  $k_{\parallel} \rightarrow 0$  来得到准确的结果, 这个计算过程将在 15.7 节给出。不过, 在冷等离子体 O 模可近性分析中, 我们可以在一开始令  $k_{\parallel} \rightarrow 0$ 。但是, 当推广的朗道阻尼应用于低杂波电流驱动时, 要求一个非零的  $k_{\parallel}$ , 因此对于阻尼和冷等离子体可近性分析都必须假设  $k_{\parallel} \neq 0$ 。

由于对于 O 模回旋阻尼和推广的朗道阻尼的无碰撞阻尼计算都要求一个非零的  $k_{\parallel}$ , 即非零的  $E_{\parallel}$ , 那么就需要一个普遍一点的分析。计算细节和前面给出的简单朗道阻尼和 X 模回旋阻尼非常类似, 因此可以只是简单地列出基本步骤并给出相关结果。下面将以电子为对象来描述这个过程。分析一开始, 我们用法拉第定律将  $B_{1y}$  和  $E_{\parallel}$  联系起来。简单计算可知  $B_{1y} = -k_{\perp} E_{\parallel} / \omega$ 。对于电子, 基本的单粒子运动方程简化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \Omega_e \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z &= -\frac{eE_{\parallel}}{m_e} \left[ \frac{k_{\perp} v_z}{\omega} \mathbf{e}_x + \left( 1 - \frac{k_{\perp} v_x}{\omega} \right) \mathbf{e}_z \right] \cos\phi \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (15.122)$$

这里,  $\phi = k_{\perp} x + k_{\parallel} z - \omega t$ , 初始条件是  $\mathbf{v}(0) = v_{\perp} \mathbf{e}_x + v_{\parallel} \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_i = x_i \mathbf{e}_x + y_i \mathbf{e}_y + z_i \mathbf{e}_z$ 。

运动方程的解仍然可以通过小量展开得到:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \dots$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 + \dots$ 。零阶解对应于回旋运动, 即

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= v_{\perp} (\cos\Omega_e t \mathbf{e}_x + \sin\Omega_e t \mathbf{e}_y) + v_{\parallel} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_i + \frac{v_{\perp}}{\Omega_e} [\sin\Omega_e t \mathbf{e}_x - (\cos\Omega_e t - 1) \mathbf{e}_y] + v_{\parallel} t \mathbf{e}_z \end{aligned} \right\} \quad (15.123)$$

通过直接但是稍显冗长的计算可以得到一阶解, 我们把能量计算需要的量写在下面:

$$\left. \begin{aligned} v_{1x} &= \frac{eE_{\parallel}}{m_e} \frac{k_{\perp} v_{\parallel}}{\omega} \sum_n J_n(w) V_x(t) \\ x_1 &= \frac{eE_{\parallel}}{m_e} \frac{k_{\perp} v_{\parallel}}{\omega} \sum_n J_n(w) X(t) \\ v_{1z} &= \frac{eE_{\parallel}}{m_e} \sum_n J_n(w) V_z(t) \\ z_1 &= \frac{eE_{\parallel}}{m_e} \sum_n J_n(w) Z(t) \end{aligned} \right\} \quad (15.124)$$

这里  $w = k_{\perp} v_{\perp} / \Omega_e$ , 其他一些量如下:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{\bar{\omega}_n \sin(\phi_i - \bar{\omega}_n t)}{\bar{\omega}_{n+1} \bar{\omega}_{n-1}} - \frac{\sin(\phi_i - \Omega_e t)}{2\bar{\omega}_{n+1}} - \frac{\sin(\phi_i + \Omega_e t)}{2\bar{\omega}_{n-1}} \\ X &= \frac{\cos(\phi_i - \bar{\omega}_n t)}{\bar{\omega}_{n+1} \bar{\omega}_{n-1}} - \frac{\cos(\phi_i - \Omega_e t)}{2\bar{\omega}_{n+1} \Omega_e} + \frac{\cos(\phi_i + \Omega_e t)}{2\bar{\omega}_{n-1} \Omega_e} \\ V_z &= \left[ 1 - \frac{n\Omega_e}{\omega} \right] \frac{\sin(\phi_i - \bar{\omega}_n t) - \sin\phi_i}{\bar{\omega}_n} \\ Z &= \left[ 1 - \frac{n\Omega_e}{\omega} \right] \left[ \frac{\cos(\phi_i - \bar{\omega}_n t) - \cos\phi_i}{\bar{\omega}_n^2} - \frac{t \sin\phi_i}{\bar{\omega}_n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (15.125)$$

下一步是计算对所有初始位置平均的电子能量吸收率。经过有点乏味的计算, 可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}}{dt} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_i \frac{e}{m_e} \left[ v_{0z} E_z + v_{0z} \frac{\partial E_z}{\partial x_0} x_1 + v_{0z} \frac{\partial E_z}{\partial z_0} z_1 + v_{1z} E_z \right] \\ &= \frac{e^2 E_{\parallel}^2}{2m_e} \left[ \frac{lk_{\perp}^2 v_{\parallel}^2}{\omega \Omega_e} \left( \frac{1}{w} \frac{dJ_l^2}{dw} \right) + \frac{\omega - l\Omega_e}{\omega} J_l^2 \frac{d}{dw} \left[ \frac{\bar{w}_l - \omega + l\Omega_e}{\bar{w}_l} \sin \bar{w}_l t \right] \right] \end{aligned} \quad (15.126)$$

在第二个等号后面的式子中, 双重求和内只有共振项的贡献被保留。

把平均能量吸收率乘以分布函数  $f_0(v_{\perp}, v_{\parallel}) = n_0 f_{\parallel}(v_{\parallel}) f_{\perp}(v_{\perp})$ , 对所有速度积分, 就可以得到单位体积的功率吸收  $S_0$ 。在麦克斯韦分布下, 经过简短的计算可以得到:

$$S_0 = \frac{\pi^{1/2} n_0 e^2 E_{\parallel}^2}{m_e} e^{-b} I_1(b) \frac{(\omega - l\Omega_e)^2}{k_{\parallel}^3 v_{Te}^3} \exp \left[ - \left[ \frac{\omega - l\Omega_e}{k_{\parallel} v_{Te}} \right]^2 \right] \quad (15.127)$$

这里  $b = k_{\perp}^2 v_{Te}^2 / 2\Omega_e^2$ 。

最后一步是利用功率平衡关系  $\omega_i = -S_0 / 2U_0$  计算阻尼率  $\omega_i$ 。最终可以得到下

面的关系:

$$\frac{\omega_i}{\omega_{pe}} = -\frac{2\pi^{1/2}}{M_0} \frac{\omega_{pe}}{k_{\parallel} v_{Te}} \left[ \frac{\omega - l\Omega_c}{k_{\parallel} v_{Te}} \right]^2 e^{-b} I_l(b) \exp \left[ - \left[ \frac{\omega - l\Omega_c}{k_{\parallel} v_{Te}} \right]^2 \right] \quad (15.128)$$

这里,对于 O 模回旋阻尼  $E_{ix} = E_{iy} = 0$ , 有  $M_0 = M_{\parallel} + n_{\perp}^2 = 1 + n_{\perp}^2 + (\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2)/\omega^2$ 。对于推广的朗道阻尼,  $E_{ix} \neq 0, E_{iy} \neq 0$ , 需要  $M_0$  完全的表达式  $M_0 = \vec{E}_i^* \cdot \vec{M} \cdot \vec{E}_i / E_{\parallel}^2$ 。

这里有几点重要的地方需要注意,他们涉及 O 模和 X 模电子回旋阻尼率的比较。首先,对于基频(即  $l=1$ ), X 模阻尼率正比于  $I_0(b)$ , 而 O 模阻尼率正比于  $I_1(b)$ , 因此 X 模的  $\omega_i$  比 O 模的大  $1/k_{\perp}^2 r_{Te}^2$  量级。当然我们后面会看到,这点优势并不容易实现。第二, O 模阻尼率有一个乘数因子  $(\omega - l\Omega_c)^2 / k_{\parallel}^2 v_{Te}^2$ , 这就意味着在精确的回旋共振处 ( $\omega = l\Omega_c$ ) 处, 阻尼为零, 最大的阻尼则发生在稍许偏离回旋共振的两个地方, 对应于  $\omega = l\Omega_c \pm k_{\parallel} v_{Te}$ 。最后, 注意到, 当  $l=0$  及  $b \ll 1$ , 正如预期的那样, 推广的朗道阻尼回归到简单的朗道阻尼。加热或电流驱动中需要空间的阻尼率  $k_{\perp i}$  同样可以通过  $k_{\perp i} = S_0 / 2P_{\perp}$  求得。通过简短的计算, 可以得到以下结果。

O 模回旋阻尼:

$$\frac{k_{\perp i} c}{\omega_{pe}} = \frac{\pi^{1/2}}{n_{\perp}} \frac{\omega_{pe}}{k_{\parallel} v_{Te}} e^{-b} I_1(b) \left[ \frac{\omega - l\Omega_c}{k_{\parallel} v_{Te}} \right]^2 \exp \left[ - \left[ \frac{\omega - l\Omega_c}{k_{\parallel} v_{Te}} \right]^2 \right] \quad (15.129)$$

推广的朗道阻尼:

$$\frac{k_{\perp i} c}{\omega_{pe}} = \pi^{1/2} \frac{|E_{\parallel}|}{E_0^2} \frac{\omega_{pe}}{k_{\parallel} v_{Te}} e^{-b} I_0(b) \left\{ \left[ \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{Te}} \right]^2 \exp \left[ - \left[ \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{Te}} \right]^2 \right] \right\} \quad (15.130)$$

$$E_0^2 = (n_{\perp} E_{\parallel}^* - n_{\parallel} E_{1x}^*) E_{\parallel} + n_{\perp} |E_{1y}|^2$$

这样我们就完成了聚变等离子体中各种类型无碰撞阻尼的阻尼率的推导。

## 15.6.4 小结

利用简单的单粒子分析, 计算了朗道阻尼和回旋阻尼。加热和电流驱动需要的是对空间阻尼率的结果。在平衡麦克斯韦分布的条件下, 这些无碰撞阻尼引起的空间阻尼率总结如下。

X 模回旋阻尼:

$$\frac{k_{\perp i} c}{\omega_{pi}} = \frac{\pi^{1/2}}{n_{\perp}} \left| \frac{E_{\pm}}{E_{1y}} \right|^2 \frac{\omega_{pj}}{k_{\parallel} v_{Tj}} \frac{d}{db} [b e^{-b} I_{l-1}(b)] \exp \left[ - \left[ \frac{\omega - l\Omega_j}{k_{\parallel} v_{Tj}} \right]^2 \right] \quad (15.131)$$

O 模回旋阻尼:

$$\frac{k_{\perp i} c}{\omega_{pi}} = \frac{\pi^{1/2}}{n_{\perp}} \frac{\omega_{pj}}{k_{\parallel} v_{Tj}} e^{-b} I_l(b) \left[ \frac{\omega - l\Omega_j}{k_{\parallel} v_{Tj}} \right]^2 \exp \left[ - \left[ \frac{\omega - l\Omega_j}{k_{\parallel} v_{Tj}} \right]^2 \right] \quad (15.132)$$

推广的朗道阻尼:

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_{\perp i} c}{\omega_{pi}} &= \pi^{1/2} \frac{|E_{\parallel}^2|}{E_0^2} \frac{\omega_{pj}}{k_{\parallel} v_{Tj}} e^{-b} I_0(b) \left[ \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{Tj}} \right]^2 \exp \left[ - \left[ \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{Tj}} \right]^2 \right] \\ E_0^2 &= (n_{\perp} E_{\parallel}^* - n_{\parallel} E_{1x}^*) E_{\parallel} + n_{\perp} |E_{1y}|^2 \end{aligned} \right\} \quad (15.133)$$

这里  $b = (1/2) (k_{\perp} v_{Tj} / \Omega_j)^2 = (1/2) (v_{Tj} / c)^2 (\omega / \Omega_j)^2 n_{\perp}^2$ ,  $j$  表示离子或者电子。对于 X 模回旋阻尼, 上面的符号对应于离子, 下面的对应于电子。电场的不同比例及  $n_{\perp}^2$  的精确值需要对于冷等离子体色散关系进行仔细分析。

至此, 所有分散的知识点都已经讨论完毕, 后面我们将把这些结果组合在一起来研究电子回旋加热、离子回旋加热和低杂波电流驱动。

## 15.7 电子回旋加热 (ECH)

电子回旋加热已经被证明在目前的托卡马克装置上是一种非常有效的加热方法。在下一代点火装置, 如 ITER, 或者在未来的反应堆中, 电子回旋加热应该也起到重要作用。由于短波长的特点, 电子回旋加热提供了利用局域加热来实现合适的等离子体参数分布的方法, 以达到提高磁流体比压极限、提高自举电流份额、抑制局域的电阻磁流体不稳定性等目的。但对于电子回旋加热来说, 最大的不利条件是缺乏大功率的稳态源, 尽管在这方面的研发项目已经启动。我们希望做到的是, 在 ITER 需要的时候, 可以提供符合条件的波源。但这一节的首要目标是理解电子回旋加热, 并计算其吸收份额, 这对于反应堆功率平衡和经济性考虑来说都是一个关键的参数。

电子回旋加热可以使用 O 模, 也可以使用 X 模。两点指导原则可以帮助决定哪一种是最好的选择。第一, 当密度超过密度极限时, 电子回旋波会被反射, 这就意味着该临界点以外的可近性变得很差。这个密度极限可以用等离子体频率和回旋频率表示, 通常写成这样的形式:  $\omega_{pe}^2 / \Omega_e^2 \leq K$ 。这里  $K$  是一个常数, 差不多 1 的量级, 它的精确值由具体考虑的电子回旋波的细节决定。在一个简化的反应堆等离子体中心, 对应于密度峰化因子为 4/3, 相关参数为  $\omega_{pe} = 8.0 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ ,  $\Omega_e = 8.3 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ , 有  $\omega_{pe}^2 / \Omega_e^2 = 0.96$ , 相当接近电子回旋波的密度极限。因此, 第一个指导原则是设计电子回旋波系统使得密度极限尽可能高。

第二个原则是, 一般而言, 希望尽可能工作在低的回旋谐波下,  $l=1$  是最佳选择。原因是对于 O 模, 阻尼率正比于  $(k_{\perp}^2 r_{Le}^2)^l$ , 对于 X 模, 阻尼率正比于



$(k_{\perp}^2 r_{Le}^2)^{l-1}$ , 由于在感兴趣的区域有  $k_{\perp}^2 r_{Le}^2 \ll 1$ , 更高阶谐波的阻尼率会随着  $l$  增加而迅速降低。

考虑到实际运行, 电子回旋波通常从托卡马克的外侧注入, 这样可以有更大的几何空间操作。波基本上垂直注入等离子体, 即  $n_{\parallel} \approx 0$ 。在实际情况下, 由于天线具有一定的尺寸, 会产生一个  $n_{\parallel}$  谱。但对于目前讨论的情形, 当从冷等离子体色散关系讨论可近性时, 令  $n_{\parallel} \approx 0$  仍然是个很好的假设, 不过在计算阻尼率时需要假设一个小但是非零的  $n_{\parallel}$ 。但是, 在  $n_{\parallel} \rightarrow 0$  时最后计算得到的功率吸收份额和  $n_{\parallel}$  无关。

下面的分析将会得到以下结果。使用  $l=1$  的 O 模电子回旋波到达等离子体中心有着不错的可近性, 然而其阻尼率比  $l=1$  的 X 模低大约  $k_{\perp}^2 r_{Le}^2$ 。另一方面,  $l=1$  的 X 模电子回旋波只有利用较棘手的高场侧注入才具有好的可近性, 而外侧注入的 X 模只有利用二次谐波(即  $l=2$  时)才是可行的。二次谐波的 X 模阻尼率比 X 模基波阻尼率低大约  $k_{\perp}^2 r_{Le}^2$ , 因此可以和 O 模基波大体相当。利用  $l=2$  的 X 模电子回旋波的好处就是密度极限是 O 模的两倍, 劣势就是需要二倍频的波。对于 ITER 这样的反应堆, 二倍频对应  $f=280$  GHz。在这个频率上的高功率稳态源还处在研发的非常早期的阶段, 这样的源是否可行还有待观察。不过, 对应于  $l=1$  的  $f=140$  GHz 回旋管, 其研发看起来已经接近成熟。尽管在可近性方面有上面提到的各种微妙的可能性, 但只要假设有合适的波源, 密度也在密度极限以下, 对于任何一种加热模式, 电子回旋加热都会有一个非常高比例的功率吸收。

下面的分析步骤就是先利用冷等离子体色散关系研究可近性, 然后利用无碰撞阻尼率计算功率吸收比例。这个过程会对 O 模和 X 模分别进行。

### 15.7.1 O 模可近性

电子回旋波 O 模的可近性可以很容易从等离子体色散关系中得到。假设  $n_{\parallel} = 0$ , 考虑只有  $E_{\parallel} \neq 0$  (即  $E_{\perp} = 0$ ) 的波, 从式(15.71)可以看到 O 模色散关系是:

$$n_{\perp}^2 = K_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (15.134)$$

理解可近性条件的一个简便方法如图 5.17 所示。考虑图 15.17 中的几何位形。波从环外侧的低场侧注入。当波向等离子体中心传播时(即图中向右传播), 密度和环向场都增加。我们注意到, 由于环向场  $B_{\phi} \approx B_0(R_0/R)$  在托卡马克中是占支配地位的场, 因此回旋共振吸收区对应于等离子体中垂直的一小窄条。当电子回旋波波阵面和回旋共振层相重叠时, 就可以实现等离子体加热。对于  $l=1$  模的中心加热, 必须选择等于中心回旋频率的波频  $\omega = \Omega_e(R_0)$ 。

把这个值代入式(15.134)中, 我们可以画出  $n_{\perp}^2$  和  $\omega_{pe}^2/\Omega_e^2$  的关系图, 如图

15.18 所示(注意,对于 O 模,可以忽略环形效应,简单地假设等离子体中回旋频率  $\Omega_e$  为常数)。从  $n_{\perp}^2$  轴出发向右移动,可以看到  $n_{\perp}^2$  的值随着密度增加的变化。这个正好是波往等离子体中心传播的过程。好的可近性意味着  $n_{\perp}^2 > 0$ ,而当  $n_{\perp}^2$  穿过

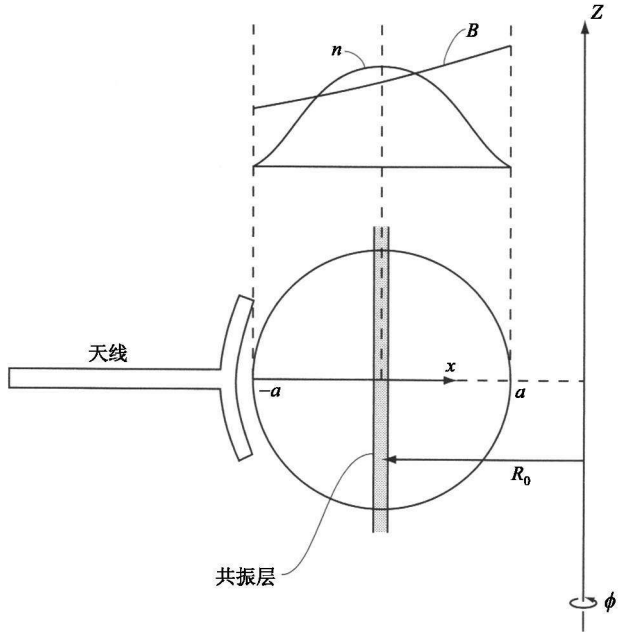


图 15.17 用于研究可近性的几何示意图(波从  $x = -a$  注入,  $x = 0$  代表等离子体中心,共振层对应于  $\omega = \Omega_e(R_0)$  的垂直带)

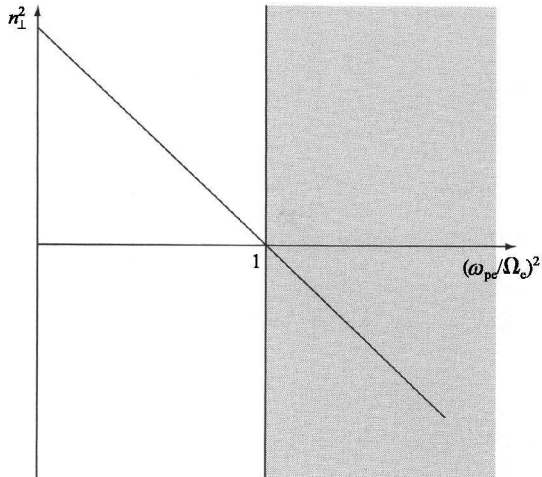


图 15.18 电子回旋波 O 模外部注入的色散关系 ( $\omega_{pe}^2/\Omega_e^2 < 1$  时具有好的可近性)

截止点,它的值变成负的,可近性就变得很差了。这样的区域在图中用阴影表示。因此,可近性好的区域对应于图 15.18 中从左侧的轴出发的所有非阴影区。到阴影截止区的转化点就代表着电子回旋波可达的最大密度,这就是电子回旋波加热的密度极限。从图 15.18 可以看到,电子回旋波 O 模具有好的可近性需要密度满足下面的条件

$$\omega_{pe}^2/\Omega_e^2 \leq 1 \quad (15.135)$$

这个值在许多目前的装置实验中是满足的,也接近于未来反应堆中的需求。

### 15.7.2 O 模吸收

现在的目标是计算当波穿过共振层时输入功率被吸收的比例。把空间阻尼率  $k_{\perp i}$  代入功率平衡关系,经过分析可以得出需要得到的吸收比例。为获得  $k_{\perp i}$  的准确表达式,把  $l = 1$  (基波加热) 和  $n_{\perp} = (1 - \omega_{pe}^2/\Omega_e^2)^{1/2}$  (可近性分析得到) 代入式(15.132),可以得到:

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_{\perp i} c}{\Omega_e} &= \pi^{1/2} \frac{\Omega_e}{k_{\parallel} v_{Te}} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \left[ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \right]^{-1/2} e^{-b} I_1(b) \zeta^2 e^{-\zeta^2} \\ \zeta &= \frac{\omega - \Omega_e}{k_{\parallel} v_{Te}} \end{aligned} \right\} \quad (15.136)$$

假设共振层非常薄,在  $x = 0$  处对  $\zeta$  做泰勒展开:

$$\zeta = \frac{\omega - \Omega_e(x)}{k_{\parallel} v_{Te}} \approx - \frac{\Omega_e' x}{k_{\parallel} v_{Te}} \approx - \frac{\Omega_e}{k_{\parallel} v_{Te}} \frac{x}{R_0} \quad (15.137)$$

并且,注意到在小回旋半径极限下有

$$e^{-b} I_1(b) \approx \frac{1}{4} \frac{k_{\perp}^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2} = \frac{n_{\perp}^2 v_{Te}^2}{4 c^2} \frac{\omega^2}{\Omega_e^2} = \frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \right] \frac{v_{Te}^2}{c^2} \quad (15.138)$$

同时把  $\omega = \Omega_e$  代入前面的系数项,  $k_{\perp i}$  的表达式(15.136)可以进一步简化,得到:

$$k_{\perp i} = \frac{\pi^{1/2}}{4} \frac{v_{Te} \Omega_e^2}{\kappa_{\parallel} c^3} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \left[ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \right]^{1/2} \zeta^2 e^{-\zeta^2} \quad (15.139)$$

下一步涉及功率平衡。推导如下,从天线到等离子体中的功率流由  $x = -a$  处的坡印亭矢量的垂直分量给出:

$$P_{in} = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*)_{x=-a} \quad (\text{W/m}^2) \quad (15.140)$$

从等离子体中穿过而没有被吸收的功率流,最后会从等离子体远端逃逸,其值等于  $x = +a$  处的坡印亭流:

$$P_{\text{out}} = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*)_{x=a} \quad (\text{W/m}^2) \quad (15.141)$$

二者的差值  $P_{\text{in}} - P_{\text{out}}$  代表被等离子体吸收的功率流。因此,加热效率  $\eta_{\text{h}}$  可以用功率吸收的比例来定义,可以写成:

$$\eta_{\text{h}} = \frac{P_{\text{in}} - P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \quad (15.142)$$

现在来看  $P_{\text{out}}$  和  $P_{\text{in}}$  之间的简单关系。当波穿过等离子体时,功率流会以  $2k_{\perp i}$  的阻尼率指数衰减。这里因子“2”是由于坡印亭流依赖于电磁场幅度的平方。因此  $P_{\text{out}}$  和  $P_{\text{in}}$  之间的关系为:

$$P_{\text{out}} = P_{\text{in}} \exp\left[-2 \int_{-a}^a k_{\perp i} dx\right] \quad (15.143)$$

加热效率的表达式则简化为:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{\text{h}} &= 1 - e^{-\lambda} \\ \lambda &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} k_{\perp i} dx \end{aligned} \right\} \quad (15.144)$$

这里考虑到共振层非常窄,因此,为简化起见,积分限可以延伸到  $\pm \infty$ ,由此带来的误差可以忽略不计。

利用式(15.139)中  $k_{\perp i}$  的表达式,可以很容易得到参数  $\lambda$ 。经过简短计算,得到:

$$\lambda = \frac{\pi}{4} \frac{v_{\text{Te}}^2}{c^2} \frac{\Omega_e R_0}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\Omega_e^2} \left(1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\Omega_e^2}\right)^{1/2} \quad (15.145)$$

从式(15.145)可以看到,存在一个最优的密度使得吸收最大化。这个最优密度由下式给出:

$$\omega_{\text{pe}}^2 / \Omega_e^2 = \frac{2}{3} \quad (15.146)$$

这个最优密度稍微低于最大密度极限。把这个代入式(15.145)中,最终得到系数  $\lambda$  的表达式:

$$\lambda = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \frac{v_{\text{Te}}^2}{c^2} \frac{\Omega_e R_0}{c} \quad (15.147)$$

注意到  $\lambda$  (也就是功率吸收)随温度线性增加:  $\lambda \propto T$ 。对于典型的反应堆参数 ( $B_0 =$

4.7 T,  $R_0 = 5$  m), 当初始温度  $T = 1$  keV 时, 吸收系数  $\lambda \approx 16$ 。因此  $\eta_h \approx 1$ , 即所有的功率被吸收。这的确是个好结果。

最后, 注意到尽管前面假设  $k_{\parallel}$  是个非零的小量, 但是最终得到的  $\lambda$  和  $k_{\parallel}$  无关。然而如果在计算开始就令  $k_{\parallel} = 0$ , 由于指数项对  $k_{\parallel}$  的强依赖关系, 只能得到  $k_{\perp i} = 0$ 。继而得到  $\eta_h = 0$ , 即零功率吸收。关于  $\eta_h$  的这两个看起来矛盾的结果在更全面的考虑相对论效应的计算中可以取得一致。相对论计算显示, 当  $k_{\parallel} \rightarrow 0$  时, 会光滑趋近假设  $k_{\parallel}$  是个非零小量计算得到的结果。尽管为了让分析简单一点, 在这里我们没有给出相对论分析, 但读者应该记住这一点, 即对于非常小的  $k_{\parallel}$ , 要得到正确的结果需要包含相对论效应。

总的来说, O 模的电子回旋波是加热等离子体的一种非常有效的方法。电子在电子回旋频率共振层附近的狭窄空间内吸收所有的波能, 然后, 通过库仑碰撞, 能量可以分享给离子, 并且由于高平行热导率, 很快地在每个极向磁面上达到热平衡。由于加热发生在对应于  $f \approx 140$  GHz 的  $l = 1$  基波, 正在发展中的稳态源应该会在需要的时间内达到可用的程度。最主要的问题在于加热最大化发生的峰值密度略低于反应堆需要的密度。

### 15.7.3 X 模可近性

X 模提供了另外一种利用电子回旋波加热等离子体的方法。在这种情况下, 令  $n_{\parallel} = 0$ , 考虑波的偏振满足  $E_x \neq 0, E_y \neq 0, E_{\parallel} = 0$ , 可近性可以很容易地由式 (15.71) 得到。如同在分析 O 模时那样, 令  $n_{\parallel} = 0$  对可近性而言是合适的, 但是在计算吸收率时需要假设一个小但是非零的  $n_{\parallel}$ 。从冷等离子体色散关系经过简单计算可以得到  $n_{\perp}^2$  的值:

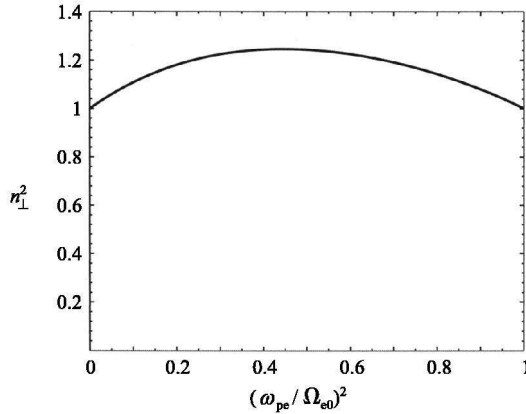
$$n_{\perp}^2 = \frac{K_{\perp}^2 - K_A^2}{K_{\perp}} \quad (15.148)$$

把式 (15.70) 中的  $K_{\perp}, K_A$  代入上式, 且假设  $\omega \gg \Omega_i, \omega \gg \omega_{pi}$ , 可以得到:

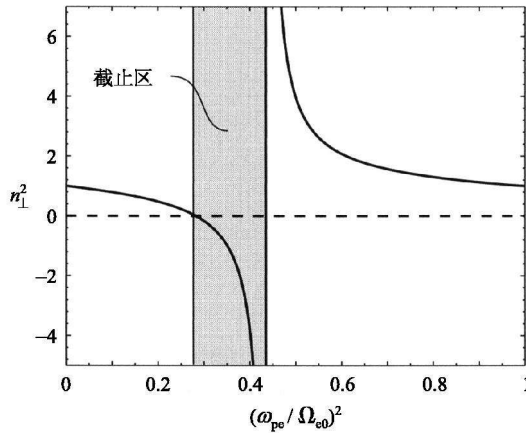
$$n_{\perp}^2 = \frac{(\omega^2 + \omega\Omega_e - \omega_{pe}^2)(\omega^2 - \omega\Omega_e - \omega_{pe}^2)}{\omega^2(\omega^2 - \Omega_e^2 - \omega_{pe}^2)} \quad (15.149)$$

现在考虑在  $l = 1$  基频时 X 模加热的可能性。首先注意到, 如果环效应被忽略 (即  $\Omega_e = \text{常数}$ ), 在波注入的位置 ( $\omega = \Omega_e, \omega_{pe} = 0$ ) 将会得到一个未定型的形式, 分子分母同时为零。但是把  $\Omega_e$  的环向变化考虑进来, 即  $\Omega_e = \Omega_{e0}(R_0/R)$ , 这种情况就可以避免。但是如果考虑这个修正, 我们就必须区分是从内部注入还是从外部注入。为了说明这一点, 假设密度和磁场分别由  $\omega_{pe}^2(\rho) = \omega_{pe0}^2(1 - \rho^2), \Omega_e = \Omega_{e0}(R_0/R) \approx \Omega_{e0}(1 \pm \epsilon\rho)$  给出。这里  $\rho = |x|/a, 0 \leq \rho \leq 1, \rho = 0$  对应于等离子体中心, 其中

上面的加号表示高场侧注入,下面的减号表示低场侧注入。作为特例,假设等离子体满足  $\omega_{pe0} = \Omega_{e0}$ ,这是一个和 O 模一样的密度极限。而且,基频 X 模电子回旋中心加热需要令  $\omega = \Omega_{e0}$ 。在这样的假设下,有  $\omega_{pe}^2/\omega^2 = 1 - \rho^2$ ,  $\Omega_e/\Omega_{e0} = 1 \pm \varepsilon\rho$ 。当  $\rho$  在 0 和 1 之间变化时,可以直接画出  $n_{\perp}^2$  和  $\omega_{pe}^2/\Omega_{e0}^2$  的关系图。对应于内侧电子回旋波注入的曲线如图 15.19(a) 所示,其中  $\varepsilon = 1/3$ 。注意到这种情况具有好的可近性,因为从天线到等离子体中心都有  $n_{\perp}^2 > 0$ 。然而,从实际应用的观点来看,从内侧注入是我们非常不希望的。基于这一点,我们不再考虑这种方式。更具实际意义的选择是波从外侧注入。这种情况如图 15.19(b) 所示。同样,这里设  $\varepsilon = 1/3$ 。在这种情况下,在下式对应的密度下会出现截止现象:



(a) 对于  $\varepsilon = 1/3$  的情形,电子回旋基波 X 模由内侧高场边注入的色散关系曲线。波从等离子体边缘到中心均有好的可近性



(b) 低场边注入的色散关系曲线。由图可见,在低  $\omega_{pe}^2/\Omega_{e0}^2$  位置存在截止和波共振

图 15.19

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_{e0}^2} = \frac{\omega^2}{\Omega_{e0}^2} - \frac{\omega\Omega_e}{\Omega_{e0}^2} = 0.282 \quad (15.150)$$

这里,数值对应于我们例子中选取的参数。而在“上杂化共振”处则会出现波的共振,对应的密度值由下式给出:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_{e0}^2} = \frac{\omega^2}{\Omega_{e0}^2} - \frac{\Omega_c^2}{\Omega_{e0}^2} = 0.438 \quad (15.151)$$

这就意味着入射的波会在  $0.282 < \omega_{pe}^2/\Omega_{e0}^2 < 0.438$  区间看到一个截止区。由于波不能穿过截止区达到等离子体中心,因此,从低场侧注入也不成功,其原因正在于糟糕的可近性。

结论是,基频 X 模电子回旋波加热不是一种可行的加热方法。

但是,当我们考虑采用二次谐波加热,情况就会大大改观。在这种情况下, $\Omega_e$  的环向变化可以忽略(即  $\Omega_e = \text{常数}$ ),而波的频率  $\omega = 2\Omega_e$ 。这时,色散关系为:

$$n_{\perp}^2 = \frac{(6 - \omega_{pe}^2/\Omega_e^2)(2 - \omega_{pe}^2/\Omega_e^2)}{4(3 - \omega_{pe}^2/\Omega_e^2)} \quad (15.152)$$

这个关系如图 15.20 所示。注意到在  $\omega_{pe}^2/\Omega_e^2 = 2$  时发生截止,而在  $\omega_{pe}^2/\Omega_e^2 = 3$  时发生波共振(即上杂化共振)。

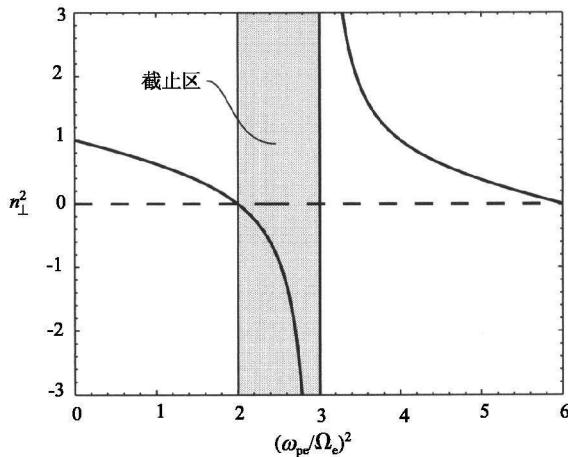


图 15.20 低场侧外部注入的二次谐波电子回旋 X 模的色散关系,这里假设  $\varepsilon = 1/3$   
(注意到当  $\omega_{pe}^2/\Omega_e^2 < 2$  时,有很好的可近性)

图 15.20 表明当密度低于

$$\omega_{pe}^2/\Omega_e^2 \leq 2 \quad (15.153)$$

时,二次谐波电子回旋 X 模具有良好的可近性到达等离子体中心。这个密度极

限是 O 模密度极限的两倍。具有更高的临界密度使得对于典型的反应堆参数有着更大的安全余量, 尽管目前 280 GHz 回旋管的研发仍是一个严峻的技术挑战。

#### 15.7.4 X 模吸收

对 X 模吸收的分析和 O 模相似。需要首先计算  $k_{\perp i}$ , 然后从功率平衡关系计算吸收系数  $\lambda$ 。而  $\lambda$  的值就决定了我们最终想要得到的功率吸收比例  $\eta_h$ 。从式(15.131)我们可以计算  $k_{\perp i}$ 。首先, 将  $l=2, \omega=2\Omega_e$  代入所有的乘积项中; 其次, 由式(15.71)注意到偏振由下式给出:

$$\frac{E_-}{E_{1y}} = \frac{i}{2}(E_{1x} - iE_{1y}) = \frac{i}{2}\left[\frac{K_{\Lambda}}{K_{\perp}} - 1\right] = -\frac{i}{4}\left[\frac{6-\alpha}{3-\alpha}\right] \quad (15.154)$$

这里  $\alpha = \omega_{pe}^2/\Omega_e^2$ ; 第三, 取小回旋半径假设, 得到:

$$\frac{d}{db}[be^{-b}I_1(b)] \approx b = 2n_{\perp}^2 \frac{v_{Te}^2}{c^2} \quad (15.155)$$

第四, 利用色散关系:

$$n_{\perp}^2 = \frac{(6-\alpha)(2-\alpha)}{4(3-\alpha)} \quad (15.156)$$

消去  $n_{\perp}^2$ 。这样经过简短计算, 可以得到  $k_{\perp i}$ :

$$k_{\perp i} = 2\pi^{1/2} \frac{v_{Te} \Omega_e^2}{c^3 k_{\parallel}} G(\alpha) e^{-\zeta^2} \quad (15.157)$$

这里, 在薄共振层的条件下有:

$$\zeta^2 = \left[\frac{\omega - 2\Omega_e}{k_{\parallel} v_{Te}}\right]^2 \approx \left[\frac{2\Omega_e}{k_{\parallel} v_{Te}}\right]^2 \frac{x^2}{R_0^2} \quad (15.158)$$

而  $G(\alpha)$  是密度的函数, 由下式定义:

$$G(\alpha) = \frac{\alpha(2-\alpha)^{1/2}(6-\alpha)^{5/2}}{32(3-\alpha)^{5/2}} \quad (15.159)$$

现在, 运用与 O 模分析时同样的功率平衡关系我们可以得到功率吸收比例  $\eta_h$  的表达式:

$$\eta_h = 1 - e^{-\lambda} \quad (15.160)$$

这里,

$$\lambda = 2 \int_{-\infty}^{\infty} k_{\perp i} dx \quad (15.161)$$



经过简单的计算可以知道：

$$\lambda = 2\pi G(\alpha) \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\Omega_e R_0}{c} \quad (15.162)$$

函数  $G(\alpha)$  如图 15.21 所示。可以看到,在临界密度处, $G(\alpha)$  有一个最大值,即

$$\left. \begin{aligned} \alpha = \omega_{pe}^2 / \Omega_e^2 = 1.75 \\ G(1.75) = 0.58 \end{aligned} \right\} \quad (15.163)$$

在这个最优值处,

$$\lambda = 3.66 \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\Omega_e R_0}{c} \quad (15.164)$$

我们注意到,X 模的吸收系数  $\lambda$  和 O 模吸收系数有同样的定标律(即参数依赖关系)。然而,X 模前面的倍乘系数是 O 模系数的 10 倍还多。这表明 X 模的吸收比 O 模要强烈,尽管 O 模的吸收已经是非常有效了。最后的结论是:二次谐波的 X 模电子回旋加热是一种可能的高效加热等离子体的方法。它具有很好的可近性,可以从外侧入射到达等离子体中心。所有能量都在  $\omega = 2\Omega_e$  共振层被吸收。最大吸收的临界密度是 O 模的 2.5 倍。更具实际意义的优点是,无论是 O 模还是 X 模,在注入点附近的低密度区都有很好的可近性。这意味着天线可以后移到离等离子体表面较远的地方,这样可以更好地保护天线,以防止波与边缘区等离子体相互作用造成的电弧放电或材料损伤。当然,X 模电子回旋加热的最大瓶颈在于需要非常高频的射频源,这种源还有待继续发展。然而,对于目前运行的装置来说,由于使用的是较低的磁场,因此现有的回旋管已经允许我们利用 X 模二次谐波进行电子回旋加热。

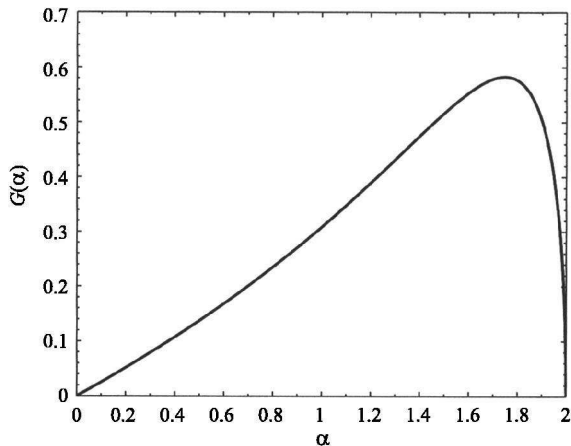


图 15.21 函数  $G(\alpha)$  曲线,可以看到,最优化密度对应于  $\alpha = \omega_{pe}^2 / \Omega_e^2 = 1.75$

### 15.7.5 小结

电子回旋加热是一种加热等离子体的好方法。无论是  $l=1$  的基频 O 模, 还是  $l=2$  的二次谐波 X 模, 都能做到功率的完全吸收。功率吸收的比例可以写成:

$$\eta_h = 1 - e^{-\lambda} \quad (15.165)$$

这里 O 模和 X 模的吸收系数  $\lambda$  分别由下面两式给出。

O 模:

$$\lambda = 0.30 \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\Omega_e R_0}{c} \quad \text{密度条件: } \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} = \frac{2}{3} \quad (15.166)$$

X 模:

$$\lambda = 3.66 \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\Omega_e R_0}{c} \quad \text{密度条件: } \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} = 1.75 \quad (15.167)$$

考虑到反应堆中的应用, O 模的不足之处是密度极限稍微低了一些, 而 X 模的瓶颈则是需要目前尚处于研发阶段的高频源。

## 15.8 离子回旋加热 (ICH)

离子回旋加热在现有的许多托卡马克中得到了应用, 而且很有可能在下一代实验装置及反应堆中起重要作用。一个原因是价格合理的高功率稳态波源已经面世, 第二个原因是离子回旋加热直接加热离子。当然这一点可能并不是关键性的, 因为即使采用电子加热, 在可预料的高密度下, 电子-离子热平衡也是容易达到的。但是, 对于较低密度的实验, 甚至在反应堆中, 当需要在初始低密度下加热到点火的运行模式中, 过多加热电子会是一个问题。对离子回旋加热, 最大的瓶颈是需要一套内置天线。我们很快会看到, 天线需要放置得非常靠近等离子体表面。这会导致一系列技术问题, 例如起弧放电和等离子体熄灭。为提高天线的屏蔽能力, 科学家做了极大的努力。我们有理由期待, 在未来反应堆 (例如 ITER) 对这种加热的需要变成现实时, 符合要求的天线应当已经设计出来。

和电子回旋加热一节一样, 这一节的首要目标是理解离子回旋加热的物理, 导出功率吸收的准确比例, 以及反应堆功率平衡和经济性要求的临界参数。

直觉上让人感到, 用离子回旋频率波段的射频波 (例如对于反应堆中的氦, 有  $\Omega_i = 2.3 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$ , 对应于  $f_i = 36 \text{ MHz}$ ) 很难加热等离子体。原因是  $\omega_{pe} \sim 8 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ , 显然  $\Omega_i \ll \omega_{pe}$ 。而等离子体很容易反射那些频率低于电子等离子体频率的波。事实上, 对于离子回旋 O 模, 这个预料是正确的, O 波不能进入等离子体, 即可近性是很差的。但是, 对于离子回旋 X 模, 由背景磁场产生的等离子体性质上的高度各项

异性为可近性提供了一个窗口。而且,有意思的是,这种可近性不会出现在电子回旋加热中出现的那种密度限制。这个有利的性质使得利用离子回旋波加热成为一种可行的选择。

离子回旋加热的可近性中包含的物理比电子回旋波中的要复杂得多。因此,为了让分析易于进行,我们将只关注实际应用中的情形,即波从等离子体的低场侧注入的情形。即便如此,为了理解相关问题,仍需要区分三种不同的情形。首先,我们分析在  $l=1$  基频( $\omega = \Omega_i$ )下的离子回旋 X 模。可以看到,原则上可近性是非常令人满意的。然而不幸的是,在波-粒子共振点处,波的偏振状态恰好是“错误”的,也就是说,波恰好沿离子回旋的相反方向旋转。因此在共振点,等离子体和波完全没有耦合,引起的阻尼率小得根本不能实现有效的功率吸收。

对这个问题的认识自然引向了第二种感兴趣的情形。那就是利用  $\omega = 2\Omega_i$  的离子回旋 X 模的二次谐波加热。分析显示,在这种模式下,好的可近性仍然保持,同时有可观份额的波具有合适的偏振分量与离子回旋运动同相,从而可以实现强的波-粒子共振。计算得到的阻尼率足够大,可以得到完全满意的加热效果。但这种工作模式有那么一点不那么称心如意的地方,那就是阻尼率对温度和密度非常敏感,因此并不会像理想中的那样坚实可靠。

有一种方法可以缓解这种坚实性不足的缺陷,这就是第三种感兴趣的工作模式。聚变科学家们找到了一种聪明的方法来提高离子回旋加热的效果,就是在等离子体中加入少量非氘氚粒子。由于这种新的“少数”粒子的回旋频率比氘离子回旋频率高,可以取得最佳的可近性和功率吸收。这里,氢( $\Omega_H = 2\Omega_D$ )和氦-3( $\Omega_{He} = 4\Omega_D/3$ )都是适合的少数离子候选者。掺入少数离子来加热的思想是要选择少数离子的  $l=1$  基频的离子回旋频率作为离子回旋加热频率。由于波的偏振主要由主粒子决定,因此“恰好错误偏振”的困难就被克服了。这种吸引人的主意被证明并不完全正确,但是即使如此,分析发现,的确可以产生强的少数离子加热。然后,通过库仑碰撞,少数离子把能量传递给背景氘氚等离子体。计算显示,5%的氦-3作为少数离子可以产生可观的离子回旋波能量吸收,足以高效地把等离子体加热到点火。利用氢做少数离子虽然也有效,但是正如后面将会简单讨论的,由于实际应用上的原因,不如氦-3那么值得期待。

关于后面要进行的分析,可近性的基本特点由  $n_{\parallel}^2 = 0$  的冷等离子体色散关系决定。在利用无碰撞阻尼计算电子回旋波吸收时,需要假设  $n_{\parallel}^2$  是个非零小量。对于 X 模二次谐波加热,在  $n_{\parallel}^2 \rightarrow 0$  的极限下,最后得到的吸收效率和  $n_{\parallel}^2$  无关。对于少数离子加热,情况就更加复杂。在计算吸收率时,我们会看到,由于数学奇点的存在,不能取  $n_{\parallel}^2 \rightarrow 0$ 。更重要的是,经过分析会发现,最大吸收实际上发生在有限  $n_{\parallel}^2$  的情形下,因此我们也不想让  $n_{\parallel}^2 \rightarrow 0$ 。假设非零的  $n_{\parallel}^2$  可以取得最大程度的吸收,并消除了  $n_{\parallel}^2 \rightarrow 0$  时的问题,但是同时也要求我们必须再次研究  $n_{\parallel}^2 = 0$  得到的可

近性条件。重新研究后发现,在芯部等离子体中,可近性条件只是被微弱地修改,但在等离子体边缘附近,总是会发展起来一个小的截止区。正是这个截止区使得我们必须把天线尽量靠近等离子体边缘,以便能最小化入射波的反射。

### 15.8.1 基频 X 模可近性和偏振

离子回旋波的可近性可以很容易地从冷等离子体色散关系中得到。假设  $n_{\parallel}^2 = 0$ , 式(15.71)的两个根可以简化为:

$$\left. \begin{array}{l} \text{O 模} \quad n_{\perp}^2 = K_{\parallel} \\ \text{X 模} \quad n_{\perp}^2 = \frac{K_{\perp}^2 - K_A^2}{K_{\perp}} \end{array} \right\} \quad (15.168)$$

对于离子回旋波,利用电子的小质量展开可以简化介电张量各元素。这种处理既适用于典型参数的聚变反应堆,也适用于目前实验条件。下面的展开是适当的:

$$\left. \begin{array}{l} \omega_{pe}^2/\Omega_e^2 \sim 1 \\ \omega_{pi}^2/\Omega_i^2 \sim m_i/m_e \\ \omega^2/\Omega_i^2 \sim 1 \\ \omega_{pe}^2/\omega^2 \sim (m_i/m_e)^2 \end{array} \right\} \quad (15.169)$$

从这个量级序列很快可知 O 模的色散关系可以简化为:

$$n_{\perp}^2 = -\omega_{pe}^2/\omega^2 \quad (15.170)$$

由于  $n_{\perp}^2$  是个大的负值,完全不具备到达等离子体中心的可近性,因此对于 O 模将不再作进一步讨论。

现在考虑更感兴趣的 X 模。为简单起见,先考虑只有一种离子的等离子体。从式(15.70)可以得到介电张量中的元素  $K_{\perp}$  和  $K_A$ 。在质量比展开下,  $K_{\perp}$  中的主要贡献来自于离子项,因此可以写成:

$$K_{\perp} = -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} \quad (15.171)$$

而对于各向异性项(非对角项)  $K_A$ , 离子和电子都对其有贡献。利用电荷准中性条件  $n_e = n_i$ , 可以得到:

$$K_A = \frac{\omega}{\Omega_i} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} \quad (15.172)$$

把这些结果代入式(15.168),可以得到色散关系:

$$n_{\perp}^2 = \omega_{pi}^2 / \Omega_i^2 \quad (15.173)$$

由于  $n_{\perp}^2 > 0$ , 有到达等离子体中心的良好可近性。而且, 离子回旋波并不像电子回旋波加热那样存在密度极限。对离子回旋加热来说, 这两个特点是极其值得称道的。

另一方面, 注意到, 色散关系可以重新写成另一种形式:

$$\omega^2 = k_{\perp}^2 v_A^2 \quad (15.174)$$

它对应于压缩阿尔芬波。类似地,  $n_{\parallel}^2 \neq 0$  的 O 模的色散关系可以简化为剪切阿尔芬波的色散关系  $\omega^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2$ 。由于在感兴趣的大部分应用中都有  $k_{\perp}^2 \gg k_{\parallel}^2$ , 式 (15.173) 所描述的 X 模离子回旋波在文献中通常被称为“快波”。

下一步至关重要是探究快波在共振面处的偏振情况。原因是无碰撞离子回旋阻尼正比于左旋圆偏振振幅 ( $E_+$ ), 然而, 通常来说, 到达共振面的快波是椭圆偏振的, 包含左旋 ( $E_+$ ) 和右旋 ( $E_-$ ) 圆偏振波的组合, 因此能量吸收的真实比例依赖于二者的比例  $E_+ / E_-$ 。重新回到式 (15.71), 这个值可以很容易求得:

$$\frac{E_+}{E_-} = \frac{K_{\parallel} + K_{\perp}}{K_{\parallel} - K_{\perp}} = \frac{\omega - \Omega_i}{\omega + \Omega_i} \quad (15.175)$$

可以看到, 在离子回旋共振基频 ( $\omega = \Omega_i$ ) 时, 左旋偏振波幅度衰减为零  $E_+ = 0$ 。换句话说, 在这个点上, 我们正需要左旋偏振波来产生无碰撞阻尼的时候, 它的幅度却等于零。波完全变成了右旋偏振的, 对离子回旋共振加热而言是“完全错误”的偏振。当稍微偏离共振点时, 会有少量的阻尼发生。但这个阻尼对于加热而言太弱。因此, 最后的结论就是, 由于在共振面处  $E_+$  不幸消失, 离子回旋波基频加热对于加热等离子体到点火来说并不是一种可行的方法。

### 15.8.2 快波二次谐波的可近性

要克服离子回旋波在基频时的偏振问题, 首先想到的是利用二次谐波。因为在基频共振时有  $E_+ = 0$ , 那么在二次谐波时应该有一个非零的  $E_+$ 。下面将会看到, 事实的确是这样。而且好的可近性和没有密度极限的特点仍然保持。不过, 利用  $\omega = 2\Omega_i$  二次谐波加热的不利因素是阻尼率减少了  $k_{\perp}^2 r_{Li}^2$ 。在下面的分析中讨论完可近性的问题后, 我们将计算阻尼系数  $\lambda$ 。为简化起见, 分析仍然只对单离子种类的等离子体进行, 但在分析的最后, 将会讨论两种离子 D-T 等离子体的结果。决定离子回旋二次谐波可近性的关系式和基频时一样, 唯一的改变就是把  $\omega = \Omega_i$  换成  $\omega = 2\Omega_i$ 。色散关系和偏振情况的表达式可以写为:

$$\left. \begin{aligned} n_{\perp}^2 &= \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} \\ \frac{E_+}{E_-} &= \frac{K_A + K_{\perp}}{K_A - K_{\perp}} = \frac{\omega - \Omega_i}{\omega + \Omega_i} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \quad (15.176)$$

第一个关系再次清晰地表明好的可近性。第二个关系显示希望得到的左旋波的幅度是右旋波幅度的 1/3。现在的问题是,这个 1/3 的比例加上二次谐波导致的阻尼率减少  $k_{\perp}^2 r_{Li}^2$  倍,是否还足以有充分的吸收使得二次谐波离子回旋波加热成为一种可行的方法。

### 15.8.3 快波二次谐波吸收

现在的任务是计算空间阻尼率  $k_{\perp i}$ 。一旦知道了  $k_{\perp i}$ ,就可以直接算出吸收系数  $\lambda$  和相应的加热效率  $\eta_h$ 。从式(15.131)求解  $k_{\perp i}$  的步骤如下:①在前面倍乘项中令  $l=2, \omega=2\Omega_i$ ;②利用二次谐波偏振关系:

$$\frac{E_+}{E_{1y}} = i \frac{E_+}{E_+ - E_-} = -\frac{i}{2} \quad (15.177)$$

③取小回旋半径假设:

$$\frac{d}{db} [b e^{-b} I_1(b)] \approx b = 2n_{\perp}^2 \frac{v_{Ti}^2}{c^2} \quad (15.178)$$

④代入色散关系  $n_{\perp} = \omega_{pi}/\Omega_i$ ,经过简短计算得到:

$$k_{\perp i} = \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{v_{Ti} \omega_{pi}^3}{c^3 \Omega_i k_{\parallel}} \exp(-\zeta^2) \quad (15.179)$$

这里,在窄共振层条件下有:

$$\zeta = \frac{\omega - 2\Omega_i(x)}{k_{\parallel} v_{Ti}} \approx -2 \frac{\Omega_i}{k_{\parallel} v_{Ti}} \frac{x}{R_0} \quad (15.180)$$

和以前一样,  $x=0$  对应于等离子体中心,而天线位于  $x = -a \approx -\infty$ 。

最后,加热效率还是定义为:

$$\eta_h = 1 - e^{-\lambda} \quad (15.181)$$

这里,

$$\lambda = 2 \int_{-\infty}^{\infty} k_{\perp i} dx \quad (15.182)$$

简短计算得到  $\lambda$  的表达式如下:

$$\lambda = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\omega_{pi} R_0}{c} \right] \beta_i \quad (15.183)$$

这里  $\beta_i = 2\mu_0 n T_i / B_0^2$  是离子比压,所有量都用等离子体中心处 ( $x=0$ ) 的量表示。我们注意到,  $\lambda \sim n_i^{3/2} T_i / B_0^2$ , 说明  $\lambda$  对等离子体参数非常敏感。

下面给出数值上的说明。考虑类似反应堆参数的氦等离子体,平均密度  $\bar{n} = 1.5 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ , 密度峰化因子  $n_0 / \bar{n} = 4/3$ , 大半径  $R_0 = 5 \text{ m}$ 。假设欧姆加热已经将平均温度加热至  $\bar{T}_i = 3 \text{ keV}$ , 温度峰化因子  $T_{i0} / \bar{T}_i = 2$ 。磁轴处磁场  $B_0 = 4.7 \text{ T}$ 。在这些参数下,可以得到  $\lambda = 7.6$ , 因此  $\eta_{\text{th}} \approx 1$ , 说明有好的吸收效率。这个良好的结果在某种程度上会因其对等离子体参数的敏感性而有所削弱,也就是说,这种方法缺乏抗干扰性。事实上,如果假设加热等离子体到点火的过程如同第 14 章所描述的那样通过更微妙的低密度途径来进行,比如  $\bar{n} = 0.3 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ , 那么  $\lambda$  的值将减为 0.68, 对应的  $\eta_{\text{th}} = 0.49$ 。这最多算是个差强人意的结果。对 50% -50% 氦氖等离子体的结果和这里给出的情况非常类似,分析也是直接的。最大的不同就是在分析中需要把两种离子种类包含进来。注意到对于氦氖等离子体,有两种二次谐波共振的可能,一是在  $\omega = 2\Omega_D$ , 另一种是在  $\omega = 2\Omega_T = (4/3)\Omega_D$ 。相对于式(15.183)给出的单离子种类的结果而言,两种情况对应的对  $\lambda$  的修正分别为:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{DT} &= 1.00\lambda_D & \omega &= 2\Omega_D \\ \lambda_{DT} &= 0.094\lambda_D & \omega &= (4/3)\Omega_D \end{aligned} \right\} \quad (15.184)$$

这里  $\lambda_D$  由式(15.183)给出,但是把密度写成了  $n_e$  的形式。仍然用氦等离子体作为参考流体:

$$\lambda_D = \frac{\pi e \mu_0^{3/2} n_{e0}^{3/2} T_{D0} R_0}{m_D^{1/2} B_0^2} = 2^{3/2} \left[ \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\omega_{pD} R_0}{c} \right] \beta_D \right] \quad (15.185)$$

这里,出现因子  $2^{3/2}$  是因为在氦氖等离子体中  $n_D = n_e / 2$ 。

我们注意到,氖的二次谐波共振时的阻尼率比氦小一个量级。这主要是在氖的二次谐波处有更坏的偏振情况。但这实际上并没有什么关系,因为原则上我们可以简单地利用氦的二次回旋共振加热来获得高的加热效率。然而,这种加热方法强烈依赖于温度和密度,这促使我们去寻求一种更坚实可靠的备选方案,尤其是在低密度操作时仍然有效的方法。

#### 15.8.4 快波少数离子加热的可近性

人们提出的一种有趣的用于提高离子回旋加热效率的方法,是在等离子体中加入少量非氦氖的少数离子,选取波的频率使其能在少数离子回旋频率基频处发生波

- 粒子共振。这种想法的目的是希望通过基频共振消去  $k_{\perp}^2 r_{Li}^2$  因子,以此来补偿与少数离子的低密度相联系的无碰撞吸收的减少。乍一看,基于这种想法,基频处“错误偏振”的问题似乎可以得到缓解。因为波实际的偏振应该是由主要离子决定的,所以只要少数离子回旋频率和主离子不同,在少数离子回旋频率处就应该有客观的左旋波分量。但这个想法不是完全正确。分析会发现,无论是在主离子回旋频率还是少数离子回旋频率处,偏振都是完全错误的:即在  $\omega = \Omega_{\text{major}}$  和  $\omega = \Omega_{\text{minor}}$  处,都有  $E_{\perp} = 0$ 。然而幸运的是,在少数离子回旋频率附近,偏振会非常快速地变化,因此可观的阻尼不是发生在准确的少数离子回旋频率处,而是发生在其附近。分析还要说明的一点是,少数离子应该具有比主离子更高的回旋频率。这个性质保证了从低场侧到共振层的良好可近性。这就意味着氢 ( $\Omega_{\text{H}} = 2\Omega_{\text{D}}$ ) 和氦-3 ( $\Omega_{\text{He}} = 4\Omega_{\text{D}}/3$ ) 都是适合的少数离子候选者。

为简单起见,下面将对掺有少数离子氢的氘等离子体进行分析。掺有少数离子氢或者氦-3 的氘氘等离子体的结果会在最后给出。这个分析即使在我们考虑的简单模型中也是有点复杂的,它包含了波-粒子共振、波截止和波共振。而且我们会看到,可观的阻尼发生在小但不为零的  $k_{\parallel}$  处。这个认识要求我们必须在放宽了的冷等离子体色散关系  $n_{\parallel}^2 = 0$  的假设情况下再次研究可近性。最主要的结果是,在靠近天线处总是存在一个附加的窄截止区。这一点给实际应用造成非常重要的限制,那就是馈入天线必须尽量靠近等离子体边缘,以避免波能量在边缘处被大量反射。最后,值得注意的是,这里进行的分析只是展示了少数离子加热的许多可能工作模式中的一种。通常来说,对其他少数离子加热方法,必须把动理学效应和等离子体非均匀性考虑进去才能获得精确的结果。不过,这里的分析是反应堆和下一代点火实验中利用离子回旋加热的最主要工作模式之一。

分析从讨论可近性开始。仍然从冷等离子体模型计算出色散关系。开始我们还是假设  $n_{\parallel}^2 = 0$ 。对于包含主离子氘和少数离子氢两种离子种类的等离子体,在  $\omega \sim \Omega_{\text{D}}$  频率区域内,介电张量各元素由下式给出:

$$\left. \begin{aligned} K_{\perp} &= -\frac{\omega_{\text{pD}}^2}{\omega^2 - \Omega_{\text{D}}^2} - \frac{\omega_{\text{pH}}^2}{\omega^2 - \Omega_{\text{H}}^2} \\ K_{\parallel} &= \frac{\omega}{\Omega_{\text{D}}} \frac{\omega_{\text{pD}}^2}{\omega^2 - \Omega_{\text{D}}^2} + \frac{\omega}{\Omega_{\text{H}}} \frac{\omega_{\text{pH}}^2}{\omega^2 - \Omega_{\text{H}}^2} \end{aligned} \right\} \quad (15.186)$$

这些表达式可以进一步简化。我们注意到,对于大多数项,可以令  $\omega = \Omega_{\text{H}}$ ,并忽略磁场的空间变化,只有那些明确包含  $\omega - \Omega_{\text{H}}$  的项中磁场的空间变化才是重要的。把这些项挑出来保持不变,那么  $K_{\perp}$  和  $K_{\parallel}$  可以进一步简化为:



$$\left. \begin{aligned} K_{\perp} &\approx -\frac{\omega_{pD}^2}{\Omega_D^2} \left[ \frac{2\xi - 3}{6\xi} \right] \\ K_A &\approx \frac{\omega_{pD}^2}{\Omega_D^2} \left[ \frac{4\xi - 3}{6\xi} \right] \end{aligned} \right\} \quad (15.187)$$

这里,

$$\xi(x) = -\frac{\omega - \Omega_H(x)}{\Omega_D(0)} \frac{n_D}{n_H} \sim 1 \quad (15.188)$$

是一个函数,它描述对氢回旋共振的小的偏离,不过要再乘上一个大的密度比例因子  $n_D/n_H \gg 1$ 。注意到精确的氢回旋共振发生在  $\xi = 0$ 。在接下来的分析中,用  $\xi$  来表示所有量会是非常方便的。

由简化的  $K_{\perp}$  和  $K_A$  表达式可以得到下面的冷等离子体色散关系:

$$n_{\perp}^2 = \frac{K_{\perp}^2 - K_A^2}{K_{\perp}} = \frac{\omega_{pD}^2}{\Omega_D^2} \left[ \frac{\xi - 1}{\xi - 3/2} \right] \quad (15.189)$$

现在可以来研究可近性了。注意到在氢回旋共振附近,有

$$\xi(x) \approx 2 \frac{n_D}{n_H} \frac{x}{R_0} \quad (15.190)$$

这里  $B = B_0(R_0/R) \approx B_0(1 + x/R_0)$ ,  $x = 0$  对应等离子体中心,  $x = -a$  对应于天线位置。好的可近性要求当  $\xi < 0$  时  $n_{\perp}^2 > 0$ 。从式(15.189)可以看到,这个要求的确是满足的。

进一步研究可以看到,在少数粒子共振以外的高场侧,波在等离子体中的行为有点复杂。如图 15.22 所示,在  $\xi = 1$  时有波截止,紧跟着在  $\xi = 3/2$  时有波共振。这些点都非常靠近回旋共振面。变换回真实空间坐标会更清楚地看到这一点。对于低浓度的少数粒子有  $x/a = (2/\varepsilon)(n_H/n_D)\xi \ll 1$ 。波截止和波共振的影响稍后再讨论。现在读者只要承认到波-粒子共振面  $\xi = 0$  处有很好的可近性就行了。

现在考虑偏振问题。我们的目标是要确定在什么样的条件下,在共振面处有可观的左旋偏振波。直接运算可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{E_+}{E_-} &= \frac{K_A + K_{\perp}}{K_A - K_{\perp}} \\ &= \left[ \frac{(\omega + \Omega_H) + (n_H/n_D)(\omega + \Omega_D)}{(\omega - \Omega_H) + (n_H/n_D)(\omega - \Omega_D)} \right] \left[ \frac{(\omega - \Omega_D)(\omega - \Omega_H)}{(\omega + \Omega_D)(\omega + \Omega_H)} \right] \\ &\approx \frac{1}{3} \frac{\xi}{\xi - 1} \end{aligned} \quad (15.191)$$

这个精确的结果表明,在两个基频共振频率  $\omega = \Omega_D$  和  $\omega = \Omega_H$  处,都有  $E_+ = 0$ 。在两个频率处,偏振都完全是错误的。集中关注少数离子共振,可以得到最后那个更简单的近似形式,因此可以看到,错误的偏振恰恰出现在少数离子共振  $\xi = 0$  处。但是,这个简单的式子也表明,只要偏离共振位置一点,偏振就会变成好的可用的情形。例如,当  $\xi = 1$ ,有  $E_+/E_- \sim 1$ 。正是这个稍微偏离准确共振位置处就会发生希望的左旋偏振波的迅速增长的行为导致了可观的无碰撞吸收。

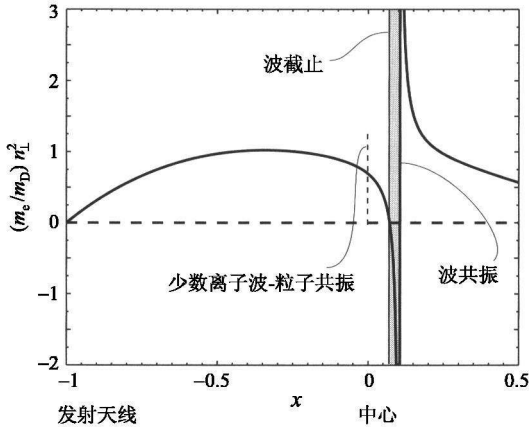


图 15.22 氘等离子体中少数氢离子的离子回旋波加热的色散关系(其中  $\omega_{pD}(0)/\Omega_D(0) = (m_D/m_e)^{1/2}$ ,  $\varepsilon = 1/3$ ,  $n_{\parallel} = 0$ ,  $n_H/n_D = 0.05$ 。注意,从发射天线到等离子体中心有良好的可近性,再稍远一点有一个窄的截止区)

### 15.8.5 快波少数离子加热吸收

计算离子回旋波少数离子加热的吸收效率和以前的计算类似。先从无碰撞阻尼结果式(15.131)得到  $k_{\perp i}$ ,然后对共振层进行积分得到阻尼系数  $\lambda$  和相应的加热效率  $\eta_h$ 。按照下面的步骤计算  $l=1$  氢共振对应的  $k_{\perp i}$  值。首先,在前面倍乘项中令  $\omega = \Omega_H = 2\Omega_D$ ;第二,注意到在少数离子共振附近,波的偏振关系是:

$$\frac{E_+}{E_{1y}} = i \frac{E_+}{E_+ - E_-} = i \frac{\xi}{3 - 2\xi} \quad (15.192)$$

第三,取小回旋半径假设:

$$\frac{d}{db} [ b e^{-b} I_0(b) ] \approx 1 \quad (15.193)$$

第四,从式(15.189)给出的色散关系得到  $n_{\perp}$ 。经过简短计算得到:

$$k_{\perp i} = \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{n_H}{n_D} \frac{\omega_{pD} \Omega_D}{ck_{\parallel} v_{TH}} \frac{\xi^2 e^{-\xi^2}}{(\xi - 3/2)^{3/2} (\xi - 1)^{1/2}} \quad (15.194)$$

这里,

$$\left. \begin{aligned} \zeta(x) &= \frac{\omega - \Omega_H(x)}{k_{\parallel} v_{TH}} \approx -\frac{\Omega_H(0)}{k_{\parallel} v_{TH}} \frac{x}{R_0} = -\frac{x}{\Delta_{\zeta}} \\ \xi(x) &= -\frac{\omega - \Omega_H(x)}{\Omega_D(0)} \frac{n_D}{n_H} \approx 2 \frac{n_D}{n_H} \frac{x}{R_0} = \frac{x}{\Delta_{\xi}} \end{aligned} \right\} \quad (15.195)$$

注意到分析中引入了两个不同的长度小量。第一个是  $\Delta_{\xi} = (1/2)(n_H/n_D)R_0$ , 代表波-粒子共振面到截止面的距离; 第二个是  $\Delta_{\zeta} = R_0 k_{\parallel} v_{TH}/\Omega_H$ , 代表了由于多普勒展宽形成的吸收层的宽度, 它和一个小但是非零的  $k_{\parallel}$  联系起来。

为了继续进行分析, 引入一个新的无量纲的波数是有用的, 它等于上面两个长度小量之比:

$$\hat{k}_{\parallel} = \frac{\Delta_{\zeta}}{\Delta_{\xi}} = 2 \frac{n_D}{n_H} \frac{k_{\parallel} v_{TH}}{\Omega_H} \quad (15.196)$$

这样, 阻尼系数有下面的表达式:

$$\lambda = 2 \int k_{\perp i} dx = \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{n_H}{n_D} \frac{\omega_{pD} R_0}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_{\parallel}^2 \zeta^2 e^{-\zeta^2}}{(k_{\parallel} \zeta + 3/2)^{3/2} (k_{\parallel} \zeta + 1)^{1/2}} d\zeta \quad (15.197)$$

经过这一系列颇有些计算量的推导后, 现在我们面临两个困难。这两点在前面已经有所暗示, 它们分别是: ① 积分看起来是发散的, 因为被积函数分母上在  $k_{\parallel} \zeta = -3/2$  时有个奇点; ② 存在着被积函数成为虚数的区域。需要强调的是, 这些困难不能在冷等离子体模型的框架里解决, 而必须考虑动力学处理。动力学处理后的结果可以看到, 奇点非物理的现象被排除, 强的吸收在  $k_{\parallel} \zeta \gg 1$  时发生。  $k_{\parallel} \zeta \gg 1$  的区域对应于这样一种情形, 这里多普勒展宽的吸收区远大于波共振和截止之间的间距。在这个区域, 通过①在式(15.197)中假设  $k_{\parallel} \zeta \gg 1$ , ②在分母中简单忽略截止和共振, 那么冷等离子体模型也可以得到动力学结果。这样做的物理原因与狭窄的波共振和截止间距有关。这个窄的间距意味着在截止处被反射的能量非常少且在波共振处发生模式转换的能量也非常少。因此, 在这个间距内的积分对整个功率吸收的贡献小, 可以忽略。这个近似的结果就是可以把式(15.197)的积分简化形式为:

$$\lim_{k_{\parallel} \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_{\parallel}^2 \zeta^2 e^{-\zeta^2}}{(k_{\parallel} \zeta + 3/2)^{3/2} (k_{\parallel} \zeta + 1)^{1/2}} d\zeta \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \pi^{1/2} \quad (15.198)$$

最后得到阻尼系数的形式为:

$$\lambda = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pD} R_0}{c} \frac{n_H}{n_D} \quad (15.199)$$

对于  $n_D = 1.5 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ ,  $R_0 = 5 \text{ m}$ ,  $n_H/n_D = 0.05$ , 阻尼系数得值 15.0, 因此吸收效率  $\eta_h = 1 - \exp(-\lambda) \approx 1$ 。这显然是个很好的结果。而且, 和二次谐波加热不同, 阻尼率和温度无关, 只是微弱地依赖于密度:  $\lambda \propto n^{1/2}$ 。因此, 即使沿着第 14 章描述的低密度发展到点火的模式, 在  $n_H/n_D = 0.05$ ,  $n_D = 0.3 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$  这样的参数下,  $\lambda$  只是轻微减小为 6.7, 仍然对应于  $\eta_h \approx 1$ 。

另外有意思的一点是, 氢少数粒子共振条件和氦粒子的二次谐波共振刚好一致。因此, 总的阻尼应该是两种机制分别得到结果的和。换句话说, 式(15.199)应该用下式代替:

$$\lambda = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pD} R_0}{c} \left[ \frac{n_H}{n_D} + \beta_D \right] \quad (15.200)$$

还有一点需要考虑。由于有效的少数离子加热需要  $k_{\parallel} \zeta \gg 1$ , 所以很重要的一点是重新检查小而非零的  $k_{\parallel}$  对可近性的影响。作为一个例子, 假设  $k_{\parallel} = 1$ , 一个刚好在满足  $k_{\parallel} \zeta \gg 1$  条件的边缘值。对于上面提到的参数, 这个值对应于  $k_{\parallel} = 10.5 \text{ m}^{-1}$ , 对应的  $n_{\parallel} = 7.0$ 。在等离子体中心处  $n_{\perp} = 50.5$ , 因此  $n_{\parallel}^2 \ll n_{\perp}^2$  的假设仍然很好地满足。然而, 在等离子体密度为零的边缘等离子体处, 问题产生了。在等离子体边缘附近, 波的色散关系退化为真空下的关系  $n_{\perp}^2 = 1 - n_{\parallel}^2 \approx -n_{\parallel}^2 < 0$ 。波在它刚进入等离子体时就被阻尼。

返回式(15.72)给出的  $n_{\parallel}^2 \neq 0$  冷等离子体色散关系, 可以定量研究这种效应。对于离子回旋频率, 介电张量元  $K_{\parallel} \approx -\omega_{pe}^2/\omega^2$  和其他元素相比是巨大的。利用这个事实, 可以得到色散关系的一个简单的因式。这一分支解对应于快波, 由下式给出:

$$n_{\perp}^2 \approx -\frac{C}{B} = \frac{(K_{\perp} + K_A - n_{\parallel}^2)(K_{\perp} - K_A - n_{\parallel}^2)}{K_{\perp} - n_{\parallel}^2} \quad (15.201)$$

以进入等离子体中的距离作为自变量, 画出  $n_{\parallel} = 7$  时这条函数的曲线, 可以看到这条曲线和图 15.22 中的曲线几乎是相同的, 尽管图 15.22 中  $n_{\parallel} = 0$ 。然而, 如果我们集中注意天线附近的区域, 如图 15.23 所示, 当波刚进入等离子体时, 一个狭窄的截止区出现了。式(15.201)意味着, 当密度超过临界密度值后截止区结束, 然后波开始传播。截止边界由  $K_{\perp} + K_A = n_{\parallel}^2$  定义, 可以写成:

$$\omega_{pD}^2 > 3n_{\parallel}^2 \Omega_D^2 \quad (15.202)$$

在上面给出的具体例子里, 这个条件简化为相对低的要求  $n_{20} > 0.087$ 。而且, 在实

际的天线面和等离子体边缘之间还会有真空间隙,那里  $n_{\perp}^2 \approx -n_{\parallel}^2 < 0$ ,因此展宽了截止区。在实践中,这就意味着天线面必须放置得尽可能接近等离子体表面以避免入射波被大量反射。

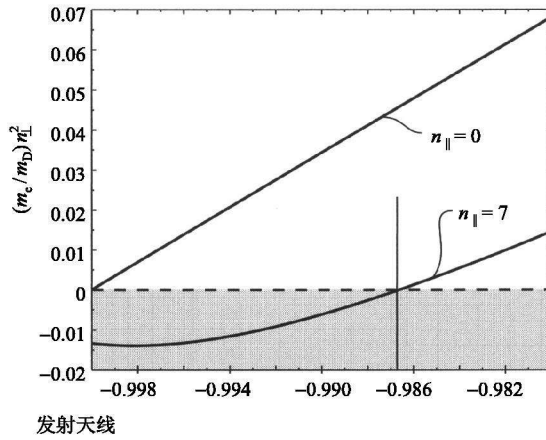


图 15.23 离子回旋波少数离子加热色散关系在反射天线附近的展开视图  
(图中给出了  $n_{\parallel} = 0$  和  $n_{\parallel} = 7$  的曲线。注意,非零  $n_{\parallel}$  导致一个临近天线的窄截止区)

另一个和实际情况相关的问题是,即使对于离子回旋二次谐波加热,由于反射结构和端口具有一定的结构,  $n_{\parallel}$  也是非零的。但在那里,非零的  $n_{\parallel}$  是实际结构造成的结果,而不是等离子体物理的要求。而对于少数离子加热,等离子体物理本身就要求一个非零的  $n_{\parallel}$  已达到能量吸收的目的。最后,我们感兴趣的是把少数离子加热的结果扩展到氘等离子体中。和前面类似的计算,可以得到氢少数离子和氦-3 少数离子对应的阻尼系数分别为:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\text{H}} &= \lambda_{\text{M}} \left[ 1.7 \frac{n_{\text{H}}}{n_{\text{e}}} + 2.0 \beta_{\text{D}} \right] & \omega &= \Omega_{\text{H}} = 2\Omega_{\text{D}} \\ \lambda_{\text{He}} &= \lambda_{\text{M}} \left[ 0.5 \frac{n_{\text{He}}}{n_{\text{e}}} + 0.19 \beta_{\text{T}} \right] & \omega &= \Omega_{\text{He}} = 2\Omega_{\text{T}} \end{aligned} \right\} \quad (15.203)$$

这里,

$$\lambda_{\text{M}} = \frac{\pi}{2} \frac{e \mu_0^{1/2} n_{\text{e}}^{1/2} R_0}{m_{\text{D}}^{1/2}} = 2^{1/2} \left[ \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{\text{pD}} R_0}{c} \right] \quad (15.204)$$

这里,氢少数离子共振对氘二次谐波加热和氦-3 少数离子共振对氘二次谐波加热的贡献已经包含在里面。

典型参数下,任意一种少数离子共振加热都能产生比对应的二次谐波加热更强的吸收率。氢少数离子可以产生较大的阻尼系数,而氦-3 对应的系数也不小。两

种少数离子加热阻尼系数都和氦等离子体中氢少数离子加热得到的  $\lambda \approx 15$  可比。氦-3 通常是更好的选择,这和加热无关,而是由于实践上的原因。通常而言,当等离子体被点燃以后,无论是氢还是氦-3 都不是我们需要的。在点火后,少数粒子就像聚变反应堆中起稀释作用的不需要的杂质。氦-3 可以容易地从等离子体中泵出,而实践中却很难清除氢放电的结果。因此,氦-3 是更好的少数离子。

### 15.8.6 小结

离子回旋加热是一种把等离子体加热到点火的有效方法。有两种基本工作模式可以利用。第一种是利用氦或者氦的二次谐波加热,第二种是利用氢或者氦-3 作为少数离子采用少数离子加热。对于反应堆级参数,少数离子加热更有效,5% 的氦-3 可以实现功率的完全吸收。

功率吸收的份额可以写成:

$$\eta_h = 1 - e^{-\lambda} \quad (15.205)$$

这里阻尼系数  $\lambda$  在各种工作模分别为:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pD} R_0}{c} \left[ \frac{n_H}{n_D} + \beta_D \right] && \text{D + H} \\ \lambda_H &= 2^{1/2} \left[ \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pD} R_0}{c} \right] \left[ 1.7 \frac{n_H}{n_e} + 2.0 \beta_D \right] && \text{D - T + H} \\ \lambda_{He} &= 2^{1/2} \left[ \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pD} R_0}{c} \right] \left[ 0.5 \frac{n_{He}}{n_e} + 0.19 \beta_T \right] && \text{D - T + } ^3\text{He} \end{aligned} \right\} \quad (15.206)$$

考虑到反应堆的需求,离子回旋加热的优势在于已经具有价格合理的高功率稳态源,其最大的不足之处就是需要把天线尽量靠近等离子体边缘,从而最小化边缘截止区的反射效应。

## 15.9 低杂波电流驱动(LHCD)

### 15.9.1 概要

本章最后一个主题是非感应电流驱动,这对于大部分聚变位形都是达到稳态运行所必需的。前面讨论的所有辅助加热手段(中性束、电子回旋波和离子回旋波)都可以经过调整用来驱动稳态电流。然而,本节则集中关注另一种不同的方法,那就是低杂波电流驱动。

这样选择有几个原因。首先,在几乎所有情况下,低杂波电流驱动有着最高的电流驱动效率,这里电流驱动效率定义为每瓦辅助功率驱动电流的安培数;第二,

低杂波电流驱动可以非常有效地驱动离轴电流,对于匹配自举电流分布和在大的小半径处建立输运壁垒,这些离轴电流是非常重要的;第三,低杂波电流驱动的物理具有其独特的科学趣味,它代表了一种非常聪明的解决困难问题的方法。

低杂波电流驱动的基本想法是把具有极强不对称 $k_{\parallel}$ 谱的射频波从低场侧注入等离子体中。我们看图 15.24,在这样的波谱,波沿着环的某一特定方向传播(和欧姆电流方向相反)。对于低杂波电流驱动,典型的波频在电子和粒子回旋频率之间: $\Omega_i \ll \omega \ll \Omega_e$ 。在这个频率范围,没有回旋阻尼。然而,在选择合适的参数下,会有强的 $l=0$ 朗道波-粒子共振作用在电子上。通过这个共振,电子从波中吸收能量。如果频谱是不对称的,还会有个净的动量传递给电子。这和加热时的频谱是不同的,后者的 $k_{\parallel}$ 是对称的,因此没有净的动量给电子,即具有 $\pm v_{\parallel}$ 的电子分别在 $\omega = \pm k_{\parallel} v_{\parallel}$ 条件下吸收大小相等但方向相反的动量。而在不对称的频谱下,电子动量增加对应于一个净的环向电子流体的流,或者等效地得到一个净的环向电流。就是说,通过“电流驱动”,我们得到了希望得到的电流。

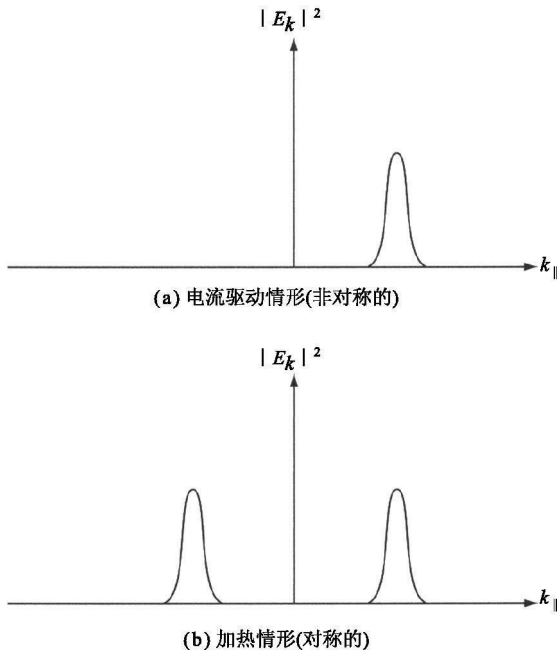


图 15.24 电场能量的傅里叶频谱

需要注意的是,我们需要持续地提供射功率来维持驱动电流。原因是慢电子的热化和快电子的慢化会导致在共振速度处分布函数偏离麦克斯韦分布。具体而言,如前面图 15.15 所示,分布函数会在 $v_{\parallel} = \omega/k_{\parallel}$ 处变平。而库仑碰撞则试图恢复分布函数到麦克斯韦分布,从而使得驱动电流减小到零。只有通过辅助功率连

续驱动,才能维持分布函数的这种不对称性以及相应的电流驱动。驱动起的电流大小与用来维持电流的辅助功率的比值是定义电流驱动效率的关键参数。通过这一节的分析会看到,典型的低杂波电流驱动效率驱动  $\eta_{\text{CD}} = \text{电流}/\text{辅助功率} \approx 0.05 \text{ A/W}$ 。

这种电流驱动的机制涉及一种巧妙的值得注意的等离子体物理问题。在低杂波电流驱动中起作用的电子是那些  $v_{\parallel} \geq 3v_{Te}$  的电子。它们可以说是在分布函数的尾巴上。当它们被加热并吸收动量后,这些电子倾向于增强分布函数的尾部。我们知道,库仑碰撞率与速度的关系  $\nu_{ei} \sim 1/v_{\parallel}^3$ 。因此,由于大部分电流由具有较快的  $v_{\parallel}$  的电子携带,因此库仑拖曳力减小,这意味着试图把分布函数恢复到麦克斯韦分布的摩擦力变得更小。结论是,与我们可以想象的完全依赖于经典碰撞率  $\bar{\nu}_{ei}$  的情况相比,这种机制需要更少的功率来维持电流(即效率更高)。

另一个值得注意的事实是, $\eta_{\text{CD}}$  的准确数值强烈依赖于密度和温度分布,不存在一种由基本原理确定的通用常数乘以定标律的函数形式。因此,当本节计算出的  $\eta_{\text{CD}}$  值看起来和实验观察基本差不多时,我们仍然要记住这里给出的不过是个代表性的值。

分析本身并不十分复杂,尽管过程中需要相当多步骤。思考这个问题的一个有用的方法是假设聚变反应堆中的等离子体已经被加热到希望的点火状态,因此密度、温度、磁场等分布都是已知的常量。现在的任务是设计一套低杂波电流驱动系统,用来驱动一定量的非感应电流以达到稳态运行。具体来说,我们想确定低杂波电流驱动系统的以下几个参数:① 电流驱动效率  $\eta_{\text{CD}}$ ;② 驱动电流的大小及其径向分布  $J_{\text{CD}}(r)$ ;③ 低杂波功率沉积的幅度和径向分布  $S_{\text{LH}}(r)$ ;④ 低杂波频率  $\omega$ ;⑤ 低杂波平行波数  $k_{\parallel}$ 。

和射频波加热一样,低杂波到达感兴趣区域的可近性由冷等离子体色散关系确定。对于低杂波电流驱动,保持  $k_{\parallel} \neq 0$  至关重要。低杂波通过朗道波-粒子共振的功率吸收很容易从已经进行过的无碰撞阻尼分析得到。

有意思的是,对于反应堆级的参数,阻尼非常强,大部分低杂波功率都在非常靠近等离子体边缘的相对狭窄的渗透区内被吸收。这就意味着电流只能在很接近小半径  $a$  的地方被驱动。幸运的是我们的目标是驱动离轴电流,因为强的朗道阻尼使得低杂波电流驱动在靠近磁轴的地方不再高效。

最后,通过直接把无碰撞阻尼分析扩展到包含动量和能量转移,就可以进行电流驱动的计算。然后通过简单的等离子体动量平衡来确定驱动电流的大小和分布,当然这还依赖于波的性质。

本节分析最主要的结论是,典型的低杂波电流驱动效率驱的量级为  $\eta_{\text{CD}} \sim 0.05 \text{ A/W}$ 。这个效率高于其他电流驱动方法,但对于经济地驱动托卡马克中所有电流来说仍嫌太低。这也就是为什么自举电流如此重要的原因。



### 15.9.2 低杂波可近性

我们从讨论低杂波的传播和可近性开始。假设频率位于离子和电子回旋频率之间,并具有一个非零的平行波数,从冷等离子体色散关系就可以得到相关结果。在非零的  $n_{\parallel}$  下,波属于 O 模和 X 模电场分量的结合体,尽管与 O 模相关的  $E_{\parallel}$  分量才是朗道阻尼和电流驱动的原因。

在分析进行中,把质量比  $m_e/m_i$  作为一个小参数是非常有用的,这样便于了解基本的量级关系,决定哪些项必须保留而哪些项可以省略。定义反应堆级参数等离子体中低杂波传播的基本量级序列如下:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{pe}/\Omega_e &\sim \omega_{pi}/\omega \sim n_{\parallel} \sim 1 \\ \omega_{pi}/\Omega_i &\sim \omega/\Omega_i \sim \Omega_e/\omega \sim n_{\perp} \sim (m_i/m_e)^{1/2} \gg 1 \end{aligned} \right\} \quad (15.207)$$

利用这个量级序列,介电张量中各元素可以化简为:

$$\left. \begin{aligned} K_{\perp} &= 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \sim 1 \\ K_A &= \frac{\omega_{pe}^2}{\omega\Omega_e} \sim (m_i/m_e)^{1/2} \\ K_{\parallel} &= -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \sim m_i/m_e \end{aligned} \right\} \quad (15.208)$$

把这些结果代入式(15.72)给出的冷等离子体的通解中,得到  $n_{\perp}^2$  的如下表达式:

$$n_{\perp}^2 = -\frac{K_{\parallel}}{2K_{\perp}} \left\{ n_{\parallel}^2 - K_{\perp} + \frac{K_A^2}{K_{\parallel}} \pm \left[ \left( n_{\parallel}^2 - K_{\perp} + \frac{K_A^2}{K_{\parallel}} \right)^2 + \frac{4K_{\perp}K_A^2}{K_{\parallel}} \right]^{1/2} \right\} \quad (15.209)$$

低杂波电流驱动感兴趣的是平方根号前取加号的那个解。这个解有较大的  $n_{\perp}^2$ , 对应于较小的  $\omega/k_{\perp}$ 。因此,低杂波在文献中通常被称作“慢波”。

现在的任务就是分析式(15.209)给出的看起来有点复杂的表达式,从而确定可近性条件。如果我们记得  $K_{\parallel} < 0$ , 那么要得到好的可近性,对  $n_{\perp}^2 > 0$  有两个要求。首先,  $K_{\perp}$  必须在感兴趣的区域都是正的。这是为了避免出现波共振,因为波一旦出现共振,就会随之产生出一块  $n_{\perp}^2 < 0$  的消散区。为避免这个问题,要求  $\omega$  必须大于一个临界值。第二,除非  $n_{\parallel}^2$  足够大,否则根号下面的表达式可能变负。就是说,对于一个过小的  $n_{\parallel}^2$ , 将产生模转换层,慢波转换为快波返回发射天线。换句话说,对模转换层更远的区域不可近。最后,需要注意的是,一旦选择了一个  $n_{\parallel}^2$  来避免模转换,那就意味着式(15.209)大括号中第一项自动为正。因此,低杂波的可近

性要求高  $\omega$  和大  $n_{\parallel}$  的结合。

现在,把这些条件定量化描述如下。条件  $K_{\perp} > 0$  可以写成:

$$\omega^2 > \omega_{\text{LH}}^2(x_r) \equiv \frac{\omega_{\text{pi}}^2(x_r)}{1 + \omega_{\text{pe}}^2(x_r)/\Omega_e^2} \quad (15.210)$$

或者等效地,

$$\frac{\omega^2}{\Omega_e \Omega_i} > \frac{\omega_{\text{pe}}^2(x_r)/\Omega_e^2}{1 + \omega_{\text{pe}}^2(x_r)/\Omega_e^2} \quad (15.211)$$

这里,  $\omega_{\text{LH}}(x)$  是中平面处局域低杂化频率。共振半径  $x_r$  可以位于  $-a \leq x_r \leq a$  的任何地方。距离  $a - |x_r|$  对应于波在达到低杂化振荡(此时可忽略朗道阻尼)前从  $x = -a$  处的天线结构进入等离子体的穿透深度。现在,读者需要假设  $x_r$  是一个待定的未知量。而且,不需要考虑磁场的环向效应,允许把  $\Omega_i$  和  $\Omega_e$  当做常数处理。

接下来考虑根号下的项的符号问题。分析稍许有点复杂。先经过直接的计算可以看到,这一项为正的项可以写成:

$$n_{\parallel}^2 > \left[ K_{\perp}^{1/2} + \left[ -\frac{K_{\perp}^2}{K_{\parallel}} \right]^{1/2} \right]^2 \quad (15.212)$$

代入介电张量元,可以得到:

$$\left. \begin{aligned} n_{\parallel}^2 &> [(1 - \gamma X)^{1/2} + X^{1/2}]^2 \\ X(x) &= \omega_{\text{pe}}^2(x)/\Omega_e^2 \\ Y &= \omega^2/\Omega_e \Omega_i \\ \gamma &= (1 - Y)/Y \end{aligned} \right\} \quad (15.213)$$

这个函数在空间点  $x_m$  处有最大值(即  $\partial n_{\parallel}^2/\partial X = 0$ ),其中  $x_m$  对应于满足下式的密度:

$$X(x_m) = \frac{Y^2}{1 - Y} \quad (15.214)$$

又可写为:

$$\frac{\omega_{\text{pe}}^2(x_m)}{\Omega_e^2} = \frac{(\omega^2/\Omega_e \Omega_i)^2}{1 - \omega^2/\Omega_e \Omega_i} \quad (15.215)$$

而且可以看到,这个最大值总是发生在发射天线和  $\omega^2 = \omega_{\text{LH}}^2(x_r)$  的低杂波共振半径之间。也就是说,最大值位于波传播的区域  $|x_r| < |x_m| < a$ 。这一点已在图 15.25 中画出。图 15.25 以变量  $X, Y$  为轴,画了两条曲线。第一条对应于  $\omega^2 = \omega_{\text{LH}}^2$ , 转换

到图上就是  $Y = X/(1 + X)$ 。必须工作在这条线上面以避免共振。第二条线对应于式(15.214),注意到如同我们说过的最大值总是位于天线和共振面之间的区域。

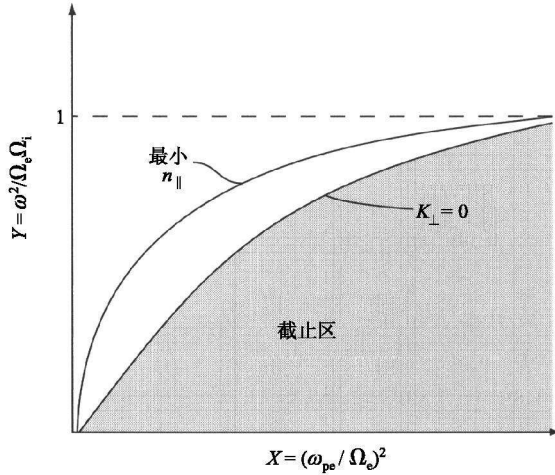


图 15.25 频率对密度的曲线

(下方曲线是避免在  $K_{\perp} = 0$  处出现波共振的边界;  
上方曲线对应于为避免出现消散层而取定的最长  $n_{\parallel}$  )

基于这个分析,把使得函数取得最大值的  $X$  值代入式(15.213)中得到  $n_{\parallel}^2$  要满足的充分必要条件,即

$$n_{\parallel}^2 > n_{\parallel \text{crit}}^2 \equiv \frac{1}{1 - \omega^2 / \Omega_c \Omega_i} \quad (15.216)$$

这就是我们要的结果。

那么现在如何选择合适的  $\omega$  和  $n_{\parallel}$  呢? 这种选择并不是显而易见的。但有一点很清楚,  $\omega$  和  $n_{\parallel}$  必须选取得使在整个感兴趣的区域都有好的可近性。目前只能假设这个区域是从发射天线到等离子体中心的整个区域,即在  $0 < |x| < a$  上,都有  $n_{\perp}^2 > 0$ 。另一个限制是要求  $n_{\parallel}^2$  尽可能地小。这个限制来自于当  $n_{\parallel}^2$  最小化时电流驱动效率达到最大化的事实(这一点将在后面推导)。此外,为了避免出现模转换层,要求  $n_{\parallel}^2 > n_{\parallel \text{crit}}^2$ ,因此我们能做的最好选择就是令  $n_{\parallel}^2 = n_{\parallel \text{crit}}^2$ 。

满足这两个要求的最简单做法就是,选择频率使得低杂化共振刚好发生在等离子体中心(即  $x_r = 0$ ),选择  $n_{\parallel}^2$  稍微大于临界值。在这样的选择下,对于  $0 < |x| < a$  上都有  $n_{\perp}^2 > 0$ 。这种做法的困难是在入射波到达等离子体中心之前就会发生强的非线性参量衰减阻尼。但这一点在我们的分析中没有包括。

一种可以避免这个问题而且不会引起增大  $n_{\parallel}^2$  带来的坏处的更好的做法,是选

择一个稍微高一点的频率,使得模转换层发生在等离子体中心( $x_m = 0$ )。像以前一样, $n_{\parallel}^2$  稍微大于临界值。在这样的选择下,入射波传播到等离子体中心之前,不会遇到模转换层、低杂化共振或者明显的非线性阻尼。这样就得到了好的可近性。

选择  $\omega$  和  $n_{\parallel}$  的问题看起来已经解决,然而事情还有一点微妙。当考虑了朗道阻尼后,可以看到,对于反应堆级参数,波不会透射到等离子体中心,而是处于某些中间地带,这些尚不确定的位置记做  $x_c$ 。这时,上面的结论仍然是可用的,不过,要得到优化结果,我们应该选择频率使得  $x_m = x_c$ ,而不再是  $x_m = 0$ 。然而,由于密度分布通常相当平坦,即使我们使用简单一点的选择  $x_m = 0$ ,也不会损失太多的电流驱动效率。因此,本节后面的分析就使用这个简单一点的假设。

与  $n_{\parallel}$  选择有关的问题可以通过色散关系即式(15.209)的图像来解释。图15.26给出了3条  $n_{\perp}^2$  对  $\omega_{pe}^2/\Omega_e^2$  的曲线,分别对应于三个不同的  $n_{\parallel}^2$  值:  $n_{\parallel 1}^2 < n_{\parallel 2}^2 < n_{\parallel 3}^2$ 。其中  $n_{\parallel 2}^2 = n_{\parallel \text{crit}}^2$  表示临界状态。选择频率使得对于第二种情况  $n_{\parallel} = n_{\parallel \text{crit}}$  模转换面刚好发生在等离子体中心  $x_m = 0$ 。对其他两种情况, $\omega$  值保持不变。更具体一点, $n_{\parallel 2}^2 = n_{\parallel \text{crit}}^2$  和  $\omega_2^2/\Omega_e \Omega_i$  由式(15.215)和(15.216)决定,分别为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_2^2}{\Omega_e \Omega_i} &= \frac{2}{1 + [1 + 4/\alpha]^{1/2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \approx 0.618 \\ n_{\parallel 2}^2 &= \frac{[1 + 4/\alpha]^{1/2} + 1}{[1 + 4/\alpha]^{1/2} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} \approx 2.618 \end{aligned} \right\} \quad (15.217)$$

这里  $\alpha \equiv \omega_{pe}^2(0)/\Omega_e^2$ , 对于每一条曲线取值  $\alpha = 1$ 。

我们注意到,结果对  $n_{\parallel}^2$  的值非常敏感。 $n_{\parallel}^2$  稍微减小到  $n_{\parallel 1}^2 = 0.995n_{\parallel \text{crit}}^2$ , 就会出现一个显著的模转换区,那里波不能传播。类似地,当  $n_{\parallel 3}^2 = 1.005n_{\parallel \text{crit}}^2$ , 快波和慢波明显分离开来,到达等离子体中心有很好的可近性。

最后需要指出的是,式(15.216)要求  $n_{\parallel}^2 > 1$ , 这意味着在密度为零的等离子体边缘处有  $n_{\perp}^2 = 1 - n_{\parallel}^2 < 0$ 。因此,和离子回旋波一样,在等离子体边缘会有一个小的截止区,波必须透过这个区域。我们被迫再一次把发射天线靠近等离子体边缘以避免过多的波反射。

小结一下,只要选择  $\omega = \omega_3, n_{\parallel} = n_{\parallel 3}$ , 低杂波可以有很好的可近性到达等离子体中心。这个频率和平行波数也是我们后面分析低杂波功率吸收和电流驱动时的选择。

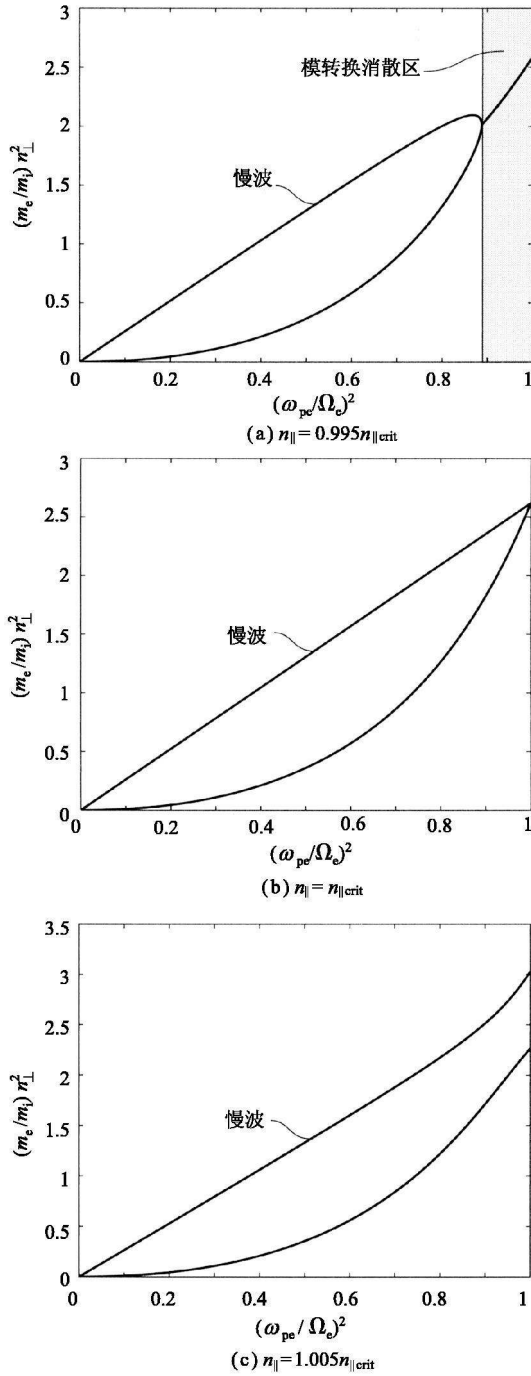


图 15.26 低杂波快波和慢波分支的色散关系

### 15.9.3 慢波功率吸收

当低杂波慢波传播进等离子体中时,会发生两种重要的波-粒子共振现象。首先,在非对称  $n_{\parallel}$  谱的作用下,电子从无碰撞朗道共振中得到净动量,产生想要的电流驱动;第二,波-粒子共振也产生波振幅的朗道阻尼。很明显,电流驱动只能发生在波还没有被大幅度衰减的等离子体靠外的区域。对于反应堆级参数,这个靠外的区域相对狭窄,这是因为在等离子体边缘附近朗道阻尼非常强烈。

这一小节的目标是给出阻尼长度的推导。具体来说,当波从外侧边缘进入等离子体时,波振幅有下面的形式:

$$|E_z^2| = E_{\parallel}^2 \exp[-\lambda(x)] = E_{\parallel}^2 \exp\left[-2\int_{-a}^x k_{\perp i} dx\right] \quad (15.218)$$

这小节的目标就是计算  $\lambda(x)$ , 确定对应于  $\lambda(x_c) \approx 3$  的临界穿透深度  $x_c$ 。在这一点以后,从实际效果来说,波可以看做已经被完全阻尼,没有更多的电流驱动发生。

在这里,值得指出朗道阻尼和回旋阻尼之间重要的不同点。回旋阻尼被约束在等离子体狭窄的一层中,其中心为局域回旋(或其谐波)共振点  $x = x_{\Omega}$ , 有  $\omega = l\Omega(x_{\Omega})$ 。而当波在等离子体中传播时,朗道阻尼连续地发生在整个路径上,在  $\omega = k_{\parallel} v_{Te}$  处达到最大值。这个事实使得分析过程的数学细节复杂化,但并不会改变物理概念上的理解。

分析将沿着我们也已熟悉的步骤进行。首先计算  $k_{\perp i} = S_{\perp}/2P_{\perp}$ , 然后对  $x$  积分得到阻尼系数  $\lambda(x)$ 。对于低杂波,无碰撞吸收来自于式(15.133)给出的推广的朗道阻尼关系。在  $S_{\perp}$  的表达式中,令  $l=0$  并取小回旋半径条件  $e^{-b} I_0(b) \approx 1$ 。利用法拉第定律,用电场表示磁场项,可以简化坡印亭矢量  $P_{\perp}$  为:

$$P_{\perp} = \frac{1}{2\mu_0 c} [(n_{\perp} E_{\parallel}^* - n_{\parallel} E_{1x}^*) E_{\parallel} + n_{\perp} |E_{1y}|^2] \quad (15.219)$$

垂直电场  $E_{1x}$  和  $E_{1y}$  可以通过式(15.71)给出的色散关系用  $E_{\parallel}$  表示:

$$\left. \begin{aligned} n_{\perp} E_{\parallel} - n_{\parallel} E_{1x} &= \frac{K_{\parallel}}{n_{\perp}} E_{\parallel} \\ E_{1y} &= i \frac{K_{\perp} (n_{\perp}^2 - K_{\parallel})}{n_{\perp}^3 n_{\parallel}} E_{\parallel} \end{aligned} \right\} \quad (15.220)$$

把这些关系带入可以得到  $k_{\perp i}$  的中间形式

$$\left. \begin{aligned} k_{\perp i} &= \pi^{1/2} \frac{n_{\perp} \omega_{pe}^2}{\omega c} \frac{\zeta^3 e^{-\zeta^2}}{[K_{\parallel} + K_{\perp}^2 (n_{\perp}^2 - K_{\parallel})^2 / n_{\perp}^4 n_{\parallel}^2]} \\ \zeta &= \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{Te}} \end{aligned} \right\} \quad (15.221)$$

把不同量代入式(15.221)即可得到我们想要的结果。引入下面一些归一化参数会使这个任务看起来简单点,

$$\left. \begin{aligned} \hat{\omega} &= \omega / (\Omega_c \Omega_i)^{1/2} \\ \alpha &= \omega_{pe}^2(0) / \Omega_c^2 \end{aligned} \right\} \quad (15.222)$$

在接下来的分析中,用归一化的频率 $\hat{\omega}$ 而不是归一化密度 $\alpha$ 表示所有关系有其数学上的便利性。因此在低杂波电流驱动下,对 $\omega$ 和 $n_{\parallel}$ 的选择可以写成:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega^4}{1 - \omega^2} \\ n_{\parallel}^2 &= \frac{1}{1 - \omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (15.223)$$

注意到要得到 $\lambda(x)$ 就必须要求具体的密度和温度分布,因此接下来的一步是定义归一化密度 $N(x)$ 和温度 $\tau(x)$ :

$$\left. \begin{aligned} \omega_{pe}^2(x) / \Omega_c^2 &= \alpha N(x) \\ \omega^2 / k_{\parallel}^2 v_{Te}^2(x) &= \zeta^2(x) = \zeta_0^2 / \tau(x) \\ \zeta_0^2 &= \omega^2 / k_{\parallel}^2 v_{Te}^2(0) = c^2 / n_{\parallel}^2 v_{Te}^2(0) \end{aligned} \right\} \quad (15.224)$$

函数 $N(x)$ 和温度 $\tau(x)$ 分别有 $0 \leq N \leq 1$ 和 $0 \leq \tau \leq 1$ 。

最后一个需要的量是 $n_{\perp}$ 。经过简短的计算可以看到:

$$n_{\perp} = - \left[ \frac{m_i}{m_e} \right]^{1/2} \frac{\omega^2}{1 - \omega^2} \quad (15.225)$$

上式右边的负号是能量流方向引起的结果。通过对 $V_{g\perp}$ 的计算可以看到,群速度和相速度有相反的符号,这意味着慢波是“反向波”。因此,为了能量能流入到等离子体中,我们必须选择负号的 $n_{\perp}$ :  $n_{\perp} = - (n_{\perp}^2)^{1/2}$ 。

有了这些归一化量,可以直接来计算 $K_{\perp}$ ,  $K_A$ 和 $K_{\parallel}$ 。把结果代入式(15.221),即得到所要的 $k_{\perp i}$ 的形式:

$$\left. \begin{aligned} k_{\perp i} &= \pi^{1/2} \frac{\Omega_c}{c} \frac{\omega^2}{1 - \omega^2} \frac{\zeta^3 e^{-\zeta^2}}{(1 - N)D} \\ D &= 1 + (1 - \omega^4)N + (1 - \omega^2)^2 N^2 \end{aligned} \right\} \quad (15.226)$$

现在,计算 $\lambda(x)$ 的信息已经都有了,唯一需要的是给出具体的参数分布,然后就可以通过积分确定 $\lambda(x)$ 。一个合适的温度和密度分布是:

$$\left. \begin{aligned} \tau(\rho) &= 1 - \rho^2 \\ N(\rho) &= 1 - \rho^6 \end{aligned} \right\} \quad (15.227)$$

这里  $\rho = x/a$ ,  $-1 \leq \rho \leq 1$ 。温度峰化因子取通常的值  $T(0)/\bar{T} = 2$ , 密度分布更平坦些, 这也和实验观察相符, 它的峰化因子  $n(0)/\bar{n} = 4/3$ 。

把这些分布和积分变量变换  $\rho^2 = 1 - 1/y$  代入式(15.226), 阻尼率系数的表达式简化为:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(y) &= \pi^{1/2} \frac{\Omega_e a}{c} \frac{\omega^2}{1 - \omega^2} I(y) \\ I(y) &= \zeta_0^3 \int_{y_c}^{\infty} \frac{y^3 e^{-\zeta_0^2 y} dy}{(y-1)^{7/2} D} \end{aligned} \right\} \quad (15.228)$$

这个复杂的积分  $I(y)$  可以通过两个近似相当精确地算出来。这两个近似是基于典型的反应堆参数  $\Omega_e a/c \sim 5 \times 10^3 \gg 1$ ,  $\zeta_0 \sim 2$  做出的。第一个近似是假设  $\zeta_0^2 \gg 1$ , 这是合理的, 尽管不是那么高度精确。第二个近似是从密度分布的形状来的。因为密度分布一直到半径很大的地方都很平, 在  $D$  的表达式直接取  $N \approx 1$  只会带来很小的误差。在这些近似下, 积分  $I(y_c)$  和阻尼系数  $\lambda(y_c)$  可以简化为:

$$I(y_c) \approx \frac{\zeta_0^3}{3 - 2\omega^2} \lim_{\zeta_0 \rightarrow \infty} \int_{y_c}^{\infty} \frac{y^3 e^{-\zeta_0^2 y} dy}{(y-1)^{7/2}} \approx \frac{\zeta_0}{(3 - 2\omega^2)} \frac{y_c^3 e^{-\zeta_0^2 y_c}}{(y_c - 1)^{7/2}} \quad (15.229)$$

和

$$\lambda(y_c) = \pi^{1/2} \frac{\Omega_e a}{c} \frac{\omega^2}{(1 - \omega^2)(3 - 2\omega^2)} \frac{\zeta_0 y_c^3 e^{-\zeta_0^2 y_c}}{(y_c - 1)^{7/2}} = 3 \quad (15.230)$$

式(15.230)应当看作  $y_c$  的一个超越方程。它的解及其意义也许最好用具体数值例子来说明。对应于典型反应堆参数,  $B_0 = 4.7 \text{ T}$ ,  $a = 2 \text{ m}$ ,  $T_k(0) = 2 \bar{T}_k = 30$ ,  $n_{20}(0) = (4/3) \bar{n}_{20} = 2$ , 有  $\alpha = 0.93$ ,  $\omega^2 = 0.61$  (等效于  $f = 1.5 \text{ GHz}$ ),  $n_{\parallel}^2 = 2.5$ 。还有  $\Omega_e a/c = 5.5 \times 10^3$ ,  $\zeta_0 = 1.8$ 。式(15.230)的数值解可以很容易计算, 得到  $y_c = 2.85$ 。

最后, 把这个值代回到  $x_c$  的定义中, 可以得到:

$$\frac{|x_c|}{a} = 0.81 \quad (15.231)$$

经过一系列复杂的计算, 我们得到了希望得到的信息。结论是: 对于典型的反应堆参数, 慢波在被完全削弱前只能在等离子体中传播一小段距离。电流只有在狭窄的外部区域内可以被驱动。



### 15.9.4 低杂波电流驱动

这一小节将描述整章分析中我们最感兴趣的一部分,计算由低杂波驱动的非感应电流。分析包含对无碰撞阻尼计算的直接扩展。前几节的无碰撞阻尼计算用来计算朗道阻尼的  $\omega_i$  和  $k_{\perp i}$ ,并将注意力集中在共振粒子的能量吸收上。现在的讨论将扩展这个分析到包含动量吸收。这个动量吸收是由非对称的  $n_{\parallel}$  谱引起的。共振粒子动量吸收与试图把等离子体恢复到麦克斯韦分布的电子-离子碰撞拖曳力相互平衡,就可以导出驱动电流的大小、驱动电流的分布、电流驱动效率等表达式。这些信息是我们本章分析的主要目标。

注意到,通过把单粒子运动作为一个初值问题,不仅可以确定由波-粒子共振相互作用引起的能量增加,也可以确定动量的增加。对于扩展的朗道共振而言,只有  $E_{\parallel}$  分量才是重要的。这时,电子运动方程简化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{e}{m_e} E_{\parallel} \cos(\omega t - k_{\perp} x - k_{\parallel} z) \\ &\approx -\frac{e}{m_e} E_{\parallel} \cos(\omega t - k_{\parallel} z), & v_z(0) &= v_{\parallel} \\ \frac{dz}{dt} &= v_z & z(0) &= z_i \end{aligned} \right\} \quad (15.232)$$

考虑数学上的简化,在动量方程中略去了  $k_{\perp} x$  项。保留这一项将导致出现贝塞尔函数,就如同在式(15.133)中那样。但是对于  $l=0$  朗道共振来说,在小回旋半径条件下,贝塞尔函数趋近于1。因此,在一开始就忽略这些项会为数学推导带来极大的简化。

运动方程的解可以通过微扰展开法获得。令  $v_z = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$ ,  $z = z_0 + z_1 + z_2 + \dots$ , 零阶和一阶解分别为:

零阶:

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= v_{\parallel} \\ z_0 &= z_i + v_{\parallel} t \end{aligned} \right\} \quad (15.233)$$

一阶:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{e}{m_e} E_{\parallel} \frac{\sin(k_{\parallel} z_i - \bar{\omega} t) - \sin(k_{\parallel} z_i)}{\bar{\omega}} \\ z_1 &= \frac{e}{m_e} E_{\parallel} \left[ \frac{\cos(k_{\parallel} z_i - \bar{\omega} t) - \cos(k_{\parallel} z_i)}{\bar{\omega}^2} - \frac{t \sin(k_{\parallel} z_i)}{\bar{\omega}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (15.234)$$

这里  $\bar{\omega} = \omega - k_{\parallel} v_{\parallel}$ 。

能量的改变和新增的动量的改变可以写成：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_e v_z^2}{2} \right] &= -e \left[ v_0 E_z(z_0, t) + v_0 \frac{\partial E_z(z_0, t)}{\partial z_0} z_1 + v_1 E_z(z_0, t) \right] \\ \frac{d}{dt} (m_e v_z) &= -e \left[ E_z(z_0, t) + \frac{\partial E_z(z_0, t)}{\partial z_0} z_1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (15.235)$$

需要对这两个量对初始位置进行平均, 然后对速度  $v_{\parallel}$  进行积分。经过简短计算显示, 对初始位平均后可以得到：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{W}}{dt} &= \frac{e^2 E_{\parallel}^2}{2m_e k_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left[ \frac{\omega \sin \bar{\omega} t}{\omega} - \sin \bar{\omega} t \right] \\ \frac{d\bar{P}}{dt} &= \frac{e^2 E_{\parallel}^2}{2m_e} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left[ \frac{\sin \bar{\omega} t}{\omega} \right] \end{aligned} \right\} \quad (15.236)$$

这里,  $\bar{W} = m_e v_z^2 / 2$ ;  $\bar{P} = m_e v_z$ 。

对麦克斯韦分布, 单位体积内由共振粒子吸收的功率由下式给出：

$$S_L = \int \frac{d\bar{W}}{dt} f_M d\mathbf{v} = \pi^{1/2} \epsilon_0 E_{\parallel}^2 \left[ \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \right] \zeta^3 e^{-\lambda - \zeta^2} \quad (15.237)$$

这里  $\zeta = \omega / k_{\parallel} v_{Te}$ 。而且  $E_{\parallel}^2$  已经由  $E_{\parallel}^2 \exp(-\lambda)$  代替, 这里  $\lambda(x)$  由式(15.230)给出。这个因子代表了由于朗道阻尼导致波振幅的衰减。稍后, 我们用这个  $S_L$  来计算电流驱动效率。

最后一个感兴趣的量是驱动电流。可以通过简单应用动量平衡得到这个电流。这里的基本关系如下。共振电子的动量增加需要和离子碰撞拖曳导致的动量损失相互平衡, 后者倾向于恢复分布函数到麦克斯韦分布(因为电子-电子碰撞中总动量守恒, 因此其效应为零)。数学上, 动量平衡有下面的形式：

$$d\bar{P}/dt = -m_e v_{ei} \Delta v_z \quad (15.238)$$

这里  $\Delta v_z = \bar{v}_z - v_{\parallel}$  是初始位置平均的平行速度相对于麦克斯韦分布的偏离,  $v_{ei}$  是电子-离子碰撞频率, 由式(9.49)给出, 这里再次写出来：

$$v_{ei}(v) = \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{e^4 n_i}{\epsilon_0^2 m_e} \ln \Lambda \right] \frac{1}{v^3} \quad (15.239)$$

其中  $v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2$ 。

接下来, 注意到把单个粒子的动量变化对所有粒子速度积分, 得到稳态下驱动的电流：

$$J_{\text{CD}} = -e \int \Delta v_z f_M \mathbf{d}\mathbf{v} \quad (15.240)$$

利用动量平衡,上式意味着:

$$J_{\text{CD}} = \frac{e}{m_e} \int \left[ \frac{1}{v_{ei}} \frac{d\bar{P}}{dt} \right] f_M \mathbf{d}\mathbf{v} \quad (15.241)$$

把积分函数里的各个量代入,对速度空间积分,就可以得到驱动电流  $J_{\text{CD}}$ 。利用分部积分,并把速度对热速度归一化,经过简短计算可以得到:

$$J_{\text{CD}} = \frac{e^3 E_{\parallel}^2 n e^{-\lambda}}{\pi^{1/2} m_e^2 v_0 v_{Te}} \int \frac{\sin \bar{\omega} t}{\bar{\omega}} u u_{\parallel} (2u^2 - 3) e^{-u^2} u_{\perp} du_{\perp} du_{\parallel} \quad (15.242)$$

这里  $v_0 = v_{ei}$  ( $v = v_{Te}$ )。与能量吸收计算一样,  $u_{\parallel}$  积分可以很容易进行。在  $t \rightarrow \infty$  的极限下,可以得到稳态电流驱动。这时,  $\sin(\bar{\omega} t) / \bar{\omega}$  趋近于  $\delta$  函数。在所有项中令  $u_{\parallel} = \omega / (k_{\parallel} v_{Te}) = \zeta$ ,  $J_{\text{CD}}$  的表达式可以简化为:

$$\left. \begin{aligned} J_{\text{CD}} &= \pi^{1/2} \epsilon_0 E_{\parallel}^2 \left[ \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \right] \left[ \frac{e}{m_e v_0 v_{Te}} \right] e^{-\lambda - \zeta^2} G(\zeta) \\ G(\zeta) &= \zeta^2 \int_0^{\infty} (u_{\perp}^2 + \zeta^2)^{1/2} (2u_{\perp}^2 + 2\zeta^2 - 3) e^{-u_{\perp}^2} u_{\perp} du_{\perp} \end{aligned} \right\} \quad (15.243)$$

注意到以前的分析中提到,我们感兴趣的区域对应于  $\zeta^2 \gg 1$ ,因此可以对函数  $G(\zeta)$  做合理近似。在这个区域内,  $G(\zeta) \approx \zeta^5$ 。利用这个近似,得到  $J_{\text{CD}}$  最后的形式:

$$J_{\text{CD}} = \pi^{1/2} \epsilon_0 E_{\parallel}^2 \left[ \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \right] \left[ \frac{e}{m_e v_0 v_{Te}} \right] \zeta^5 e^{-\lambda - \zeta^2} \quad (15.244)$$

第一个感兴趣的性质是驱动电流的分布。图 15.27 给出了一个  $J_{\text{CD}}/J_{\text{CDmax}}$  对  $x/a$  分布的数值示例,其中参数是我们一直考虑的反应堆级的参数。注意到电流在临界面  $x/a \approx x_c/a \approx 0.81$  附近剧烈地峰化。低杂波慢波在等离子体外部边缘附近驱动电流。这个结论在反应堆温度下是不可避免的。具体而言,结合方程(15.230),  $x_c$  的定义暗含着一个近似的定标关系:  $1 - x_c^2/a^2 \propto 1/T$ 。如果温度能显著地低于反应堆中的温度,可以在靠近等离子体中心附近驱动电流。通过基于动理学理论的更仔细的计算,可以知道,对于  $T_k \leq 5 \text{ keV}$ ,有可能在磁轴附近驱动等离子体电流。

现在考虑一个重要问题:电流驱动效率  $\eta_{\text{CD}}$ ,它决定了每瓦功率注入能驱动多少电流。就目前分析而言,定义如下:

$$\eta_{\text{CD}} = \frac{I_{\text{CD}}}{P_{\text{CD}}} = \frac{\int J_{\text{CD}} dA}{2\pi R_0 \int S_{\perp} dA} \quad (15.245)$$

我们注意到,如果画出  $S_L$  对  $x/a$  的曲线,会发现它几乎完全和图 15.27 中  $J_{CD}$  对  $x/a$  的曲线重叠,在这种情况下,截面积分可以做很精确的近似。原因是两个函数中强的指数依赖项  $\exp(-\lambda - \zeta^2)$  都是一样的。因此,

$$\frac{\int J_{CD} dA}{\int S_L dA} \approx \frac{J_{CD}(x_J)}{S_L(x_J)} \approx \frac{\zeta^2 e}{m_e v_0 v_{Te}} \Big|_{x=x_J} \quad (15.246)$$

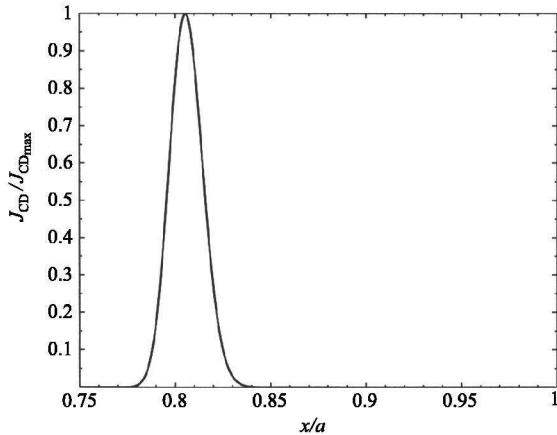


图 15.27 归一化电流分布作为归一化位置的函数  
(电流峰值在临界面  $x/a=0.81$  附近)

这里  $x_J \approx x_c$  对应于电流密度峰值的位置。有趣的是,在比率  $\zeta^2/v_0 v_{Te}$  中,温度分布精确地相互抵消,唯一保留的空间依赖性体现在  $v_0$  的密度中。由于密度是平坦的,我们可以令  $n(x_J) \approx n(0) = (4/3)n^-$  只会带来很小的误差。经过这些简化,可以得到我们所期待的电流驱动效率:

$$\eta_{CD} = \frac{I_{CD}}{P_{CD}} = \frac{1.17}{n_{\parallel}^2 R_0 n_{20}} = 0.047 \quad (\text{A/W}) \quad (15.247)$$

在反应堆中,驱动 1 A 电流大概需要 20 W 功率。

可以看到,如果要驱动托卡马克反应堆中的所有电流,即大约 20 MA 量级的电流,需要注入 400 MW 的功率。显然,对于 1000 MW 的反应堆而言,这个功率注入在经济上是不可接受的。这也是为什么在等离子体中需要具有可观自举电流的原因。高自举电流可以在先进托卡马克运行方式下产生,它对于减少对电流驱动系统的要求是必不可少的。

### 15.9.5 小结

低杂波慢波是目前在托卡马克中最有效的驱动稳态非感应离轴电流的方法。

1.5 GHz 的高功率速调管可以很容易得到,成本大概是 3 美元/W。最大的技术问题是需要把波导发射阵列放置得尽可能靠近等离子体边缘,以阻止由于必然存在的边缘截止区造成的强反射。

对于典型的反应堆温度,低杂波的可近性使得电流只能在等离子体边缘附近被驱动。低一些的温度允许更加深入等离子体内部的电流驱动。然而,离轴电流对于匹配自举电流、建立等离子体边缘附近的输运壁垒也是需要的。这样的输运壁垒在等离子体运行中常常需要的。

反应堆设计中的一个临界参数是电流驱动效率。从已进行的分析可以看出,对于典型的托卡马克反应堆。这个效率由下式给出:

$$\eta_{\text{CD}} = \frac{I_{\text{CD}}}{P_{\text{CD}}} = \frac{1.17}{n_{\parallel}^2 R_0 n_{20}} = 0.047 \quad (\text{A/W}) \quad (15.248)$$

因此驱动 1 A 电流大约需要 20 W 功率。尽管这个效率比其他电流驱动效率都高,但对于驱动聚变堆的所有电流来说,这个效率仍然还太低。因此可观的自举电流仍然是需要的,它可以减少电流驱动系统到可以和反应堆的经济性相匹配的程度。而高的自举电流要求采用先进托卡马克运行模式。

## 15.10 本章总结

等离子体必须首先被加热到 5 ~ 7 keV 的温度以使  $\alpha$  功率成为主要的加热源。在温度升高到 5 ~ 7 keV 之前, $\alpha$  自加热可以被忽略,需要欧姆加热和辅助功率来补偿热传导和韧致辐射造成的功率损失。而且,一旦实现点火,需要非感应的电流驱动来维持等离子体的稳态运行。

本章描述了几种加热方法。欧姆加热从技术上是最简单的,但是等离子体电阻率随温度增加而减小,因此在典型反应堆参数下,欧姆加热只能加热等离子体到  $T \leq 3$  keV。需要其他的加热手段。

中性束加热对于目前的等离子体是一种非常有效的加热手段。中性束加热的基本物理与经典碰撞过程密切相关,因此应该能可靠地外推到未来的大装置,如 ITER 和聚变反应堆中。最主要的问题是技术上的。当束能量大于 100 keV 后,束转换效率急剧下降,因此目前的正离子驱动的中性束系统不能很好地扩展到未来大装置的工作区域。为克服这个困难,需要发展高能的负离子源驱动的中性束系统。这有技术上的困难,但有望于 ITER 使用时按时得以解决。

多种射频波已经被应用来作为辅助加热的源。无论是电子回旋加热还是离子回旋加热都可以在下一代大实验装置乃至反应堆的等离子体中心产生大比例的功

率吸收。这些加热由无碰撞回旋阻尼产生,它依赖于在波频率等于局域回旋频率或其谐波频率发生的强烈的波-粒子共振相互作用。电子回旋加热是二者中较简单的一个。由于短的波长,它可以非常局地地产生加热效应。但电子回旋加热最大的问题是缺乏高功率稳态回旋管。对应于基频回旋频率共振的 140 GHz 源有望按时为 ITER 所用。离子回旋加热使用低得多的频率,而低频率的高功率稳态真空管可以很容易得到。这里,功率吸收机制更复杂,需要少数离子加热和二次谐波加热相结合。离子回旋加热面临的最大问题是需要一套位于真空容器内部的天线系统,这套系统需要放置得尽可能靠近等离子体边缘以确保好的耦合。

总的来说,没有单独一种加热方法看起来比其他所有方法都高出一筹。上面描述的每一种方法都可以取得好的加热效果,但每一种方法都面临技术问题,要么与源有关,要么与天线有关。这种状态使得 ITER 设计了多种加热手段,以便决定那种手段从可靠性和费用上是我们最需要的。

本章最后一部分讨论的是低杂波电流驱动。这种方法具有最高的电流驱动效率,并可以驱动离轴电流。这种离轴电流对于匹配自然产生的自举电流和在等离子体边缘建立输运壁垒是必需的。低杂波电流驱动由频率在电子和离子回旋频率之间的波通过无碰撞朗道共振来实现。速调管功率源是容易获得的。低杂波电流驱动最大的技术问题也是需要把天线阵列靠近等离子体边缘以获取好的耦合。最大的物理问题是近似 0.047 A/W 的电流驱动效率对于经济地驱动托卡马克反应堆中的所有电流来说还是太低。这个结论要求高的自举电流份额,因此需要采用先进托卡马克运行模式。

## 参考书目

很多年前人们就已熟知欧姆加热和中性束加热技术,这些技术在许多参考书中都有描述,下面列出的是其中的几本。射频加热和电流驱动技术也同样如此,但是,由于涉及相对复杂的等离子体物理,因此关于这方面已有几本专著和几篇较长的综述文章,其中主要的一些参考文献列出如下。

### 1. 欧姆加热

- Chen, F. F. (1984). *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, second edn. New York: Plenum Press.
- Coppi, B. (1977). Compact experiment for  $\alpha$ -particle heating. *Comments on Plasma Physics and Controlled Fusion*, **III**, 47.
- Wesson, J. (2004). *Tokamaks*, third edn. Oxford: Oxford University Press.

### 2. 中性束加热

- Sweetman, D. R., Cordey, J. G., and Green, T. S. (1981). Heating and plasma interactions with beams of energetic neutral atoms. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **A 300**, 589.

Stork, D. (1991). Neutral beam heating and current drive systems. *Fusion Engineering and Design*, **14**, 111.

### 3. 射频波一般知识

Brambilla, M. (1998). *Kinetic Theory of Plasma Waves, Homogeneous Plasmas*, International series on Monographs on Physics 96. Oxford: Oxford University Press.

Cairns, R. A. (1991). *Radio Frequency Heating of Plasmas*. Bristol: Adam Hilger

Hwang, D. Q. and Wilson, J. R. (1981). Radio frequency wave applications in magnetic fusion devices. *Proceedings of the IEEE*, **69**, 1030.

Porkolab, M. (1977). Review of RF heating. In *Theory of Magnetically Confined Plasmas. Proceedings of the International School of Plasma Physics, Varenna*. Oxford: Pergamon Press.

Stix, T. H. (1989). *Waves in Plasmas*, second edn. New York: American Institute of Physics.

Swanson, D. G. (1989). *Plasma Waves*. San Diego: Academic Press.

Wesson, J. (2004). *Tokamaks*, third edn. Oxford: Oxford University Press.

### 4. 朗道阻尼

Landau, L. D. (1946). On the vibrations of the electronic plasma. *Journal of Physics (USSR)*, **10**, 25.

Stix, T. H. (1992). *Waves in Plasmas*, 2nd edn. New York: American Institute of Physics.

### 5. 电子回旋加热

Manheimer, W. M. (1979). *Electron Cyclotron Heating in Tokamaks*, Vol. II (Button, K. J., editor). New York: Academic Press.

Bornatici, M., Cano, R., *et al.* (1983). Electron cyclotron emission and absorption in fusion plasmas. *Nuclear Fusion*, **23**, 1153.

### 6. 离子回旋加热

Hwang, D. Q. (1985). The theory of minority species fast magnetosonic wave heating in a tokamak. In *Wave Heating and Current Drive in Plasmas* (Granastein, V. L., and Colestock, P. L., editors). New York: Gordon and Breach.

Stix, T. H. (1975). Fast wave heating of a two component plasma. *Nuclear Fusion*, **15**, 737.

Swanson, D. G. (1985). Radio frequency heating in the ion-cyclotron range of frequencies. *Physics of Fluids*, **28**, 2645.

### 7. 低杂波加热与电流驱动

Bonoli, P. (1985). Linear theory of lower hybrid waves in tokamak plasmas. In *Wave Heating and Current Drive in Plasmas* (Granastein, V. L. and Colestock, P. L., editors). New York: Gordon and Breach.

Fisch, N. J. (1978). Principles of current drive by Landau damping of traveling waves. *Physical Review Letters*, **41**, 873.

Fisch, N. J. (1987). Theory of current drive in plasmas. *Reviews of Modern Physics*, **59**, 175.

Porkolab, M. (1985). Lower hybrid wave propagation, heating and current drive experiments. In *Wave Heating and Current Drive in Plasmas* (Granastein, V. L., and Colestock, P. L., editors). New York: Gordon and Breach.

## 习 题

**15.1** 一个理想导体圆柱波导,圆截面半径为  $a$ ,用以传播频率  $\omega$ ,沿波导轴向波数  $k$  的  $TE$  波。为简化起见,考虑具有非零分量  $E_z, B_r, B_z$  的轴对称模式(即  $\partial/\partial\theta=0$ )。所有量都是  $r, z, t$  的函数。

- ① 推导描述模径向结构的常微分方程。
- ② 确定波传播的色散关系。
- ③ 如果  $a=0.03$  m,计算可以传播的最低频率。

**15.2** 本题计算习题 15.1 中描述的圆柱波导中消耗在壁上的功率。具体来说,我们希望算出输出功率衰减 10% 的波导长度。这可以通过将射频功率源放置得离等离子体真空室有多远才能避免严重的输入能量耗散损失来估计。要精确求解这个问题是相当繁杂的。不过,可以利用迭代方法,用习题 15.1 中解出的波导中的场作为最低阶的场,这种情况对应于理想完全导体波导,然后用摄动的方法计算有限电导效应。

① 考虑波导中的场。假设波导有电导率  $\sigma$ 。并且假设波导壁足够薄,允许我们用平板几何来描述,“径向”坐标  $x$  由  $r=a+x$  定义。同时波导壁又足够厚,使得场能够在穿透壁后完全衰减至零。实践中,这些条件要求  $\delta \ll d \ll a$ ,这里  $\delta$  是趋肤深度, $d$  是波导厚度。非零场  $E_z, B_r, B_z$  以  $\exp(-i\omega t + ikz - x/\delta)$  的关系变化。利用麦克斯韦方程,确定波导壁中的场和趋肤深度。忽略位移电流并假设  $\delta^2 \ll k^2$  可以简化计算,这两个条件都是很好的近似。

② 利用无论壁的电导率是有限大还是无限大,真空中的  $B_z$  都不会发生太大变化这个事实,将波导壁中的场和波导中的真空场联系起来。因此越过波导壁的匹配条件是  $[[B_z]] = 0$ 。用真空中  $B_z$  的幅度表示波导场的每一个分量。

③ 现在假设  $|B_z|^2 = |B_z(0)|^2 \exp(-2z/L)$  是个由于耗散损失随  $z$  缓慢减小的函数。通过对相隔微分元  $dz$  的两个圆截面区域上的真空坡印亭矢量积分,计算波导中传输功率的微分损失 ( $dP_s/dz$ )。

④ 计算在同样片段波导壁上的微分耗散功率 ( $dP_D/dz$ )。

⑤ 利用功率平衡确定衰减长度  $L$ 。作为一个实际的低杂波系统例子,  $f=5 \times 10^9$  Hz,  $a=0.05$  m,  $\sigma=5 \times 10^7$  mho/m,计算  $L$ 。

**15.3** ITER, FIRE 和 IGNITOR 是 3 个计划中的下一代实验装置,目标是瞄准研究点火和  $\alpha$  粒子物理。本习题的目标是确定需要多少电流才能仅靠欧姆加热就能达到  $Q=10$ ,然后检查得到的参数是否符合磁流体不稳定性限制。

输入信息包含表 15.2 给出的每个装置的设计参数。

表 15.2

	ITER	FIRE	IGNITOR
$I_{AM}$ (AM)	15	7.7	11
$B_0$ (T)	5.3	10	13
$a$ (m)	2.0	0.60	0.47
$R_0$ (m)	6.2	2.14	1.32
$\kappa$ (elongation)	1.7	1.81	1.83



续表 15.2

	ITER	FIRE	IGNITOR
$T_e$ (keV)	19	11	10.5
$T_i$ (keV)	19	11	10.5
$n_{20}$ ( $10^{20} \text{ m}^{-3}$ )	1.0	5.5	10

D-T 聚变的反应截面也是需要的, 一个很好的解析近似是:

$$\langle \sigma v \rangle = 10^{-6} \exp \left[ \frac{a_{-1}}{T_i^\alpha} + a_0 + a_1 T_i + a_2 T_i^2 + a_3 T_i^3 + a_4 T_i^4 \right] \quad (\text{m}^3/\text{s})$$

这里  $T_i = T_i$  (keV), 且

$\alpha$	$a_{-1}$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
0.2935	-21.38	-25.20	$-7.101 \times 10^{-2}$	$1.938 \times 10^{-4}$	$4.925 \times 10^{-6}$	$-3.984 \times 10^{-8}$

最后, 对于欧姆加热托卡马克, 通常认为能量约束由 L 模能量约束时间确定:

$$\tau_L = 0.048 \frac{I^{0.85} R_0^{1.2} a^{0.3} \kappa^{0.5} n_{20}^{0.1} B_0^{0.2} A^{0.5}}{P^{0.5}} \quad (\text{s})$$

这里,  $A = 2.5$  是 50% D 和 50% T 混合燃料的平均质量数,  $P = P$  (MW) 是总加热功率。对于欧姆加热高增益 (高  $Q$ ) 系统,  $P = P_\alpha + P_\Omega$ 。当计算欧姆加热功率时, 使用新经典电阻率  $\eta \approx \eta_{\text{classical}} / (1 - \epsilon)^2$ 。

假设密度和温度和温度分布:

$$\begin{aligned} T_e &= 2\bar{T}_e(1 - \rho^2) \\ T_i &= 2\bar{T}_i(1 - \rho^2) \\ n &= (1 + v)\bar{n}(1 - \rho^2)^v \end{aligned}$$

这里  $\rho^2 = x^2/a^2 + y^2/\kappa^2 a^2$ ,  $\bar{Q}$  表示对椭圆截面的面积  $Q$  的平均,  $v$  是一个自由参数, 用以给出密度的峰化因子。对于欧姆放电, 电流分布和温度分布通过  $J = J_0(T_e/T_{e0})^{3/2}$  联系在一起。

忽略韧致辐射损失。暂时不要管表 15.2 给出的  $I_{MA}$ , 这个值只是用来参考。计算每个装置中要达到增益  $Q = 10$  所需要的电流  $I_{MA}$ , 并作为分布因子  $v$  的函数。需要做数值积分完成这一步。知道了  $I_{MA}$ , 对每一个装置计算  $q_*$  和  $\beta_N$ 。把这些结果化成一组  $I_{MA}$  对  $v$  的曲线。和表 15.2 中对应的设计值做比较。然后, 在同一张图上画出 3 个装置的  $q_*$  对  $v$  的曲线, 同时把扭曲模不稳定条件画上去。最后, 在一张图上画出 3 个装置中的  $\beta_N$  对  $v$  的曲线, 并画出特鲁瓦永稳定极限。对于  $Q = 10$  欧姆运行的可能性可以得到什么样的结论?

**15.4** 本题计算欧姆加热下柱形螺旋箍缩等离子体运行在“稳态”放电平台时的自洽的压力分布。等离子体可以用电阻性磁流体力学模型描述。待求的量有  $p = p(r)$ ,  $E = E_0 e_z$ ,  $B = B_0 e_z + B_\theta e_\theta$ 。这里  $E_0, B_0$  都是已知常数。

① 推导压强  $p(r)$  应满足的微分方程。可利用的信息包括: 麦克斯韦方程、压力平衡、平行欧姆定律、理想气体定律、经典电阻率  $\eta = C_\eta / T^{3/2}$  和假设的密度温度关系  $n(r) = n_0 (T/T_0)^{1/2}$ 。最后的结果应该是一个二阶常微分方程。可以引入归一化变量  $x, B(x), P(x)$  来简化方程形式, 定义如下  $r = ax, B_\theta(r) = B_1 B(x), p(r) = (B_1^2 / \mu_0) P(x)$ 。这里  $a$  是特定等离子体半径,  $B_1 = C_\eta n_0 /$

$aE_0 T^{1/2}$  都是已知常量。

② 引入变换  $x = \exp(-y)$ ,  $P(x) = \exp[-V(y) + 2y]$ , 微分方程可以化为简单的形式。在条件  $P(0) = P_0, P'(0) = 0$  下求解这个方程, 并画出  $P(x)$  图像。

**15.5** 一个创新性的建议是让强激光通过稠密等离子体柱来得到聚变等离子体。激光经碰撞吸收来加热等离子体。为了研究这种方法, 考虑等离子体离子质量无穷大即下列平衡条件:  $n_e = n_i = n_0, p_e = p_i = p_0, \mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_i = 0$ 。为简化起见, 假设激光沿等离子体柱一维传播(即忽略波在垂直径向上的依赖关系)。

① 推导 TEM 电磁波在等离子体中传播的色散关系。注意在电子动量方程中包含电子离子碰撞效应。

② 假设频率  $\omega$  给定,  $v_{ei} \ll \omega$ , 计算  $k = k_r + ik_i$ 。

③ 考虑  $n_0 = 10^{24} \text{ m}^{-3}$ ,  $v_{ei} = 4 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ , 如果等离子体长度等于波的衰减长度, 即  $L = 1/k_i$ , 则等离子体柱的长度  $L$  是多少? 这个结果看起来可行吗?

**15.6** 真空中沿  $z$  方向传播的电磁波, 频率为  $\omega$ , 波数为  $k$ 。非零的场分量是  $E_x$  和  $B_y$ 。波垂直射向一个半无界的平板等离子体, 其界面位于  $z=0$  处。等离子体是冷的和均匀的, 密度为常数  $n$ , 外加稳恒磁场可以忽略, 电子-离子动量交换碰撞频率很小但不为零。波频率足够高, 离子可以认为质量无穷大。

① 计算波在等离子体中传播的色散关系。

② 边界处匹配, 决定等离子体中的场和从界面反射的波的幅度。用入射电场幅度  $E_0$  来表示。

③ 定义吸收效率为  $\eta = \text{Re}(S_p)/\text{Re}(S_m)$ , 这里  $S_m$  是入射坡印亭流,  $S_p$  是等离子体界面内坡印亭流。计算  $\eta = \eta(\omega)$ , 确定对应于最大吸收的频率值。它等于等离子体频率吗?

**15.7** 一个一维等离子体腔, 厚度  $a = 8 \text{ cm}$ 。开始时等离子体腔是空的, 即真空。一束波长  $8 \text{ mm}$  的 TEM 波穿过腔体, 在  $x=0$  和  $x=a$  处记录到的相移是  $\Delta\phi_1$ 。充入密度为  $n$  的等离子体, 再次重复实验, 得到的相移是  $\Delta\phi_2$ 。两次相移之差是  $\Delta\phi_1 - \Delta\phi_2 = \pi/5$ , 问等离子体密度是多少?

**15.8** 用下面的简单模型研究中性束加热托卡马克的稳定性。电子是温度为  $T_e$ , 密度为  $n_0$  的绝热流体, 即忽略电子惯性和动量方程中的碰撞。背景离子是冷流体, 密度为  $n_i$ 。中性束以单一速度  $v_0$  (无热展宽) 平行于磁场注入。它很快被电离, 在短时间内可以忽略能量和动量的损失。束密度  $n_b \ll n_i$ 。

① 计算沿平行于磁场的低频静电波的色散关系。

② 计算不稳定发生时  $v_0$  的条件。这个不稳定性可能发生在实际情况下吗? 解释之。

**15.9** 本题研究在电子回旋加热下热效应对冷等离子体介电张量的影响。考虑无穷均匀等离子体, 平衡磁场  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ 。电子平衡满足  $n = n_0, T = T_0$ 。离子假设是冷的, 有无穷大质量。利用电子流体方程计算介电张量。忽略碰撞项, 但保留电子压强项, 计算对应于  $k_{\parallel} = 0$  这一电子回旋加热感兴趣情况下介电张量元。

**15.10** 利用习题 15.9 的结果, 说明 O 模色散关系不会受热效应影响。

**15.11** 利用习题 15.9 的结果, 研究热效应对 X 模色散关系的影响。假设外部低场侧入射, 中平面平衡参数分布如下:

$$B_0(r) = B_a \left[ \frac{R_0}{R_0 + r} \right]$$

$$n_0(r) = n_a \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} \right]$$

$$T_0(r) = T_a \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} \right]$$

$B_a = 5 \text{ T}$ ,  $n_a = 3.6 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ ,  $T_a = 5 \text{ keV}$ ,  $R_0 = 1 \text{ m}$ ,  $a = 0.35 \text{ m}$ 。选择对应于等离子体中心处的二次回旋共振的波频。画出 X 模色散关系  $n_{\perp}^2 \equiv (k_{\perp} c / \omega)^2$  对  $r$  的图像。同时同一张图上画出  $T_a = 0$  时的曲线用以比较。当考虑热效应, 在二次谐波加热是不是仍然是可能的? 解释之。

**15.12** 本习题的目的是计算波共振处的功率沉积。假设用包含小碰撞频率的冷等离子体模型来精确地描述其中的物理。为简单起见, 考虑各项同性等离子体, 其局域折射率  $n^2 = n^2(\omega, x)$ 。在一给定点  $x = x_0$  处有波共振这意味着:

$$n^2(x) \approx \frac{C(x_0)}{\omega - \omega_R(x)}$$

这里  $\omega = \omega_R(x_0)$  是共振频率。

① 为了计算功率吸收, 先从  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = 0$  的电磁波的介电张量的定义出发得到电导率  $\sigma$ ;

② 利用  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , 从关系  $P_D/A = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* dx$  计算单位面积上的功率吸收。注意, 在没有碰撞时, 表达式在  $x = x_0$  有一个奇点。假设一个小的碰撞频率, 可以去掉这个奇点。最简单的做法是直接按照原来按照  $\exp(-i\omega t)$  变化的改为  $\exp(-i\omega t - \nu t)$ 。因此,  $n^2$  分母上的奇点就可以通过把  $\omega$  变为  $\omega - i\nu$  去掉。注意到在小碰撞率下, 吸收层仍然是窄的, 计算可以进一步简化。因此可以通过把所有量在  $x = x_0$  附近展开较容易地得到功率积分。证明: 在小碰撞率条件下, 功率沉积和碰撞率  $\nu$  无关, 有下面的表达式:

$$\frac{P_D}{A} = \frac{\pi \omega_R \epsilon_0 |E|^2 C}{(d\omega_R/dx)} \Big|_{x=x_0}$$

**15.13** 本题研究另一种利用离子回旋频率范围的波加热等离子体的可能方法。思路是在两种离子种类的等离子体中产生波共振。可以假设波在共振层发生模转换, 转换后的动理学波可以继续传播直到被无碰撞阻尼吸收。由于波截止通常出现在波共振附近, 因此关键问题是考虑可近性。波能否在它遇到截止区之前就到达共振呢? 这个问题可以用冷等离子体色散关系解决。考虑一个具有两种不同离子、由离子回旋波加热的等离子体。

① 利用电荷准中性, 证明在感兴趣的频率范围,  $n_{\parallel}^2 = 0$  的色散关系可以写成:

$$n_{\perp}^2 = \frac{\sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i(\omega + \Omega_i)} \sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i(\omega - \Omega_i)}}{\sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega^2 - \Omega_i^2)}}$$

这里求和只对离子进行。

② 计算两种离子杂化共振发生的频率  $\omega_R$ 。证明  $\omega_R$  在两个回旋频率之间。

③ 计算截止频率  $\omega_C$ 。证明频率  $\omega_C$  在两个回旋频率之间。

④ 证明  $\omega_C > \omega_R$ , 如果我们想获得在遇到波截止前到达波共振的可近性, 需要低场侧注入还是高场侧注入?

# 第 16 章 聚变研究的未来

## 16.1 引言

我们已经对聚变能发展所面临的等离子体物理方面的主要问题进行了讨论:①宏观平衡和稳定性;②输运和③加热与电流驱动。有了这些知识准备,我们可以对核聚变研究的现状进行评估并探求未来国际聚变计划应向什么方向发展。这些构成第 16 章的内容。首先,对托卡马克装置的上述等离子体物理的三个主要方面的研究现状做一简单概述,接下来讨论国际聚变计划的下一个主要核聚变实验:国际聚变实验堆(ITER)。如果 ITER 建成并成功运行,我们就能进一步设计建造示范性聚变核电厂(DEMO)。

## 16.2 等离子体物理研究现状

尽管本书的大部分材料适用于众多拟用的聚变概念,但这里的讨论主要集中在托卡马克位形上,因为作为一种聚变反应堆途径,这一位形无论是在实验等离子体物理方面的实际表现上,还是在未来聚变反应堆的详细设计方面,都具有明显的领先优势。

下面简要介绍托卡马克等离子体物理研究的进展。聚变反应堆的基本点火条件由下式给出:

$$p \tau_E = \frac{24}{E_\alpha} \frac{T^2}{\langle \sigma v \rangle} \quad (16.1)$$

我们将看到,尽管还存在很有挑战性的未解决问题,但研究已取得了重大进展。

### 16.2.1 宏观平衡与稳定性

我们先来考虑出现在点火条件里的压强  $p$ 。在现有的聚变概念里,为防止大破裂的发生,压强可取得的上限值主要由宏观平衡和稳定性极限条件确定。磁流体力学模型能够很好地描述这种宏观平衡和稳定性极限条件。就托卡马克而言,总的来说,理论预言与实验观察结果符合得较好。因此,我们可以依据理论的可靠预言来确定下一代装置实验的压强极限。

根据实际表现,在标准模式下运行的托卡马克实验已经取得了反应堆所需的  $\beta$  值。这些值接近于无壁  $\beta$  极限的最大值。但相应的等离子体压强,由于磁场较小的原因,要小于反应堆所需的压强值。下一代的高场强实验应能实现高  $\beta$  和高压强。目前这方面的主要问题是高  $\beta$  和电流分布产生的自举电流太小,不足以减少对电流驱动的依赖性,而电流驱动是反应堆经济性达到可接受水平所必需的。

解决这一问题需要通过先进托卡马克运行方式来实现大比例的自举电流。不幸的是,实现这种大比例自举电流所需的  $\beta$  值超过了无壁  $\beta$  极限。在较高  $\beta$  值情形下,采用理想导体壁可产生稳定性。然而,由于实际导体壁都具有一定的电阻性,因此会激发起电阻壁模。如何稳定这种电阻壁模是当前实验装置和未来大型装置需要解决的重要课题。

### 16.2.2 输 运

托卡马克等离子体的主要运输机制是热传导,通常用点火条件下的能量约束时间  $\tau_E$  来刻画。经过解析理论和大规模计算的联合攻关,目前对芯部热运输基本机制的理解已经取得长足的进步。但是,对  $\tau_E$  基本规律的预言仍付阙如,依然是当前和未来聚变研究面临的巨大挑战。

还有一些与边界等离子体有关、直接影响到芯部运输的运输问题,这些问题包括:格林伍德密度极限、L-H 模转换的功率阈值以及边界局域模等。此外,对较低电流下先进托卡马克运行至关重要的内部运输垒的物理机制也不是十分清楚。

目前来看, $\tau_E$  以及与边界现象有关的判据的确定均是基于经验定标关系。这些关系在现有实验装置上十分有效,希望能可靠地外推到未来下一代托卡马克上。实际上,下一代实验装置的大小和造价直接取决于经验定标律对  $\tau_E$  的预言。发展存在大量高能  $\alpha$  粒子的热运输情形下的经验定标律也是未来面临的重大挑战。

最后,值得指出的是,新经典运输理论预言的自举电流值似乎与实验观测结果非常一致。对  $J_B$  的准确预言对于确定稳态运行条件下电流驱动系统的要求至关重要。了解  $\alpha$  粒子对自洽自举电流的作用是未来研究面临的另一项重大挑战。

### 16.2.3 加热与电流驱动

要满足点火条件中的  $p\tau_E$  乘积最小化要求,就必须达到使  $T^2/\langle\sigma v\rangle$  最小化的等离子体温度:  $T\approx 15$  keV。这可以通过两阶段过程来实现,先通过初始辅助加热功率将等离子体加热到约  $T$  为  $5\sim 7$  keV,然后  $\alpha$  粒子加热占主导,完成加热到  $T\approx 15$  keV。在现有装置上,我们已经对提供芯部加热的几种辅助加热方法进行了检验。这些方法包括:中性束加热、离子回旋加热(ICH)和电子回旋加热(ECH)。在现有装置上,对于密度低于反应堆要求的纯氦等离子体,已经取得了超过  $T$  为  $5\sim 7$  keV 的温度。总的来看,加热方法卓有成效,与理论预言符合得很好。这意味着(依据功率平衡和造价

考虑)合理的辅助加热功率是能够实现下一代装置或反应堆要求的加热目标的。而且根据目前的实验装置经验,单从等离子体物理方面考虑,一般认为中性束加热是最简单、最可靠的加热手段。因此这种方法将在 ITER 中发挥重要作用。

外推到 ITER 和反应堆的加热方法所面临的问题主要是技术层面的。中性束加热要求开发高能量负离子源作为驱动源。ECH 要求发展大功率稳态回旋管系统。ICH 则需要一种非常接近等离子体边缘的天线结构。这些都是当前和未来研究的课题。

与此相关的是电流驱动问题,它隐含着通过稳态运行进行点火的条件。低杂波电流驱动是目前可用的最有效的方法。同时它可以驱动离轴电流,这会带来匹配自然形成的自举电流分布的好处。但即便如此,目前电流驱动效率的绝对大小还太低,无法驱动托卡马克实验反应堆或点火装置的全部电流。结论是,为了实现反应堆的经济兼容性,降低对电流驱动水平的要求,就要求有相当一部分电流由自举电流承担。因此长脉冲电流驱动技术在当前以及下一代实验中都是一项重要的研究课题。

#### 16.2.4 $\alpha$ 粒子等离子体物理

前面章节里对  $\alpha$  粒子物理学的讨论主要是考虑功率平衡和加热等问题。目前就芯部等离子体对  $\alpha$  粒子作用的物理机理或者反过来—— $\alpha$  粒子对芯部等离子体作用的物理机理——等问题的研究还非常少,主要原因是有关  $\alpha$  粒子的数据非常少,只有 TFTR 和 JET<sup>1)</sup> 在有限时间内实际进行过氦等离子体物理实验。

由于数据缺乏, $\alpha$  粒子等离子体物理经常被认为是等离子体物理的下一个(希望是最后一个)前沿。学习掌握  $\alpha$  粒子等离子体物理是下一代点火实验装置的主要物理目标。

人们尤其关心  $\alpha$  粒子的压强梯度是否会激发起不稳定性,这种不稳定性可能会引起  $\alpha$  粒子以飞快速度损失掉。我们最不愿意看到的是  $\alpha$  粒子在将其能量传递给背景等离子体之前就损失掉了,从而使实现稳态点火条件所需克服的困难大大增加。

另一个问题是如何通过辅助加热和电流驱动来实现等离子体压强和电流分布的外部控制。这里的困难在于点火等离子体中的  $\alpha$  粒子功率完全压倒了辅助加热和电流驱动功率。因此需要研究如何有效利用这些“小的”外部功率源来控制各种参数分布。

非常重要但目前实验尚未触及的一个问题是如何清除  $\alpha$ “灰”。随着聚变反应

---

1) TFTR, Tokamak Fusion Test Reactor(托卡马克型聚变实验反应堆)的首字母缩写;JET, Joint European Torus(欧洲联合环形器)的首字母缩写。——译者

中  $\alpha$  粒子的出现,由于电中性的要求,它们取代了 D-T 燃料。过多的  $\alpha$  粒子稀释了 D-T 燃料,导致聚变反应水平下降,这反过来又会影响到功率平衡。因此迅速除去  $\alpha$  粒子是未来实验装置面临的重要挑战。

最后还应提及燃烧控制的问题。第 14 章的分析显示,按 H 模定标律的  $t \sim T$  分布关系,燃烧控制应自动进行,这需要通过实验来证明稳态运行的可行性。

### 16.2.5 聚变技术问题

如前所述,虽然从下一代点火实验来看,还有很多重要问题需要解决,但我们对等离子体物理的基本理解已经有了巨大进步。同样重要的是,点火实验还必须考虑很多实际的、反应堆所面临的聚变技术问题。这些问题有以下几方面。

一个关键问题是第一壁与 14.1 MeV 中子的相互作用问题。前文中我们假定第一壁所容许的中子通量极限为  $P_w \leq 4 \text{ MW/m}^2$ 。这是依据现有材料提出的一种可能的乐观上限,而不是届时第一代聚变反应堆运行的不切实际的目标。我们知道,壁中子负荷的上限值是一个非常重要的设计参数,它直接影响到反应堆的造价。不幸的是,由于 14.1 MeV 中子源的缺乏,目前可获得的材料辐射数据非常有限。大多数聚变研究人员认为,聚变反应堆研究的进展不仅应包括像 ITER 这样的点火实验装置,还应包括发展具有承受高中子负荷性能的先进材料所需的专用的材料实验设施。这就是未来要建设的另一类聚变装置,称为国际聚变材料辐射装置 (IF-MIF)。

第二个重要的技术问题是关于偏滤器的设计。虽然在现行带偏滤器的托卡马克装置上已经积累了大量的数据,但 ITER 和聚变堆规模水平上的偏滤器问题还没有完全解决。原因是在下述几方面进行权衡存在困难:靶材料的选择、靶的寿命、靶对等离子体的反作用以及需要在偏滤器模块磨损后进行自动更换等。

第三个重要问题是超导磁体技术。虽然在建设强磁场超导磁体方面已经有了大量经验,但至今还没有建造过 ITER 或聚变堆规模所需的磁体。体积大,加之需要使用更难制造的铌-锡合金超导材料来实现高的  $B_{\max}$ ,使得这一技术问题具有挑战性。

第四个技术问题是包层。像 ITER 这样的实验装置将第一次产生大量的聚变中子,因此需要用包层来进行辐射防护。幸运的是,我们从裂变反应堆获得的知识足以解决通过热交换器去除中子能量的问题。但是对于如何产氦我们几乎没有任何经验。这是一个重要的技术问题,因为世界上氦的供应十分有限,大规模制造成本非常昂贵。

第五个技术与等离子体加热有关,这就是中性束加热所需的负离子驱动源的开发、电子回旋加热所需的大功率回旋管的开发以及离子回旋加热用的长寿命天线技术的开发。

在结束本小节的最后,值得指出的是,许多研究人员均认为,聚变所面临的技术和等离子体物理问题是相当有难度的。虽然从概念上说各种解决方案都可能有用,但必须建造 ITER 这样的装置,通过实际装置运行来检验这些概念。

## 16.3 ITER

ITER 实验的目标是要解决如上所述的等离子体物理和聚变技术方面的问题。因此在今后 20 年里,ITER 起着世界聚变项目旗舰的关键作用。ITER 的物理和技术性能直接关系到聚变堆研究的进展,因此其作用十分重要。

为了帮助大家了解 ITER,本小节对这一项目的历史和实际提出的实验内容做一简述。

### 16.3.1 历史

早在 20 世纪 70 年代末,国际聚变界已经认识到建造大型点火实验装置对研究  $\alpha$  粒子物理的重要性,并着手解决聚变堆面临的各种技术问题。当时设立了一项国际合作来设计这样一个实验装置,它被命名为国际托卡马克反应堆(INTOR)。这一设想的目的——很多方面今天依然有效——是要实际了解点火实验或实际设计聚变堆时所面临的问题。这次合作在确认许多关键问题方面取得了巨大成功,并提出了未来研究的重要领域。但 INTOR 小组面临的困难是,当时世界级的大型托卡马克装置尚未建设完成,因此没有可靠的定标关系用来预言能量约束时间。INTOR 基于当时可获得的最佳数据给出的结论是:等离子体电流  $I \approx 8 \text{ MA}$  已经足以实现其目标。而今天,我们基于对 H 模能量约束的理解给出的点火要求是  $I \approx 20 \text{ MA}$ 。

研究人员意识到 INTOR 的不确定性,因此这一设计从没有付诸实施。但是,INTOR 开创了国际合作的先例。因此在 1985 年的日内瓦峰会上,前苏联领导人戈尔巴乔夫向当时的美国总统里根建议道,美苏应就设计和建造下一代聚变点火装置开展国际合作。欧共体和日本迅速加入了这一合作。这个项目被命名为 ITER。

项目的第一步是发展概念设计,其正式名称是概念设计工作(CDA)。CDA 于 1989 年开始,至 1991 年完成。它的成功在于,研究人员就建造这样一种目标能够实现的装置达成一致。关键的设计参数也得到具体化。

基于这一成功,合作各方就 ITER 的实际工程设计签署了第二份协议。这就是所谓的工程设计工作(EDA),计划时间是 1992 ~ 1998 年。在这一阶段结束时应提交详细的工程设计方案。各方为此投入了巨大努力,最终取得了设计上的成功;经过大批专家的审评,一致认为最终设计方案从工程和等离子体物理的角度看是可信的。这个最终设计要求托卡马克的大半径为 8.1 m,电流达到 20 MA。造价(按 2005 美元市值)约为 90 亿美元,建设周期约需 10 年。



虽然 ITER 在技术上可靠的,但其建设成本对合作各方来说仍然过高。这一点,加上上世纪 90 年代末能源相对廉价,从而导致当时合作各方都不愿意提供建造 ITER 所需的场地的局面,因为作为东道主,其付出的成本还要更高。

因此,各方决定先设计一个较小的 ITER 版本以降低目标和成本。希望以较低的成本,与未来对能源研究更为有利的经济环境相结合,以期获得该项目的批准。新版本与原版 ITER 的主要区别之一是,原版 ITER 的目标是实现完全点火(即  $Q = \infty$ ),而新版放宽了这一要求,将目标降低为  $Q$  值较高但不是无穷大(即  $Q = 10$ )。简化版 ITER 项目还面临的一个复杂性是美国政府于 1998 年决定彻底退出 ITER 计划。

其余合作伙伴继续合作,到 2001 年成功完成了简化版 ITER 的工程设计。新版 ITER 的设计指标是较低的电流  $I = 15 \text{ MA}$  和较小的大半径  $R_0 = 6.2 \text{ m}$ 。其成本约为 40 亿美元(2005 年美元市值),需要 8~10 年建成。到设计完成的时候,能源价格开始攀升,能源研究的大环境已经改善。美国重新加入了合作。另外还有两个新的合作伙伴加入进来:中国和韩国。加拿大也考虑成为合作伙伴。

另一个非常积极的结果是,在新版 ITER 的设计完成后,有 4 个国家愿意为该设施提供场地:加拿大、法国、日本和西班牙。从技术角度上说,加拿大提供的站址非常有吸引力。然而,加拿大的人口和相应的税收基础太弱,不足以支撑作为东道国所应具备的较高资金水平。因此加拿大撤回了提供站址的申请,目前还不是合作组织的正式成员。法国和西班牙的站址技术上说也都很有吸引力。但欧盟决定,单个候选地将增强欧洲中选的可能性,于是选择法国的卡达拉什(Cadarache)作为正式参选站址。日本提出在本州岛北部的 Rokkasho 作为参选站址,技术上也具吸引力。

因此,站址的竞争最终在法国和日本之间进行。欧盟和日本为此都做了非常庄严承诺和有吸引力的出价,以期成为新 ITER 的东道主。最初的投票有三个成员(欧盟、俄罗斯和中国)支持法国站址方案,另外三个成员(日本、美国和韩国)支持日本站址方案,由此形成长时间的僵局。经过艰苦曲折的谈判,各方最终(2005 年 7 月)达成一项国际协议,决定将法国的卡达拉什作为新 ITER 的站址。这的确是一个重要的里程碑。

截至本书付梓(2006 年 10 月),目前局面是希望最后协议能于 2006 年年底获得各成员国的签署,允许新 ITER 于 2007 年开始建设。

### 16.3.2 新 ITER

现在我们将重点转到对新 ITER 技术的简要说明上来,下面就简称为 ITER。我们从讨论 ITER 的主要物理目标开始。ITER 的主要物理目标是产生一个能维持足够长时间的、稳定的、约束良好的、 $Q = 10$  的等离子体,以期达到准稳态运行。第二个物理目标是利用非感应电流驱动技术实现  $Q \geq 5$  的稳态运行。至于技术方面,ITER 的建设将验证大型超导磁体、面向等离子体的材料以及大规模远程控制技术

等方面的可行性。它还将测试偏滤器设计的有效性,并开始探索氦增殖。

ITER 的实际设计剖面如图 16.1 所示。整个装置的示意图如图 16.2 所示。应当指出,ITER 具有单零偏滤器和由铌锡合金建造的超导磁体。等离子体中心的磁场为  $B_0 = 5.3 \text{ T}$ 。为了降低成本,装置尺寸限定为,在无导体壁磁流体力学稳定条件下实现等离子体 H 模定标的  $Q = 10$  运行。因此大半径取  $R = 6.2 \text{ m}$ ,小半径  $r = 2 \text{ m}$ ,环径比  $R_0/a = 3.1$ 。实现目标约束时间所需的电流为  $I = 15 \text{ MA}$ 。在  $Q = 10$  的运行条件下,平均密度和平均温度分别为  $\bar{n}_{20} = 0.9$  和  $\bar{T}_k = 11$ 。

作为基本运行模式,ITER 有 3 个辅助功率源:负离子束驱动的 33 MW 中性束、20 MW 的 ICH 和 20 MW 的 ECH。中性束和 ICH 将主要用于加热,ECH 在最初阶段

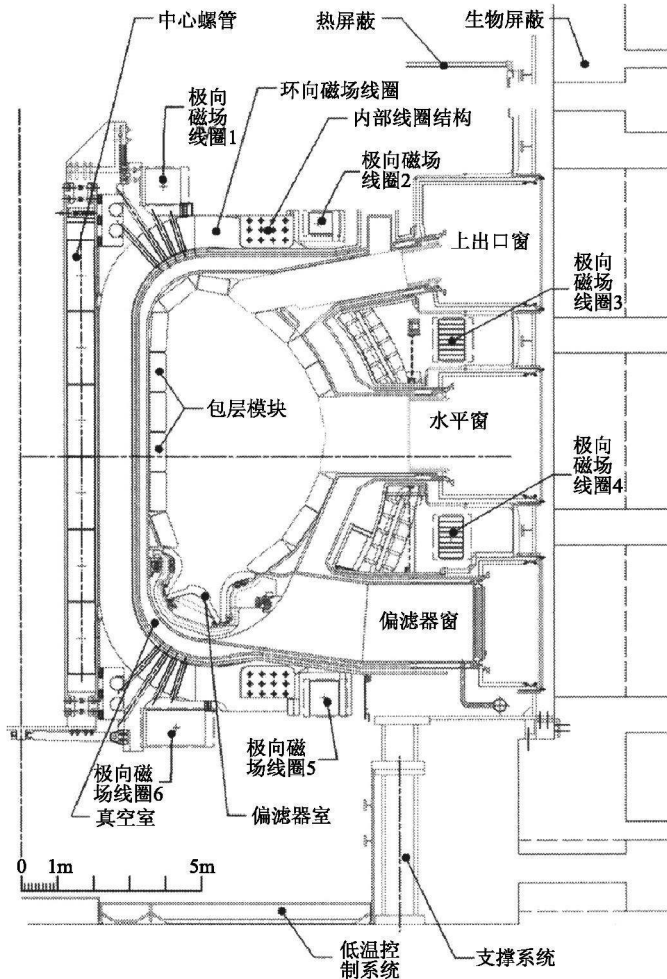


图 16.1 ITER 设计的断面图(ITER Final Design Report(2001). Vienna:IAEA)

将被用于稳定局域电阻性磁流体力学不稳定性,即所谓新经典撕裂模,这种模限制了可获得的  $\beta$  值。

ITER 运行的脉宽约  $\tau_{\text{pulse}} \approx 400\text{s}$ ,完全由欧姆变压器感应驱动。按计划,在基本运行阶段,自举电流预计会很小且没有电流驱动。如果运行成功的话,ITER 应当产生  $Q = 10$  的等离子,相应的聚变品质因子为  $p\bar{\tau}_E = 6.4 \text{ atm s}$ 。

刻画 ITER 的基本参数总结如表 16.1。我们看到,这些参数与第 5 章介绍的简单聚变反应堆设计值和第 14 章中的点火实验装置设计值是可比的。从大小尺寸和运行表现上说,ITER 基本是一个全尺寸原型聚变反应堆。区别主要是,ITER 基本上仍是一个实验堆,因此没有被设计成具有与反应堆稳态运行有关的很高的功率因数。

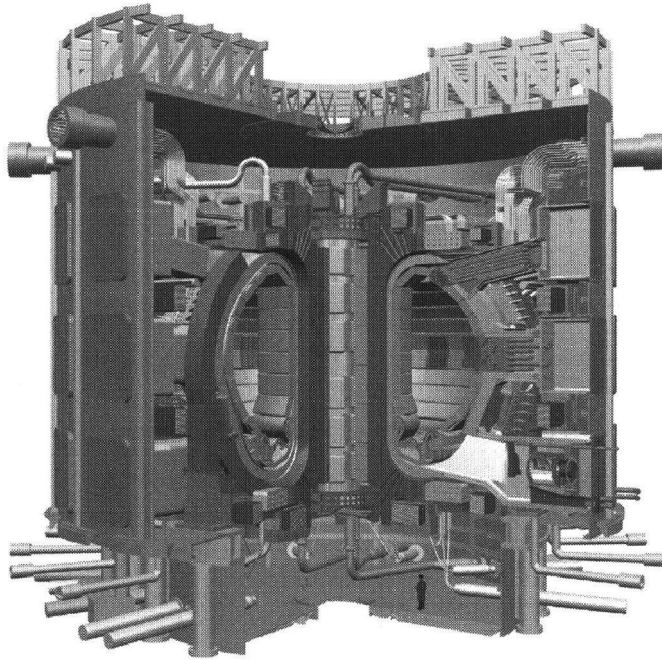


图 16.2 ITER 装置的完整示意图(ITER Final Design Report(2001). Vienna:IAEA)

除了如表 16.1 所述的第一阶段的运行,ITER 第二阶段的运行主要以实现先进托卡马克(AT)运行为目标。这个目标是要通过强大的电流驱动和参数剖面成形来达到接近稳态运行。下面描述的几种不同场景和参数是具有代表性的 AT 运行模式的例子。

对于 AT 实验,自举电流与外部电流驱动相结合应当产生很长的脉冲(3000s)甚至真正的稳态运行。电流驱动主要由低杂波功率和电子回旋波功率相结合的方式提供。但是,由于 ITER 没有足够的电流驱动功率加自举电流来实现整个 15 MA

等离子体电流的基本运行,因此 AT 阶段的实验将在参数要求略微减小的条件下进行。具体来说就是,总电流将从 15 MA 减小到约 9 MA,而聚变增益将从  $Q = 10$  降至  $Q = 5$ 。

剖面控制将产生中空的电流密度分布、反剪切安全因子和比例因数  $f_{\text{B}} \sim 0.4$  的自举电流。此外,达到  $Q = 5$  所需的约束时间将超过 H 模约束时间,这意味着通过形成内部输运垒来实现输运改善,这同样需要借助于剖面控制。最后,预期的  $\beta$  值将非常接近特鲁瓦永 (Troyn) 无壁稳极限值。这很可能激发起电阻壁模,因此需要通过反馈使其稳定化。

上述的 ITER 具有代表性的 AT 运行参数总结见表 16.2。我们看到,虽然性能有所降低,但 AT 运行仍将代表着一项重大成就,那就是托卡马克可以在有大量  $\alpha$  粒子存在的条件下实现稳态运行。

表 16.1 和表 16.2 的参数表明,ITER 无疑是一个具有远大目标的国际大项目。假设 ITER 建成并按照其目标运行,那么下一步是什么? 答案是下面要描述的全尺寸示范电站。

表 16.1 ITER 实验基本运行参数

参 数	符 号	单 位	ITER 指标
大半径	$R_0$	m	6.2
小半径	$a$	m	2.0
环径比	$R_0/a$		3.2
拉长比(95% 通量面)	$\kappa$		1.7
等离子体体积	$V_P$	$\text{m}^3$	837
等离子体表面积	$A_P$	$\text{m}^2$	678
环向磁场	$B_0 = B(R_0)$	T	5.3
等离子体电流	$I$	MA	15
扭曲模安全因子	$q_*$		1.94
安全因子(95% 通量面)	$q_{95}$		3.0
平均温度	$\bar{T}_e \approx \bar{T}_i \equiv \bar{T}_k$	keV	11.2
温度峰值因子	$\frac{T(0)}{\bar{T}}$		1.7
平均电子密度	$\bar{n}_{20}$	$10^{20} \text{m}^{-3}$	0.91
密度峰值因子	$\frac{n(0)}{\bar{n}}$		1.1
密度/格林沃尔德密度	$\frac{\bar{n}}{n_G}$		0.85
能量约束时间	$\tau_E$	s	3.7

续表 16.1

参 数	符 号	单 位	ITER 指标
品质因数	$\bar{P} \tau_E$	atm s	6.4
功率增益	$Q = \frac{P_f}{P_h}$		10
中性束功率	$P_{\text{NBI}}$	MW	33
离子回旋加热功率	$P_{\text{ICH}}$	MW	20
电子回旋加热功率	$P_{\text{ECH}}$	MW	20
欧姆加热时长	$\tau_{\text{pulse}}$	s	400
环向 $\beta$	$\beta_t$		0.026
归一化 $\beta$	$\beta_N = \frac{\beta_t}{\left(\frac{I_M}{aB_0}\right)}$		0.018
造价	$C$	$10^9$ 美元 (2005)	4.3

表 16.2 ITER 实验先进托卡马克运行参数

参 数	符 号	单 位	ITER 指标
环向磁场	$B_0 = B(R_0)$	T	5.3
等离子体电流	$I$	MA	9.1
自举电流	$I_B$	MA	3.64
电流驱动用电流	$I_{\text{CD}}$	MA	5.46
自举电流比例	$f_B$		0.4
扭曲模安全因子	$q_*$		3.2
安全因子 (95% 通量面)	$q_{95}$		5.0
最小安全因子	$q_{\text{min}}$		3.0
$q = q_{\text{min}}$ 处小半径	$r_{\text{min}}/a$		0.7
$Q = 5$ 的 $\tau_{\text{required}}/\tau_H$	$H = \tau_E/\tau_H$		1.4
环向比压	$\beta_t$		0.024
归一化比压	$\beta_N = \beta_t/(I_M/aB_0)$		0.028
功率增益	$Q = P_f/P_h$		5
低杂波功率	$P_{\text{LHCD}}$	MW	40
电子回旋功率	$P_{\text{ECCD}}$	MW	20
脉宽	$\tau_{\text{pulse}}$	s	> 3000

## 16.4 示范聚变电站 (DEMO)

目前我们相信,从等离子体物理和聚变技术中学到的知识足以完成全面走向商用目标之前的最后一步。这最后一步就是通常所说的示范聚变电站(DEMO)。

从 ITER 过渡到 DEMO 要解决好几个重要问题,它们主要是技术性的。等离子体物理方面的问题应该与 ITER 遇到的类似,因为这些装置的尺寸大小差不多,参数也差不多。然而从技术上说,DEMO 必须能够证明可以在一种安全、可靠且可持续发展的稳态方式下运行。虽然个别组件可以直接由外推来确定,但 DEMO 的主要目标是要将所有这些组件组装成个工作电站。

DEMO 的另一个主要目标将是要展示氦的增殖系数大于 1。这是至关重要的,因为世界上氦的供应十分有限。而蕴藏丰富的锂可以放在包层里用于增殖氦,但必须用实际证明产生的氦要比消耗的多。

最后,通过对过渡期间开发的先进材料的应用,DEMO 应当能够在一般性环境方面,尤其是在放射性废物处理方面,显示出聚变的吸引力。毕竟这是聚变反应堆的主要优势之一。

显然,DEMO 是几十年以后的事情。但一旦建成并取得成功后,下一步就将是建造商用聚变电站。由于其复杂性,聚变电站的资金成本可能会比较高。但它的燃料和经营成本应当比较低。总的结果是,聚变电站发电的总成本可能比起其他能源的确具有竞争力。时间会证明一切。

在不久的将来,我们的目标是建立和运行好国际聚变实验堆。ITER 造价不菲,但从燃料供应和环境影响等方面考虑,聚变的最终吸引力将表明,这是一个明智的研究经费投资。世界上有哪个国家能够承担得起不试图利用这种非凡能源的代价呢?

## 参考书目

描述 ITER 实验各个方面的文献有很多。下面列出的是一些有用的综述性参考文献。

- Berk, H. L., Betti, R., *et al.* (2001). *Review of Burning Plasma Physics*, US Department of Energy Report DOE/SC-0041. Germantown, Maryland: US Department of Energy.
- ITER Final Design Report (2001). ITER Documentation Series No. 22. Vienna: IAEA.
- McCracken, G. and Stott, P. (2005). *Fusion, the Energy of the Universe*. London: Elsevier Academic Press.
- Wesson, J. (2004). *Tokamaks*, third edn. Oxford: Oxford University Press.

# 附录 A $\langle \sigma v \rangle$ 的解析推导

这里的目的是导出  $\langle \sigma v \rangle$  的解析表达式。 $\langle \sigma v \rangle$  的定义式如下：

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{1}{n_1 n_2} \int f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) \sigma(v) v d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \quad (\text{A.1})$$

其中,  $v = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$ 。每种成分假定均具有相同温度  $T$  下的麦克斯韦分布函数：

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= n_1 \left[ \frac{m_1}{2\pi T} \right]^{3/2} e^{-m_1 v_1^2 / 2T} \\ f_2 &= n_2 \left[ \frac{m_2}{2\pi T} \right]^{3/2} e^{-m_2 v_2^2 / 2T} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

在对  $\sigma$  作解析近似之前,我们先做一些简化。第一步是用一套新的独立变量,质心速度  $\mathbf{V}$  和相对速度  $\mathbf{v}$ ,来取代粒子速度  $\mathbf{v}_1$  和  $\mathbf{v}_2$ ：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{m_2 \mathbf{v}_2 + m_1 \mathbf{v}_1}{m_2 + m_1} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

通过反变换得：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{V} + \frac{m_1}{m_2 + m_1} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{V} + \frac{m_2}{m_2 + m_1} \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

经过简单代数运算,可得下述雅科比变换式,总动能之和可以表示成两个麦克斯韦函数的乘积形式：

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 &= d\mathbf{V} d\mathbf{v} \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= (m_1 + m_2) \mathbf{V}^2 + m_r v^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5})$$

其中  $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  是约化质量。因此  $\langle \sigma v \rangle$  的表达式为：

$$\langle \sigma v \rangle = \left[ \frac{m_1}{2\pi T} \right]^{3/2} \left[ \frac{m_2}{2\pi T} \right]^{3/2} \int d\mathbf{V} d\mathbf{v} \sigma(v) v e^{-[(m_1 + m_2) \mathbf{V}^2 + m_r v^2] / 2T} \quad (\text{A.6})$$

下一步是引入球坐标下速度变量

$$\left. \begin{aligned} dV &= V^2 \sin\theta dV d\theta d\phi = 4\pi V^2 dV \\ dv &= v^2 \sin\theta dv d\theta d\phi = 4\pi v^2 dv \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.7})$$

其中,所有被积函数均与角速度变量无关,故有  $4\pi$  因子。

经过下列代换  $x = [(m_1 + m_2)/2T]^{1/2} V$  并利用关系:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \pi^{1/2}/4 \quad (\text{A.8})$$

我们很容易解析地算得对  $V$  的积分。于是  $\langle \sigma v \rangle$  简化为:

$$\langle \sigma v \rangle = 4\pi (m_r/2\pi T)^{3/2} \int_0^\infty \sigma(v) v^3 e^{-m_r v^2/2T} dv \quad (\text{A.9})$$

最后一步是将速度变量由  $v$  变换为质心动能  $W = m_r v^2/2$ , 由此得:

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{8\pi}{m_r^2} \left[ \frac{m_r}{2\pi T} \right]^{3/2} \int_0^\infty W \sigma(W) e^{-W/T} dW \quad (\text{A.10})$$

这就是我们要求的  $\langle \sigma v \rangle$  的一般表达式。为了做进一步处理,我们必须给出  $\langle \sigma v \rangle$  的显性表达式。从核物理理论可以得到如下有用的近似关系:

$$\sigma(W) = \sigma_m \left[ \frac{T_m}{W} \right] e^{-2(T_m^{1/2}/W^{1/2} - 1)} \quad (\text{A.11})$$

其中,  $\sigma_m$  和  $T_m$  是由实验确定的具体反应模型的参数。 $\sigma$  的变化曲线如图 A.1 所示。

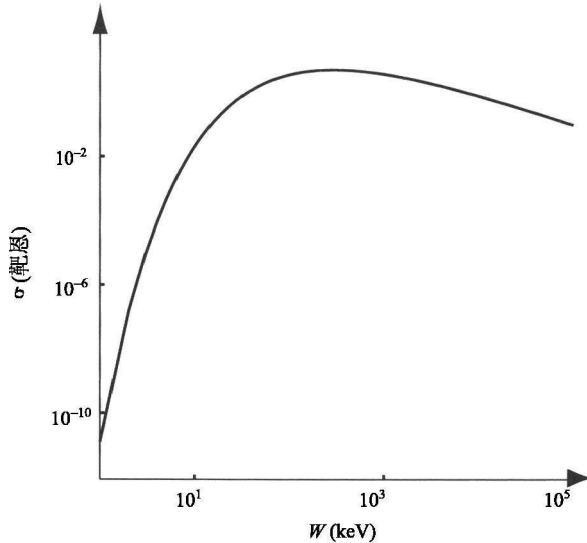


图 A.1 截面  $\sigma$  关于能量  $W$  的函数的示意曲线  
( $\sigma$  的最大值  $\sigma_m$  出现在  $W = T_m$  的位置)



注意,  $\sigma_m$  是  $\sigma$  的峰值, 而  $T_m$  是峰值位置对应的能量。虽然解析模型曲线与实验得到的曲线定性上相似, 但前者实际上仅对于能量明显小于最大值的情形是精确的。对我们关心的聚变反应的  $\sigma_m$  和  $T_m$  的最佳拟合实验值见表 A.1。

表 A.1  $\sigma(v)$  解析模型的  $\sigma_m$  和  $T_m$  的值

反应类型	$\sigma_m$ (靶恩)	$T_m$ (keV)
D-T	5.03	296
D- $^3\text{He}$	0.48	1970
D-D	0.029	246

通过在积分中作代换  $z = W/T_m$  并引入归一化温度  $T_* = T/T_m$ ,  $\langle \sigma v \rangle$  的积分计算可进一步简化为:

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{2\sigma_m}{T_*^{3/2}} \left[ \frac{2T_m}{\pi m_r} \right]^{1/2} \int_0^\infty dz \exp \left[ -\frac{z}{T_*} - \frac{2}{z^{1/2}} + 2 \right] \quad (\text{A.12})$$

这个积分如图 A.2 所示。我们看到, 积分的主要贡献出现在  $z \approx z_m$  附近区域, 对应于指数最大值附近区域。经过简单计算可知, 这个最大值的位置是  $z_m = T_*^{2/3}$ , 相当于:

$$\frac{W_m}{T} = \left[ \frac{T_m}{T} \right]^{1/3} \quad (\text{A.13})$$

这一关系的一个结果可确定如下。由于对 D-T 反应有  $T_m = 296$  keV, 故对  $T = 1$  keV, 有  $W_m = 6.7$  keV。类似地, 对  $T = 10$  keV, 有  $W_m = 31$  keV。由于  $W_m > T$ , 这意味着大多数聚变反应发生在粒子分布函数的尾翼。

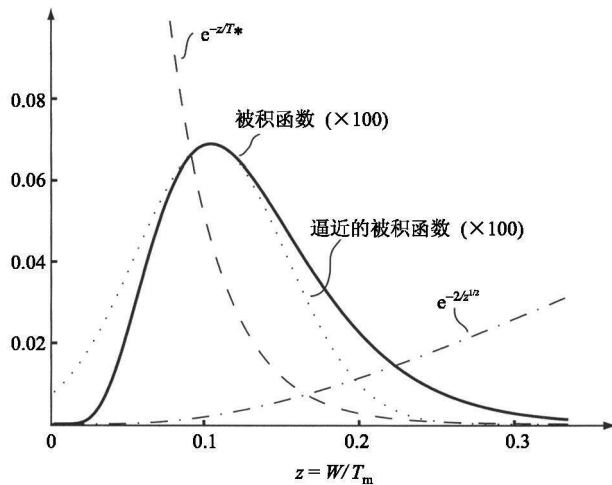


图 A.2  $\langle \sigma v \rangle$  的积分中的被积函数作为归一化能量的函数的图示

回到  $\langle \sigma v \rangle$  上来,通过对被积函数中指数项在点  $z \approx z_m$  附近进行泰勒展开,我们可以得到该积分的精确的逼近关系。由此得:

$$\begin{aligned} g(z) &= -\frac{z}{T_*} - \frac{2}{z^{1/2}} + 2 \\ &\approx g(z_m) + g'(z_m)(z - z_m) + \frac{1}{2}g''(z_m)(z - z_m)^2 + \dots \\ &\approx -\frac{3}{T_*^{1/3}} + 2 - \frac{3}{4T_*^{5/3}}(z - z_m)^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A. 14})$$

这个逼近的被积函数如图 A. 2 中虚线所示。我们看到,严格的和逼近的被积函数仅在被积函数较小时差异较大,而这部分对整个积分贡献不大。因此,这个积分在误差可忽略的情形下,通过将积分扩展到  $-\infty < z < \infty$  后很容易计算出来,具体如下:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{g(z)} dz \approx e^{-3/T_*^{1/3}+2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3(z-z_m)^2/4T_*^{5/3}} dz \approx \frac{2\pi^{1/2} T_*^{5/6}}{\sqrt{3}} e^{-3/T_*^{1/3}+2} \quad (\text{A. 15})$$

这里用到了如下关系:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \pi^{1/2} \quad (\text{A. 16})$$

将式(A. 15)代入式(A. 12)即得到所要的  $\langle \sigma v \rangle$  的表达式:

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{4\sigma_m}{\sqrt{3}} \left( \frac{2T_m}{m_r} \right)^{1/2} \left( \frac{T_m}{T} \right)^{2/3} e^{-3(T_m/T)^{1/3}+2} \quad (\text{A. 17})$$

式(A. 17)关于温度的函数的曲线如图 A. 3 所示。它与实验曲线定性上相似。最大值在  $T/T_m = 27/8$  位置,在该点上有:

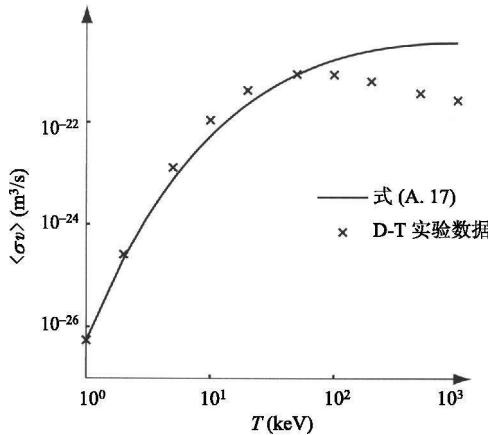


图 A. 3  $\langle \sigma v \rangle$  的解析式关于  $T$  的函数曲线(图中同时给出了实验数据点用以比较)

$$\langle \sigma v \rangle_{\max} = \frac{16}{9\sqrt{3}} \sigma_m \left( \frac{2T_m}{m_\tau} \right)^{1/2}$$

但我们应当记住,  $\langle \sigma v \rangle$  的这个解析形式仅在  $T \ll T_m$  时是精确的。

由此我们完成了对  $\langle \sigma v \rangle$  的解析推导。

# 附录 B 加速电荷的辐射

附录 B 的目的是给出加速电荷辐射功率公式的推导。这个推导需要用到复杂的分析,概要如下。首先,给出麦克斯韦方程组下特定电磁场“辐射”的详细定义。其次,推导确定矢势  $\mathbf{A}$  和标势  $\phi$  的公式,这里  $\mathbf{A}$  和  $\phi$  分别由时变情形下电流密度和电荷密度的一般分布产生。由此得到的积分关系即为静磁学和静电学里著名的毕奥-萨伐尔定律和高斯定理。第三,对于单个加速带电粒子所确定的电荷和电流,计算  $\mathbf{A}$  和  $\phi$  以及相应的电磁场  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$ 。最后,将这些结果结合起来,计算距离粒子远处闭合曲面上向外的坡印亭通量。由这个坡印亭通量对整个闭合曲面的积分求出加速粒子辐射功率的表达式。

## B.1 辐射场定义

假定存在一组局部的、时变的电荷和电流。在远离源的地方,电场和磁场随距离增加而衰减。这部分场对应于“辐射”场,而非辐射场则称为“近场”。区分辐射场和近场的精确定义是什么呢?这个定义与场随距离衰减的速率有密切关系。具体来说,我们考虑包裹源的大球面上向外的坡印亭通量的积分。这个积分表示的是离开系统的功率,其大小为:

$$P = \int \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dA \sim |\mathbf{E}| |\mathbf{B}| r^2 / \mu_0 \quad (\text{B.1})$$

辐射场定义为  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  中按如下形式变化的部分:

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{E}| \sim 1/r \quad r \rightarrow \infty \\ |\mathbf{B}| \sim 1/r \quad r \rightarrow \infty \end{array} \right\} \quad (\text{B.2})$$

在此定标律下,坡印亭通量的积分在大  $r$  处趋于常数值,这意味着系统确实存在相应的功率损失。

可以证明, $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  的剩余部分的衰减快于  $1/r$ 。对这些部分,坡印亭通量的积分在大  $r$  处趋于零。这说明较快衰减的场不会引起辐射功率损失,而是存储能量,这些能量不会离开系统。

## B.2 时变源的 $\mathbf{A}$ 和 $\phi$ 的计算

考虑一个给定的局域、时变的电流密度  $\mathbf{J}$  和电荷密度  $\sigma$  的分布。现在我们由这

些已知量导出矢量势  $\mathbf{A}$  和标量势  $\phi$  的公式。我们知道,场和势之间有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.3})$$

如果我们选择洛仑兹规范条件:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.4})$$

则  $\mathbf{A}$  和  $\phi$  满足三维非齐次波动方程:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.5})$$

我们看到,  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  的每个直角坐标分量均满足如下形式方程:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t'^2} = S(x', y', z', t') \quad (\text{B.6})$$

这里,带撇的坐标是为了方便引入的。它们用来描述源的几何分布。最后,总的场由所有源的积分(即对带撇的量的积分)确定。不带撇的坐标也将引入,它们表示待求势和场的任意观察点的位置。

用格林定理解关于  $\psi$  的方程。这个解是基于下述格林恒等式:

$$\nabla \cdot (G \nabla \psi - \psi \nabla G) = G \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 G \quad (\text{B.7})$$

这里,  $G$  是满足齐次波动方程的任意函数:

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') g(t' + r'/c - t) \quad (\text{B.8})$$

其中,  $r' = [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{1/2}$ ;  $g$  是任意函数。用散度定理在闭体积上积分这个方程:

$$\int_V (G \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 G) dV' = \int_A (G \mathbf{n}' \cdot \nabla' \psi - \psi \mathbf{n}' \cdot \nabla' G) dA' \quad (\text{B.9})$$

这里  $\mathbf{n}'$  是边界曲面  $A$  的外法线单位矢量。式(B.8)的更方便的形式可由  $\psi$  和  $G$  的定义方程得到:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \int_V \left[ G \frac{\partial \psi}{\partial t'} - \psi \frac{\partial G}{\partial t'} \right] dV' + \int_V G S dV' - \psi(\mathbf{x}, t') g(t' - t)$$

$$= \int_A (G \mathbf{n}' \cdot \nabla' \psi - \psi \mathbf{n}' \cdot \nabla' G) dA' \quad (\text{B. 10})$$

满足式(B.8)的  $G$  的解为:

$$G = -\frac{1}{4\pi r'} g \left[ t' + \frac{r'}{c} - t \right] \quad (\text{B. 11})$$

直接代入并经稍显冗繁的代数计算可以证明,  $G$  确实满足式(B.8)。 $\psi$  的计算可通过适当选取  $g$  来简化:

$$g = \delta(t' + r'/c - t) \quad (\text{B. 12})$$

这里  $\delta(x)$  是具有零宽度、无限高且有单位面积的标准冲击函数。

下一步推导是将特定选取的  $G$  代入  $\psi$  的基本方程(B.10), 然后对所有时间  $-\infty < t' < \infty$  积分。为了统一地定义时间和空间积分, 我们必须规定体积。就目前情形, 这个体积取以观察点为中心,  $r_2$  为半径的球体, 然后取  $r_2 \rightarrow \infty$  的极限。在这种选择下, 式(B.10)的各项即可计算出来。

其中第二项的计算如下:

$$-\frac{1}{4\pi} \int_V d\mathbf{x}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{r'} S(\mathbf{x}', t') \delta(t' + r'/c - t) = -\frac{1}{4\pi} \int_V d\mathbf{x}' \frac{1}{r'} S(\mathbf{x}', t - r'/c) \quad (\text{B. 13})$$

第一项是关于  $t'$  的全微分, 因此很容易积分出来:

$$\frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\partial}{\partial t'} \int_V d\mathbf{x}' \left[ G \frac{\partial \psi}{\partial t'} - \psi \frac{\partial G}{\partial t'} \right] = \frac{1}{c^2} \int_V d\mathbf{x}' \left[ G \frac{\partial \psi}{\partial t'} - \psi \frac{\partial G}{\partial t'} \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (\text{B. 14})$$

这个积分为零是因为  $G$  和  $\frac{\partial G}{\partial t'}$  里的  $\delta$  函数在端点均为零。如果  $r_2$  选得足够大, 使得以光速传播的源信号来不及到达积分曲面, 则面积分项的贡献也为零。因此, 当  $r_2 \rightarrow \infty$  时,  $\psi$  和  $\mathbf{n}' \cdot \nabla' \psi$  在积分面上均为零。剩余项的贡献因有下式故很容易求出来:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{x}, t') \delta(t' - t) dt' = \psi(\mathbf{x}, t) \quad (\text{B. 15})$$

将这些结果综合起来即得到所要求的  $\psi$  的表达式:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{S(\mathbf{x}', t - r'/c)}{r'} d\mathbf{x}' \quad (\text{B. 16})$$

最后, 将这一结果应用到矢势和标势上, 得到:

$$\left. \begin{aligned} A(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - r'/c)}{r'} d\mathbf{x}' \\ \varphi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\mathbf{x}', t - r'/c)}{r'} d\mathbf{x}' \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.17})$$

我们看到,这些表达式对于纯粹的静磁场和静电场情形几乎是完全相同的,唯一的差别是源项要用推迟时间  $t - r'/c$  来计算。理由解释如下:如果我们想知道  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$  在  $t$  时刻的值,那么源项就必须用更早时刻的  $t$  值来计算,因为信息从源传播到观察点需要花  $r'/c$  的时间。

### B.3 应用到单个加速粒子的情形

推导的下一步是选取单个加速粒子对应的电流密度和电荷密度,然后再由公式(B.17)的结果求出  $\mathbf{A}$  和  $\phi$ 。如果点粒子具有电荷  $q$ ,并沿轨道  $\mathbf{x}_0(t)$  运动,则等效的  $\sigma$  和  $\mathbf{J}$  由下式给出:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= q \delta(x' - x_0) \delta(y' - y_0) \delta(z' - z_0) \\ \mathbf{J} &= q v_0 \delta(x' - x_0) \delta(y' - y_0) \delta(z' - z_0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.18})$$

这里,  $v_0(t) = dx_0(t)/dt$ 。但  $\delta$  函数的积分不像我们想象的那样简单,原因是源要用推迟时间来计算,即  $x_0(t - r'/c) = x_0(t, x', y', z', x, y, z)$ ;也就是说,  $x_0$  本身是积分坐标的函数。这一困难可通过引入新的积分坐标来克服:

$$\left. \begin{aligned} x' - x_0 &= X \\ y' - y_0 &= Y \\ z' - z_0 &= Z \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.19})$$

再经一系列计算,我们可证明这一变换的雅可比关系式可以写成:

$$dXdYdZ = \left[ 1 - \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_r}{c} \right] dx' dy' dz' \quad (\text{B.20})$$

这里,

$$\mathbf{e}_r = \frac{(x - x')}{r'} \mathbf{e}_x + \frac{(y - y')}{r'} \mathbf{e}_y + \frac{(z - z')}{r'} \mathbf{e}_z \quad (\text{B.21})$$

利用这一变换,  $\delta$  函数的积分可以容易地计算出来了,我们得到:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0(1 - v_r/c)} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v}_0}{r_0(1 - v_r/c)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.22})$$

这里  $v_r(t-r_0/c) = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_r$  并有:

$$r_0 = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2} \quad (\text{B.23})$$

$R_0$  表示观察点到推迟时刻电荷所在位置的距离。

## B.4 $E$ 和 $B$ 的计算

我们用  $\mathbf{A}$  和  $\phi$  的适当的导数来计算电场和磁场。如果我们将注意力集中在每个场的辐射分量上,即只考虑大  $r_0$  情形下  $1/r_0$  的部分,计算将大大简化。由于  $\mathbf{A}$  和  $\phi$  均正比于  $1/r_0$ ,因此关于  $r_0$  的任何导数均产生形如  $1/r_0^2$  的贡献,即相当于无辐射的近场。因此,辐射场仅由速度  $\mathbf{v}_0(\tau)$  的各阶导数确定,这里  $\tau = t - r_0/c$ 。对辐射场有贡献的导数我们用上标 (R) 来表示,在非相对论极限情形下有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}^{(R)}}{\partial t} &= \frac{\mu_0 q}{4\pi r_0} \frac{1}{(1-v_r/c)} \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} \approx \frac{\mu_0 q}{4\pi r_0} \dot{\mathbf{v}}_0 \\ \nabla \times \mathbf{A}^{(R)} &= \frac{\mu_0 q}{4\pi r_0} \frac{1}{(1-v_r/c)} \nabla \times \mathbf{v}_0 \approx \frac{\mu_0 q}{4\pi r_0} \nabla \tau \times \dot{\mathbf{v}}_0 \\ &\approx \frac{\mu_0 q}{4\pi r_0 c} \dot{\mathbf{v}}_0 \times \mathbf{e}_r \\ \nabla \phi^{(R)} &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r_0} \frac{1}{1-v_r/c} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r_0} \frac{1}{(1-v_r/c)} \nabla \frac{v_r}{c} \\ &\approx \frac{\mu_0 q}{4\pi r_0} (\mathbf{e}_r \cdot \dot{\mathbf{v}}_0) \mathbf{e}_r \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.24})$$

这里  $\dot{\mathbf{v}}_0 = d\mathbf{v}_0/d\tau$ 。由这些关系直接可以计算出电场和磁场的辐射分量:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}^{(R)} &= \frac{\mu_0 q}{4\pi r_0} (\dot{\mathbf{v}}_0 \times \mathbf{e}_r) \times \mathbf{e}_r \\ \mathbf{B}^{(R)} &= \frac{\mu_0 q}{4\pi r_0 c} (\dot{\mathbf{v}}_0 \times \mathbf{e}_r) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.25})$$

## B.5 辐射功率的计算

辐射功率可以这样来计算:先计算坡印亭矢量的法向分量,然后对包裹带电粒子的大球面进行积分。坡印亭矢量由下式给出:



$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}^{(R)} \times \mathbf{B}^{(R)} = \frac{1}{\mu_0 c} \left[ \frac{\mu_0 q}{4\pi r_0} \right]^2 [(\dot{\mathbf{v}}_0) \times \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r] \times (\dot{\mathbf{v}}_0 \times \mathbf{e}_r) \\
 &= \left[ \frac{\mu_0 q}{4\pi r_0} \right]^2 \frac{|\dot{\mathbf{v}}_0 \times \mathbf{e}_r|^2}{\mu_0 c} \mathbf{e}_r
 \end{aligned} \tag{B.26}$$

最后一步是在半径  $r_0$  的大球面上对坡印亭矢量进行面积分。为此假定  $\dot{\mathbf{v}}_0$  与外法向单位矢量  $\mathbf{e}_r$  之间的夹角定义为  $\theta$ :  $|\dot{\mathbf{v}}_0 \times \mathbf{e}_r| = \dot{v}_0 \sin\theta$ 。以  $r_0 = 0$  为圆心建立球面坐标系,因此球面上的微分面积元为:

$$d\mathbf{A} = r_0^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r = 2\pi r_0^2 \sin\theta d\theta \mathbf{e}_r \tag{B.27}$$

辐射功率可写成:

$$\begin{aligned}
 P(\tau) &= \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 q^2 v_0^2}{8\pi c} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\
 &= \frac{\mu_0 q^2 v_0^2}{6\pi c} \text{ W}
 \end{aligned} \tag{B.28}$$

这就是所要求的关系式。注意,对于聚变应用来说,时间标长远大于辐射时间,因此我们可以有精确的近似关系:  $\tau \approx t_0$ 。

# 附录 C 布泽坐标的推导

布泽坐标的推导需要做几步分析。首先,引入一般变换将熟悉的实验室坐标系变换到一组任意通量坐标系上;其次,运用关系  $\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = \mathbf{J} \cdot \nabla \psi = 0$  和  $\nabla \psi \cdot \mathbf{B} = \nabla \psi \cdot \mathbf{J} = 0$  来逼近所要求的布泽坐标,这里  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{J}$  构成通量坐标系下的叉积;第三,利用  $\nabla \psi \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  可以证明,  $\mathbf{B}$  可以写成通量坐标的梯度,进一步逼近所要求的布泽坐标形式;第四,我们来证明出现在  $\mathbf{B}$  表示式里的某个自由函数如何通过附加的角通量坐标  $\chi, \zeta$  的变换来去掉;最后,我们用布泽坐标系下的  $\mathbf{B}$  表示式来计算粒子的导心漂移。

## C.1 一般的坐标变换

为方便起见,我们将 13.8 节定义的由熟悉的  $(r, \theta, \phi)$  坐标到抽象坐标  $(\psi, \chi, \zeta)$  的一般变换复述如下:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_0(r) + \sum_{m,n} \psi_{mn}(r) e^{i(m\theta+n\phi)} \\ \chi &= \theta + \sum_{m,n} \theta_{mn}(r) e^{i(m\theta+n\phi)} \\ \zeta &= -\phi + \sum_{m,n} \phi_{mn}(r) e^{i(m\theta+n\phi)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.1})$$

$\phi$  前取负号是为了使  $\psi, \chi, \zeta$  构成右手系。实际上,由于详细推导相当形式化,因此我们不妨先将  $r, \theta, \phi$  坐标变换到更简单的直角坐标系  $(x, y, z)$ :

$$x = (R_0 + r \cos \theta) \cos \phi, \quad y = (R_0 + r \cos \theta) \sin \phi, \quad z = r \sin \theta$$

因此,开始时我们假定(具有适当周期性质的)一般变换存在,它定义为:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi(x, y, z) \\ \chi &= \chi(x, y, z) \\ \zeta &= \zeta(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.2})$$

类似地,假定存在唯一定义的逆变换:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\psi, \chi, \phi) \\ y &= y(\psi, \chi, \phi) \\ z &= z(\psi, \chi, \phi) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.3})$$

这个变换的雅可比行列式  $J$  很容易写出来:

$$d\psi d\chi d\zeta = J dx dy dz, \quad (\text{C. 4})$$

这里,

$$J = \begin{vmatrix} \psi_x & \psi_y & \psi_z \\ \chi_x & \chi_y & \chi_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{vmatrix} = \nabla \psi \cdot (\nabla \chi \times \nabla \zeta) \quad (\text{C. 5})$$

现在我们可以根据  $\psi, \chi, \zeta$  来定义由三个独立基矢量构成的不同的坐标基。一种方便的选择是取:

$$\nabla \psi \times \nabla \chi \quad \nabla \zeta \times \nabla \psi \quad \nabla \chi \times \nabla \zeta \quad (\text{C. 6})$$

注意到磁场和电流密度总是可以用这三个基矢表示出来:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= f_1(\psi, \chi, \zeta) \nabla \psi \times \nabla \chi + f_2(\psi, \chi, \zeta) \nabla \zeta \times \nabla \psi + f_3(\psi, \chi, \zeta) \nabla \chi \times \nabla \zeta \\ \mathbf{J} &= h_1(\psi, \chi, \zeta) \nabla \psi \times \nabla \chi + h_2(\psi, \chi, \zeta) \nabla \zeta \times \nabla \psi + h_3(\psi, \chi, \zeta) \nabla \chi \times \nabla \zeta \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 7})$$

到目前为止,讨论都是相当一般的。在下节里我们来证明这些坐标如何能够简化成叉积形式,从而逼近所要求的布泽坐标形式。

## C.2 到布泽坐标叉积形式的部分简化

简化的第一步是利用性质  $\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0$  代入式 (C. 7) 得到  $f_3(\psi, \chi, \zeta) = 0$  或  $f_3 = 0$ 。类似地,  $\mathbf{J} \cdot \nabla \psi = 0$  关系意味着  $h_3 = 0$ 。

第二步需要代入方程  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。利用关系:

$$\nabla f(\psi, \chi, \zeta) = \frac{\partial f}{\partial \psi} \nabla \psi + \frac{\partial f}{\partial \chi} \nabla \chi + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \nabla \zeta \quad (\text{C. 8})$$

我们得到:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = J \left[ \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_2}{\partial \chi} \right] = 0 \quad (\text{C. 9})$$

式 (C. 9) 意味着  $f_1$  和  $f_2$  总可以写成如下形式的流函数:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\psi, \chi, \zeta) &= \bar{f}_1(\psi) + f(\psi)\zeta + \frac{\partial \bar{f}(\psi, \chi, \zeta)}{\partial \chi} \\ f_2(\psi, \chi, \zeta) &= \bar{f}_2(\psi) - f(\psi)\chi - \frac{\partial \bar{f}(\psi, \chi, \zeta)}{\partial \zeta} \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 10})$$

这个表达式明确地展示了非振荡项。注意,函数  $f$  必须满足  $f = 0$ , 因为相应的对  $\mathbf{B}$  的贡献不满足  $\chi$  或  $\zeta$  上的周期性条件。按照定义,流函数的振荡部分  $\bar{f}(\psi, \chi, \zeta)$  必须满足  $\langle \bar{f} \rangle = 0$ , 这里平均是指对  $\chi$  或  $\zeta$  的周期而言。此外,由于  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , 因此上述论证可以完全类比到电流密度上,从而对系数  $h_j$  给出相同的结论:  $h_3 = 0$ ,  $h_1$  和  $h_2$  必须满足与式 (C. 10) 相同的形式。

现在我们将  $f_1, f_2, h_1, h_2$  分别代入  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{J}$  的表达式。计算显示,磁场和电流密度的叉积表示式分别为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \bar{f}_1 \nabla \psi \times \nabla \chi + \bar{f}_2 \nabla \zeta \times \nabla \psi + \nabla \psi \times \nabla \bar{f} \\ \mathbf{J} &= \bar{h}_1 \nabla \psi \times \nabla \chi + \bar{h}_2 \nabla \zeta \times \nabla \psi + \nabla \psi \times \nabla \bar{h} \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 11})$$

这些即我们要求的表达式。这里的关键是  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{h}_1, \bar{h}_2$  仅为通量  $\psi$  的函数。一会儿我们就会看到函数  $\bar{f}$  是如何通过附加的  $\chi, \zeta$  坐标变换被去掉的。

### C.3 到布泽坐标梯度形式的部分简化

下一步推导是利用安培定律:  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ 。首先,电流密度可以写成:

$$\mathbf{J} = \nabla \times [k_1(\psi) \nabla \chi + k_2(\psi) \nabla \zeta - \bar{h}(\psi, \chi, \zeta) \nabla \psi] \quad (\text{C. 12})$$

这里,

$$dk_1/d\psi = \bar{h}_1(\psi), \quad dk_2/d\psi = -\bar{h}_2(\psi) \quad (\text{C. 13})$$

由于  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ , 我们可以写出:

$$\mathbf{B} = \mu_0 [k_1 \nabla \chi + k_2 \nabla \zeta - \bar{h} \nabla \psi + \nabla \bar{g}(\psi, \chi, \zeta)] \quad (\text{C. 14})$$

这里,  $\bar{g}(\psi, \chi, \zeta)$  是任意积分函数。为了不失一般性,我们假定  $\bar{g}$  是  $\chi$  或  $\zeta$  的周期函数。任何非周期贡献项一定可以写成  $\bar{g} = C_1 \chi + C_2 \zeta$  的形式,其中,  $C_1$  和  $C_2$  是常数,它们被并入公式 (C. 13) 积分后出现的自由积分常数  $k_1, k_2$  里。

公式 (C. 14) 具有许多我们想要的布泽坐标梯度形式的性质。具体来说就是,函数  $k_1, k_2$  仅为通量  $\psi$  的函数。一会儿我们就会看到自由函数  $\bar{g}$  是如何通过附加的  $\chi, \zeta$  坐标变换被去掉的。

## C.4 去掉自由函数 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$

可以证明,磁场总可以写成  $\chi$  和  $\zeta$  坐标任意选取的两种形式。为方便起见,我们将这两种形式总结如下:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \bar{f}_1 \nabla \psi \times \nabla \chi + \bar{f}_2 \nabla \zeta \times \nabla \psi + \nabla \psi \times \nabla \bar{f} \\ \mathbf{B} &= \bar{k}_1 \nabla \chi + \bar{k}_2 \nabla \zeta - \bar{h} \nabla \psi + \nabla \bar{g} \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 15})$$

这里的前提是假定  $\chi$  和  $\zeta$  坐标的任意已知的选取已经确定。我们来证明变换到新坐标  $\chi'$  和  $\zeta'$  的变换是如何去掉自由函数  $\bar{f}$  和  $\bar{g}$  的,这里的新坐标就是布泽坐标。

坐标的适当变换定义为:

$$\left. \begin{aligned} \chi' &= \chi + \bar{A}_1(\psi) \bar{G}(\psi, \chi, \zeta) + \bar{C}_1(\psi) \bar{F}(\psi, \chi, \zeta) \\ \zeta' &= \zeta + \bar{A}_2(\psi) \bar{G}(\psi, \chi, \zeta) + \bar{C}_2(\psi) \bar{F}(\psi, \chi, \zeta) \\ \psi' &= \psi \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 16})$$

其中  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{C}_1, \bar{C}_2$  和  $\bar{G}, \bar{F}$  均为满足  $\langle \bar{G} \rangle = \langle \bar{F} \rangle = 0$  的任意函数。显然,变换有很大的自由度,因为这里有 6 个自由函数。一种方便的选择是:

$$\left. \begin{aligned} \chi' &= \chi + \frac{1}{\bar{f}_1 \bar{k}_2 + \bar{f}_2 \bar{k}_1} (\bar{f}_2 \bar{g} + \bar{k}_2 \bar{f}) \\ \zeta' &= \zeta + \frac{1}{\bar{f}_1 \bar{k}_2 + \bar{f}_2 \bar{k}_1} (\bar{f}_1 \bar{g} - \bar{k}_1 \bar{f}) \\ \psi' &= \psi \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 17})$$

在这种选定的变换下,可以证明磁场的两种形式可简化为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \bar{f}_1 \nabla \psi \times \nabla \chi + \bar{f}_2 \nabla \zeta \times \nabla \psi \\ \mathbf{B} &= \bar{k}_1 \nabla \chi + \bar{k}_2 \nabla \zeta + \bar{k} \nabla \psi \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 18})$$

这里,

$$\bar{k}(\psi, \chi, \zeta) = -\bar{h} + \frac{1}{\bar{f}_1 \bar{k}_2 + \bar{f}_2 \bar{k}_1} \left[ (\bar{f}_2 \bar{g} + \bar{k}_2 \bar{f}) \frac{d\bar{k}_1}{d\psi} + (\bar{f}_1 \bar{g} - \bar{k}_1 \bar{f}) \frac{d\bar{k}_2}{d\psi} \right] \quad (\text{C. 19})$$

是满足(代替了  $\bar{h}$  的)  $\langle \bar{k} \rangle = 0$  的新的自由函数。为简单起见,我们去掉了所有的撇号。公式(C. 18)就是我们要求的布泽坐标下的磁场表达式。由于条件  $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p$

没有确定,因此实际  $\psi$ ,  $\chi$  和  $\zeta$  坐标的规定还有相当大的灵活性。但就目前理解单粒子约束来说,没必要进行压强平衡分析。因此下面我们将重点与流函数  $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ ,  $\bar{k}_1, \bar{k}_2$  有关的更具物理内容的量上。

## C.5 将物理量引入到布泽坐标系

在本节我们来证明量  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2$  与磁通量和给定等压面内的电流密切相关。为此引入计算通量和电流所需的极向和环向微分面元,如图 C.1 所示。极向和环向微分面元的数学表达式通常定义如下:

$$\left. \begin{aligned} dA_p &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} d\zeta d\psi \\ dA_t &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi} d\chi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 20})$$

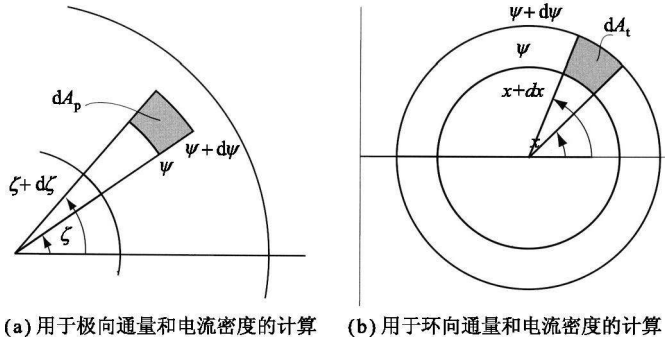


图 C.1 微分面元

在直角坐标系  $x(\psi, \chi, \zeta), y(\psi, \chi, \zeta), z(\psi, \chi, \zeta)$  下,我们可以方便地取关于  $\psi, \chi, \zeta$  的各阶导数。为此写出  $\mathbf{r} = x(\psi, \chi, \zeta) \mathbf{e}_x + y(\psi, \chi, \zeta) \mathbf{e}_y + z(\psi, \chi, \zeta) \mathbf{e}_z$ , 我们有:

$$\left. \begin{aligned} \partial \mathbf{r} / \partial \psi &= x_\psi \mathbf{e}_x + y_\psi \mathbf{e}_y + z_\psi \mathbf{e}_z \\ \partial \mathbf{r} / \partial \chi &= x_\chi \mathbf{e}_x + y_\chi \mathbf{e}_y + z_\chi \mathbf{e}_z \\ \partial \mathbf{r} / \partial \zeta &= x_\zeta \mathbf{e}_x + y_\zeta \mathbf{e}_y + z_\zeta \mathbf{e}_z \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 21})$$

类似地,直角坐标系下的单位矢量可以写成:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \nabla x = x_\psi \nabla \psi + x_\chi \nabla \chi + x_\zeta \nabla \zeta \\ \mathbf{e}_y &= \nabla y = y_\psi \nabla \psi + y_\chi \nabla \chi + y_\zeta \nabla \zeta \\ \mathbf{e}_z &= \nabla z = z_\psi \nabla \psi + z_\chi \nabla \chi + z_\zeta \nabla \zeta \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 22})$$

直接计算可得：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} &= J' \nabla \chi \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi} &= J' \nabla \zeta \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 23})$$

这里  $J' = [x_\psi(y_\chi z_\zeta - z_\chi y_\zeta) + x_\chi(y_\zeta z_\psi - z_\zeta y_\chi) + x_\zeta(y_\psi z_\chi - z_\psi y_\chi)]$ 。量  $J'$  是坐标变换的逆雅可比行列式, 即  $J' = 1/J$ 。它由下式得到：

$$dx dy dz = J' d\psi d\chi d\zeta \quad (\text{C. 24})$$

其中,

$$\begin{aligned} J' &= \begin{vmatrix} x_\psi & x_\chi & x_\zeta \\ y_\psi & y_\chi & y_\zeta \\ z_\psi & z_\chi & z_\zeta \end{vmatrix} \\ &= [x_\psi(y_\chi z_\zeta - z_\chi y_\zeta) + x_\chi(y_\zeta z_\psi - z_\zeta y_\chi) + x_\zeta(y_\psi z_\chi - z_\psi y_\chi)] \end{aligned} \quad (\text{C. 25})$$

将这些结果综合起来即得到简单的微分面元表达式：

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{A}_p &= \nabla \frac{\chi d\zeta d\psi}{J} \\ d\mathbf{A}_t &= \nabla \frac{\zeta d\chi d\psi}{J} \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 26})$$

现在考虑由下述定义的极向通量：

$$\Psi_p = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_p = \int_0^{2\pi} \int_0^\psi \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \chi d\zeta d\psi}{J} \quad (\text{C. 27})$$

用  $\mathbf{B}$  的叉积表达式有：

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \chi = \bar{f}_2 (\nabla \zeta \times \nabla \psi) \cdot \nabla \chi = J \bar{f}_2 \quad (\text{C. 28})$$

在被积函数中雅可比因子抵消掉了, 对  $\zeta$  的积分立即得到因子  $2\pi$ 。因此极向通量简化为：

$$\Psi_p = 2\pi \int_0^\psi \bar{f}_2 d\psi \quad (\text{C. 29})$$

我们知道,  $\psi$  被定义成  $\psi = \Psi_p / 2\pi$ 。因此, 由式(C. 29)对  $\psi$  的微分得到：

$$\bar{f}_2 = 1 \quad (\text{C. 30})$$

对环向通量进行完全类似的计算得：

$$\Psi_i = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_i = \int_0^{2\pi} \int_0^\psi \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \zeta}{J} d\chi d\psi = 2\pi \int_0^\psi \bar{f}_i d\psi \quad (\text{C. 31})$$

同样有  $\psi_i = \Psi_i/2\pi$ ，然后对  $\psi$  微分得到  $\bar{f}_i$  的下述表达式：

$$\bar{f}_i(\psi) = \frac{d\psi_i(\psi)}{d\psi} \equiv q(\psi) \quad (\text{C. 32})$$

这里  $q(\psi)$  是安全因子的一般定义。

另一个感兴趣的量是  $\psi = \text{常数}$  等量面内的电流。环向净电流为：

$$I_i = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}_i = \int_0^{2\pi} \int_0^\psi \frac{\mathbf{J} \cdot \nabla \zeta}{J} d\chi d\psi \quad (\text{C. 33})$$

利用  $\mathbf{B}$  的梯度，可以从  $\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$  计算出  $\mathbf{J} \cdot \nabla \zeta$ ：

$$\mu_0 \mathbf{J} \cdot \nabla \zeta = J \left[ \frac{dk_1^-}{d\psi} - \frac{\partial k^-}{\partial \chi} \right] \quad (\text{C. 34})$$

注意到  $\chi$  的积分包括了  $k^-$  平均为零。余下的项简化为：

$$\mu_0 I_i(\psi) = 2\pi \int_0^\psi \frac{dk_1^-}{d\psi} d\psi \quad (\text{C. 35})$$

现在我们定义  $i_i(\psi) = \mu_0 I_i(\psi)/2\pi$ ，直接积分式 (C. 35)，得到：

$$k_1^-(\psi) - k_1^-(0) = i_i(\psi) \quad (\text{C. 36})$$

积分常数  $k_1^-(0) = 0$ 。它由式 (C. 18) 得到，也就是说，当等离子体中净的环向电流为零时，不存在平均意义上的极向真空场。

最后一个感兴趣的量是  $\psi = \text{常数}$  等量面内的极向电流。类似计算可得到极向电流为：

$$I_p^{(\text{plasma})} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}_p = \int_0^{2\pi} \int_0^\psi \frac{\mathbf{J} \cdot \nabla \chi}{J} d\zeta d\psi \quad (\text{C. 37})$$

量  $\mathbf{J} \cdot \nabla \chi$  仍可以从磁场的梯度表达式中得到：

$$\mu_0 \mathbf{J} \cdot \nabla \chi = -J \left[ \frac{dk_2^-}{d\psi} - \frac{\partial k^-}{\partial \zeta} \right] \quad (\text{C. 38})$$

积分中  $k^-$  项平均为零。剩余项对  $I_p$  的贡献简化为：



$$\mu_0 I_p^{(\text{plasma})}(\psi) = -2\pi \int_0^\psi \frac{dk_2^-}{d\psi} d\psi \quad (\text{C. 39})$$

引入定义  $i_p^{(\text{plasma})}(\psi) = \mu_0 I_p^{(\text{plasma})}(\psi/2\pi)$  并积分式(C.39), 得到:

$$\bar{k}_2^-(\psi) - \bar{k}_2^-(0) = -i_p^{(\text{plasma})}(\psi) \quad (\text{C. 40})$$

积分常数  $\bar{k}_2^-(0)$  不为零。也就是说, 即使不存在极向等离子体电流, 但线圈中净的极向电流产生的环向真空磁场(即托卡马克中  $B_\phi = B_0 R_0/R$  的贡献)依然存在。归一化的线圈电流定义:

$$i_p^{(\text{coil})} = \mu_0 I_p^{(\text{coil})}/2\pi = \text{常数}$$

这意味着  $\bar{k}_2^-(0) = i_p^{(\text{coil})}$ 。因此, 式(C.40)可改写成:

$$\bar{k}_2^-(\psi) = i_p^{(\text{coil})} - i_p^{(\text{plasma})}(\psi) \equiv i_p(\psi) \quad (\text{C. 41})$$

上述讨论最后导致磁场在布泽坐标系下按物理通量和电流的双重表示:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= q(\psi) \nabla \psi \times \nabla \chi + \nabla \zeta \times \nabla \psi \\ \mathbf{B} &= i_i(\psi) \nabla \chi + i_p(\psi) \nabla \zeta + \bar{k}_2^-(\psi, \chi, \zeta) \nabla \psi \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 42})$$

布泽双重表示有一个关键性质, 它对于理解仿星器中的粒子轨道至为关键。这一性质可以从两式的点积看出来:

$$J = J(\psi, B) = \frac{B^2}{i_i + q i_p} \quad (\text{C. 43})$$

也就是说, 对于给定通量面, 坐标变换的雅可比行列式仅为  $B$  的函数, 而不依赖于磁场的矢量性质。

## C.6 布泽坐标系下的导心轨道

分析的最后一步是将粒子的导心运动方程变换到布泽坐标系下。为此我们注意到, 确定粒子位置的两种等效的方法:  $x, y, z$  坐标系表示和  $\psi, \chi, \zeta$  坐标系表示。如果粒子是在稳态磁场下以导心速度运动, 则布泽坐标系下描述轨道演化的方程为:

$$\left. \begin{aligned} d\psi/dt &= (\mathbf{r}_g + v_{\parallel} \mathbf{b}) \cdot \nabla \psi \\ d\chi/dt &= (\mathbf{r}_g + v_{\parallel} \mathbf{b}) \cdot \nabla \chi \\ d\zeta/dt &= (\mathbf{r}_g + v_{\parallel} \mathbf{b}) \cdot \nabla \zeta \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 44})$$

这里,  $\mathbf{v}_g = \mathbf{r}_g + v_{\parallel} \mathbf{b}$  是导心速度, 在稳态情形下它包含了  $\mathbf{B}$  的梯度漂移、曲率漂移和平行运动。特别地, 垂直方向运动由下式给定:

$$\frac{d\mathbf{r}_g}{dt} = \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_c} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B} \quad (\text{C. 45})$$

现在我们来讨论  $d\chi/dt$  的计算, 它代表垂直于通量面方向上的导心漂移。我们说粒子轨道对通量面的偏离量是高维几何下确定粒子损失的最重要参数, 这一判断的根据见 14.4 节。就眼下目的而言, 读者只需假定这一判断是正确的, 认可当对通量面的偏离很小时, 单粒子的约束就是好的即可。

由于  $\mathbf{b} \cdot \nabla \psi = 0$ , 因此要求得这个量就要估计  $\mathbf{r}_g \cdot \nabla \psi$ 。利用  $\mathbf{B}$  的梯度公式得到:

$$\nabla \psi \cdot \mathbf{B} \times \nabla B = J \left[ i_i \frac{\partial B}{\partial \zeta} - i_p \frac{\partial B}{\partial \chi} \right] \quad (\text{C. 46})$$

利用  $\mathbf{R}_c/R_c^2 = -\boldsymbol{\kappa} = -\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$  并由下式, 曲率漂移项可得到简化:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \nabla \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{1}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla B}{B^3} \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{B^2} \nabla \left[ \mu_0 p + \frac{B^2}{2} \right] - \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla B}{B^3} \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{B^2} \frac{dp}{d\psi} \nabla \psi + \frac{\nabla B}{B} - \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla B}{B^3} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (\text{C. 47})$$

于是有:

$$\nabla \psi \cdot \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{B} = -\frac{J}{B} \left[ i_i \frac{\partial B}{\partial \zeta} - i_p \frac{\partial B}{\partial \chi} \right] \quad (\text{C. 48})$$

最后这一步简化用了导心理论中粒子的能量守恒和磁矩守恒这一事实。因此, 垂直速度和平行速度可写成  $mv_{\perp}^2/2 = \mu B$  和  $mv_{\parallel}^2/2 = E - \mu B$ 。将这些结果综合起来, 代入  $J$ , 即得到所要求的垂直方向的导心漂移运动方程:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{2E - \mu B}{eB} \left[ \frac{i_i}{i_i + qi_p} \frac{\partial B}{\partial \zeta} - \frac{i_p}{i_i + qi_p} \frac{\partial B}{\partial \chi} \right] \quad (\text{C. 49})$$

式 (C. 49) 的关键特点是, 垂直方向的导心漂移仅与  $\psi$  和  $B$  有关, 与  $\mathbf{B}$  的矢量性质无关。这个结果可用来理解 W7-X 和 NCSX 等仿星器设计的主要动机。

## 附录 D 坡印亭定理

本附录给出坡印亭矢量与等离子体电磁波总储能之间关系的推导。

推导的第一步是用  $\mathbf{B}_1^*$  和  $\mathbf{E}_1^*$  与线性麦克斯韦方程组[即式(15.38)]进行适当的点积,由此得到坡印亭定理:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} &= \frac{\omega}{2} \left[ \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}_1^2| + \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}_1^* \cdot \vec{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{E}_1 \right] \\ \mathbf{P} &\equiv \frac{1}{4\mu_0} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1^* + \mathbf{E}_1^* \times \mathbf{B}_1) = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1^*) \end{aligned} \right\} \quad (\text{D. 1})$$

其中,  $\mathbf{P}$  是表示电磁波功率通量的坡印亭矢量。假定这个介电张量可以分成实部和虚部:

$$\vec{\mathbf{K}} = \vec{\mathbf{K}}_r(\omega) + i\vec{\mathbf{K}}_i(\omega, k)$$

其中,  $\vec{\mathbf{K}}_r$  表示冷等离子体介电张量;  $\vec{\mathbf{K}}_i \ll \vec{\mathbf{K}}_r$  表示小的耗散项。

考虑到两种不同的情形即可得到所要求的关系。在第一种情形下,假定等离子体由具有实频  $\omega = \omega_r$  的源驱动。因此,波因耗散以带有小空间阻尼的方式传播到等离子体中:

$$\mathbf{k} = k_{\parallel} \mathbf{e}_z + (k_{\perp r} + ik_{\perp i}) \mathbf{e}_x = \mathbf{k}_r + i\mathbf{k}_{\perp i} \mathbf{e}_x$$

在小耗散极限情形下,坡印亭定理的实部和虚部分别简化为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{P} &= \frac{\omega_r}{2} \left[ \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}_1^2| + \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}_1^* \cdot \vec{\mathbf{K}}_r(\omega_r) \cdot \mathbf{E}_1 \right] \\ \mathbf{k}_{\perp i} P_{\perp} &\approx \frac{\omega_r \epsilon_0}{4} \mathbf{E}_1^* \cdot \vec{\mathbf{K}}_i(\omega_r, k_r) \cdot \mathbf{E}_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{D. 2})$$

第一个方程自动满足,因为它等效于满足冷等离子体色散关系;第二个方程给出坡印亭通量与耗散功率之间的关系。

在第二种情形下,假定波以实波数  $\mathbf{k} = k_{\parallel} \mathbf{e}_z + k_{\perp r} \mathbf{e}_x = \mathbf{k}_r$  在等离子体中传播,但在时间上因耗散缓慢阻尼:  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ 。在此情形下,坡印亭定理的实部和虚部简化为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{P} &= \frac{\omega_r}{2} \left[ \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}_1^2| + \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}_1^* \cdot \vec{\mathbf{K}}_r(\omega_r) \cdot \mathbf{E}_1 \right] \\ 0 &\approx \omega_i U + \frac{\omega_r \epsilon_0}{4} \mathbf{E}_1^* \cdot \vec{\mathbf{K}}_i(\omega_r, k_r) \cdot \mathbf{E}_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{D. 3})$$

这里,

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}_i|^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}_i^* \cdot \frac{\partial}{\partial \omega_r} [\omega_r \ddot{\mathbf{K}}_r(\omega_r)] \cdot \mathbf{E}_i \right\} \quad (\text{D. 4})$$

量  $U$  表示系统的总储能(即波能 + 等离子体动能)。第一个方程仍自动满足,而第二个方程则给出储能与耗散之间的关系。

上两式相减(去掉耗散项)即得到所要求的关系:

$$P_{\perp} = \frac{\omega_i}{k_{\perp i}} U = V_{g\perp} U \quad (\text{D. 5})$$

即坡印亭通量等于储能与群速度之积。

# 主题词索引

- $\alpha$  粒子加热 alpha particle heating 65, 127, 184, 417, 496
- 阿尔文波 Alfvén waves 286, 287, 288
- 安全因子 safety factor  $q$  261, 263, 329, 345
- 包层与屏蔽 blanket and shield 77, 82
- 比压 beta,  $\beta$
- 圆柱情形下定义 cylindrical definition 254, 414
  - 比压极限  $\beta$  limits 275, 544
- 壁负荷 wall loading 80, 82, 407, 474
- 边缘局域模 edge localized modes, ELMs 465
- 场反位形 field reversed configuration (FRC) 105, 306, 316, 408
- 超导磁体 superconducting magnets 16, 77, 380, 591
- 氚增殖 tritium breeding 82, 594
- 垂直不稳定性 vertical instability 368, 475
- 垂直磁场 vertical magnetic field 131, 390
- 磁场线冻结概念 frozen-in-field line concept 272
- 磁化靶聚变 magnetized target fusion (MTF) 317
- 磁化电流 magnetization current 146, 233, 453
- 磁镜效应 mirror effect 153, 157, 446
- 磁镜装置 mirror machine 152, 157, 398
- 磁矩 magnetic moment 151, 152, 447
- 磁流体力学波 MHD waves 286
- 压缩阿尔文波 compressional Alfvén wave 286, 288
  - 一般推导 general derivation 53, 286
  - 剪切阿尔文波 shear Alfvén wave 286, 287
  - 声波 sound wave 43, 286, 289
- 磁流体力学模型 MHD model 105, 225, 231
- 能量守恒 conservation of energy 42, 53, 128, 169, 214, 220
  - 质量守恒 conservation of mass 115, 207, 227, 417, 491
  - 单流体变量 single fluid variables 225, 227
- 磁流体力学平衡 MHD equilibrium 102, 105, 224, 236
- 电流面 current surfaces 239
  - 磁面 flux surfaces 239
  - 磁压强 magnetic pressure 78, 225, 240
  - 磁张力 magnetic tension 240
  - 模型 model 27
  - 径向压强平衡 radial pressure balance 237, 240, 311
  - 环向力平衡 toroidal force balance 224, 247
- 磁流体力学稳定性 MHD stability 102, 225, 245, 280
- 轴对称模 axisymmetric mode 352
  - 气球-扭曲模 ballooning-kink mode 275, 439
  - 气球模 ballooning mode 275, 277, 360
  - 磁场线冻结概念 frozen-in-field line concept 272
  - 一般概念 general concepts 271
  - 一般形式 general formulation 46, 136, 286
  - 理想磁流体力学模型 ideal MHD mode 231, 236, 270, 317, 416
  - 交换模 interchange mode 275, 276, 392
  - 扭曲模 kink mode 275, 331, 368
  - 线性稳定性 linear stability 67, 281
  - 机械类比 mechanical analogs 467
  - 压强驱动模和电流驱动模 pressure driven and current driven modes 274
  - 电阻性磁流体力学模 resistive MHD mode 415, 585

- 电阻壁模 resistive wall mode 275,306,337
- 磁声波 magnetosonic waves 286,289
- 磁体,强磁场 magnets, high field 16
- 磁通量面(磁面) flux surfaces 239
- 磁约束聚变概念 magnetic fusion concepts 105
- 单粒子运动 single particle motion 103,126
- 守恒关系 conservation relations 25,53,128
- 运动常数 constants of motion 129
- 运动方程 equations of motion 128
- 洛仑兹力 Lorentz force 112
- 平行力 parallel force 130,157
- 导心运动 guiding center motion 126,132,152
- 曲率漂移 curvature drift 127,142
- $E \times B$  漂移  $E \times B$  drift 127,134
- 磁场梯度漂移 grad-B drift 394
- 平行于磁场方向的梯度 parallel gradient in B 127
- 极化漂移 polarization drift 127,146
- 德拜屏蔽 Debye shielding 111
- 稳恒场 DC fields 129
- 物理图像 physical picture 18,111
- 德拜长度 Debye length 110,111
- 推导 derivation 112
- 德拜球 Debye sphere 110,119
- 等离子体参数 plasma parameter 76,93,110
- 等离子体定义 plasma definition 110
- 库仑碰撞 Coulomb collisions 37,39
- 等离子体拉长 plasma elongation 97
- 等离子体频率 plasma frequency 110
- 推导 derivation 116
- 公式 formula 117
- 等离子体湍流 plasma turbulence 79,414
- 低杂波电流驱动 lower hybrid current drive (LHCD) 493,509,566
- 可近性 accessibility 514,515,522
- 驱动电流 driven current 108,495,566,568
- 慢波功率吸收 slow wave power absorption 574
- 低杂波频率 lower hybrid frequency 568
- 点火实验设计 ignition experiment design 484
- 约束 constraints 486
- 加热到点火 heating to ignition 73,183,415,436
- 功率平衡 power balance 33
- 热稳定性 thermal stability 55
- 点火条件 ignition condition 58
- 外部功率 external power 55
- 点火温度 ignition temperature 55,436,483
- 电磁波 electromagnetic waves 204,494
- 介电张量 dielectric tensor 515
- 色散关系 dispersion relation 288,515,526
- 分析方法 methods of analysis 207
- ~的相速度和群速度 phase and group velocity 515
- ~的偏振 polarization 515,521
- ~的反射、透射、吸收和模转换 reflection, transmission, absorption, and mode conversion 515,521
- 电流驱动 current drive 65,102,107
- 电子回旋加热 electron cyclotron heating, ECH 493,509,544
- O模吸收 O-mode absorption 547
- O模的可近性 O-mode accessibility 545
- X模吸收 X-mode absorption 552
- X模的可近性 X-mode accessibility 549
- 经典 classical 27,42
- 新经典 neoclassical 152,396
- 电阻性不稳定性 resistive instabilities 229
- 动理学理论 kinetic theory 204,419
- 动量守恒 conservation of momentum 112,128,210,213,228
- 碰撞摩擦力 collisional friction force 212
- 电场力 electric field force 104,210
- 动量守恒方程 equations 210,213
- 惯性力 inertial force 210
- 磁场力 magnetic field force 128,211
- 压强梯度力 pressure gradient force 104,211
- 反常输运 anomalous transport 79,107,390,415,488

- 反向场箍缩 reverse field pinch (RFP) 105, 306, **328**  
 平衡 equilibrium **330**  
 $m=0$  模  $m=0$  mode **293**  
 $m=1$  模  $m=1$  mode **296**
- 反剪切 reverse shear **376**
- 反应速率 reaction rate 14, **37**  
 概念 concept 38  
 聚变 fusion 32
- 仿星器 stellarator 60, 105, 263, **390**  
 布泽坐标系 Boozer coordinates **396**  
 螺旋器 heliotron **391**  
 粒子轨道 particle orbits **126**  
 准对称性 quasi-symmetry **397**
- 仿星器坐标系 stellarator coordinates **393**
- 分布函数 distribution function **38**
- 风能 wind power **4**
- 俘获粒子 trapped particles 164, 399, **446**  
 回弹频率 bounce frequency **448**
- 辐射损失 radiation losses 33, **46**
- 辅助加热功率 auxiliary heating power 56, 73, 214, **218, 465**
- 格林沃尔德密度极限 Greenwald density limit 465, 474, **476**
- 工程增益因子  $Q_E$  the engineering gain factor **64**
- 功率平衡 power balance 33, **53**
- 国际热核聚变实验堆 International Thermonuclear Experimental Reactor (ITER) **16**
- 国际托卡马克反应堆 International Tokamak Reactor (INTOR) **592**
- 核反应 nuclear reactions **9**
- 核能 nuclear power **9**
- 化学反应 chemical reactions 6, **17**
- 环径比展开 aspect ratio expansion 255, 346, **354**
- 环力 hoop force 247, **248**
- 环形几何 toroidal geometry **107, 126**
- 回旋半径 gyro radius **103, 110, 122**
- 回旋管 gyrotron 494, **511**
- 回旋频率 cyclotron frequency **110**
- 回旋运动 gyro motion **103**
- 回旋阻尼 cyclotron damping **529, 534, 540**
- 集体效应 collective effects **104**
- 加热 heating **4**
- 加热分布效应 heating profile effects **442**
- 剪切 shear **376**
- 结合能曲线 binding energy curve 18, **25**
- 截面 cross section 33, **34**  
 电荷交换截面 charge exchange **502**  
 库仑碰撞截面 Coulomb **179**  
 聚变反应截面 fusion **81, 441**  
 硬球模型 hard sphere **41**
- 经验定标关系 empirical scaling relations 107, 414, **460**
- 净交换碰撞 net exchange collisions 167, **193**
- 锯齿振荡 sawtooth oscillations **352**
- 聚变反应堆 fusion reactor **14, 53, 76**
- 聚变反应截面 fusion cross section **81, 179**
- 聚变功率密度 fusion power density 37, **41**
- 聚变能 fusion energy **1**
- 聚变能产生 fusion energy production **37**
- 绝热不变量 adiabatic invariants **146**
- 绝热状态方程 adiabatic equation of state **268**
- 库仑碰撞 Coulomb collisions **37**  
 轭致辐射 Bremsstrahlung radiation **33**
- 能量守恒 conservation of energy **42**
- 角动量守恒 conservation of angular momentum **170**
- 数学推导 mathematical derivation **147, 167**
- 净能量交换 net energy exchange **167, 199**
- 净动量交换 net momentum exchange 167, 195, **196**
- 试探粒子动量 test particle momentum **174**
- 快磁声波 fast magnetosonic wave **286**
- 扩散方程 diffusion equation **338**
- 拉格朗日坐标系 Lagrangian coordinates **207**
- 拉莫尔半径 Larmor radius **131**
- 朗道阻尼 Landau damping 495, 520, **529**

- 劳森参数 Lawson parameter 59  
 离子回旋加热 ion cyclotron heating (ICH)  
     493,494  
 离子源 ion source 494  
 理想导体壁 perfectly conducting wall 105  
 理想点火 ideal ignition 58  
 锂 lithium 15  
     包层 blanket 15  
     反应堆 reactions 9  
     资源 reserves 2  
 流体模型 fluid models 53  
 螺旋磁场 helical magnetic field 263,391,401  
 螺旋箍缩 screw pinch 241,245  
 麦克斯韦方程 Maxwell's equations 53  
 麦克斯韦分布函数 Maxwellian distribution  
     function 41  
 慢磁声波 slow magnetosonic wave 286  
 慢化时间 slowing down time 185  
 煤炭 coal 5  
 密度极限 density limit 461  
 面电流模型 surface current model 250  
     平衡 equilibrium 250  
     稳定性 stability 258  
 模转换 L-H transition 463  
 内部输运垒 internal transport barriers 459,467  
 能量约束时间 energy confinement time,  $\tau_E$  57  
 扭曲不稳定性 kink instability 277,361  
 欧拉坐标系 Eulerian coordinates 207  
 欧姆定律 Ohm's law 224  
     广义 generalized 224  
     理想 ideal 224  
     电阻性 resistive 228  
 欧姆加热 Ohmic heating 54  
 碰撞参数 impact parameter 39  
 碰撞频率 collision frequency 34  
 偏滤器 divertor 80  
 偏振 polarization 515,521  
 平均自由程 mean free path 33  
 坡印亭矢量 Poynting vector 223,525  
 破裂 disruptions 296,321,352  
 鞘 sheath 112  
 球马克 spheromak 105,306,343  
 球形托卡马克 spherical tokamak 105,306,379  
 曲率 curvature 127  
     平均曲率 average curvature 277  
     好曲率 favorable curvature 275  
     坏曲率 unfavorable curvature 275  
 曲率半径矢量 radius of curvature vector 143  
 热传导损失 thermal conduction losses 58  
 热通量 heat flux 56  
 热稳定性 thermal stability 55  
 色散关系 dispersion relation 288,515,517  
 射频加热 radio frequency heating 54,107,213,  
     518  
 石油 oil 3  
 示范聚变电站 DEMO 597  
 试探粒子碰撞频率 test particle collision frequencies  
     167,173  
 运输损失 transport losses 104  
 速调管 klystron 511  
 随机行走模型 random walk model 419  
     同种粒子扩散 like particle diffusion 428  
     粒子扩散 particle diffusion 198,229  
     热传导 thermal conduction 33  
 逃逸电子 runaway electrons 135,189  
 天然气 natural gas 3  
 通行粒子 passing particles 442  
 湍流 turbulence 57  
 托卡马克 tokamak 60  
     先进托卡马克 advanced tokamak (AT)  
         306,376  
     圆截面托卡马克 circular cross section tokamak  
         353  
     导体壁致稳 conducting wall stabilization 275  
     电流极限 current limits 270  
     拉长型托卡马克 elongated tokamak 307  
     特鲁瓦永极限 Troyon limit 365,375  
     垂直不稳定性 vertical instability 368



- 体中子源 volume neutron source **380**
- 外部加热功率 external heating power **54**
- 微观不稳定性 micro-instabilities **107,213**
- 温度平衡 temperature equilibration **167,193,195**
- 温室气体 greenhouse gases **3**
- 稳态运行 steady state operation **55**
- 无碰撞阻尼 collisionless damping **494**
- 朗道阻尼 Landau damping **495**
- O 模回旋阻尼 O-mode cyclotron damping **540**
- X 模回旋阻尼 X-mode cyclotron damping **529**
- 物理增益因子  $Q$ , the physics gain factor **61**
- 限制器 limiter **80,463**
- 香蕉轨道 banana orbits **448**
- 悬浮偶极器 levitated dipole **296,307**
- 乙醇 ethanol **4**
- 真空管 vacuum tube **512,582**
- 正则动量 canonical momentum **129,397**
- 质量守恒 conservation of mass **115,207**
- 质量守恒方程 equation **207,227**
- 中性束加热 neutral beam heating **107,167,189,493**
- 轴对称不稳定性 axisymmetric instability **367**
- 轴对称模 axisymmetric modes **352**
- 转动变换 rotational transform **401**
- 准中性条件 quasi-neutrality **115,226,556**
- 自举电流 bootstrap current **108,306,351**
- 自举电流比例 bootstrap fraction **352,376,453,484**
- 自洽的等离子体模型 self-consistent plasma models **166,204**
- 流体元 fluid elements **104,119,206**
- 宏观平均 macroscopic averages **194,205**