中 国 科 学 技 术 大 学

2021–2022 学年第二学期期末试卷

考试科目____随机过程 B____ 得分________

所在系_______ 姓名__________ 学号________

考试时间:2022 年 6 月 14 日 8:30–10:30

线

封

密

一、（30 分）是非填空选择题 (答案请写在答题纸上):

1.（10 分）判断下列有关离散时间 Markov 链说法正确与否.

1). Poisson 过程是平稳过程也是连续 Markov 链.(　)

2). 在直线上简单对称的随机游动所有状态都是零常返的.(　)

3). 一个有限状态的 Markov 链一定存在平稳分布.(　)

4). 若 Markov 链某个状态是吸收态，则过程最终会停留在这个吸收态.(　)

5). Gauss 平稳过程一定是严平稳过程.(　)

2.（4 分）某加油站红、银、白三种汽车到达过程分别为强度 1、3、5（辆/10 分钟）的 Poisson 过程，则第一辆车的到达的平均时间为________. 第一辆白车到达前恰好有 k 辆非白车到达的概率为________$(k \geq 0)$.

3.（4 分）下列可以成为某平稳过程的谱密度函数是________.

A.$S(\omega) = \frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6}$　　B.$S(\omega) = \frac{\omega^2+4}{\omega^4-4\omega^2+3}$

C.$S(\omega) = \frac{e^{-i\omega^2}}{\omega^2+2}(i = \sqrt{-1})$　　D.$S(\omega) = \frac{\cos\omega}{\omega^2+2}$

4.（4 分）已知实平稳过程 $\{X(t)\}$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = 25 + 4/(1 + 6\tau^2)$，并且满足 $\tau \to \infty$ 时，$X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 独立，则 $\{X(t)\}$ 的均值为________，方差为________.

5.（4 分）下列说法正确的是________.

A. 平稳独立增量过程一定是平稳过程.

B. 只要存在正常返类，离散时间的 Markov 链一定存在平稳分布.

C. 极限分布和平稳分布均存在则一定相同.

D. 有限状态的 Markov 链一定是遍历的 Markov 链.

6.（4 分）若 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一平稳独立增量过程，则________

A.$\{X(t), t \geq 0\}$ 是 Poisson 过程　　B.$\{X(t), t \geq 0\}$ 是 Markov 过程

C.$\{X(t), t \geq 0\}$ 是平稳过程　　D.$\{X(t), t \geq 0\}$ 是严平稳过程

二、（15 分）设某个服务系统只有一个服务器，从早上 8:00 开始接受服务，此时已有无数顾客在进行排队。每次只能服务一个顾客，服务的平均时间为 20 分钟，且每次服务的时间

为独立同分布的指数分布，$N(t)$ 表示从 8:00 后 t 时间内服务的顾客数。求

(1) 上午 8:00 到 12:00 的平均服务顾客数.

(2) 这段时间内服务完的顾客停留的平均时间.

三、(15 分) 市场上三种品牌的牛奶 (1,2,3) 在某一地区的市场占有率开始时均为 1/3，而每过一个季度后顾客的消费倾向发生改变，我们用一个三状态的 Markov 链来描述，其一步转移概率的均值为

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) 半年之后三种牛奶的市场占有率为多少?

(2) 从状态 2 到状态 3 的平均首达时间是多少?

(3) 各品牌牛奶市场占有率最终会稳定于什么样的比例?

四、(15 分) 从数 $1, 2, \ldots, N$ 任取一个数作为 X_1，对 $n > 1$，从 $1, 2, \ldots, X_{n-1}$ 中任取一个数作为 X_n，则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一 Markov 链.

(1) 写出 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(2) 对该 Markov 链进行状态分类 (几个等价类，周期性，是否常返，正常返等)

(3) 极限 $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^{(n)}$ 是否存在? 为什么.

五、(10 分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的均值函数为 0，谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 6}{\omega^4 + 8\omega^2 + 15}, -\infty < \omega < +\infty,$$

求 $X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

六、(15 分) 设 $X(t) = A\sin(t + \Phi), -\infty < t < +\infty$，其中 A 与 Φ 是相互独立的随机变量，且 $P(\Phi = \pi/4) = 1/2, P(\Phi = -\pi/4) = 1/2$，$A$ 服从区间 $(-1, 1)$ 内的均匀分布，讨论

(1) $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的平稳性.

(2) $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的均值遍历性。

2021-2022 学年第二学期期末试卷

作者：PB22-zwq

2024 年 9 月 12 日

摘要

该答案为助教个人作答，正确率无法完全保证，如果发现问题，欢迎联系指正。希望能对您的学习起到帮助！

一、选择填空

1. (1) $\times$

Poisson 过程既非宽平稳，也非严平稳。一方面 $E_X(t) = \lambda t$，说明不是宽平稳过程。另一方面，$N(t) \sim Poi(\lambda t)$，与时间 t 有关，所以也并非严平稳过程。

补充：严平稳与宽平稳定义

定义 1.2 如果随机过程 $X(t)$ 对任意的 $t_1, \cdots, t_n \in T$ 和任何 h 有

$$(X(t_1+h), \cdots, X(t_n+h)) \stackrel{d}{=} (X(t_1), \cdots, X(t_n)), \tag{1.3}$$

则称为严格平稳的.

定义 1.3 如果随机过程的所有二阶矩存在并有 $EX(t) = m$ 及协方差函数 $R_X(t,s)$ 只与时间差 $t-s$ 有关, 则称为宽平稳的或二阶矩平稳的.

(2) $\surd$

见教材 *P36* 例 *3.8*，我们这里继续证明是正常返。这里参考了知乎文章知乎链接，我们证明得到了

$$f_{00}^{(2n)} = P^{(1)}(Z_{2n} = 0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 1 \\ \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} & n \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

这里我们只需判断后一项无穷级数是否收敛，显然可以得到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} > \frac{1}{2n}$，后者发

散，所以该级数发散，$\mu_0 = \infty$，是零常返的。

(3) $\surd$

建议当作结论记在大抄上，见教材 *P41*-定理 *3.4*

(4) $\times$

这个结论可以用非常明显的例子来否定，只有经过了这个吸收态才会停留。比如假如一个马氏链的转移状态矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

我们如果从状态 *1*，*2* 开始，虽然 *3* 是吸收态，但是只会在 *1*，*2* 之间转移，所以无法被 *3* 吸收。

(5) $\surd$

即证明高斯过程宽平稳严平稳等价

高斯分布中，我们用两个变量 μ, Σ 来控制。宽平稳中，控制了变量的期望是常数，方差只与时间差有关，那么我们就已经确定了 μ, Σ 为与时间 t 或 t+h 无关的确定值，那么也就满足了严平稳。

2. $\frac{10}{9}$ $\quad$ $\frac{5 \cdot 3^k}{9^{k+1}}$

设第一辆车到达时间记为变量 T，那么概率分布 $P(T \leqslant t) = 1 - P(T \geqslant t) = 1 - P(N_1(t) = 0, N_2(t) = 0, N_3(t) = 0) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}$，是一个参数为 *9* 的指数分布，然后求期望为 $\frac{1}{9}$，最后注意单位是每 *10* 分钟，再乘上 *10*。

后一问我们直接给出一个结论：$X(t), Y(t)$ 为 λ_X, λ_Y 的 *Poisson* 过程，在 $X(t)$ 两个事件间隔内，$Y(t)$ 发生 k 个事件的概率为 $p = \frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}(\frac{\lambda_Y}{\lambda_X+\lambda_Y})^k$

proof: 我们先考虑 $X(t)$ 到达时刻服从指数分布 $P(X(t)\text{在 } t \text{ 到达}) = \lambda_X e^{-\lambda_X t}$，我们给这个概率重写下 $p = P(Y(t) = k|X(t) = 1)$，全概率公式展开

$= \int_t P(Y(t) = k, t|X \text{ 在 } t \text{ 到达})dt = \int_0^{+\infty} \lambda_X e^{-\lambda_X t} \frac{(\lambda_Y t)^k e^{-\lambda_Y t}}{k!} dt = \frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}(\frac{\lambda_Y}{\lambda_X+\lambda_Y})^k$

把非白车两个泊松过程相加再代入数据即可

3. A

BD 不满足非负性，*C* 不满足实值要求

4. ± 5, 4

$R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] \qquad \tau \to \infty \qquad = E[X(t)]E[X(t+\tau)] = m^2 = 25$

$Var(X(t)) = R_X(0) - E^2[X(t)] = 4$

5. B

A 反例：*Poisson* 过程独立增量，但并非平稳分布

C: $\pi = \pi P, \sum \pi_i = 1$ 不一定有唯一解，唯一解才是平稳分布

D 反例：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

周期为 *2*，不是遍历的

6. B

根据定义

二、Poisson 过程问题

(1)

指数分布期望为 $\frac{1}{\lambda}$，所以 $\lambda = 3$，独立同分布的指数分布之和就是 $Poisson$ 分布，参数相同，也为 *3*。

$Poisson$ 分布期望为 λ，所以 $Poisson$ 分布期望为 λt

$$N(t) \sim Poi(3) \qquad E[X(4)] = 3 \times 4 = 12$$

(2)

这道题题干是服务完的顾客的平均时间，教材上类似问题问的是所有顾客平均总时间，这里题干不是很明白，就两种想法都做一下

平均等待时间之和：用 W_i 表示第 i 个顾客停留时间，我们要求 $E[\sum_{i=1}^{N(t)} W_i]$，先考虑

$$E[\sum_{i=1}^{N(t)} W_i | N(t) = n] = E[\sum_{i=1}^{n} W_i | N(t) = n]$$

在 *N(t)* 条件下，$w_1, \cdots, w_n$ 为均匀分布次序统计量，求和期望与均匀分布期望相同

$$E[\sum_{i=1}^{n} W_i | N(t) = n] = E[\sum_{i=1}^{N(t)} U_{(i)}] = E[\sum_{i=1}^{n} U_i] = \sum_{i=1}^{n} E[U_i] = 2n$$

$$E[\sum_{i=1}^{N(t)} W_i] = E[E[\sum_{i=1}^{N(t)} W_i | N(t) = n]] = E[2n] = 2E[N(t)]$$

代入数据，t 取 *4*，结果为 *24*

平均每一个顾客的时间，只要略作改动

$$E[\frac{\sum_{i=1}^{N(t)} W_i}{N(t)} | N(t) = n] = 2$$

$$E[\frac{\sum_{i=1}^{N(t)} W_i}{N(t)}] = 2$$

这个结果非常直观，整个 *4* 小时内都是所有顾客都在等，那平均下来一个服务完的顾客就是在均匀分布的期望

三、Markov 链

(1)

$x_0=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}),\qquad x_2=x_0P^2=(\frac{94}{300},\frac{7}{30},\frac{34}{75})$

(2)

我们假设从 *1* 到 *3* 的首达步数为 u，从 *2* 到 *3* 的首达步数为 v。这里的核心步骤为，用全概率公式，通过“第一步”进行全概率展开
第一种解释，从直观角度理解：从 *1* 出发，u 步第一次到达 *3*，那第一步可能还在 *1*，那么总的步数就会是 *u+1*（重复这个过程，并且加上第一步），一定概率到 *2*，那么总步数就会是从 *2* 到 *3* 的步数再加上当前这一步，还有可能直接到 *3*，写成式子就是

$$\begin{cases} u=0.6(u+1)+0.3(v+1)+0.1\\ v=0.3(u+1)+0.2(v+1)+0.5\end{cases}$$

解得 $u=\frac{110}{23},v=\frac{70}{23}$
第二种解释：从期望公式的角度，这个首达时间本质上就是一个期望，根据全期望公式展开

$$E[\text{第一次到达 3 的步数}|\text{从 i 出发}]=E_j[E[\text{第一次到达 3 的步数}|\text{从 i 出发, 第一步到达 j}]]$$

转化为方程组与上式相同

(3)

设极限分布为 $\pi\in\mathbb{R}^{3\times1}$*(注意是行向量)*

$$\begin{cases} \pi=\pi P\\ \sum_{i=1}^{3}\pi_i=1\end{cases}$$

解得 $\pi=(\frac{7}{24},\frac{11}{48},\frac{23}{48})$
由于只有一个极限分布，所以这个极限分布是平稳分布，模型最后稳定于 π

四、Markov 链

(1)

$$P_{ij}=P\left\{X_{n+1}=j|X_n=i\right\}=\begin{cases}\frac{1}{i},j\le i;\\ 0,j>i\end{cases}$$

写成转移概率矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{1}{N}&\frac{1}{N}&\cdots&\frac{1}{N}\end{bmatrix}$$

(2)

N 个等价类

$\forall i<j, P_{ij}=0$ 所以任意两个状态之间不互达，每一个状态属于自己的等价类

非周期

$P_{ii}^{(n)} \geqslant \frac{1}{i^n} > 0 \Rightarrow d(i)=1$

状态 *1* 常返，其余状态瞬过

$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i^n} = \begin{cases} \infty \Rightarrow \text{常返}, i=1 \\ \frac{1}{i-1} \Rightarrow \text{顺过}, i \geqslant 2 \end{cases}$

状态 *1* 正常返

$f_{11}^{(n)} = \begin{cases} 1, i=1 \\ 0, i \geqslant 2 \end{cases}$ $, \mu_1 = \sum_{i=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = 1 < \infty \Rightarrow$ 正常返

有个推论：有限状态马氏链一定有一个正常返状态，如果马氏链不可约，则所有状态都正常返

(3)

无极限分布

定理 3.4 若一个不可约 Markov 链中的所有状态都是遍历的，则对所有 i, j，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$ 存在且 $\pi = \{\pi_j, j \geqslant 0\}$ 为平稳分布. 也即

$$\sum_j \pi_j = 1, \quad \pi_j > 0, \tag{3.15}$$

$$\sum_i \pi_i P_{ij} = \pi_j. \tag{3.16}$$

反之，若一个不可约 Markov 链只存在一个平稳分布，即满足 (3.15) 式及 (3.16) 式，且这个 Markov 链的所有状态都是遍历的. 则该平稳分布就是这一 Markov 链的极限分布，即对任何 i 有

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j. \tag{3.17}$$

尽管这个马氏链存在一个极限分布 $\pi = (1, 0, 0, \cdots, 0)$ ，但并非所有状态都遍历，所以无极限分布

五、谱密度函数与协方差函数互换

直接套公式并使用留数定理计算即可，先取 $\tau \geqslant 0$

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^2+6}{(w^2+3)(w^2+5)} e^{jw\tau} dw \\ &= j[Res[\frac{w^2+6}{(w^2+3)(w^2+5)} e^{jw\tau}, \sqrt{3}j] + Res[\frac{w^2+6}{(w^2+3)(w^2+5)} e^{jw\tau}, \sqrt{5}j]] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} e^{-\sqrt{3}\tau} - \frac{\sqrt{5}}{20} e^{-\sqrt{5}\tau} \end{aligned}$$

最后考虑协方差函数偶函数性质

$$R(\tau) == \frac{\sqrt{3}}{4}e^{-\sqrt{3}|\tau|} - \frac{\sqrt{5}}{20}e^{-\sqrt{5}|\tau|}$$

六、平稳分布性质

(1)

不是严平稳，取 $t=0, t=\frac{\pi}{4}$ 即可验证

是宽平稳，证明：

$$EX(t) = E[Asin(t+\Phi)] = E[AE[sin(t+\Phi)]] = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= EX(t)X(t+\tau) \\ &= E[A^2 sin(t+\Phi)sin(t+\tau+\Phi)] \\ &= E[A^2]E[\frac{cos(\tau) - cos(2t+2\Phi+\tau)}{2}] \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times cos(\tau) \\ &= \frac{cos(\tau)}{6} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T}cos\tau d\tau) \\ =&\frac{sin2T}{T} - \frac{1}{2T^2}\int_0^{2T}\tau cos\tau d\tau \\ =&\frac{sin2T}{T} - \frac{1}{2T^2}(2Tsin2T - 1 + cos2T) \\ &t \to \infty \\ =&0 \end{aligned}$$

所以是均值遍历的