频移和时移 (位移) 特性 设 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $\widehat{f}(\lambda)$, 则 $\forall \lambda_0, x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$F[f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0 x}] = \widehat{f}(\lambda - \lambda_0) ,$$
$$F[f(x-x_0)] = \widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_0\lambda} . \tag{4.1.6}$$

相似性质 设 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $\widehat{f}(\lambda)$, 则对不为 0 的实数 α, 有

$$F[f(\alpha x)] = \frac{1}{|\alpha|}\widehat{f}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) . \tag{4.1.7}$$

积分公式 设 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $\widehat{f}(\lambda)$, $\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 的 Fourier 变换存在, 则

$$F\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\widehat{f}(\lambda). \tag{4.1.8}$$

卷积公式 设 $f(x), g(x)$ 的 Fourier 变换分别为 $\widehat{f}(\lambda)$ 与 $\widehat{g}(\lambda)$, 则它们的卷积函数

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)g(x-\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{4.1.9a}$$

的 Fourier 变换也存在, 且

$$F[f(x) * g(x)] = \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda) . \tag{4.1.9b}$$

反射性 设 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $\widehat{f}(\lambda)$, 则

$$F[\widehat{f}(x)] = 2\pi f(-\lambda). \tag{4.1.10}$$

线性关系

$$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)] .$$

微分公式

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n \bar{f}(p) - p^{n-1}f(+0) - p^{n-2}f'(+0) - \cdots - pf^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0) . \tag{4.2.3}$$

与 Fourier 变换相同, Laplace 变换把求导运算变成了代数运算, 但是 n 阶导函数的 Laplace 变换需要知道相应的从 0 阶到 $n-1$ 阶导函数的初始值.

延迟定理

$$L[f(t-\tau)] = L[f(t-\tau)H(t-\tau)] = \mathrm{e}^{-p\tau}\bar{f}(p) , \quad \tau > 0 . \tag{4.2.4}$$

复频移公式 对任何一个复常数 p_0, 有

$$L[f(t)\mathrm{e}^{p_0 t}] = \bar{f}(p - p_0). \tag{4.2.5}$$

相似定理 对任意常数 $\alpha > 0$, 有

$$L[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha}\bar{f}\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{4.2.6}$$

积分公式

$$L\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{\bar{f}(p)}{p}. \tag{4.2.7}$$

卷积公式

$$L[f(t) * g(t)] = \bar{f}(p)\cdot\bar{g}(p) , \tag{4.2.8}$$

这里, 卷积

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau . \tag{4.2.9}$$

像函数的微分公式

$$L[(-t)^n f(t)] = \bar{f}^{(n)}(p). \tag{4.2.10}$$

像函数的积分公式

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^{\infty} \bar{f}(p)\mathrm{d}p, \text{ 积分路径取在半平面 } \mathrm{Re}p > \sigma_0 \text{ 内}. \tag{4.2.11}$$

$$\delta(x) * f(x) = f(x),$$
$$\delta'(x) * f(x) = \delta(x) * f'(x) = f'(x),$$
$$\delta^{(n)}(x) * f(x) = \delta(x) * f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x),$$
$$L(f(x) * g(x)) = (Lf) * g = f * Lg,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = 2\pi\delta(\lambda),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\lambda x\mathrm{d}x = 2\pi\delta(\lambda),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\delta'(\lambda).$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0, \quad r < a, \\ u|_{r=a} = F(a\cos\theta, a\sin\theta) \overset{d}{=} f(\theta). \end{cases}$$

由叠加原理, 设

$$u(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n (A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta), \tag{2.1.12a}$$

代入边界条件 (2.1.8b) 式得

$$u(a,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta) = f(\theta).$$

这是 $f(\theta)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的 Fourier 展开式, 故对 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 都有

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\mathrm{d}\varphi, \tag{2.1.12b}$$
$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\mathrm{d}\varphi. \tag{2.1.12c}$$

过程可见, 圆外 $(r > a)$Laplace 方程有界解的一般形式为

$$u(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n (A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta), \quad r > a,$$

而环域 $a_1 < r < a_2$ 内 Laplace 方程解的一般形式则为

$$u(r,\theta) = \frac{C_0}{2} + \frac{D_0}{2}\ln r + \sum_{n=1}^{+\infty}(C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta),$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad t > 0, \ -\infty < x < +\infty, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$$u(t,x) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

常系数二阶线性齐次ODE(常微分方程)

$y''(t)+by'(t)+cy(t)=0$, (b,c常数, 与t无关.) (2.0)

特征方程 $\mu^2+b\mu+c=0.$

1. 当$b^2-4c>0$时, 特征方程有两互异实根:

$\mu_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$, $\mu_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$.

(2.0)通解 $y(t)=A\,e^{\mu_1 t}+B\,e^{\mu_2 t}$, A,B是任意常数.

2. 当$b^2-4c=0$时, 特征方程两相同实根: $\mu_{1,2}=-\frac{b}{2}$.

(2.0)通解 $y(t)=(At+B)e^{\mu_{1,2}t}=(At+B)e^{-\frac{b}{2}t}$, A,B是任意常数.

3. 当$b^2-4c<0$时, 特征方程一对共轭复根:

$\mu_1=\frac{-b+i\sqrt{4c-b^2}}{2}$, $\mu_2=\frac{-b-i\sqrt{4c-b^2}}{2}$.

(2.0)通解 $y(t)=e^{-\frac{b}{2}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}t+B\sin\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}t\right)$, A,B是任意常数.

欧拉方程: $r^2R''(r)+prR'(r)+qR(r)=0$, p,q为常数.

(1) 当 $r>0$ 时, 作变量代换 $r=e^s$, 则 $s=\ln r$.

$$R'(r)=\frac{dR}{ds}\frac{ds}{dr}=\frac{1}{r}\frac{dR}{ds},$$

$$R''(r)=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dR}{ds}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{dR}{ds}+\frac{1}{r}\frac{d^2R}{ds^2}\frac{ds}{dr}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2R}{ds^2}-\frac{dR}{ds}\right).$$

代入方程得 $\frac{d^2R}{ds^2}+(p-1)\frac{dR}{ds}+qR=0.$ (*) ★★★

特征方程$\mu^2+(p-1)\mu+q=0$, 求出特征值, 据此可写出方程(*)通解.

最后在通解中换回 $s=\ln r$.

• S-L型方程: $[k(x)X'(x)]'-q(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0.$

$b_0(x)X''(x)+b_1(x)X'(x)+b_2(x)X(x)+\lambda b_3(x)X(x)=0,$

若$b_0(x)\neq0$, 则它可化为S-L型方程. 方法如下:

(1) 把二阶导项系数化为1. 两边除以$b_0(x)$,

$$X''(x)+\frac{b_1(x)}{b_0(x)}X'(x)+\frac{b_2(x)}{b_0(x)}X(x)+\lambda\frac{b_3(x)}{b_0(x)}X(x)=0.$$

$$\rho(x)=\frac{1}{b_0(x)}\exp\{\int\frac{b_1(x)}{b_0x}dx\}$$

(2) 两边乘以$e^{\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}dx}$, 得S-L型方程: ★★★

$$\left\{e^{\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}dx}X'(x)\right\}'+\frac{b_2(x)}{b_0(x)}e^{\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}dx}X(x)+\lambda\frac{b_3(x)}{b_0(x)}e^{\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}dx}X(x)=0.$$

$$k(x)=e^{\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}dx},\quad q(x)=-\frac{b_2(x)}{b_0(x)}k(x),\quad \rho(x)=\frac{b_3(x)}{b_0(x)}k(x).$$

定理2.2.1(常点情形下的S-L定理)(P 60−61)

$$\begin{cases}[k(x)X'(x)]'-q(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0, & -\infty<a<x<b<+\infty, \quad (2.2.6a)\\ \alpha_1X(a)-\beta_1X'(a)=0,\quad \alpha_2X(b)+\beta_2X'(b)=0. & (2.2.6b)\end{cases}$$

设 (1). $k(x)\in C^1[a,b]$, $q(x),\rho(x)\in C[a,b]$; (2.2.6c)

(2). $k(x)>0$, $\rho(x)>0$, $q(x)\ge0$, $\forall x\in[a,b]$, (2.2.6d)

$\alpha_j,\beta_j\ge0$, $j=1,2$, $\alpha_1^2+\beta_1^2\neq0$, $\alpha_2^2+\beta_2^2\neq0$, 则

(1)(固有值,固有函数可数) (2.2.6a,b)有一串固有值和相应一串固有函数:

$(0=\lambda_0<)\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$, $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n=+\infty$, $(X_0(x),)X_1(x),X_2(x),\cdots,X_n(x),\cdots$

(2)(固有值非负) 所有固有值$\lambda_n\ge0$, $n=(0,)1,2,\cdots$, 且

$\lambda_0=0$是(2.2.6a,b)固有值 ⇔ (i). $q(x)\equiv0$, $\forall x\in[a,b]$; (ii). 不出现I、III类边界条件. (只出现II类边界条件或周期条件.)

$\lambda_0=0$是(2.2.6a,b)固有值时, 相应固有函数$X_0(x)\equiv1$.

(3)(正交性) 当$n\neq m$时, $<X_n(x),X_m(x)>=\int_a^b\rho(x)X_n(x)\overline{X_m(x)}dx=0.$

(4)(完备性) 全体固有函数$\{X_n(x)\}$构成$L^2_\rho[a,b]$的一组正交基,

定理2.2.1(常点情形下的S-L定理)(P 60−61)

$$\begin{cases}[k(x)X'(x)]'-q(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0, & -\infty<a<x<b<+\infty, \quad (2.2.6a)\\ \alpha_1X(a)-\beta_1X'(a)=0,\quad \alpha_2X(b)+\beta_2X'(b)=0. & (2.2.6b)\end{cases}$$

设 (1). $k(x)\in C^1[a,b]$, $q(x),\rho(x)\in C[a,b]$; (2.2.6c)

(2). $k(x)>0$, $\rho(x)>0$, $q(x)\ge0$, $\forall x\in[a,b]$, (2.2.6d)

(4)(完备性) 全体固有函数$\{X_n(x)\}$构成$L^2_\rho[a,b]$的一组正交基,

则$\forall f(x)\in L^2_\rho[a,b]$, $f(x)=\sum_{n=1(0)}^{+\infty}c_nX_n(x)$, 即 $\lim_{N\to+\infty}\left\|f(x)-\sum_{n=1(0)}^{N}c_nX_n(x)\right\|=0$,

$$c_k=\frac{<f(x),X_k(x)>}{<X_k(x),X_k(x)>}=\frac{<f(x),X_k(x)>}{\|X_k(x)\|^2}=\frac{\int_a^b\rho(x)f(x)\overline{X_k(x)}\,dx}{\int_a^b\rho(x)|X_k(x)|^2\,dx},\quad (2.2.11b)$$ ★★★★★

例.
$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-L_xu=f(t,x), & t>0,\ a<x<b,\\ \left(\alpha_1u-\beta_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}=0, & \left(\alpha_2u+\beta_2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x), & \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

在外力作用下的有界弦横振动方程的一般混合问题(非零初值)

解 先由线性叠加原理,分解为

$$(\mathrm{I.1})\begin{cases}\frac{\partial^2v_1}{\partial t^2}-L_xv_1=0, & t>0,\ a<x<b,\\ \left(\alpha_1v_1-\beta_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}=0, & \left(\alpha_2v_1+\beta_2\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}=0,\\ v_1|_{t=0}=\varphi(x), & \frac{\partial v_1}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

先用分离变量法求v_1.

$$(\mathrm{I.2})\begin{cases}\frac{\partial^2v_2}{\partial t^2}-L_xv_2=f(t,x), & t>0,\ a<x<b,\\ \left(\alpha_1v_2-\beta_1\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}=0, & \left(\alpha_2v_2+\beta_2\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}=0,\\ v_2|_{t=0}=0, & \frac{\partial v_2}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.\end{cases}$$

然后用冲量原理和(I.1)的结论求v_2.

最后 $u=v_1+v_2$. #

热传导方程也可类似求解.

定理 1.6.2(齐次化原理) 设 L 是关于 t 与 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中各分量的线性偏微分算子,其中关于 t 的最高阶导数不超过 $m-1$ 阶. 若 $w(t,\boldsymbol{x};\tau)$ 满足齐次方程初值问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^m w}{\partial t^m}=Lw, & t>\tau>0,\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\\ w|_{t=\tau}=\frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=\tau}=\cdots=\frac{\partial^{m-2}w}{\partial t^{m-2}}\Big|_{t=\tau}=0,\\ \frac{\partial^{m-1}w}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=\tau}=f(\tau,\boldsymbol{x}),\end{cases}\quad (1.6.6)$$

则

$$u(t,\boldsymbol{x})=\int_0^t w(t,\boldsymbol{x};\tau)d\tau \quad (1.6.7)$$

是非齐次方程初值问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^m u}{\partial t^m}=Lu+f(t,\boldsymbol{x}), & t>0,\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\\ u|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\cdots=\frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=0}=0\end{cases}\quad (1.6.8)$$

的解.

例2 含内热源侧面绝热的有限长杆上热传导方程的混合问题.

$$(\mathrm{I.2})\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-L_xu=f(t,x), & t>0,\ a<x<b,\\ \left(\alpha_1u-\beta_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}=0, & \left(\alpha_2u+\beta_2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}=0,\\ u|_{t=0}=0.\end{cases}$$

用冲量原理求v.

L_x: 只依赖x的二阶或以上微分算子.

解: 考虑
$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial t'}-L_xw=0, & t'>0,\ a<x<b,\\ \left(\alpha_1w-\beta_1\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}=0, & \left(\alpha_2w+\beta_2\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}=0,\\ w|_{t'=0}=f(\tau,x).\end{cases}$$

$t'=t-\tau$.

(w 和u 满足相同的边界条件.)

用分离变量法, 求出$w(t',x;\tau)=w(t-\tau,x;\tau)$.

$$u(t,x)=\int_0^t w(t-\tau,x;\tau)d\tau.\ \#$$ ★★★★★

$$\begin{cases} L_t u - L_x u = f(t,x), & t>t_0,\ a<x<b, \quad (1.a) \\ \left(\alpha_1 u - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a} = g_1(t),\ \left(\alpha_2 u + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=b} = g_2(t), & (1.b) \\ u|_{t=t_0} = \varphi_1(x),\ (a_2(t)\neq 0 \text{时}) u_t|_{t=t_0} = \varphi_2(x). & (1.c) \end{cases}$$

$a_2^2(t)+a_1^2(t)\neq 0.$

$L_t = a_2(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a_1(t)\frac{\partial}{\partial t},\ L_x = b_2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + b_0(x),\ b_2(x)>0.$

(A)特解法. (I)若 $f(t,x)\equiv 0,\ g_1(t)\equiv h,\ g_2(t)\equiv m,$ h,m：常数，$h^2+m^2\neq 0$，则

则(1)设特解 $v=v(x)$，代入(1.a)，(1.b)，求出 $v(x)$；

(2)令 $w(t,x)=u(t,x)-v(x)$，得 w 定解问题，求出 w；(3) $u(t,x)=v(x)+w(t,x)$. #

(II)若 $f(t,x)\equiv 0,\ g_1(t)\equiv hg(t),\ g_2(t)\equiv mg(t),$

且 $L_t g(t)=kg(t)$，$g(t)\not\equiv 0$，h,m,k 任意给定常数，$h^2+m^2\neq 0$，

则(1)设 $v(x,t)=X(x)g(t)$，代入(1.a),(1.b)，除以 $g(t)$，解出 $X(x)$；

(2)令 $w(t,x)=u(t,x)-X(x)g(t)$，得 W 定解问题，求出 W；

(3) $u(t,x)=X(x)g(t)+w(t,x)$. #

(B)一般法. $$\begin{cases} L_t u - L_x u = f(t,x), & t>t_0,\ a<x<b, \quad (1.a) \\ \left(\alpha_1 u - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a} = g_1(t),\ \left(\alpha_2 u + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=b} = g_2(t), & (1.b) \\ u|_{t=t_0} = \varphi_1(x),\ (a_2(t)\neq 0 \text{时}) u_t|_{t=t_0} = \varphi_2(x). & (1.c) \end{cases}$$

先处理边界项.(P 75)

解 (1)求仅满足边界条件(1.b)的任一函数 $v(x,t)$：

1)若 α_1,α_2 不同时为0设 $v(x,t)=A(t)x+B(t)$；

2) $\alpha_1=\alpha_2=0$ 时设 $v(x,t)=A(t)x^2+B(t)x$.

将 $v(x,t)$ 代入边界条件(1.b)，求 $A(t),B(t)$，得 $v(x,t)$.

(2)令 $w=u-v$，得 W 的定解问题(方程非齐次，边界条件齐次)；

(3) 线性分解，用分离变量法和冲量原理分别求解，合并得 $w(t,x)$，或用Fourier展开法求出 $w(t,x)$；

(4) $u(t,x)=v(t,x)+w(t,x)=\cdots$. #

本例中采用的 Fourier 展开法, 可用于一般的非齐次问题

$$\begin{cases} L_t u + L_x u = f(t,x), \quad t>0,\ a<x<b, & (2.3.9a) \\ \left(\alpha_1 u - \beta_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}=0, \quad \left(\alpha_2 u + \beta_2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}=0, & (2.3.9b) \\ u|_{t=0}=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x), & (2.3.9c) \end{cases}$$

其中, L_t, L_x 分别是关于 t,x 的二阶线性常微分算子.

第一步 分离变量法, 求出 (2.3.9) 式相应的齐次问题 ($f(t,x)=0$) 的固有值问题, 解出该问题相应的固有值 $\{\lambda_n\}$ 及固有函数系 $\{X_n(x)\}$.

第二步 据 S-L 定理判断 $\{X_n(x)\}$ 的完备性, 并将未知函数 $u(t,x)$ 及已知函数 $f(t,x)$, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 按固有函数系 $\{X_n(x)\}$ 作广义 Fourier 展开

$$u(t,x)=\sum_n T_n(t)X_n(x),$$

$$f(t,x)=\sum_n f_n(t)X_n(x),$$

$$\varphi(x)=\sum_n \varphi_n X_n(x), \quad \psi(x)=\sum_n \psi_n X_n(x),$$

代入方程 (2.3.9a) 及初始条件 (2.3.9c) 式, 利用 $L_x X_n(x)=-\lambda X_n(x)$, 得到未知函数 $u(t,x)$ 的广义 Fourier 系数 $T_n(t)$ 的初值问题

$$\begin{cases} L_t T_n(t)+\lambda_n T_n(t)=f_n(t), \\ T_n(0)=\varphi_n, \quad T_n'(0)=\psi_n. \end{cases}$$

第三步 解此初值问题, 确定 $T_n(t)$, 给出 $u(t,x)$ 的级数表达式.

背熟： $xJ_0(x)=\left(xJ_1(x)\right)'$，$J_1(x)=-J_0'(x)$.

1) m,n 一个是奇数, 另一个是偶数时, $\int_{-1}^{1}x^m P_n(x)\,dx=0.$ ★★★

2) $0\le m<n$ 时, $\int_{-1}^{1}x^m P_n(x)\,dx=0.$ ★★★

Bessel方程小结

ν 阶 Bessel方程 $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$ ($\nu\ge 0$) 在 $0<|x|<+\infty$ 通解为

$y(x)=CJ_\nu(x)+DN_\nu(x)$，C,D 为任意常数，

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

$\lim_{x\to 0}J_0(x)=J_0(0)=1$，$\nu>0$ 时，$\lim_{x\to 0}J_\nu(x)=J_\nu(0)=0$.

----第一类Bessel函数

$$N_\nu(x)=\begin{cases} \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}J_\nu(x)-\frac{1}{\sin\nu\pi}J_{-\nu}(x), & \text{当 }\nu\neq m\text{(非负整数)时}, \\ \lim_{\mu\to m}\frac{(\cos\mu\pi)J_\mu(x)-J_{-\mu}(x)}{\sin\mu\pi}, & \text{当 }\nu=m\text{(非负整数)}. \end{cases}$$

----第二类Bessel函数 $\lim_{x\to 0}N_\nu(x)=\infty$.

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0, \quad 0<|x|<+\infty, \\ |y(0)|<+\infty \end{cases}$$ 解为 $y(x)=CJ_\nu(x)$. ★★★★★

(3.3.7) $$\begin{cases} \{(1-x^2)y'(x)\}'+\lambda y(x)=0,\ x\in[-1,1], & (3.1.13) \\ |y(\pm 1)|\text{有界}. & (3.3.7b) \end{cases}$$ ⇐ -1和1是正则奇点. $\rho(x)=1>0$.

回顾：当 $\lambda\ge 0$ 时，当且仅当 $\lambda=n(n+1), n=0,1,2,\cdots$，(3.3.7)有非零解 $P_n(x)$.

由S-L定理，固有问题(3.3.7)的固有值 $\lambda\ge 0$.

证明和定理2.2.1中相应结论证明方法类似. 参见此PPT的P29-P30. #

因此，(3.3.7)固有值 $\lambda_n=n(n+1), n=0,1,2,\cdots$，相应固有函数为 $P_n(x)$(Legendre多项式)

• $\{P_n(x),\ n=0,1,2\cdots\}$ 是 $L^2[-1,1]$ 的完备正交基.

$\forall f(x)\in L^2[-1,1]$，$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_nP_n(x)$，其中

$$C_n=\frac{<f(x),P_n(x)>}{<P_n(x),P_n(x)>}=\frac{\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx}{\int_{-1}^{1}|P_n(x)|^2dx}=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx.$$

• 若 $f(x)$ 是分段函数，利用P96递推公式(3.3.6a)−(3.3.6d)求 $\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx$.

• 若 $f(x)$ 是多项式，用比较系数法求 C_n.

$\forall f(x)\in L^2[-1,1]$，$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_nP_n(x)$，$\int_{-1}^{1}|P_n(x)|^2dx=\frac{2}{2n+1}, n=0,1,2,\cdots.$ ★★★★

$$C_n=\frac{<f(x),P_n(x)>}{<P_n(x),P_n(x)>}=\frac{\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx}{\int_{-1}^{1}|P_n(x)|^2dx}=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx.$$

• 若 $f(x)$ 是分段函数，利用P96递推公式(3.3.6a)−(3.3.6d)求 $\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx$.

• 若 $f(x)$ 是多项式，用比较系数法求 C_n. 利用P132习题的4(1)结论：

(1) m,n 一个是奇数,另一个是偶数时，$\int_{-1}^{1}x^mP_n(x)dx=0$；(2) $n>m\ge 0$ 时，$\int_{-1}^{1}x^mP_n(x)dx=0$. 故

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n}C_kP_k(x).$$ ★★★★★

$P_{2m}(x)$ 是 $2m$ 次的只含偶次幂的多项式，$P_{2m+1}(x)$ 是 $2m+1$ 次的只含奇次幂的多项式.

$a_0+a_2x^2+\cdots+a_{2m}x^{2m}=C_0P_0(x)+C_2P_2(x)+\cdots+C_{2m}P_{2m}(x)$，★★

$a_1x+a_3x^3+\cdots+a_{2m+1}x^{2m+1}=C_1P_1(x)+C_3P_3(x)+\cdots+C_{2m+1}P_{2m+1}(x)$. ★★

(5) $|P_n(x)|\le 1,\ \forall x\in[-1,1]$；$P_n(1)=1,\ P_n(-1)=(-1)^n$. 记熟 ★

(6) 母函数表示：$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n,\quad |x|<1,\ |t|<1.$

(7) 递推公式：$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$, (3.3.6a) (P 96)

$nP_n(x)=xP_n'(x)-P_{n-1}'(x)$, (3.3.6b) $P_n(x)=\frac{1}{2n+1}\{P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)\}$. (3.3.6d)

(8) $\{P_n(x),n=0,1,2,\cdots\}$ 在 $L^2[-1,1]$ 内彼此正交：$n\neq m$ 时，$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0$.

$$\int_{-1}^{1}|P_n(x)|^2dx=\frac{2}{2n+1},\ n=0,1,2,\cdots.$$

$$(3.3.7)\,(\text{P97})\begin{cases}\{(1-x^2)y'(x)\}'+\lambda y(x)=0, & x\in(-1,1), \ (3.1.13)\\ |y(\pm1)|\text{有界}. & (3.3.7\text{b})\end{cases}$$

1) 当 $\lambda=n(n+1)$ 时，方程(3.1.13)通解 $y(x)=C_nP_n(x)+D_nQ_n(x)$, $n=0,1,2,\cdots$, (3.2.10)(P89)

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!2^n(n-2k)!(n-k)!}x^{n-2k}. \quad (3.2.8)$$

$P_n(x)$ 是 n 次多项式. $|P_n(\pm1)|$ 有界.

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x}-\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}\frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}(x).$$

$x\to\pm1$ 时 $Q_n(x)\to\infty$.

2) 当 $\lambda=l(l+1), l\neq n$(非负整数)时, (3.1.13)没有满足" $|y(\pm1)|$ 有界" 的非零解.

由S-L定理, (3.3.7)固有值 $\lambda\geq0$. 因此,

(3.3.7)固有值 $\lambda_n=n(n+1), n=0,1,2,\cdots$, 相应固有函数为 $P_n(x)$(Legendre多项式).

$\{P_n(x),\ n=0,1,2\cdots\}$ 是 $L^2[-1,1]$ 正交基. $\int_{-1}^{1}|P_n(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1},\ n=0,1,2,\cdots$.

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},\ P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x.$$

球坐标下轴对称 $\Delta_3v=0$ 的一般解 $v(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(C_nr^n+D_nr^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)$.

(1) 球内轴对称 $\Delta_3v=0$ 解的一般形式: $v(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\left(\frac{r}{a}\right)^nP_n(\cos\theta)$.

(2) 球外: $\begin{cases}\Delta_3v=0, & r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ r>a,\\ v|_{r=a}=f(\theta).\end{cases}$ 轴对称 $\Delta_3v=0$ 球外($r>a$)边值问题, 须 $|v|_{r=+\infty}|$ 有界, 故 $n\geq1$ 时, $C_n=0$.

故 $v(r,\theta)=A_0\cdot1+\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\left(\frac{r}{a}\right)^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$. 令 $r=+\infty$ 得 $A_0=v|_{r=+\infty}$.

($P_0(\cos\theta)=1$) ★★★★ 代入边界条件求 A_0, A_n.

(3) 空心球: $\begin{cases}\Delta_3v=0, & r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ 0<a_1<r<a_2,\\ v|_{r=a_1}=f_1(\theta), & v|_{r=a_2}=f_2(\theta).\end{cases}$ 轴对称 $\Delta_3v=0$ 空心球边值问题.

$v(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(C_nr^n+D_nr^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)$. 代入边界条件求 C_n, D_n. ★★★★★ 熟记此页

ν 阶Bessel方程 $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$ ($\nu\geq0$) (3.1.8)(P85)在 $0<|x|<+\infty$ 通解为

$y(x)=CJ_\nu(x)+DN_\nu(x)$, C,D 为任意常数, (3.2.20)(P92)

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \ (3.2.13)(\text{P90})$$

----第一类Bessel函数

$\lim_{x\to0}J_0(x)=J_0(0)=1$, $\nu>0$ 时, $\lim_{x\to0}J_\nu(x)=J_\nu(0)=0$.

$$N_\nu(x)=\begin{cases}\frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}J_\nu(x)-\frac{1}{\sin\nu\pi}J_{-\nu}(x), & \text{当}\ \nu\neq m(\text{非负整数})\text{时},\\ \lim_{\mu\to m}\frac{(\cos\mu\pi)J_\mu(x)-J_{-\mu}(x)}{\sin\mu\pi}, & \text{当}\ \nu=m(\text{非负整数})\text{时}.\end{cases}$$

(P92) ----第二类Bessel函数

$\lim_{x\to0}N_\nu(x)=\infty$.

$\begin{cases}x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0, & 0<|x|<+\infty,\\ |y(0)|<+\infty\end{cases}$ 解为 $y(x)=CJ_\nu(x)$. ★★★★★

$\begin{cases}y''+\frac{1}{x}y'+y=0,\ \text{即}\ (xy')'+xy=0, & 0<|x|<+\infty,\\ |y(0)|<+\infty,\end{cases}$ ★★★★★

的解为 $y(x)=C\,J_0(x)$, 其中 C 为任意常数. $J_0(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$.

背熟: $xJ_0(x)=\left(xJ_1(x)\right)'$, $J_1(x)=-J_0'(x)$.

1) m,n 一个是奇数, 另一个是偶数时, $\int_{-1}^{1}x^mP_n(x)\mathrm{d}x=0$. ★★★

2) $0\leq m<n$ 时, $\int_{-1}^{1}x^mP_n(x)\mathrm{d}x=0$. ★★★

(7) $\{P_n(x), n=0,1,2,\cdots\}$ 在 $L^2[-1,1]$ 内彼此正交: $n\neq m$ 时, $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x=0$.

令 $x=\cos\theta$, $y(x)=\Theta(\arccos x)$, 得 ★★★

$$3.3.7)\begin{cases}\{(1-x^2)y'(x)\}'+\lambda y(x)=0, & x\in[-1,1],\\ |y(\pm1)|\text{有界}. & (3.3.7\text{b})\end{cases}$$

1, −1都是正则奇点.

3.4.2 Bessel方程固有值问题

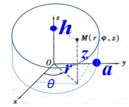
(3.1.2节P84-85)柱坐标系下的Helmholtz方程:

$$\Delta_3v+k^2v\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2v}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2v}{\partial z^2}+k^2v=0. \quad (3.1.5)$$

设 $v(r,\theta,z)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)$, 代入方程, 除以 $v=R\Theta Z$, 得

$$\frac{\frac{1}{r}(rR'(r))'}{R(r)}+\frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}}_{=-\sigma}+\underbrace{\frac{Z''(z)}{Z(z)}}_{=-\mu}+k^2=0.$$

$=\lambda$



记 $\sigma=\nu^2$,

记 $\lambda=-\mu+k^2$, $\frac{\frac{1}{r}(rR'(r))'}{R(r)}-\frac{\nu^2}{r^2}+\lambda=0$. 乘以 rR, 得

$$(rR'(r))'+\left(\lambda r-\frac{\nu^2}{r}\right)R(r)=0, \quad (3.1.7)(\text{P85}) ★★★$$

$0<r<a$,

特别注意 $\nu=0$ 时, (3.1.7)为 $(rR'(r))'+\lambda rR(r)=0$.

柱坐标系下Helmholtz方程(特别 $\Delta_3u=0$)分离变量得 $R(r)$ 方程:

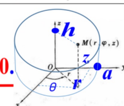
$$\begin{cases}(rR'(r))'+\left(\lambda r-\frac{\nu^2}{r}\right)R(r)=0, & 0<r<a, \ (3.1.7)(\text{P85})\\ |R(0)|<+\infty, & \alpha R(a)+\beta R'(a)=0. \ (3.1.7\text{a})\end{cases}$$

加边界条件 $\alpha\geq0,\beta\geq0,\alpha^2+\beta^2\neq0$.

(自己添加)

$r=0$: 正则奇点(P86) (圆柱中轴, 在内部)

$r=a$: 常点(P85) (圆柱侧面, 在边界)



(3.1.7): S-L型, $k(r)=\rho(r)=r\geq0$, $q(r)=\frac{\nu^2}{r}\geq0$.

记熟(3.1.7)特征

由S-L定理3.3.1(P97, P60−61)知, (1) 固有值 $\lambda\geq0$.

当且仅当 $\nu=0$, $\alpha=0$ 时, $\lambda_0=0$ 是固有值, 相应固有函数 $R_0(r)\equiv1$.

(2) 固有值可数, 一个固有值只对应一个固有函数.

(3)(4) 固有函数全体构成 $L_r^2[0,a]$ 的正交基.

$$\begin{cases}(rR'(r))'+\left(\lambda r-\frac{\nu^2}{r}\right)R(r)=0, & 0<r<a, \ (3.1.7)(\text{P85})\\ |R(0)|<+\infty, & \alpha R(a)+\beta R'(a)=0. \ (3.1.7\text{a})\end{cases}$$

固有值 $\lambda\geq0$. $L_r^2[0,a]$

当 $\lambda>0$ 时, 记 $\lambda=\omega^2$, $\omega=\sqrt{\lambda}>0$. 根据3.1.2节(P86),

令 $x=\sqrt{\lambda}\,r=\omega r$, $r=\frac{x}{\omega}$, $y(x)=R\left(\frac{x}{\omega}\right)$, (3.1.7)化为

$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-\nu^2)y(x)=0$. (3.1.8) ν 阶Bessel方程

(3.1.8)通解 $y(x)=CJ_\nu(x)+DN_\nu(x)$. $x=\omega r$

R 方程(3.1.7)通解: $R(r)=CJ_\nu(\omega r)+DN_\nu(\omega r)$.

$J_0(0)=1$; $\nu>0$ 时, $J_\nu(0)=0$. $\lim_{x\to0^+}N_\nu(x)=\infty$, 无界, $\forall\nu\geq0$.

因 $|R(0)|<+\infty$, 故 $D=0$, $R(r)=J_\nu(\omega r)$. (取 $C=1$.) ★★★

注意 $\nu=0$ 时, (3.1.7)为 $(rR'(r))'+\lambda rR(r)=0$, 满足 $|R(0)|$ 有界解为 $J_0(\sqrt{\lambda}r)$. ★★★

$L_r^2[0,a]$ 代入另一边界条件. 分情形讨论.

(3.3.10)固有值 $\lambda_n=n(n+1)$, $n=0,1,2,\cdots$, 固有函数 $\Theta_n(\theta)=P_n(\cos\theta)$.

$\{P_n(\cos\theta), n=0,1,2,\cdots\}$ 是 $L^2_{\sin\theta}[0,\pi]$ 的正交基. ★★★★★

球坐标 (r,θ,φ) 下, $\Delta_3v=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2v}{\partial\varphi^2}$. (3.1.9)(P85)

$(r^2R')'-\lambda R=0$, $0\leq r\leq a$. (3.3.11)

$\rho(\theta)=\sin\theta\geq0$.

$$(3.3.10)\begin{cases}\{(\sin\theta)\Theta'\}'+\lambda(\sin\theta)\Theta=0, & 0\leq\theta\leq\pi, \ (3.3.10\text{a})\\ |\Theta(0)|<+\infty, \ |\Theta(\pi)|<+\infty. & (3.3.10\text{b})\end{cases}$$

$0,\pi$ 是正则奇点.

$$\begin{cases}(rR'(r))'+(\lambda r-\frac{\nu^2}{r})R(r)=0, \quad 0<r<a, & (3.1.7)(P85) \\ |R(0)|<+\infty, \quad \alpha R(a)+\beta R'(a)=0. & (3.1.7a)\end{cases}$$

固有值$\lambda\ge 0$.

当$\lambda>0$时，记$\lambda=\omega^2$，$\omega=\sqrt{\lambda}>0$. $R(r)=J_\nu(\omega r)$. $R'(r)=\omega J_\nu'(\omega r)$.

注意$\nu=0$时，(3.1.7)为$(rR'(r))'+\lambda rR(r)=0$，满足$|R(0)|$有界解为$J_0(\sqrt{\lambda}r)$. ★

(I) 若a端I类边界条件：$R(a)=0$ ($\beta=0$)，则$J_\nu(\omega a)=0$.

记ω_{1n}是$J_\nu(\omega a)=0$的第n个正根，$J_\nu(\omega_{1n}a)=0$，★★ (P117)

则固有值$\lambda_{1n}=\omega_{1n}^2$，固有函数$R_{1n}(r)=J_\nu(\omega_{1n}r)$，$n=1,2,\cdots$.

(II)若a端II类边界条件：$R'(a)=0$ ($\alpha=0$)，则$\omega J_\nu'(\omega a)=0$.

记ω_{2n}是$J_\nu'(\omega a)=0$的第n个正根，$J_\nu'(\omega_{2n}a)=0$，★★★

则固有值$\lambda_{2n}=\omega_{2n}^2$，固有函数$R_{2n}(r)=J_\nu(\omega_{2n}r)$，$n=1,2,\cdots$.

当(且仅当)$\alpha=0$，$\nu=0$时，$\lambda_{20}=0$是固有值，固有函数$R_{20}(r)=1=J_0(0)$.

此时记$\omega_{20}=0$.

$k\ne2$或$\nu>0$时，$\{J_\nu(\omega_{kn}r), n=1,2,\cdots\}$是$L_r^2[0,a]$的正交基.

$k=2$且$\nu=0$时，$\{J_0(\omega_{2n}r), n=0,1,2,\cdots\}$是$L_r^2[0,a]$正交基. $\omega_{20}=0$, $J_0(0)=1$.

记 $N_{\nu kn}^2=\|J_\nu(\omega_{kn}r)\|^2=\int_0^a r|J_\nu(\omega_{kn}r)|^2\,dr$. (P118)

(1) $k=1$时，$J_\nu(\omega_{1n}a)=0$,

$N_{\nu 1n}^2=\frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega_{1n}a)$, ★ $\nu\ge0$, $n=1,2,\cdots$ (3.4.12a)

(2) $k=2$ 时，$n\ge1$时，$J_\nu'(\omega_{2n}a)=0$,

$N_{\nu 2n}^2=\frac12(a^2-\frac{\nu^2}{\omega_{2n}^2})J_\nu^2(\omega_{2n}a)$, ★ $\nu>0$时，$n=1,2,\cdots$, $\nu=0$时，$n=0,1,2,\cdots$. (3.4.12b)

解题时最后结果须用(P112)(3.4.3b)递推为$J_0(x)$和$J_1(x)$的函数. ★

微分关系、递推公式 (P112)

$\{x^\nu J_\nu\}'=x^\nu J_{\nu-1}$, (3.4.1a)

$\nu=1$时，$xJ_0(x)=(xJ_1(x))'$. ★★

用来算$\int x^m J_0(x)\,dx$, $m\ge1$. ★

$\{x^{-\nu}J_\nu\}'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}$, (3.4.1b)

$xJ_\nu'+\nu J_\nu=xJ_{\nu-1}$, (3.4.2a)

$xJ_\nu'-\nu J_\nu=-xJ_{\nu+1}$, (3.4.2b)

$2J_\nu'=J_{\nu-1}-J_{\nu+1}$, (3.4.3a)

$2\nu x^{-1}J_\nu=J_{\nu-1}+J_{\nu+1}$. (3.4.3b)

可(3.4.1b)用来算$\int x^m J_{\nu+1}(x)\,dx$, $\nu\ge0$, $m\ge1$. ★★ 特别是,

(3.4.1b)中取$\nu=0$ 得，$J_1(x)=-J_0'(x)$.用于计算$\int x^m J_1(x)\,dx$. ★★★

(3.4.3a) ⇒ $J_{\nu+1}=J_{\nu-1}-2J_\nu'$, $\nu\ge1$.

用(3.4.3a)来算 $\int J_{\nu+1}(x)\,dx$ ($\nu\ge1$时)(记到书中). ★★★

(3.4.3b) ⇒ $J_{\nu+1}=2\nu x^{-1}J_\nu-J_{\nu-1}$, $\nu\ge1$.

用(3.4.3b)将$J_{\nu+1}(x)$递推为$J_0(x)$和$J_1(x)$的函数($\nu\ge1$时). (记到书中)

$$\forall f(r)\in L_r^2[0,a],\ f(r)=\sum_{\substack{n=1(k\ne2或\nu>0)\\ n=0(k=2且\nu=0)}}^{+\infty} C_nJ_\nu(\omega_{kn}r),$$

$\omega_{20}=0$, $J_0(0)=1$.

$$C_n=\frac{<f(r),J_\nu(\omega_{kn}r)>}{\|J_\nu(\omega_{kn}r)\|^2}=\frac{1}{N_{\nu kn}^2}\int_0^a rf(r)J_\nu(\omega_{kn}r)\,dr.$$

令$s=\omega_{kn}r$ ★★★★★

$$\int_0^a rf(r)J_\nu(\omega_{kn}r)\,dr=\frac{1}{\omega_{kn}^2}\int_0^{\omega_{kn}a}sf(\frac{s}{\omega_{kn}})J_\nu(s)\,ds.$$

令$s=\omega_{kn}r$ $r=\frac{s}{\omega_{kn}}$ $dr=\frac{1}{\omega_{kn}}ds$ (用P112微分公式、递推公式求积分)

4.1.1 Fourier 变换(针对空间变量的变换)

1. Fourier 变换定义 $F[f(x)]=\hat f(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\,dx$. (4.1.1)(P135)

2. Fourier 变换性质

(3)反变换：(P136) f在点x连续时，$f(x)=F^{-1}[\hat f(\lambda)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat f(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda$. —反演公式 (4.1.4)(P136)

(1) Fourier 变换F和反变换F^{-1}都为线性变换(P135)：★★★★★

$F[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)]=c_1F[f_1(x)]+c_2F[f_2(x)]$，$c_1,c_2$与$x$无关.

$F^{-1}[a_1g_1(\lambda)+a_2g_2(\lambda)]=a_1F^{-1}[g_1(\lambda)]+a_2F^{-1}[g_2(\lambda)]$，$a_1,a_2$与$\lambda$无关.

(2) 微分公式：若$F[f^{(n)}(x)]$存在，$f^{(j)}(\pm\infty)=0, j=0,1,\cdots,n-1$,则

$F[f^{(n)}(x)]=(i\lambda)^nF[f(x)]=(i\lambda)^n\hat f(\lambda)$. (4.1.3)(P136)

$F[f'(x)]=i\lambda F[f(x)]=i\lambda\hat f(\lambda)$, ★★★ $F[f''(x)]=(i\lambda)^2F[f(x)]=-\lambda^2\hat f(\lambda)$. ★★★

(4.1.3)(P136) ⇒ $F^{-1}[(i\lambda)^n\hat f(\lambda)]=f^{(n)}(x)$. ★★

$F[f(x)]=\hat f(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\,dx$. (4.1.1)(P135)

(2) 微分公式：$F[f^{(n)}(x)]=(i\lambda)^nF[f(x)]$. (4.1.3)(P136) ★★★

$F[f'(x)]=i\lambda F[f(x)]=i\lambda\hat f(\lambda)$, $F[f''(x)]=(i\lambda)^2F[f(x)]=-\lambda^2\hat f(\lambda)$.

(4) •频移公式(P136)：$F[f(x)e^{i\lambda_0x}]=\hat f(\lambda-\lambda_0)$. (4.1.6.1) ★

证明：$F[f(x)e^{i\lambda_0x}]=\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x)e^{i\lambda_0x})e^{-i\lambda x}\,dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i(\lambda-\lambda_0)x}\,dx=\hat f(\lambda-\lambda_0)$. #

• 位移公式(P136)：$F[f(x-x_0)]=\hat f(\lambda)e^{-i\lambda x_0}$. (4.1.6.2) ★★★

证明：$F[f(x-x_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-x_0)e^{-i\lambda x}\,dx$ 令$y=x-x_0$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{-i\lambda(y+x_0)}\,dy=e^{-i\lambda x_0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{-i\lambda y}\,dy=e^{-i\lambda x_0}\hat f(\lambda)$. #

(4.1.6.2)(P136) ⇒ $F^{-1}[\hat f(\lambda)e^{-i\lambda x_0}]=f(x-x_0)$. ★★★

(5) 相似性质 $F[f(ax)]=\frac{1}{|a|}\hat f(\frac{\lambda}{a})$，$a\ne0$是实数. (4.1.7)

证明 根据Fourier变换定义和作变换$y=ax$证明. (此PPT的P31). #

$F[f(x)]=\hat f(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\,dx$. (4.1.1)(P135)

(7) 卷积公式(P137)

卷积定义：$f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)g(x-\xi)\,d\xi$ ★★★

$=g(x)*f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\xi)g(\xi)\,d\xi$. (4.1.9a)

(a) 若$F[f(x)]$, $F[g(x)]$存在，则

• $F[f(x)*g(x)]=F[f(x)]F[g(x)]=\hat f(\lambda)\hat g(\lambda)$. (4.1.9b)

• $F^{-1}[\hat f(\lambda)\hat g(\lambda)]=F^{-1}[\hat f(\lambda)]*F^{-1}[\hat g(\lambda)]=f(x)*g(x)$. ★★★ (记书上)

(6)积分公式(137)：设$F[f(x)]$, $F[\int_{-\infty}^x f(\xi)\,d\xi]$存在，$\hat f(0)=0$，则

$F[\int_{-\infty}^x f(\xi)\,d\xi]=\frac{1}{i\lambda}F[f(x)]$. (4.1.8)(P137)

证明：记 $g(x)=\int_{-\infty}^x f(\xi)\,d\xi$，则 $g'(x)=f(x)$.

$g(-\infty)=0$，$g(+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,d\xi=\hat f(0)=0$.由微分公式得，

$F[f(x)]=F[g'(x)]=i\lambda F[g(x)]$.除以$i\lambda$得结论(4.1.8). #

设 $F[f(x)]=\hat{f}(\lambda)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\,dx$,

• f 在 x 连续时, $f(x)=F^{-1}[\hat{f}(\lambda)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda.$

• 若 $F[f'(x)]$, $F[f''(x)]$ 存在, $f(\pm\infty)=f'(\pm\infty)=0$, 则

$F[f'(x)]=i\lambda\hat{f}(\lambda)$, $F[f''(x)]=-\lambda^2\hat{f}(\lambda)$.

• $F^{-1}[\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x_0}]=f(x+x_0)$, $F^{-1}\left[\frac{1}{i\lambda}\hat{f}(\lambda)\right]=\int_{-\infty}^{x}f(\xi)\,d\xi.$

• 卷积 $f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\xi)g(\xi)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)g(x-\xi)\,dx,$

$F^{-1}[\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)]=f(x)*g(x)$.

记熟此页内容.

Fourier 正弦变换定义: $F_s[f(x)]=\hat{f}_s(\lambda)\triangleq\int_0^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx.$

反演公式: $f(x)=F_s^{-1}[\hat{f}_s(\lambda)]\triangleq\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\hat{f}_s(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda.$

- I 类边界条件半无界问题用 Fourier 正弦变换求解.
- II 类边界条件半无界问题用 Fourier 余弦变换求解.

• $f(t)$ 的 Laplace 变换: (4.2.1)(P145)

$$L[f(t)]=\bar{f}(p)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}\,dt=F\left[f(t)H(t)e^{-\sigma t}\right].$$

• Laplace 变换反演公式: 记 $p=\sigma+i\lambda$.

$$f(t)H(t)=L^{-1}[\bar{f}(p)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\bar{f}(p)e^{pt}\,dp,\quad \sigma>\sigma_0$$

δ 函数及其性质 熟记

定义: (1) $\delta(x-\xi)=\begin{cases}+\infty, & x=\xi\text{时},\\ 0, & x\neq\xi\text{时},\end{cases}$ (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\,dx=1.$

筛选性: $\forall\varphi(x)\in C(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\varphi(x)\,dx=\varphi(\xi).$

1. $\delta(x-\xi)=\delta(\xi-x)$, $\delta(x)=\delta(-x)$.

4. $<\delta^{(n)}(x),\varphi(x)>\overset{\text{定义}}{=}(-1)^n<\delta(x),\varphi^{(n)}(x)>=(-1)^n\varphi^{(n)}(0),\ \forall\varphi(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}).$

5. $H'(x)=\delta(x)$, 方程 $y'(x)=\delta(x)$ 的通解是 $y(x)=H(x)+c$, 其中

$$H(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\quad c\text{是任意实常数}.$$

2. $\forall a(x)\in C(\mathbb{R})$, $a(x)\delta(x-\xi)=a(\xi)\delta(x-\xi)$.

3. $\forall u(x)\in C^1(\mathbb{R})$, 若 $u(x)$ 在实轴只有单零点 $x_k(k=1,2,\cdots,N)$, 即 $u(x_k)=0,\ u'(x_k)\neq 0,\ 1\leq k\leq N$, 则 $\delta(u(x))=\sum_{k=1}^{N}\frac{\delta(x-x_k)}{|u'(x_k)|}$.

• $F[\delta(x,y,z)]=1$. ★ ➡ • $F^{-1}[1]=\delta(x,y,z)$.

• $F[1]=(2\pi)^3\delta(\lambda,\mu,\nu)$. ★ ➡ • $F^{-1}[\delta(\lambda,\mu,\nu)]=\frac{1}{(2\pi)^3}$.

• $F[e^{iax}]=(2\pi)^3\delta(\lambda-a,\mu,\nu)$. ➡ • $F^{-1}[\delta(\lambda-a,\mu,\nu)]=\frac{1}{(2\pi)^3}e^{iax}$.

• $F[e^{iby}]=(2\pi)^3\delta(\lambda,\mu-b,\nu)$. ➡ • $F^{-1}[\delta(\lambda,\mu-b,\nu)]=\frac{1}{(2\pi)^3}e^{iby}$.

• $F[\cos ax]=\frac{1}{2}(2\pi)^3\{\delta(\lambda-a,\mu,\nu)+\delta(\lambda+a,\mu,\nu)\}$. …… **P172**

• $F[x]=(2\pi)^3 i\frac{\partial\delta(\lambda,\mu,\nu)}{\partial\lambda}$. ➡ • $F^{-1}\left[\frac{\partial\delta(\lambda,\mu,\nu)}{\partial\lambda}\right]=\frac{x}{(2\pi)^3 i}$.

• $F[x^2]=-(2\pi)^3\frac{\partial^2\delta(\lambda,\mu,\nu)}{\partial\lambda^2}$. ➡ • $F^{-1}\left[\frac{\partial^2\delta(\lambda,\mu,\nu)}{\partial\lambda^2}\right]=-\frac{1}{(2\pi)^3}x^2$.

• $F[y^2]=-(2\pi)^3\frac{\partial^2\delta(\lambda,\mu,\nu)}{\partial\mu^2}$. ➡ • $F^{-1}\left[\frac{\partial^2\delta(\lambda,\mu,\nu)}{\partial\mu^2}\right]=-\frac{1}{(2\pi)^3}y^2$.

• $F[z^2]=-(2\pi)^3\frac{\partial^2\delta(\lambda,\mu,\nu)}{\partial\nu^2}$. ➡ • $F^{-1}\left[\frac{\partial^2\delta(\lambda,\mu,\nu)}{\partial\nu^2}\right]=-\frac{1}{(2\pi)^3}z^2$.

• $F[x^2+y^2+z^2]=-(2\pi)^3\Delta_3\delta(\lambda,\mu,\nu)$. ➡ • $F^{-1}[\Delta_3\delta(\lambda,\mu,\nu)]=\frac{-1}{(2\pi)^3}(x^2+y^2+z^2)$.

• • •

$M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, L 是关于 M 常系数线性偏微分算子.

定义5.2.1(P174) 称 $LU(M)=\delta(M)$ 任一解 $U(M)$ 为 $Lu(M)=0$ 基本解. ★

定理5.2.1(P174) 设 $U=U(M)$ 是 $Lu(M)=0$ 的基本解,
则 $u(M)\triangleq U(M)*f(M)=\iiint_{\mathbb{R}^3}U(M-M_0)f(M_0)\,dM_0$ 是非齐次方程 ($M_0=(\xi,\eta,\zeta)$)

$Lu(M)=f(M)=\iiint_{\mathbb{R}^3}\delta(M-M_0)f(M_0)\,dM_0$ 的一个解.

$\Delta_3\left(-\frac{1}{4\pi r}\right)=\delta(x,y,z)$, $\Delta_3\left(\frac{1}{4\pi r}\right)=-\delta(x,y,z)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. ★★★★★

$\Delta_2\left(-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}\right)=\delta(x,y)$, $\Delta_2\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}\right)=-\delta(x,y)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$. ★★★★★

定义5.4.1 称 $\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial t}=LU, & t>0,\ M=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ n=1,2,3,\\ U|_{t=0}=\delta(M).\end{cases}$ (5.4.2)

的解 $U(t,M)$ 为 $u_t=Lu$ 型方程初值问题的基本解.

定理 5.4.1 设 $U(t,M)$ 为 $u_t=Lu$ 型方程初值问题的基本解, 则

$$\begin{cases}u_t=Lu+f(t,M), & t>0,\ M\in\mathbb{R}^n,\ n=1,2,3,\\ u|_{t=0}=\varphi(M),\end{cases}\qquad(5.4.1)$$

的解 $u(t,M)=U(t,M)*\varphi(M)+\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)\,d\tau$.

$$\begin{cases} u_{tt} = Lu + f(t,M), \ t>0, \ M\in\mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = \varphi(M), \quad u_t|_{t=0} = \psi(M). \end{cases} \quad (5.4.5)$$

(L: 关于M的常系数线性偏微分算子, 如$L = a^2\Delta$)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = LU, \quad t>0, \ M\in\mathbb{R}^n, \\ U|_{t=0} = 0, \ U_t|_{t=0} = \delta(M). \end{cases} \quad (5.4.6)$$

称(5.4.6)的解 $U(t,M)$为 $u_{tt} = Lu$型方程 初值问题的基本解.

定理5.4.2 设 $U(t,M)$为 $u_{tt} = Lu$ 型方程 初值问题的基本解, 则原初值问题(5.4.5)的解

$$u(t,M) = U(t,M)*\psi(M) + \frac{\partial}{\partial t}\{U(t,M)*\varphi(M)\} + \int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)\,d\tau.$$

- $\hat\delta(\lambda) = F[\delta] \overset{\star}{=} 1. \Rightarrow F^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\,d\lambda = \delta(x).$
- $F[1] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos\lambda x\,dx = 2\int_0^{+\infty}\cos\lambda x\,dx = 2\pi\delta(\lambda).$
- ➡ $F^{-1}[\delta(\lambda)] \overset{\star}{=} \frac{1}{2\pi}.$
- $F[e^{iax}] = F[1\cdot e^{iax}] = 2\pi\delta(\lambda - a).$ ➡ $F^{-1}[\delta(\lambda-a)] = \frac{1}{2\pi}e^{iax}.$
- $F[e^{-iax}] = F[1\cdot e^{-iax}] = 2\pi\delta(\lambda + a).$ ➡ $F^{-1}[\delta(\lambda+a)] = \frac{1}{2\pi}e^{-iax}.$
- $F[\cos ax] = \pi\delta(\lambda - a) + \pi\delta(\lambda + a).$ ★
- $F[\sin ax] = i\pi\{\delta(\lambda+a) - \delta(\lambda - a)\}.$ ★
- $F[x] = 2\pi i\delta'(\lambda).$ ➡ $F^{-1}[\delta'(\lambda)] = \frac{x}{2\pi i}.$

P168 ★★

$$(5.3.1)\begin{cases} \Delta u(M) = -f(M), \ M\in V, \\ u|_{\partial V} = \varphi(M)|_{M\in\partial V}. \end{cases} \quad (5.3.4)\begin{cases} \Delta G(M;M_0) = -\delta(M-M_0), \ M\in V, \\ G(M;M_0)|_{M\in\partial V} = 0. \end{cases}$$

定理5.3.2: 设$G(M;M_0)$是(5.3.1)的Green函数, 即是(5.3.4)的解, 则(5.3.1)解

$$u(M) = \int_V G(M;M_0)f(M_0)\,dM_0 - \oint_{\partial V}\varphi(M_0)\frac{\partial G(M;M_0)}{\partial n_0}\,dS_0, \quad (5.3.6)\ (P181)$$

n_0: 关于变量$M_0 = (\xi,\eta,\zeta)$或(ξ,η)在边界∂V的单位外法向量. Poisson公式

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\Delta_3 U, \quad t>0, \quad -\infty < x,y,z < +\infty, \\ U|_{t=0} = 0, \quad U_t|_{t=0} = \delta(x,y,z). \end{cases}$$

$$U(t,x,y,z) = \frac{\delta(r-at)}{4\pi ar}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

$$(5.3.1)\begin{cases} \Delta u = -f(M) = -\delta \\ u|_{\partial V} = \varphi(M). \end{cases}$$

$u = u(x,y)$, $a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y).$ (1.3.1)

求解步骤: ★★★★★ 熟记此页 a,b不同时为0.

I. 写特征方程$\frac{dx}{a(x,y)} = \frac{dy}{b(x,y)}$, 在$D$内求它隐式通解$\varphi(x,y) = h$, ($h$:任意常数, $\varphi(x,y)$不含任意常数)

II. 任取$\psi(x,y)$, 使得$J(\varphi,\psi)\neq 0$. 令$\begin{cases}\xi = \varphi(x,y), \\ \eta = \psi(x,y).\end{cases}$ 求反变换$\begin{cases}x = x(\xi,\eta), \\ y = y(\xi,\eta),\end{cases}$

由链式法则计算$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, 代入(1.3.1)化简, 将新方程中$x,y$都换成$\xi,\eta$ 函数,

$\frac{\partial u}{\partial\eta} + p(\xi,\eta)u = q(\xi,\eta)$, (1.3.7) $p = c\Big/\left(a\frac{\partial\psi}{\partial x} + b\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$, $q = f\Big/\left(a\frac{\partial\psi}{\partial x} + b\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$.

III. (1.3.7) 乘以$e^{\int p(\xi,\eta)d\eta}$ 得 $\frac{\partial}{\partial\eta}\left(e^{\int p(\xi,\eta)d\eta}u\right) = q(\xi,\eta)e^{\int p(\xi,\eta)d\eta}$, 故

$u = e^{-\int p(\xi,\eta)d\eta}\left\{\int q(\xi,\eta)e^{\int p(\xi,\eta)d\eta}\,d\eta + G(\xi)\right\}$, $G(\xi)$是任意$C^1(\mathbb{R})$.

IV. 用$\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$将解换回原变量x,y, 得(1.3.1)通解. #

- 若$c\equiv f\equiv 0$时, 则方程化为,$\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0$, 则$u = G(\xi) = G(\varphi(x,y))$, $G(\xi)$是任意$C^1(\mathbb{R})$.

$u = u(x_1,\cdots,x_n)$, $\sum_{j=1}^n b_j\frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f$, (1.3.9) $b_j = b_j(x_1,\cdots,x_n)$, $c = c(x_1,\cdots,x_n)$, $f = f(x_1,\cdots,x_n)$.

(1.3.9)的求解步骤: ★★★★ 熟记此页

I. (1.3.9)的特征方程: $\frac{dx_1}{b_1} = \frac{dx_2}{b_2} = \cdots = \frac{dx_n}{b_n}$. (1.3.11)

从(1.3.11)凑出$n-1$个相互独立的首次积分, 记为:

$\varphi_1(x_1,\cdots,x_n) = h_1$, $\varphi_2(x_1,\cdots,x_n) = h_2,\cdots$, $\varphi_{n-1}(x_1,\cdots,x_n) = h_{n-1}$.

由定理1.3.1', 得 $\sum_{j=1}^n b_j\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j} = 0$, $\forall k = 1,\cdots,n-1$. (1.3.10')

II. 任选一个C^1函数$\varphi_n(x_1,\cdots,x_n)$, 使得 $J(\varphi_1,\cdots\varphi_{n-1},\varphi_n)\neq 0$.

令$\begin{cases}\xi_1 = \varphi_1(x_1,\cdots,x_n), \ \xi_2 = \varphi_2(x_1,\cdots,x_n), \ \cdots, \ \xi_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_1,\cdots,x_n), \\ \xi_n = \varphi_n(x_1,\cdots,x_n),\end{cases}$

由链式法则, 将(1.3.9) 化简为,

$\frac{\partial u}{\partial\xi_n} + p(\xi_1,\cdots,\xi_n)u = q(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $p = \frac{c}{\sum_{j=1}^n b_j\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_j}}$, $q = \frac{f}{\sum_{j=1}^n b_j\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_j}}$.

$\frac{\partial u}{\partial\xi_n} + p(\xi_1,\cdots,\xi_n)u = q(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, (1.3.13) $p = \frac{c}{\sum_{j=1}^n b_j\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_j}}$, $q = \frac{f}{\sum_{j=1}^n b_j\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_j}}$.

III. (1.3.13)乘以$e^{\int p(\xi_1,\cdots,\xi_n)d\xi_n}$ 可解得 (1.3.13)通解为

$u = e^{-\int p(\xi_1,\cdots,\xi_n)d\xi_n}\left\{\int q(\xi_1,\cdots,\xi_n)e^{\int p(\xi_1,\cdots,\xi_n)d\xi_n}\,d\xi_n + G(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})\right\}$,

$G(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$是任意$C^1(\mathbb{R}^{n-1})$函数.

IV. 将$\xi_1,\cdots,\xi_n$换回原变量 $x_1,\cdots,x_n$, 得(1.3.9)的通解. 例1.3.3

- 特别是$c\equiv f\equiv 0$时, 原方程化简为$\frac{\partial u}{\partial\xi_n} = 0$, 解为

$u = G(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}) = G(\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,\cdots,x_n))$,

$G(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$是任意$C^1(\mathbb{R}^{n-1})$函数. 例1.3.2 ★★★★★

$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + b_0 u = 0$, (1.5.2)

$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}\,dx\,dy + a_{22}(dx)^2 = 0$. (1.5.9)

II. 当$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$时, (1.5.9)只有一不同隐式解 $\varphi(x,y) = h$.

任选$\psi(x,y)$, 使$J(\varphi,\psi)\neq 0$. 对(1.5.2)作变换$\begin{cases}\xi = \varphi(x,y), \\ \eta = \psi(x,y)(任取).\end{cases}$

由定理1.5.1, $A_{11} = P\varphi = 0$, 因$\psi(x,y) = h$不是(1.5.9)隐式解, 故$A_{22}\neq 0$.

命题2. 当$\Delta = 0$时, $A_{12} = 0$. 故(1.5.2)化为(链式法则):

$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{1}{A_{22}}\left(B_1\frac{\partial u}{\partial\xi} + B_2\frac{\partial u}{\partial\eta} + B_0 u\right) = 0.$ (1.5.13) ★★★

---抛物型方程标准型 熟记此页

- 当$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$时, 称 (1.5.2)为抛物型方程. ★★

I. 当$\Delta>0$时，若$a_{11}\neq 0$或$a_{22}\neq 0$, (1.5.9)有两个不同隐式解 $\varphi(x,y)=h_1$, $\psi(x,y)=h_2$.

令$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \psi=\psi(x,y),\end{cases}$ 由链式法则, 知(1.5.2)化为双曲型方程标准型：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{2A_{12}}\left(B_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+B_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+B_0u\right)=0. \quad (1.5.11)$$

- 当$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$时, 称 (1.5.2)为双曲型方程. ★★★★★

对(1.5.11), 令$\begin{cases}t=\frac{1}{2}(\xi+\eta),\\ s=\frac{1}{2}(\xi-\eta),\end{cases}$ ★★★ 由链式法则, (1.5.11)可化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+4\left(\tilde B_1\frac{\partial u}{\partial t}+\tilde B_2\frac{\partial u}{\partial s}+\tilde B_0u\right)=0.$$

双曲型方程的另一标准型

当 $\Delta=0$ 时, 由特征方程 (1.5.9) 只能得一个一阶线性常微分方程. 不妨设 $a_{11}\neq 0$, 该方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}}{a_{11}},$$

解得一族特征曲线 $\varphi(x,y)=h$. 任取二元函数 $\psi(x,y)$, 使 $J=\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}\neq 0$. 作变量代换

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y),$$

新方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{1}{A_{22}}\left(B_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+B_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+Cu\right)=0, \quad (1.5.13)$$

称方程 (1.5.13) 为**抛物型方程的标准形**.

当 $\Delta<0$ 时, 特征方程 (1.5.9) 只能在复数域内分解成两个一阶方程. 不妨设 $a_{11}\neq 0$, 相应的一阶方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{a_{11}} \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{a_{11}},$$

此时, 不存在实特征线, 特征方程 (1.5.9) 的隐式通解为

$$\varphi(x,y)\pm\mathrm{i}\psi(x,y)=h.$$

为避免引入复变量, 作变换

$$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y),\end{cases}$$

由定理 1.5.1 将 $z=\varphi(x,y)\pm\mathrm{i}\psi(x,y)$ 代入方程 (1.5.8), 分别取其实、虚部, 可得 $A_{11}=A_{22}$, $A_{12}=0$, 则有新方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{1}{A_{11}}\left(B_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+B_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+Cu\right)=0. \quad (1.5.14)$$

称方程 (1.5.14) 为**椭圆型方程的标准形**.

例 1.4.4 三维波动方程的初值问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta_3 u,\quad t>0,\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0,\\ u\big|_{t=0}=\varphi(r),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(r).\end{cases} \quad (1.4.11)$$

解 由初始条件的球对称性, 可设未知函数 $u=u(t,r)$. 采用球坐标, 方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

作未知函数的代换

$$u(t,r)=\mathrm{e}^{\alpha(r)}v(t,r),$$

其中, $\alpha(r)$ 待定, 目的是消去一阶导数项. 代入 u 的方程, 得 v 的方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\left[2\alpha'(r)+\frac{2}{r}\right]\frac{\partial v}{\partial r}+\left[\alpha''(r)+\alpha'(r)^2+\frac{2}{r}\alpha'(r)\right]v\right\},$$

当 $\alpha(r)=-\ln r$, 即 $v=ru$ 时, 则为一维波动方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}.$$

$$\delta(x)*f(x)=f(x),$$
$$\delta'(x)*f(x)=\delta(x)*f'(x)=f'(x),$$
$$\delta^{(n)}(x)*f(x)=\delta(x)*f^{(n)}(x)=f^{(n)}(x),$$
$$L(f(x)*g(x))=(Lf)*g=f*Lg,$$

$$<\delta^{(n)}(x),\varphi(x)>\overset{定义}{=}(-1)^n<\delta(x),\varphi^{(n)}(x)>=(-1)^n\varphi^{(n)}(0),\ \forall\varphi(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

例 1.4.3 一端固定半无界弦的自由振动

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad t>0,x>0,\\ u(t,0)=0,\\ u(0,x)=\varphi(x),\quad u_t(0,x)=\psi(x).\end{cases} \quad (1.4.9)$$

分析 这里的初始条件 $\varphi(x),\psi(x)$ 仅在 $x>0$ 有定义, 故不能直接应用达朗贝尔公式. 但由达朗贝尔公式 (1.4.6) 可知, 如果定义在整个实轴上的 $\varphi(x),\psi(x)$ 为奇函数, 则

$$u(t,0)=\frac{1}{2}[\varphi(-at)+\varphi(at)]+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi=0.$$

如果 $\varphi(x),\psi(x)$ 是偶函数, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=\frac{1}{2}[\varphi'(-at)+\varphi'(at)]+\frac{1}{2a}[\psi(at)-\psi(-at)]=0.$$

因此, 可用**延拓法**将 (1.4.9) 式中的 $\varphi(x),\psi(x)$ 从 $x>0$ 奇延拓到 $x<0$, 再利用达朗贝尔公式, 求出的解必满足边界条件 $u(t,0)=0$.

解 作辅助函数

$$\varPhi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geqslant 0,\\ -\varphi(-x), & x<0,\end{cases}\qquad \varPsi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\geqslant 0,\\ -\psi(-x), & x<0.\end{cases}$$

由达朗贝尔公式得 (1.4.9) 式的解

$$u(t,x)=\frac{1}{2}[\varPhi(x+at)+\varPhi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varPsi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & t\leqslant\frac{x}{a},\\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & t>\frac{x}{a}.\end{cases} \quad (1.4.10)$$

为理解此解的物理意义, 不妨设初速度 $\psi(\xi)=0$. 当 $t\leqslant\frac{x}{a}$ 时, 端点的影响尚未传到 x 点,x 点的运动仍由初位移引起的左右行波 $\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]$ 决定. 当 $t\geqslant\frac{x}{a}$ 时, 端点的影响已传到 x 点,x 点的运动由左行波 (**入射波**)$\frac{1}{2}\varphi(x+at)$ 和右行波 (**反射波**)$-\frac{1}{2}\varphi(at-x)$ 决定. 在端点 $x=0$ 处, 入射波与反射波分别为 $\frac{1}{2}\varphi(at)$ 和 $-\frac{1}{2}\varphi(at)$, 故 $u(t,0)\equiv 0$.

类似地, 也可通过将 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 作偶延拓求解端点自由的半无界弦的自由振动.

由一维波动方程的通解得三维波动方程的球面对称解

$$u(t,r)=\frac{1}{r}[f(r-at)+g(r+at)],$$

其中, $f(r-at)$ 为**发散波**, $g(r+at)$ 为**会聚波**, $\frac{1}{r}$ 为波形的衰减 ($r>1$) 或扩张 ($r<1$) 因子. 利用公式 (1.4.10) 可写出初值问题 (1.4.11) 式的解

$$u(t,r)=\begin{cases}\frac{1}{2r}[(r+at)\varphi(r+at)+(r-at)\varphi(r-at)]+\frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\xi\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & t\leqslant\frac{r}{a},\\ \frac{1}{2r}[(r+at)\varphi(r+at)-(at-r)\varphi(at-r)]+\frac{1}{2ar}\int_{at-r}^{r+at}\xi\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & t>\frac{r}{a}.\end{cases} \quad (1.4.12)$$

行波解对研究波动问题很重要, 对较复杂的方程, 寻找其行波特解常常是研究问题的第一步. 例如, 设 KdV 方程 (1.1.10)

(P 45)12(1) $(y+z)\frac{\partial u}{\partial x}+(z+x)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=0.$

提示：特征方程为 $\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}$.

$\frac{dx}{y+z}\neq d\left(\frac{x}{y+z}\right),\ldots\ldots$

注：由 $\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}$ 或 $\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}$ 都无法得到首次积分.

~~$\frac{x}{y+z}-\frac{y}{z+x}=h$~~

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dz}{x+y}=\frac{dx-dz}{(y+z)-(x+y)}=-\frac{d(z-x)}{z-x}.$$

同理 $\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}=\frac{dy-dz}{(z+x)-(x+y)}=-\frac{d(y-z)}{y-z}$,

另，$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}=\frac{dx+dy+dz}{(y+z)+(z+x)+(x+y)}=\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}$. 因此

$-\frac{d(z-x)}{z-x}=-\frac{d(y-z)}{y-z}=\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}$. 由它求出两个首次积分.

由 $\frac{d(z-x)}{z-x}-\frac{d(y-z)}{y-z}=0$ 得 $\ln\frac{z-x}{y-z}=h$, $\frac{z-x}{y-z}=e^{h}\neq 0$.

由 $\frac{d(y-z)}{y-z}+\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}=0$ 得 $\ln(y-z)\sqrt{x+y+z}=h_2$,

$(y-z)^2(x+y+z)=e^{2h_2}\neq 0$. ……(同学们自己补充完整). #

例 2.2.3 求解扇形域上的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0, \quad 1<r<e,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2},\\ u|_{r=1}=u|_{r=e}=0,\\ u|_{\theta=0}=0, \quad u|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=g(r),\end{cases}\tag{2.2.17}$$

这里, (r,θ) 为极坐标, e 为自然对数的底数.

解 极坐标下, 方程为

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0,$$

设 $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$, 代入方程和关于 r 的齐次边界条件, 分离变量得固有值问题

$$\begin{cases}r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda R(r)=0, \quad 1<r<e,\\ R(1)=R(e)=0\end{cases}\tag{2.2.18}$$

及常微分方程

$$\Theta''(\theta)-\lambda\Theta(\theta)=0.$$

固有值问题中的方程是变系数二阶线性方程, 可化为 S-L 型

$$[rR'(r)]'+\lambda\frac{1}{r}R(r)=0,$$

这里, $k(r)=r,\ q(r)\equiv 0,\ \rho(r)=\frac{1}{r}$. 由 S-L 定理知 $\lambda>0$.

$R(r)$ 的方程是欧拉 (Euler) 方程, 作变量代换 $r=e^t$, 记 $y(t)=R(e^t)$, 则变系数方程的固有值问题 (2.2.18) 式转化为最简 S-L 型方程固有值问题

$$\begin{cases}y''(t)+\lambda y=0, \quad 0<t<1,\\ y(0)=y(1)=0.\end{cases}$$

即得固有值

$$\lambda_n=(n\pi)^2, \quad n=1,2,\cdots$$

及固有函数

$$y_n(t)=\sin n\pi t,$$

亦即

$$R_n(r)=\sin(n\pi\ln r).$$

相应地

$$\Theta_n(\theta)=A_n\operatorname{ch}n\pi\theta+B_n\operatorname{sh}n\pi\theta.$$

设

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\operatorname{ch}n\pi\theta+B_n\operatorname{sh}n\pi\theta)\sin(n\pi\ln r),$$

代入关于 θ 的边界条件, 得

$$u|_{\theta=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin(n\pi\ln r)=0,$$

$$u|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\operatorname{sh}\frac{n\pi^2}{2}\sin(n\pi\ln r)=g(r),$$

这里, $\{\sin(n\pi\ln r),\ n=1,2,\cdots\}$ 是区间 $[1,e]$ 上加权函数 $\rho(r)=\frac{1}{r}$ 的完备正交函数系, 故

$$A_n=0,$$

$$B_n=\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{n\pi^2}{2}}\cdot\frac{\int_1^e g(r)\sin(n\pi\ln r)\frac{1}{r}dr}{\int_1^e\sin^2(n\pi\ln r)\frac{1}{r}dr}=\frac{2}{\operatorname{sh}\frac{n\pi^2}{2}}\int_0^1 g(e^t)\sin(n\pi t)dt.$$

卷积写开

二(14分)求解定解问题：

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+1, \quad (0<x<l,\ t>0)\\ u(t,\ 0)=0, \quad u_x(t,\ l)=0,\\ u\,|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\,|_{t=0}=\psi(x),\end{cases}$$

二.设 $u=u_1+u_2$, 先解u_1(齐次问题)

固有值和固有函数为：

$$\lambda_n=\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2, \quad X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \qquad n=0,\ 1,\ \cdots(7分)$$

设级数解为

$$u_1(t,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}[C_n\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}+D_n\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}]\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

由初始条件得

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}d\xi$$

$$D_n=\frac{4}{(2l+1)\pi a}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}d\xi \qquad (10分)$$

对于u_2(非齐次问题)

$$1=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \qquad f_n=\frac{4}{(2n+1)\pi}$$

$$u_2=\sum_{n=0}^{+\infty}T_n(t)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

$T_n(t)$ 满足 $T''+\lambda_n a^2T=\frac{4}{(2n+1)\pi}, \quad T(0)=T'(0)=0$

$$T_n(t)=\frac{16l^2}{(2n+1)^3a^2\pi^3}-\frac{16l^2}{(2n+1)^3a^2\pi^3}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l} \qquad (14分)$$

最后

$$u=u_1+u_2$$

本题也可以用特解法和齐次化原理法求解