数学分析（B2）期中考试试题

1.(10分) 设有空间直线L_1与L_2分别由如下的方程组定义：

$$L_1 : \begin{cases} x = y \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

求一个平面与它们平行而且到它们的距离相等。

解.

L_1的切方向

$$v_1 = (1, -1, 0) \times (1, 1, 1) = (-1, -1, 2).$$

L_2的切方向

$$v_2 = (2, 1, 0) \times (1, 0, 1) = (1, -2, -1).$$

所求平面的法方向

$$n = v_1 \times v_2 = (-1, -1, 2) \times (1, -2, -1) = (5, 1, 3).$$

所求平面方程一定是形如$5x + y + 3z = ?$的形式。

在L_1上取一点$(1, 1, -1)$， 代入得$? = 3$; 在L_2上取一点$(1, -1, -1)$，代入得$? = 1$.

则所求平面为$5x + y + 3z = 2$.

2.(10分) 设有一条曲线由如下方程组定义:

$$\begin{cases} x = yz \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2. \end{cases}$$

请判断这条曲线在不在一个平面上，并给出理由。

解.

不在一个平面上。直接在曲线上找到4个点，证明这4个点不在一个平面上即可。

考虑一个旋转 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v)$和$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v)$. 则 $y^2 + z^2 = u^2 + v^2$. 原方程变为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ x^2 + u^2 + v^2 = 2. \end{cases}$$

将$v = 0$代入， 得$2x = u^2$和$x^2 + u^2 = 2$，解$x^2 + 2x + 1 = 3$得

$$x = -1 \pm \sqrt{3}.$$

舍去负值。得两个点

$$(x, u, v) = (1 + \sqrt{3}, \pm\sqrt{2\sqrt{3} - 2}, 0).$$

类似的，将$u = 0$代入。找到另外两个点，

$$(x, u, v) = (1 - \sqrt{3}, 0, \pm\sqrt{2\sqrt{3} - 2}).$$

可以直接验证它们是不共面的。

3.(10分) 设方程$y = 2x\arctan\frac{y}{x}$决定了光滑的隐式函数$y(x)$。求：$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解. 令$u = y/x$，得

$$u = 2\arctan u.$$

分析函数的单调性不难得到，满足条件的u只有三种可能的取值$0, c, -c$。（其中c是某正数。）

由光滑性的假设，y/x必然是常值。所以$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

4.(15分) 求函数$f(x,y) = x^2 + xy^2 - x$在区域

$$D = \left\{(x,y)|x^2 + y^2 \le 2\right\}$$

上的最大最小值。

解. 计算得

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2 + 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy. \end{cases}$$

求解得到区域中的驻点三个：

点$(0,\pm1)$，对应函数值$f(0,\pm1) = 0$;

点$(1/2,0)$，对应函数值$f(1/2,0) = -1/4$.

研究边界。将$y^2 = 2 - x^2$代入，可得一元函数（定义在$[-2,2]$）

$$\varphi(x) = -x^3 + x^2 + x.$$

解$\varphi'(x) = -3x^2 + 2x + 1 = 0$得$x = 1$或$x = -1/3$。

对应$\varphi(1) = -1 + 1 + 1 = 1$和$\varphi(-1/3) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{27}$.

再加上区间端点对应的$\varphi(2) = -8 + 4 + 2 = -2$，和$\varphi(-2) = 8 + 4 - 2 = 10$.

综上所述，最大值为10，最小值为-2。

5.(15分) 设$C > 0$是一个常数，又设函数$f(x,y)$满足：对于任何平面上的点(x,y)，存在$a(x,y), b(x,y)$使得对于任何实数h,k满足$|h| + |k| \le 1$，有

$$|f(x+h,y+k) - f(x,y) - a(x,y)h - b(x,y)k| \le C(|h| + |k|)^{3/2}.$$

求证：f有一致连续的偏导数。

解. 有条件易见$a(x,y)$和$b(x,y)$就是两个偏导数，只需要证明他们是一致连续的。事实上，我们证明它们是Holder连续的。以$a(x,y)$为例，由条件

$$f(x+2h,y) = f(x,y) + a(x,y)2h + O(h^{3/2})$$
$$f(x+2h,y) = f(x+h,y) + a(x+h,y)h + O(h^{3/2})$$
$$f(x+h,y) = f(x,y) + a(x,y)h + O(h^{3/2}).$$

由此，

$$a(x+h,y)=a(x,y)+O(h^{1/2}). \tag{1}$$

注意上面写$O(h^{\alpha})$时，涉及到定义中的常数都是一致的。为简洁，采用O记号。

类似的，

$$f(x+h,y+h)=f(x,y+h)+a(x,y+h)h+O(h^{3/2})$$
$$f(x+h,y+h)=f(x,y)+a(x,y)h+b(x,y)h+O(h^{3/2})$$
$$f(x,y+h)=f(x,y)+b(x,y)h+O(h^{3/2}).$$

可得

$$a(x,y+h)=a(x,y)+O(h^{1/2}). \tag{2}$$

由(1)和(2)，可知a是Holder连续的。

6.(15分) 求椭球

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=1$$

被平面$x+y+z=1$分割得到的两块中，体积较小的那一块的体积。

解. 考虑线性变换$x=\sqrt{2}u, y=\sqrt{3}v, z=2w$. 问题变成求单位球，被平面

$$\sqrt{2}u+\sqrt{3}v+2w=1$$

分割得到的两块中体积较小的一块的体积。然后乘以倍数$2\sqrt{6}$.

求原点到上述平面的距离，由公式得

$$d=\frac{1}{\sqrt{2+3+4}}=\frac{1}{3}.$$

较小的一块是半径为1，高为2/3的球缺。直接用体积公式

$$\tilde{V}=\pi H^2(R-H/3)=\pi\frac{4}{9}(1-\frac{2}{9})=\frac{28}{81}\pi.$$

最终答案

$$V=\frac{56}{81}\sqrt{6}.$$

7.(10分) 设m是自然数。求积分

$$\iint_{|x|+|y|\le 1}(x^2-y^2)^m dxdy.$$

解. 做变量代换$u=x+y$和$v=x-y$. 积分区域变成$[-1,1]^2$，而且

$$dudv=2dxdy.$$

直接计算

$$\begin{aligned}原式 &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u^m v^m \frac{1}{2} dudv \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} u^m du\right)\left(\int_{-1}^{1} v^m dv\right).\end{aligned}$$

若m是奇数，则原式为0; 若m是偶数，则

$$原式 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{m+1}\right)^2.$$

8.(15分) 设$D = \{(x, y, z) | x, y, z \in [0, 1]\}$和$E = \left\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \le a\right\}$. 若$a \in (1, 2)$，求$D \cap E$的体积。

解.

由对称性,

$$所求体积 = \frac{1}{8}\left|E \cap [-1, 1]^3\right|.$$

而$E \cap [-1, 1]^3$为球体减去6个球缺。每个球缺的半径为 $\sqrt{a}$，高为 $\sqrt{a} - 1$.

由球缺的体积公式

$$\begin{aligned}球缺体积 &= \pi H^2(R - H/3) \\ &= \pi(\sqrt{a} - 1)^2\left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{a} - 1}{3}\right) \\ &= \frac{\pi}{3}(\sqrt{a} - 1)^2(2\sqrt{a} + 1).\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}原式 &= \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi a^{3/2} - 2\pi(\sqrt{a} - 1)^2(2\sqrt{a} + 1)\right) \\ &= \pi\left(-\frac{1}{3}a^{3/2} + \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$