



光学 A | 小论文

高斯玻色采样

杨子跃

中国科学技术大学 少年班学院, 合肥 230026

摘要: 高斯玻色采样是证明量子计算机相对于经典计算机具有计算优势的主要提案。最近, 高斯玻色采样的大规模实现已经可以说超过了现有经典硬件所能模拟的界限。本篇文章将从计算复杂度开始回顾高斯玻色采样的理论基础, 以及使用光子设备进行实验实现和经典模拟的实践方面, 讨论高斯玻色采样的实验结果的验证和应用, 并讨论未来发展方向。

Contents

7 总结与展望

10

1 引言 1

2 预备知识 2

2.1 复杂度理论 2

2.2 量子光学简述 2

2.2.1 二次量子化 2

2.2.2 线性光学变换 3

2.2.3 Hong-Ou-Mandel 实验 3

2.2.4 准概率密度函数 4

2.3 玻色采样 4

3 高斯玻色采样原理 4

3.1 高斯态 4

3.2 采样图案的概率 4

4 实验高斯玻色采样 5

5 模拟高斯玻色采样 6

5.1 精确模拟 6

5.2 近似模拟 7

6 高斯玻色采样的验证 8

6.1 总体变异距离和保真度 9

6.2 组概率 9

6.3 低阶关联函数 9

6.4 交叉熵 9

6.5 贝叶斯统计检验 9

1 引言

回溯到二十世纪八十年代, 研究者们提出用区别于经典体系的量子体系搭建计算机 [1]。量子体系有着独特的叠加态和纠缠, 可用来构建一个新的计算模型。

随后, 一些基于量子体系的计算方法被提出 [2,3], 并开始在各种体系上实践 [4]。此领域的最终目的是通用量子计算机, 但是目前处于含噪中等规模量子器件 (NISQ) 时代 [5], 离实现通用量子计算机还有很长一段路要走, 对经典计算机到通用量子计算机的中间过渡——量子计算优越性 [6] 的研究便随之拉开序幕。量子优越性目的在于解决经典计算机无法高效解决的问题, 推翻扩展丘奇图灵论题 (extended Church-Turing thesis) [7], 其实现是一个里程碑事件, 高斯玻色采样便是源于量子计算优越性问题。

高斯玻色采样的原型是玻色采样 [8], 从复杂度理论中诞生, 提出一个经典不可解的问题, 并用量子计算机实验实现, 从而宣布达到量子计算优越性。由于玻色采样要求同时产生单光子的条件较难达到, 便有了后来的散射玻色采样 [9]。但无论是玻色采样还是散射玻色采样, 产生可用光子均是后选择方法 [10], 因此将会限制采样的规模, 难以实验实现量子优越性。高斯玻色采样则解决了这个问题 [11,12]。目前实验上最好的成果是中国科大的九章三号, 达到了 255 个响应数 [13]。即使是算力最强的超级计算机使用目前最快

的算法也需要 3.1×10^{10} 年才能计算出九章三号实现的结果。当然，远远称不上结束，更快的经典的模拟算法仍会不断地被提出，量子计算机也会随着理论、硬件的发展不断被完善。量子计算机和经典计算机的竞争还有很漫长的一段路。

本文主要介绍高斯玻色采样的基本原理、实验实现、经典模拟、采样验证以及应用，并在最后讨论了高斯玻色采样未来可能的发展方向，旨在让读者更好地投入到此领域中。

2 预备知识

2.1 复杂度理论

量子优越性是经典与量子计算机的对比，需要理论假设去描述经典计算机的能解决问题的范围，复杂度理论因此而诞生。例如广为人知的 $P \neq NP$ 问题便是复杂度理论的产物。下面介绍几种重要的复杂度理论 [7]:

1. P (polynomial)

如果布尔函数 $g(x)$ 是“多项式时间可计算的”，也就是说，计算 $g(x)$ 所需的时间最多随 x 的大小呈多项式增长，那么 $g(x)$ 就属于 P 问题。

2. NP (nondeterministic polynomial)

如果布尔函数 $f(x)$ 可以表示为 $f(x) = \vee_y g(x, y)$ ，其中 $g(x, y)$ 是 P 问题， \vee 是布尔或运算，那么 $f(x)$ 属于 NP 问题。

3. PH (polynomial hierarchy)

第 k 级多项式层次 (PH) 被定义为可以由 k 个交替量词写成的函数集合，即 $f(x) = \vee_{y_1} \wedge_{y_2} \cdots \wedge_{y_k} g(x, y_1, \cdots, y_k)$ 。一般情况下认为对于任意的 k ，第 k 级和第 $k+1$ 级多项式层次并不相等；反之，所有的不同级多项式层次将相等，即多项层次的崩塌。

图 2.1 简单划分了不同复杂度的问题区域。读者若想了解更多复杂度理论的知识，可以参考 [14]。后面会提到，高斯玻色采样计算的 hafnian、Torontonian、Kensingtonian 属于 #P 完全问题 [12, 15, 16]，因此其无法被经典计算机有效模拟，否则会导致多项式层次的崩塌。

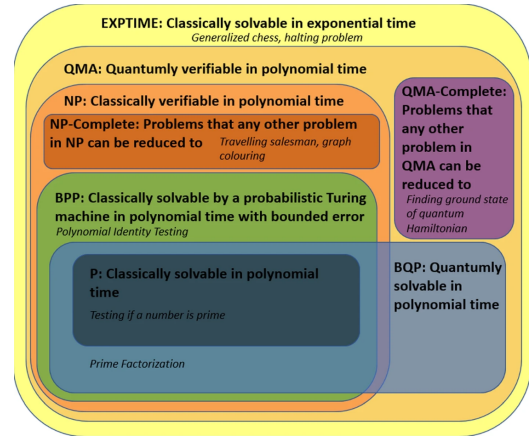


Figure 2.1: 复杂度理论

2.2 量子光学简述

2.2.1 二次量子化

类似声子等一系列谐振子的二次量子化过程，横向电磁场也能进行二次量子化，具体表现为将振幅替换为升降算符。横向电场的量子化形式如下 [17]:

$$\hat{A}_\perp(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\epsilon} \left[\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega} \right]^{1/2} \times [\hat{a}_{\epsilon}(\mathbf{k})\epsilon e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \hat{a}_{\epsilon}^{\dagger}(\mathbf{k})\epsilon^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] \quad (1)$$

光子是一种玻色子，满足玻色对易关系: bosons commute relation:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \quad [\hat{a}_i^{\dagger}, \hat{a}_j^{\dagger}] = 0 \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^{\dagger}] = \delta_{ij} \quad (2)$$

哈密顿量的本征态 (福克态):

$$\hat{a} |n\rangle = n |n-1\rangle \quad \hat{a}^{\dagger} |n\rangle = (n+1) |n+1\rangle \quad (3)$$

并且光子有全同性 (indistinguishability)。

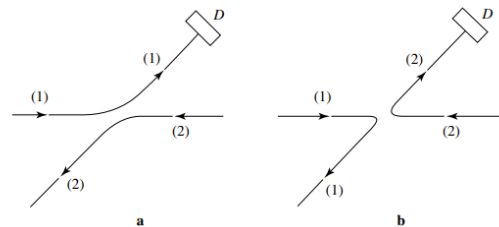


Figure 2.2: 光子的全同性

如图 2.2 所示，两个全同粒子碰撞时会有两种情况，但因为无法分辨它们，所以我们可以说这两种情况是同时存在的，从而会带来一些统计上的与经典情况不同的现象。

下面介绍一些常见的量子态 [18, 19]:

1. 相干态

相干态是具有经典光性质的量子态，其表示如下：

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} |0\rangle \quad (4)$$

2. 热态

热态的光子数符合玻尔兹曼分布，一般用于描述环境噪声光，密度算符的福克态表示如下：

$$\rho_T = \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n |n\rangle \langle n| \quad (5)$$

其中 \bar{n} 是平均光子数。

3. 压缩态

高斯玻色采样一般使用的光是单模压缩态：

$$\begin{aligned} |0, \xi\rangle &= \sqrt{\text{sech}r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!2^n} [-e^{i\theta} \tanh r]^n |2n\rangle \\ &= e^{\frac{\xi^*}{2} \hat{a}^2 - \frac{\xi}{2} \hat{a}^{\dagger 2}} |0\rangle \end{aligned} \quad (6)$$

有时也使用可以分解为两个单模压缩态的双模压缩态。

2.2.2 线性光学变换

最普遍的对升降算符的线性变换定义为 Bogoliubov 变换 [20, 21]：

$$\hat{a}_j \rightarrow \sum_k u_{jk} \hat{a}_k + v_{jk} \hat{a}_k^\dagger \quad (7)$$

在此变换中光子总数不为守恒量。对于无源线性光学变换：

$$\hat{a}_j \rightarrow \sum_k u_{jk} \hat{a}_k \quad (8)$$

此过程中光子数保持不变。

以下是一些常用的无源线性光学变换的装置 [20]：

1. 分束器 (BS)：

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\text{out}}^\dagger &= \cos \theta \hat{a}_{\text{in}}^\dagger + ie^{-i\varphi} \sin \theta \hat{b}_{\text{in}}^\dagger \\ \hat{b}_{\text{out}}^\dagger &= ie^{i\varphi} \sin \theta \hat{a}_{\text{in}}^\dagger + \cos \theta \hat{b}_{\text{in}}^\dagger \end{aligned} \quad (9)$$

2. 单模相移器

$$\hat{a}_{\text{out}}^\dagger = e^{i\phi \hat{a}_{\text{in}}^\dagger \hat{a}_{\text{in}}} \hat{a}_{\text{in}}^\dagger e^{-i\phi \hat{a}_{\text{in}}^\dagger \hat{a}_{\text{in}}} = e^{i\phi} \hat{a}_{\text{in}}^\dagger \quad (10)$$

3. 波片

$$\begin{aligned} \hat{a}_{x'}^\dagger &= \cos \theta \hat{a}_x^\dagger + ie^{-i\varphi} \sin \theta \hat{a}_y^\dagger \\ \hat{a}_{y'}^\dagger &= ie^{i\varphi} \sin \theta \hat{a}_x^\dagger + \cos \theta \hat{a}_y^\dagger \end{aligned} \quad (11)$$

4. 偏振分束器

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\text{in},H} &\rightarrow \hat{a}_{\text{out},H} \quad \text{and} \quad \hat{a}_{\text{in},V} \rightarrow \hat{b}_{\text{out},V} \\ \hat{b}_{\text{in},H} &\rightarrow \hat{b}_{\text{out},H} \quad \text{and} \quad \hat{b}_{\text{in},V} \rightarrow \hat{a}_{\text{out},V} \end{aligned} \quad (12)$$

任意的 N 端口干涉仪都有 SU(N) 的对称性，从而任意的变换都能用一个幺正矩阵表示。上述光学装置的组合对无源线性光学变换是通用的。

2.2.3 Hong-Ou-Mandel 实验

有量子性质的光在观测的统计结果上与经典光有很大不同。如图 2.3 所示，入射两束单光子福克态，设入射模式分别为 a 和 b，产生算符为 a_{in}^\dagger 和 b_{in}^\dagger ，经过 50:50 分束器干涉后出射模式变为：

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\text{out}}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{\text{in}}^\dagger + i\hat{b}_{\text{in}}^\dagger) \\ \hat{b}_{\text{out}}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (i\hat{a}_{\text{in}}^\dagger + \hat{b}_{\text{in}}^\dagger) \end{aligned} \quad (13)$$

则在通道出口处的态为：

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\text{in}}^\dagger \hat{b}_{\text{in}}^\dagger |0\rangle &\rightarrow \hat{a}_{\text{out}}^\dagger \hat{b}_{\text{out}}^\dagger |0\rangle \\ &= \frac{1}{2} (\hat{a}_{\text{in}}^\dagger + i\hat{b}_{\text{in}}^\dagger) (i\hat{a}_{\text{in}}^\dagger + \hat{b}_{\text{in}}^\dagger) |0\rangle \\ &= \frac{i}{2} (\hat{a}_{\text{in}}^{\dagger 2} + \hat{b}_{\text{in}}^{\dagger 2}) |0\rangle \\ &= \frac{i}{2} (|2, 0\rangle + |0, 2\rangle) \end{aligned} \quad (14)$$

易看出，探测器只能从 D_1 或 D_2 处接收到两个光子，而不能在 D_1 和 D_2 各同时探测到一个光子。Hong-Ou-Mandel 实验同时也是一个小规模的光子采样实验。

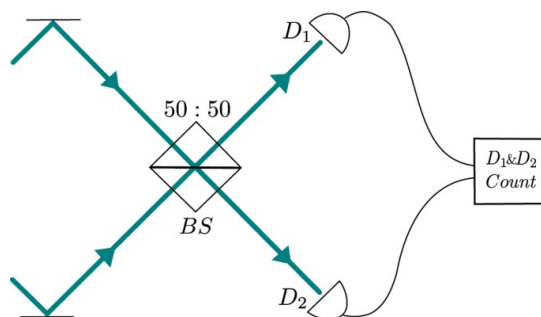


Figure 2.3: Hong-Ou-Mandel 实验

2.2.4 准概率密度函数

任何的密度矩阵在相空间上都有一个等价的准概率函数, 称为 Wigner 函数 [18, 19]。首先我们引入 Weyl 算符, 也是相干态的平移算符:

$$D(\boldsymbol{\xi}) := \exp(i\hat{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\xi}), \quad (15)$$

这里 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{2N}$, $\boldsymbol{\Omega}$ 是 $2N \times 2N$ 的辛矩阵。所以, 任意的密度矩阵等价于 Wigner 函数的特征函数:

$$\chi(\boldsymbol{\xi}) = \text{Tr}[\hat{\rho} D(\boldsymbol{\xi})], \quad (16)$$

再通过傅里叶变换到 Wigner 函数:

$$W(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{d^{2N} \boldsymbol{\xi}}{(2\pi)^{2N}} \exp(-i\mathbf{x}^T \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\xi}) \chi(\boldsymbol{\xi}), \quad (17)$$

2.3 玻色采样

玻色子采样最早由 Aaronson 和 Arkhipov 提出 [8], 他们构造了一种类似于经典高尔顿板的结构, 用玻色子和无源线性光学干涉仪代替了球和夹点。

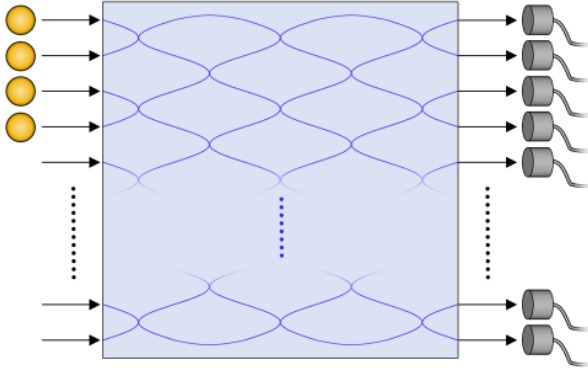


Figure 2.4: 玻色采样

采样图案的采样概率由下式给出:

$$\Pr(\bar{n}) = |\text{Perm}(\mathbf{T}_S)|^2 = \left| \sum_{\sigma \in P_N} \prod_{i=1}^N \mathbf{T}_{S_i, \sigma(i)} \right|^2 \quad (18)$$

$\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)^T$, n_i 是第 i 个通道接收到的光子数, T_S 是取对应模式干涉仪矩阵行和列构成的子矩阵。Perm 则是矩阵的积和式 (permanent)。

玻色采样背后的主要思想是, 在计算复杂性理论中, 精确计算矩阵的积和式是一个 #P 完全问题, 这意味着它不能在一台经典的机器上被有效地计算。即使是近似模拟也会导致多项式层次的崩溃。

总之, 采样模式概率的计算在经典上是棘手的, 因而它带来了量子优越性。

3 高斯玻色采样原理

3.1 高斯态

根据定义, 任意高斯态的 Wigner 函数和其特征函数均可以被写为 [22–24]:

$$\chi(\boldsymbol{\xi}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T \left(\boldsymbol{\Omega} \mathbf{V} \boldsymbol{\Omega}^T \right) \boldsymbol{\xi} - i(\boldsymbol{\Omega} \bar{\mathbf{x}})^T \boldsymbol{\xi} \right] \quad (19)$$

$$W(\mathbf{x}) = \frac{\exp \left[-(1/2)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right]}{(2\pi)^N \sqrt{\det \mathbf{V}}}. \quad (20)$$

其中 $\bar{\mathbf{x}}$ 称为位移矢量:

$$\bar{\mathbf{x}} := \langle \hat{\mathbf{x}} \rangle = \text{Tr}(\hat{\mathbf{x}} \hat{\rho}) \quad (21)$$

\mathbf{V} 称为协方差矩阵:

$$V_{ij} := \frac{1}{2} \langle \{ \Delta \hat{x}_i, \Delta \hat{x}_j \} \rangle \quad (22)$$

对于任意的高斯态, 给定位移矢量和协方差矩阵, 都能被唯一确定。

同时我们注意到, 由不确定关系可以计算出合法的协方差矩阵满足 [22–24]:

$$\mathbf{V} + i\boldsymbol{\Omega} \geq 0 \quad (23)$$

经典态 (可经典高效采样) 的协方差矩阵满足 [25]:

$$\mathbf{V} \geq \frac{\hbar}{2} \mathbb{I} \quad (24)$$

纯态的协方差矩阵满足:

$$\text{Det} \left(\frac{2}{\hbar} \mathbf{V} \right) = 1 \quad (25)$$

3.2 采样图案的概率

高斯玻色采样生成了一组玻色子在经过无源线性变换后的采样样本, 每一种图案在样本中的出现次数与采样概率有紧密联系。区别于玻色采样, 高斯玻色采样的采样概率引入了名为 hafnian 的函数, 但与积和式相同的是, hafnian 也是 #P 完全问题, 因此在经典上依旧不可解。

对于位移矢量 $\bar{\mathbf{r}} = 0$ 时, 概率由下式给出 [11, 12]:

$$\Pr(\bar{n}) = \frac{1}{\bar{n}! \sqrt{|\sigma_Q|}} \text{haf}(\mathbf{A}_S) \quad (26)$$

其中 $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)^T$, n_i 是第 i 个通道接收到的光子数, \mathbf{A} 是邻接矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_M \\ \mathbb{I}_M & 0 \end{pmatrix} \left[\mathbb{I}_{2M} - \sigma_Q^{-1} \right] \quad (27)$$

hafnian 函数为:

$$\text{haf}(\mathbf{C}) = \sum_{x \in \text{PMP}(n)} \prod_{(i,j) \in x} C_{ij} \quad (28)$$

上式中 $\text{PMP}(n)$ 是完全匹配排列的集合 [26]。

当位移矢量不为 0 时, 计算的复杂度不会增加, 概率可以用 loop hafnian 表示 [26]:

$$P(\vec{n} | \mathbf{V}, \vec{x}) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\vec{x}^T \mathbf{V}_Q^{-1} \vec{x}\right)}{\sqrt{\det(\mathbf{V}_Q)} \prod_i n_i!} \text{lhaf}(\mathbf{A}_{\vec{n}}) \quad (29)$$

$$\text{lhaf}(\mathbf{A}) = \sum_{M \in \text{SPM}(i,j) \in M} \prod A_{ij} \quad (30)$$

loop hafnian 中 SPM 是单对匹配。

我们注意到, 上述的概率均是在测量仪器是光子数可分辨探测器 (PNRD) 下计算的。光子数可分辨探测器有着价格昂贵、死时间长的缺点, 因而会考虑使用其它的探测器, 如阈值探测器以及不久前的九章三号所使用的伪光子数可分辨探测器。

使用阈值探测器, 只能探测到光子在此通道的有或无, 即 0 和 1。其采样概率由下式给出 [15]:

$$p(S) = \frac{\text{Tor}[\mathbf{O}_S]}{\sqrt{\det(\mathbf{V})}} \quad (31)$$

$\text{Tor}(\cdot)$ 是矩阵的 Torontonian。

$$\text{Tor}(\mathbf{A}) = \sum_{Z \in P([N])} (-1)^{|Z|} \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}_Z)}} \quad (32)$$

可以证明, 与积和式类似, 如果有经典算法在多项式时间内计算此函数, 会导致多项式层次的崩塌。因此使用阈值探测器不会使高斯玻色采样问题成为经典可解问题。

当经典模拟算法不断优化后, 实现量子优越性对采样规模有着更高的要求, 尤其是阈值探测器。但不断增加规模会导致导致光子更高的损耗, 这是不可解的问题。响应计数探测器 [16] 作为光子数可分辨探测器和阈值探测器的中间产物, 将出口通道的光均匀的散开形成同等强度更弱的光束, 最后用几个阈值探测器探测。点击计数探测器的正定算符测量 (POVM) 表示为:

$$\hat{\Pi}_k^{(N)} \equiv: \binom{N}{k} e^{-\frac{N-k}{N}\hat{n}} (1 - e^{-\frac{\hat{n}}{N}})^k \quad (33)$$

N 为光束分开的数量, k 为探测到的响应数量。并且可以证明: 当 $N = 1$ 时, 为阈值探测器情况; 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 为光子数可分辨情况。

使用响应计数探测器的采样概率为:

$$p(S) = \frac{\text{Ken}[\mathbf{O}_S]}{\sqrt{\det(\mathbf{V})}} \quad (34)$$

$\text{Ken}(\cdot)$ 是矩阵的 Kensingtonian。

$$\text{Ken}[\mathbf{A}] = \sum_{0 \leq d \leq k} \prod_{i=1}^M \left[\binom{N}{N - k_i, k_i - d_i, d_i} \right] \times (-1)^{k_i - d_i} \prod_{j \notin Z} \binom{N}{d_j} \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}_Z) + D_Z}} \quad (35)$$

在无碰撞情形下多项式时间内计算 Kensingtonian 是经典不可解的问题。

4 实验高斯玻色采样

最初是对小规模高斯玻色采样的实验验证, 中国科大实现了 3-5 个光子的采样工作 [27], 随后也有在硅片上实现的最多八光子的采样 [28]。但小规模的高斯玻色采样并不能实现量子优越性, 因此要继续扩大规模。

而对于大规模的高斯玻色采样有很多技术上的困难: 光子在光学设备中传输的损失、探测器的收集效率 (暗计数率)、相位浮动、光子可分辨以及干涉仪的连通性。

中国科大研制的九章一号 [29] 使用了 25 个双模压缩态, 进入 100 个模式 (空间偏振编码) 的干涉仪中, 最后使用阈值探测器探测, 最多可达到 76 个响应数。在此实验中, 使用自发参量下转换 (SPDC) [10] 作为产生双模压缩态的光源, 超导纳米线单光子探测器接收光子。为了解决相位浮动问题, 九章一号采用动态锁相和静态干涉仪锁相结合的技术, 成功地将在一小时内的高频噪声标准差控制在 $\lambda/350$ 、低频浮动控制在 $\lambda/63$; 选取热态和完全可分辨态作为经典比较; 使用神威太湖之光超级计算机验证采样结果, 并宣称实现了量子优越性。

九章一号出世后, 也不断地接受经典模拟的挑战 [30]。除此之外, 九章一号是不可编程的, 如果要对其它矩阵采样, 需要重新制作干涉仪, 这无疑是极大的弊端。

之后中国科大制作了九章二号 [31], 增加了干涉仪的规模。25 个双模压缩态进入 144 个模式的干涉仪中, 最多可达到 113 个探测数, 并使得压缩态的相位可编程, 是对九章一号采样规模和可编程性的扩展。

空间模式编码的干涉仪搭建难度高、可编程性差, 转而考虑在玻色采样时被提出的时间模式编码 [32,33]。时间模式编码方案使用光纤延迟线, 较先进入光纤的光束与后进入的在同时间到达分束器, 将通道模式编

码到时间序列上，解决量子门的局域性问题。这种方案也有着结构、操作简单和可扩展性强的优点。

对于时间编码方案，规模继续扩大意味着回路深度增加，而光子的损耗随着回路深度指数级增大，从而会使高斯玻色采样能被经典计算机高效地近似模拟 [34, 35]。另一方面，减少回路深度的同时没有解决量子门之间的局域性也不会实现量子优越性，因为对数级的回路深度和局域量子门并不能产生长程纠缠，能被经典计算机在多项式时间内模拟 [36, 37]。

为了减少传输损耗实现量子优越性，使用时间编码方法的高维高斯玻色采样被提出 [37]。

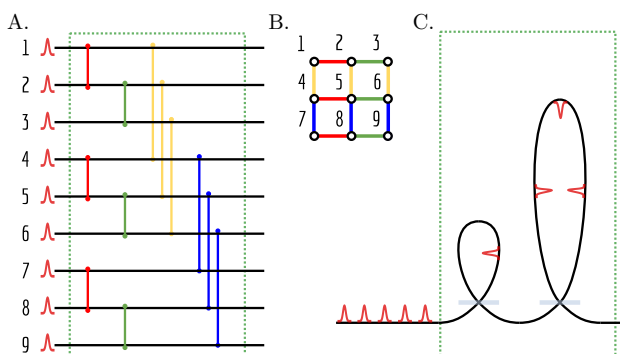


Figure 4.1: 高维高斯玻色采样

使用不同长度的光纤延长线允许不同时间的光束产生作用，与晶格类似。这种方案的光子损失率随着模式数呈亚指数级增长：

$$\eta = \eta_{\text{BS}}^D \eta_{\text{unit-length}}^{a^{D-1}} = \eta_{\text{BS}}^D \eta_{\text{unit-length}}^{M^{1-1/D}} \quad (36)$$

相较于之前的指数级增长有一些改进。除此之外，高维高斯玻色采样可以通过对分束器在时间序列上调整，实现采样装置的可编程性。

Xanadu 的 Borealis [38] 采用上述高维时间编码，将 216 个模式的单模压缩态输入到 216 个模式的干涉仪中，使用光子数可分辨探测器，最多接收到 219 个光子。分析当时的最优经典模拟算法和超级计算机富岳的计算能力后，得出富岳需要约 9000 年才能完成对最大采样概率的计算，实现量子优越性。

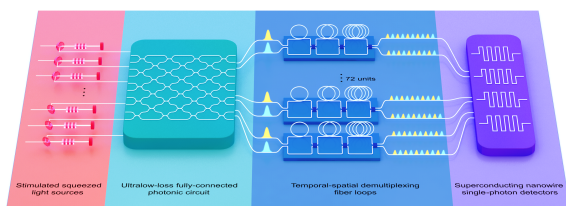


Figure 4.2: 中国科大九章三号

近期的中国科大九章三号 [13] 也采用时空混合编码，将 25 个双模压缩态输入到 144 模式的干涉仪中，再分别进入 72 组 7 个单位长的延迟光纤，使用伪光子数可分辨探测器，达到 255 的最大响应数，进一步提高量子优越性。

在上述主流的实验实现高斯玻色采样方法外，还有用其它体系的玻色采样，例如芯片实现 [28, 39] 和动态卡西米尔效应实现 [40]。

5 模拟高斯玻色采样

为体现量子优越性，一个不可避免的问题是：如何说明这个问题是经典计算机不可解的。正如 Clifford 回路 [41]，一些特定的量子操作的组合可以被经典方法有效模拟。而如今诞生的很多经典模拟方法如量子蒙特卡洛算法 [42]、张量网络方法 [43, 44]，就能高效解决一部分的量子体系问题。

5.1 精确模拟

精确模拟高斯玻色采样问题最常用的方法是链式采样 [45]。最初对高斯玻色采样的链式采样在 [46] 中被提出。每次对一个模式进行采样，计算出可能的光子数量：

$$p(s_k | s_1^*, \dots, s_{k-1}^*) = \frac{p(s_1^*, s_2^*, \dots, s_{k-1}^*, s_k)}{p(s_1^*, \dots, s_{k-1}^*)} \quad (37)$$

* 号表示已经采样过的模式。可以用使用 (21) 计算 s_k 的后选择概率，进而实现采样。考虑到福克态所在的希尔伯特空间是无限维的，必须设置一个截断光子数，做到从有限个概率的采样。直觉上，在一个通道接收到很多光子的情况概率会很小，在截断光子数之外的采样概率的上界为：

$$P < \sum_{k=1}^m \sum_{n=0}^{n_{\text{cutoff}}} [1 - P_k(n)] \quad (38)$$

m 为模式数， n_{cutoff} 为截断光子数， $P_k(n)$ 是在 k 模式中接收到 n 个光子的边缘概率分布。

这种链式采样方法在 m 个模式下生成 N 个光子的时间复杂度为 $T(m, N) = O(mN^3 2^N)$ 。指数级别的复杂度来源于对 hafnian 函数的计算 [26]。随后新的研究利用了纯态邻接矩阵的可对角化 $\mathbf{A} = \mathbf{B} \oplus \mathbf{B}^*$ 和 $\text{lhaf}(\mathbf{B} \oplus \mathbf{B}^*) = |\text{lhaf}(\mathbf{B})|^2$ 的性质，实现了对上述链式算法二次级别的加速 [47]。在此发挥重要作用的是 Williamson 分解 [22, 48]：

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{V}_p \quad (39)$$

分解后的 \mathbf{W} 和 \mathbf{V}_p 分别满足 (21)、(22)。在采样过程中, 先进行外差探测 [21], 再从外差探测的结果中依次后选择出通道的接收光子数。

可以看出, 精确模拟方法主要的复杂度来源是 hafnian 和 loop hafnian 的计算。目前最快的算法在 [49] 中被提出, 结合 [26] 中的特征值求迹和类似 [50] 中计算 permanent 的包含/排除方法, 利用多行重复的性质, 使得 loop hafnian 的计算只有 $\prod_i (n_i + 1)$ 项, 上界 $2^{N/2}$ 和下界 $\prod_i \sqrt{n_i + 1}$ 。

综合了上述算法后, 精确模拟高斯玻色采样目前达到的最优复杂度为 $O(mN^3G^N)$, 其中 $G = (\prod_i (n_i + 1))^{1/N}$ 。

对于阈值探测器, 可以将其视作很多小探测器的组成 [51], 只要有一个子探测器接收到光子, 就记为一个响应。在采样过程中, 一个子探测器探测到光子后, 剩下的子探测器将不再进行采样, 转而进行到下一个阈值探测器。

精确近似模拟采样提供了一个实验实现量子优越性的大致条件: 使用光子数可分辨探测器要有超过 60 个探测器接收到光子; 使用阈值探测器要有超过 100 个探测器有响应, 否则采样结果能被经典计算机用有限的资源和时间模拟。

马尔科夫链采样是一种常见的采样方法, 相较于接收-拒绝采样的浪费样本特性, 基于马尔科夫链细致平衡原理的 metropolis-Hastings 采样效果更好, 其在玻色采样的模拟中就应用过 [52]。在高斯玻色采样中, MH 算法使用一点和两点关联生成的分布 (IPS) 作为提议分布 [49]:

$$Q(\vec{n}|B, \alpha) = \frac{e^{-\sum_j |\alpha_j|^2} e^{-\sum_{j,k} \frac{1}{2} |B_{j,k}|^2}}{\prod_i n_i!} \text{lnaf}(C_{\vec{n}}) \quad (40)$$

再精确计算出概率后, 确定接受率:

$$p_{\text{accept}} = \min \left(1, \frac{P(\vec{n}_i|\vec{\alpha}_i)Q(\vec{n}_{i-1}|\vec{\alpha}_{i-1})}{P(\vec{n}_{i-1}|\vec{\alpha}_{i-1})Q(\vec{n}_i|\vec{\alpha}_i)} \right) \quad (41)$$

最终采样多次得到近似模拟出的采样结果。由于 MH 算法的结果是由上一步的结果生成的, 不可避免的关联将会在相邻的两个样本中出现, 同时还要判断马尔科夫链的收敛位置, 将收敛前的样本丢弃。

对于一些特殊情形, 高斯玻色采样可以在多项式时间内被经典精确模拟。例如在上一章提到的浅回路和局域量子门情况, 干涉仪每一层光学元件的数量满足 $D = O(\text{Ln}M)$, 会使采样的邻接矩阵 \mathbf{A} 成为带状。这样的 haf(A) 和 lhaf(A) 能在多项式时间内被经典计算机计算 [36]。

利用线性光学变换矩阵的干涉仪连通性不足的性质, 利用动态规划的算法, 对图进行树分解 [53], 将计算 hafnian 和 loop hafnian 的复杂度与树宽联系, 而

不是矩阵的规模。再结合链式采样, 可以将精确采样的复杂度达到 $O(MN^2w^22^w)$, 其中 w 是对干涉仪矩阵的树分解后得到的树宽 [54]。我们可以发现, 这个结果可以用来解释一维浅回路高斯玻色采样 [36] 和二维高斯玻色采样 [37] 的复杂度。树分解方法同样能用回路深度等回路的参数来划分复杂度类: 多项式、亚指数、指数, 如图 5.1 所示。

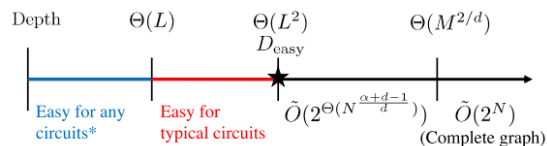


Figure 5.1: 树分解情形计算复杂度分类

5.2 近似模拟

实验上通常会有这几种噪声影响 [35]: 光子可分辨, 光子损失, 设备缺陷, 探测暗计数。不仅是 GBS 问题不能精确采样, 其它的所有的量子计算、量子模拟等, 过程均极易受环境影响, 造成退相干、布居反转等 [18]。正如 Preskill 所说, 当今量子技术正处于 NISQ 技术时期 [5]。如果环境影响太大, 量子体系退化为经典体系, 就能被经典计算机有效模拟, 量子优越性也不复存在。

高斯玻色采样的实验装置不可避免地是近似高斯玻色采样, 于是便产生了一个问题: 近似高斯玻色采样能不能被经典计算机有效模拟? 早在玻色采样时期, 就有一些近似模拟模型被提出 [34]。在高斯玻色采样的实验发展的同时, 相应的经典近似模拟方法也在被不断地提出, 例如九章 1.0 的经典模型 [30]。

考虑 GBS 的 Wigner 函数, 以及广义的 Wigner 函数 [55], 因为其在相空间某些地方的概率会有负数值, 所以被称为准概率分布。但当其在相空间任意位置均大于等于零时, 准概率分布变为为概率分布。由高斯态的性质又易知, 其概率分布为多元正态分布。因此经典的高斯态可以被高效采样 [23, 35]:

$$P(\mathbf{n}) = (2\pi)^M \int d^{2M} \mathbf{x} W_{\Pi}^{(-t)}(\mathbf{n}|\mathbf{x}) W_{\rho_{\text{out}}}^{(t)}(\mathbf{x}) \quad (42)$$

我们之前提到过, 当光子的损失等噪声过大时, 量子情况会退化到经典, 对于高斯玻色采样也不例外, 下式便量化了这个界限 [35]:

$$\text{sech} \left\{ \frac{1}{2} \Theta \left[\ln \left(\frac{1 - 2q_D}{\eta e^{-2r} + 1 - \eta} \right) \right] \right\} > e^{-\epsilon^2/4K} \quad (43)$$

其中 r 是压缩参数, η 是全局光子传输率, $q_D = p_D/\eta_D$, 其中 p_D 是暗计数率, η_D 是量子效率。如果第一个不等式成立, 就可以计算和此装置的状态最相似的经典高斯态 (压缩热态 [56]), 并可以用经典计算机高效地

采样。在此情况下的采样结果 (概率分布) 与实验采样的结果在某种度量下只有 ϵ 的误差。任何的实验高斯玻色采样的装置都不能使得上述不等式成立, 否则可以用经典计算机高效近似模拟, 这也是实验上采用高维高斯玻色采样的原因之一 [37]。值得注意的是, 对于上述噪声存在的高斯玻色采样的精确模拟仍然是不可行的 [35]。

式 (38) 并没有将光子数的不可分辨程度考虑进去, 部分可分辨光子的模型也被提出 [57, 58]。将邻接矩阵可分辨和不可分辨部分分离, 利用可分辨部分的经典采样性质, 减小不可分辨部分 (hafnian) 的计算量, 从而实现计算时间上的减少。

计算每个通道的联合光子概率分布是困难的, 但计算一阶和二阶边缘分布会很容易。同理, 当 k 较小时, k 阶边缘分布均比较容易计算。于是便有了利用这些容易计算的统计量还原模拟采样的贪心算法 [59]。高斯玻色采样的贪心算法顾名思义, 先用一阶边缘分布生成一组模拟采样, 再用计算出的高阶边缘分布定义代价函数 (l_1 距离), 通过不断调整每一组数据的接收光子的位置, 将代价函数不断减小, 最终生成一组模拟样本。贪心算法的时间复杂度为 $O(N^k 2^k L)$, N 为光子数量, k 为关联函数的阶数, L 为生成样本的数量, 并且此时的 l_1 距离在 $O(1/L)$ 。用上述方法生成的模拟采样样本之间仍有很强的关联性, 因此需要从一个大样本中随机抽取作为进一步的模拟样本。

张量网络方法作为最常用的经典模拟量子体系的方法之一, 优越性主要来源于矩阵乘积态 (MPS)、投影纠缠对态 (PEPS) 的构建 [60], 以及不同的张量收缩方法 [44]。在高斯玻色采样的模拟中, 张量网络方法也发挥了很大的作用 [61–63]。

矩阵乘积态常被用来构建张量网络, 一个纯态的 MPS 如下:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \sum_{n_1, \dots, n_M=0}^{d-1} c_{n_1 \dots n_M} |n_1, \dots, n_M\rangle \\
 &\approx \sum_{n_1, \dots, n_M=0}^{d-1} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{M-1}=0}^{\chi-1} \Gamma_{\alpha_1}^{[1]n_1} \lambda_{\alpha_1}^{[1]} \times \\
 &\quad \dots \lambda_{\alpha_{M-1}}^{[M-1]} \Gamma_{\alpha_{M-1}}^{[M]n_M} |n_1, \dots, n_M\rangle \quad (44)
 \end{aligned}$$

其中结点维数 (bond dimension) 是描述 MPS 的重要参数。我们可以看到, 该纯态的维数从指数级 $O(M^d)$ 降到了多项式级 $O(Md\chi^2)$ 。在 [63] 的张量模拟算法中, 同样使用了 Williamson 分解, 并将协方差矩阵中有量子性质的最小部分提取出。随后发现, 之前的实验高斯玻色采样 [13, 29, 31, 38], 量子性质的光子数目只占经典光子的很小一部分, 因此 MPS 的结点维数将会更低。随后 [61] 提出用纠缠熵去度量 MPS 张量网

络的复杂程度, 以及使用 MPS 的推广——矩阵乘积算符 (MPO) 去描述高斯玻色采样过程, 并且在张量网络的收缩中, 利用无源光学变换的粒子数不变造成的张量网络 $U(1)$ 对称性的特点优化算法, 给出了可以被该算法高效模拟的情形 $N_{out} \sim \sqrt{N}$ 。同时上述算法相较于式 (40) 给定的上界, 用 MPS 的结点维数去描述系统的复杂程度更合理也更准确。张量网络算法的框架也给实验高斯玻色采样更好地实现量子优越性提供了建议: 与 (40) 式给出的结果不同, 张量网络方法发现增加压缩光源的压缩参数对纠缠熵和结点维数并没有太大的影响, 而应该去增加有量子性质的光子的数量。为进一步减小矩阵乘积态的结点维数, 可以将演化从薛定谔绘景转换到海森堡绘景中, 态的演化变为算符的演化 [62], 并且可以计算光子不均匀损失的情形, 更加符合实验实际。

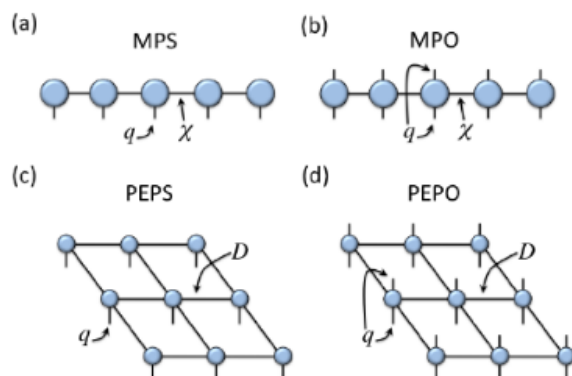


Figure 5.2: 矩阵乘积态和投影纠缠对态

在之前的模拟算法中 [35], 并没有定量地描述干涉仪损失率与模拟计算时间复杂度的关系, 而张量网络方法将时间复杂度与结点维数联系在一起, 因此可以用不同损失率下的结点维数去刻画这一性质。对于高维高斯玻色采样情形, 考虑到类似晶格的结构, 可以对量子态构建 PEPS 和 PEPO, 实现更有效地模拟。

6 高斯玻色采样的验证

我们提到了一个量子优越性的核心问题: 无法被经典方法有效模拟。所以 GBS 的真实性验证便无法用一般的理论计算证明。例如我们并不知道在实验过程中, 有良好量子性质的压缩态是否会退化为经典的热态、在干涉时失去了全同性质或在传输过程中产生相空间的位移。恰好经典的光 (thermal, squashed, coherent, distinguishable) 可以用经典计算机模拟采样, 在上一部分提到的经典算法可以更容易地生成采样样本 [55]。

于是便产生了一种思路，通过分析真实情况和模拟情况，用特殊的验证方法排除采样本从模拟情况产生 [7]。在玻色采样时期，这种思路就被用来排除均匀采样、可分辨采样、平均场假设采样 [64-67]。

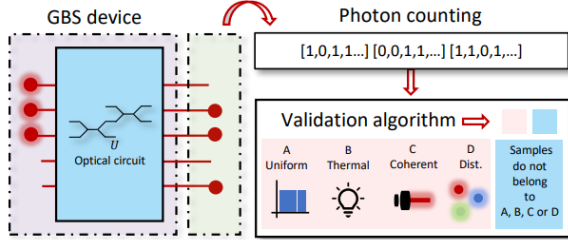


Figure 6.1: 高斯玻色采样的验证

对于这样的验证方法会有如下要求 [68]: 1. 对生成的样本有通用性 2. 对高阶的多光子干涉敏感, 排除部分可分辨情况 3. 要求计算资源为多项式复杂度。

6.1 总体变异距离和保真度

对于少量模式数的高斯玻色采样, 经典计算机可以将所有情况的概率计算出, 再算出实验与理论的总体变异距离和保真度。总体变异距离和保真度如下定义:

$$\text{TVD} = \frac{1}{2} \sum_i |p_i - q_i| \quad (45)$$

$$F = \sum_i \sqrt{p_i q_i} \quad (46)$$

当概率 p 和概率 q 趋于一致时, 总体变异距离 (TVD) 会趋于 0, 保真度 (F) 会趋于 1。

6.2 组概率

计算所有通道光子分布的联合是不可行的, 因而可以转而去考虑将一些探测器的采样结果组合在一起生成的分布, 即组概率。对于阈值探测器, 组概率如下定义 [69, 70]:

$$\mathcal{G}_S^{(n)}(\mathbf{m}) = \left\langle \prod_{j=1}^d \left\{ \sum_{\sum c_i = m_j} \hat{\Pi}_{S_j}(\mathbf{c}) \right\} \right\rangle \quad (47)$$

我们看到直接计算上式依旧是不可能的, 因此对上式作离散傅里叶变换:

$$\tilde{\mathcal{G}}_S^{(n)}(\mathbf{k}) = \left\langle \prod_{j=1}^d \bigotimes_{i \in S_j} (\pi_i(0) + \pi_i(1)e^{-ik_j \theta_j}) \right\rangle_P \quad (48)$$

$\langle \cdot \rangle_P$ 代表在广义 P 函数 [71] 上的积分平均, 在计算时用散点采样代替。组概率可以用其傅里叶变换形式表示:

$$\mathcal{G}_S^{(n)}(\mathbf{m}) = \frac{1}{\prod (M_j + 1)} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\mathcal{G}}_S^{(n)}(\mathbf{k}) e^{i \sum k_j \theta_j m_j} \quad (49)$$

用上述方法可以高效计算组概率, 适用于任意规模的采样。同时, 该方法也被推广到光子数可分辨探测器, 并且将干涉仪损失和部分可分辨情况考虑进去 [68]。

6.3 低阶关联函数

为了体现不同通道光子的干涉性质, 低阶关联函数常被用来作为高斯玻色采样的验证 [72]。在实验中的验证使用二阶关联函数较多:

$$C_{ij} = \langle n_i n_j \rangle - \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle \quad (50)$$

在使用光子数可分辨探测器时, 三阶及以上的关联函数将会非常小 [38], 因此不作验证考虑; 但对于阈值探测器情况, 三阶和四阶关联函数会被考虑 [31]。该方法也可以在大规模高斯玻色采样中使用。当然这种方法并不能排除所有的经典采样情况, 注意到贪心算法 [59] 就是使用一阶和二阶关联函数去生成采样样本, 因此不能被该检验排除。

6.4 交叉熵

中等规模情形下, 计算一些样本的概率是可行的, 可以引入交叉熵 [73] 方法。对于一组真实或模拟的采样样本, 交叉熵形式如下:

$$\mathbf{X}\mathbf{E} \equiv \sum_{\vec{s}} q_U(\vec{s}) \log \frac{p_U(\vec{s})}{p(N)} \approx \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \log \frac{p_U(\vec{s}_i)}{p(N)} \quad (51)$$

其中 $\{\vec{s}_i\}_{i=1}^{N_s}$ 是一组采样样本。与交叉熵等价的有 HOG 率 [29]。若实验采样样本相较于其它模拟采样得到的交叉熵更大, 则能说明相较于模拟采样, 实验采样样本更可能从真实数据中被采样得到, 实现了量子优越性。但同时, 树宽模拟采样可以得到一个很大的交叉熵 [13], 甚至比理想采样的样本的交叉熵更大, 说明树宽模拟采样可以欺骗交叉熵 [74], 这也体现出交叉熵的不完备性, 仍需其它的检验方法去排除树宽采样样本。

6.5 贝叶斯统计检验

贝叶斯检验方法 [75] 与交叉熵类似, 只能适用于中等规模采样的检验。根据实验采样样本, 计算不同采样图案下每一种样本的产生概率, 再由总体采样样

本 $\{\vec{s}_i\}_{i=1}^{N_s}$ 计算贝叶斯检验得分。贝叶斯检验得分如下定义:

$$\Delta H = \frac{1}{N} \ln \prod_{i=1}^N \frac{P^{(0)}(\vec{s}_i) P^{(1)}(n)}{P^{(1)}(\vec{s}_i) P^{(0)}(n)} \quad (52)$$

其中 $P^{(i)}(\cdot)$ 是不同情形 (真实分布或经典模拟) 下样本的产生概率。当 $\Delta H > 0$ 时, 说明实验样本更容易从真实分布中采样得到而不是经典模拟。

7 总结与展望

高斯玻色采样仍在发展。实验的高斯玻色采样为更好地展示量子优越性, 增加采样装置的计算复杂度, 还有很多地方需要改进: 进一步扩大干涉仪的规模, 同时降低各种噪声, 提高干涉仪传输效率和光子的不可分辨性, 保证量子性质的光不会退化; 提高压缩参数对复杂度增加影响不大, 而是要增加有量子性质的光子的数量; 要增加干涉仪不同模式间的连通性, 使采样矩阵更接近 Haar 随机。此外, 近期有研究者提出一种对少数模式的光子产生非线性作用的高斯玻色采样方案可以提高计算的复杂度 [76], 目前没有被实验实现。随着响应计数探测器在实验上的运用, Kensingtonian 的计算和响应计数探测器的经典模拟方法也亟需进一步发展。

张量网络方法在高斯玻色采样模拟中的成功实现, 也为模拟采样提供了一个新的方向。目前并没有理论去解析描述光子损失、部分可分辨等噪声与计算复杂度的关系, 而矩阵乘积态的结点维数则提供了一个潜在的可能。同时, 用来描述晶格的 PEPS 和 PEPO 方法也有被应用于高维高斯玻色采样模拟的可能。

高斯玻色采样现有的验证方法均有缺陷, 一种能适用所有情况并能排除一切经典生成样本的验证方法仍没有实现。且目前的验证方法均是基于生成样本的, 借鉴其它量子优越性问题的验证方法也是一个可能的方向 [7]。此外, 也有研究者基于高斯玻色采样和图论问题的关联性提出一种在图论基础上的验证 [77]: 研究不同高斯态下的样本提取的特征向量所张成的空间, 然后训练一个分类器以识别最优超曲面以区分真实高斯玻色采样和模拟假设; 研究由每一类高斯态的特征向量生成的核的属性。

量子优越性系列问题的产生的起初目的是为了实现在量子相较于经典的超越, 并没考虑其应用前景。因此高斯玻色采样与其它量子优越性问题一样, 在应用方面相对较少且作用有限。其最主要的应用方向是与图论问题相结合, 例如用高斯玻色采样过程去判断图的相似性 [78, 79]。高斯玻色采样也可以用来辅助求解最大 hafnian 问题 [80]。对此问题的求解与量子变分算

法类似, 需要定义代价函数并给定梯度算法 [81]。近期中国科大的九章光子量子计算机解决了最大 hafnian 问题和稠密子图问题 [82]。此外, 还有一些在点过程 [83] 和化学振动谱上的应用 [84, 85]。为了更好地让高斯玻色采样有实际应用, 一种将相干态与压缩态混合输入干涉矩阵的实验被实现 [86]。虽然对压缩态在相空间上的位移并不能增加计算复杂度 [12], 但可以生成更多种情况的采样矩阵从而能应付更多的实际情况。

在经典计算机问世之后, 便有了这样一个问题: 所有可能的自然过程都能被经典图灵机高效计算吗? 扩展丘奇图灵论题认为是可以的, 而高斯玻色采样的成功实现则推翻了该论题, 这也展示了量子体系区别于经典体系的方面。当然, 量子计算优越性的本质也一直在被讨论 [87], 至今仍未有一个准确的答案。高斯玻色采样的实验实现也为未来的通用量子计算机的制作解决了许多技术上的困难, 同时研究者也会在研究的过程中看到更多要被解决的问题。

References

- [1] R. P. Feynman, "Simulating physics with computers," *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 21, pp. 467–488, Jun 1982.
- [2] P. Shor, "Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring," in *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 124–134, Nov 1994.
- [3] L. K. Grover, "A fast quantum mechanical algorithm for database search," in *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '96, (New York, NY, USA), p. 212–219, Association for Computing Machinery, 1996.
- [4] E. Martín-López, A. Laing, T. Lawson, R. Alvarez, X.-Q. Zhou, and J. L. O'Brien, "Experimental realization of shor's quantum factoring algorithm using qubit recycling," *Nature Photonics*, vol. 6, pp. 773–776, Nov 2012.
- [5] J. Preskill, "Quantum computing in the nisq era and beyond," *Quantum*, vol. 2, p. 79, 2018.
- [6] J. Preskill, "Quantum computing and the entanglement frontier," 2012.

- [7] A. W. Harrow and A. Montanaro, “Quantum computational supremacy,” *Nature*, vol. 549, pp. 203–209, Sep 2017.
- [8] S. Aaronson and A. Arkhipov, “The computational complexity of linear optics,” 2010.
- [9] A. P. Lund, A. Laing, S. Rahimi-Keshari, T. Rudolph, J. L. O’Brien, and T. C. Ralph, “Boson sampling from a gaussian state,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 113, p. 100502, Sep 2014.
- [10] J.-W. Pan, Z.-B. Chen, C.-Y. Lu, H. Weinfurter, A. Zeilinger, and M. Żukowski, “Multiphoton entanglement and interferometry,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 84, pp. 777–838, May 2012.
- [11] C. S. Hamilton, R. Kruse, L. Sansoni, S. Barkhofen, C. Silberhorn, and I. Jex, “Gaussian boson sampling,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 119, p. 170501, Oct 2017.
- [12] R. Kruse, C. S. Hamilton, L. Sansoni, S. Barkhofen, C. Silberhorn, and I. Jex, “Detailed study of gaussian boson sampling,” *Phys. Rev. A*, vol. 100, p. 032326, Sep 2019.
- [13] Y.-H. Deng, Y.-C. Gu, H.-L. Liu, S.-Q. Gong, H. Su, Z.-J. Zhang, H.-Y. Tang, M.-H. Jia, J.-M. Xu, M.-C. Chen, J. Qin, L.-C. Peng, J. Yan, Y. Hu, J. Huang, H. Li, Y. Li, Y. Chen, X. Jiang, L. Gan, G. Yang, L. You, L. Li, H.-S. Zhong, H. Wang, N.-L. Liu, J. J. Renema, C.-Y. Lu, and J.-W. Pan, “Gaussian boson sampling with pseudo-photon-number-resolving detectors and quantum computational advantage,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 131, p. 150601, Oct 2023.
- [14] G. K. Scott Aaronson, Greg Kuperberg, “Complexity zoo.” https://complexityzoo.net/Complexity_Zoo.
- [15] N. Quesada, J. M. Arrazola, and N. Killoran, “Gaussian boson sampling using threshold detectors,” *Phys. Rev. A*, vol. 98, p. 062322, Dec 2018.
- [16] G. Bressanini, H. Kwon, and M. S. Kim, “Gaussian boson sampling with click-counting detectors,” 2023.
- [17] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum mechanics, volume 3: fermions, bosons, photons, correlations, and entanglement*. John Wiley & Sons, 2019.
- [18] 郭光灿, 量子光学. 科学出版社, 2022.
- [19] M. O. Scully and M. S. Zubairy, “Quantum optics,” 1999.
- [20] P. Kok, W. J. Munro, K. Nemoto, T. C. Ralph, J. P. Dowling, and G. J. Milburn, “Linear optical quantum computing with photonic qubits,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 79, pp. 135–174, Jan 2007.
- [21] J. B. Brask, “Gaussian states and operations – a quick reference,” 2022.
- [22] C. Weedbrook, S. Pirandola, R. García-Patrón, N. J. Cerf, T. C. Ralph, J. H. Shapiro, and S. Lloyd, “Gaussian quantum information,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 84, pp. 621–669, May 2012.
- [23] A. Ferraro, S. Olivares, and M. G. Paris, “Gaussian states in continuous variable quantum information,” *arXiv preprint quant-ph/0503237*, 2005.
- [24] S. Olivares, “Quantum optics in the phase space: a tutorial on gaussian states,” *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 203, no. 1, pp. 3–24, 2012.
- [25] S. Rahimi-Keshari, T. C. Ralph, and C. M. Caves, “Sufficient conditions for efficient classical simulation of quantum optics,” *Phys. Rev. X*, vol. 6, p. 021039, Jun 2016.
- [26] A. Björklund, B. Gupt, and N. Quesada, “A faster hafnian formula for complex matrices and its benchmarking on a supercomputer,” *ACM J. Exp. Algorithmics*, vol. 24, jun 2019.
- [27] H.-S. Zhong, L.-C. Peng, Y. Li, Y. Hu, W. Li, J. Qin, D. Wu, W. Zhang, H. Li, L. Zhang, Z. Wang, L. You, X. Jiang, L. Li, N.-L. Liu, J. P. Dowling, C.-Y. Lu, and J.-W. Pan, “Experimental gaussian boson sampling,” *Science Bulletin*, vol. 64, p. 511–515, Apr. 2019.
- [28] S. Paesani, Y. Ding, R. Santagati, L. Chakhmakhchyan, C. Vigliar, K. Rottwitt, L. K. Oxenløwe, J. Wang, M. G. Thompson, and

- A. Laing, “Generation and sampling of quantum states of light in a silicon chip,” *Nature Physics*, vol. 15, no. 9, pp. 925–929, 2019.
- [29] H.-S. Zhong, H. Wang, Y.-H. Deng, M.-C. Chen, L.-C. Peng, Y.-H. Luo, J. Qin, D. Wu, X. Ding, Y. Hu, P. Hu, X.-Y. Yang, W.-J. Zhang, H. Li, Y. Li, X. Jiang, L. Gan, G. Yang, L. You, Z. Wang, L. Li, N.-L. Liu, C.-Y. Lu, and J.-W. Pan, “Quantum computational advantage using photons,” *Science*, vol. 370, no. 6523, pp. 1460–1463, 2020.
- [30] J. Martínez-Cifuentes, K. M. Fonseca-Romero, and N. Quesada, “Classical models may be a better explanation of the jiuzhang 1.0 gaussian boson sampler than its targeted squeezed light model,” *Quantum*, vol. 7, p. 1076, Aug. 2023.
- [31] H.-S. Zhong, Y.-H. Deng, J. Qin, H. Wang, M.-C. Chen, L.-C. Peng, Y.-H. Luo, D. Wu, S.-Q. Gong, H. Su, Y. Hu, P. Hu, X.-Y. Yang, W.-J. Zhang, H. Li, Y. Li, X. Jiang, L. Gan, G. Yang, L. You, Z. Wang, L. Li, N.-L. Liu, J. J. Renema, C.-Y. Lu, and J.-W. Pan, “Phase-programmable gaussian boson sampling using stimulated squeezed light,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 127, p. 180502, Oct 2021.
- [32] K. R. Motes, A. Gilchrist, J. P. Dowling, and P. P. Rohde, “Scalable boson sampling with time-bin encoding using a loop-based architecture,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 113, p. 120501, Sep 2014.
- [33] K. R. Motes, J. P. Dowling, A. Gilchrist, and P. P. Rohde, “Implementing boson sampling with time-bin encoding: Analysis of loss, mode mismatch, and time jitter,” *Phys. Rev. A*, vol. 92, p. 052319, Nov 2015.
- [34] R. García-Patrón, J. J. Renema, and V. Shchepochnikov, “Simulating boson sampling in lossy architectures,” *Quantum*, vol. 3, p. 169, 2019.
- [35] H. Qi, D. J. Brod, N. Quesada, and R. García-Patrón, “Regimes of classical simulability for noisy gaussian boson sampling,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 124, p. 100502, Mar 2020.
- [36] H. Qi, D. Cifuentes, K. Brádler, R. Israel, T. Kalajdzievski, and N. Quesada, “Efficient sampling from shallow gaussian quantum-optical circuits with local interactions,” *Phys. Rev. A*, vol. 105, p. 052412, May 2022.
- [37] A. Deshpande, A. Mehta, T. Vincent, N. Quesada, M. Hinsche, M. Ioannou, L. Madsen, J. Lavoie, H. Qi, J. Eisert, D. Hangleiter, B. Fefferman, and I. Dhand, “Quantum computational advantage via high-dimensional gaussian boson sampling,” *Science Advances*, vol. 8, no. 1, p. eabi7894, 2022.
- [38] L. S. Madsen, F. Laudenbach, M. F. Askarani, F. Rortais, T. Vincent, J. F. Bulmer, F. M. Miatto, L. Neuhaus, L. G. Helt, M. J. Collins, *et al.*, “Quantum computational advantage with a programmable photonic processor,” *Nature*, vol. 606, no. 7912, pp. 75–81, 2022.
- [39] J. M. Arrazola, V. Bergholm, K. Brádler, T. R. Bromley, M. J. Collins, I. Dhand, A. Fumagalli, T. Gerrits, A. Goussev, L. G. Helt, J. Hundal, T. Isacsson, R. B. Israel, J. Izaac, S. Jiang, R. Janik, N. Killoran, S. P. Kumar, J. Lavoie, A. E. Lita, D. H. Mahler, M. Menotti, B. Morrison, S. W. Nam, L. Neuhaus, H. Y. Qi, N. Quesada, A. Repeatingon, K. K. Sabapathy, M. Schuld, D. Su, J. Swinerton, A. Száva, K. Tan, P. Tan, V. D. Vaidya, Z. Vernon, Z. Zabaneh, and Y. Zhang, “Quantum circuits with many photons on a programmable nanophotonic chip,” *Nature*, vol. 591, pp. 54–60, Mar 2021.
- [40] B. Peropadre, J. Huh, and C. Sabín, “Dynamical casimir effect for gaussian boson sampling,” *Scientific Reports*, vol. 8, p. 3751, Feb 2018.
- [41] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.
- [42] D. Ceperley and B. Alder, “Quantum monte carlo,” *Science*, vol. 231, no. 4738, pp. 555–560, 1986.
- [43] R. Orús, “Tensor networks for complex quantum systems,” *Nature Reviews Physics*, vol. 1, no. 9, pp. 538–550, 2019.
- [44] J. Gray and S. Kourtis, “Hyper-optimized tensor network contraction,” *Quantum*, vol. 5, p. 410, 2021.

- [45] *SODA '18: Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, (USA), Society for Industrial and Applied Mathematics, 2018.
- [46] N. Quesada and J. M. Arrazola, “Exact simulation of gaussian boson sampling in polynomial space and exponential time,” *Phys. Rev. Res.*, vol. 2, p. 023005, Apr 2020.
- [47] N. Quesada, R. S. Chadwick, B. A. Bell, J. M. Arrazola, T. Vincent, H. Qi, and R. García-Patrón, “Quadratic speed-up for simulating gaussian boson sampling,” *PRX Quantum*, vol. 3, p. 010306, Jan 2022.
- [48] J. Williamson, “On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems,” *American Journal of Mathematics*, vol. 58, no. 1, pp. 141–163, 1936.
- [49] J. F. F. Bulmer, B. A. Bell, R. S. Chadwick, A. E. Jones, D. Moise, A. Rigazzi, J. Thorbecke, U.-U. Haus, T. V. Vaerenbergh, R. B. Patel, I. A. Walmesley, and A. Laing, “The boundary for quantum advantage in gaussian boson sampling,” *Science Advances*, vol. 8, no. 4, p. eabl9236, 2022.
- [50] H. J. Ryser, “Combinatorial mathematics, vol. 14 of carus mathematical monographs,” *Mathematical Association of America*, vol. 32, 1963.
- [51] O. F. Thomas, W. McCutcheon, and D. P. McCutcheon, “A general framework for multimode gaussian quantum optics and photo-detection: Application to hong-ou-mandel interference with filtered heralded single photon sources,” *APL Photonics*, vol. 6, no. 4, 2021.
- [52] A. Neville, C. Sparrow, R. Clifford, E. Johnston, P. M. Birchall, A. Montanaro, and A. Laing, “Classical boson sampling algorithms with superior performance to near-term experiments,” *Nature Physics*, vol. 13, no. 12, pp. 1153–1157, 2017.
- [53] N. Robertson and P. D. Seymour, “Graph minors. x. obstructions to tree-decomposition,” *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 52, no. 2, pp. 153–190, 1991.
- [54] C. Oh, Y. Lim, B. Fefferman, and L. Jiang, “Classical simulation of boson sampling based on graph structure,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 128, p. 190501, May 2022.
- [55] S. Rahimi-Keshari, T. C. Ralph, and C. M. Caves, “Sufficient conditions for efficient classical simulation of quantum optics,” *Phys. Rev. X*, vol. 6, p. 021039, Jun 2016.
- [56] P. Marian and T. A. Marian, “Squeezed states with thermal noise. i. photon-number statistics,” *Phys. Rev. A*, vol. 47, pp. 4474–4486, May 1993.
- [57] J. J. Renema, “Simulability of partially distinguishable superposition and gaussian boson sampling,” *Phys. Rev. A*, vol. 101, p. 063840, Jun 2020.
- [58] J. Shi and T. Byrnes, “Effect of partial distinguishability on quantum supremacy in gaussian boson sampling,” *npj Quantum Information*, vol. 8, no. 1, p. 54, 2022.
- [59] B. Villalonga, M. Y. Niu, L. Li, H. Neven, J. C. Platt, V. N. Smelyanskiy, and S. Boixo, “Efficient approximation of experimental gaussian boson sampling,” 2022.
- [60] R. Orús, “A practical introduction to tensor networks: Matrix product states and projected entangled pair states,” *Annals of physics*, vol. 349, pp. 117–158, 2014.
- [61] M. Liu, C. Oh, J. Liu, L. Jiang, and Y. Alexeev, “Simulating lossy gaussian boson sampling with matrix-product operators,” *Phys. Rev. A*, vol. 108, p. 052604, Nov 2023.
- [62] D. Cilluffo, N. Lorenzoni, and M. B. Plenio, “Simulating gaussian boson sampling with tensor networks in the heisenberg picture,” 2023.
- [63] C. Oh, M. Liu, Y. Alexeev, B. Fefferman, and L. Jiang, “Classical algorithm for simulating experimental gaussian boson sampling,” 2023.
- [64] N. Spagnolo, C. Vitelli, M. Bentivegna, D. J. Brod, A. Crespi, F. Flamini, S. Giacomini, G. Milani, R. Ramponi, P. Mataloni, R. Osellame, E. F. Galvão, and F. Sciarrino, “Experimental validation of photonic boson sampling,” *Nature Photonics*, vol. 8, pp. 615–620, Aug 2014.

- [65] S. Aaronson and A. Arkhipov, “Bosonsampling is far from uniform,” *Quantum Info. Comput.*, vol. 14, p. 1383–1423, nov 2014.
- [66] M. C. Tichy, “Sampling of partially distinguishable bosons and the relation to the multidimensional permanent,” *Phys. Rev. A*, vol. 91, p. 022316, Feb 2015.
- [67] I. Agresti, N. Viggianiello, F. Flamini, N. Spagnolo, A. Crespi, R. Osellame, N. Wiebe, and F. Sciarrino, “Pattern recognition techniques for boson sampling validation,” *Phys. Rev. X*, vol. 9, p. 011013, Jan 2019.
- [68] G. Bressanini, B. Seron, L. Novo, N. J. Cerf, and M. Kim, “Gaussian boson sampling validation via detector binning,” *arXiv preprint arXiv:2310.18113*, 2023.
- [69] P. D. Drummond, B. Opanchuk, A. Delliios, and M. D. Reid, “Simulating complex networks in phase space: Gaussian boson sampling,” *Phys. Rev. A*, vol. 105, p. 012427, Jan 2022.
- [70] A. S. Delliios, M. D. Reid, and P. D. Drummond, “Simulating gaussian boson sampling quantum computers,” *AAPPS Bulletin*, vol. 33, p. 31, Nov 2023.
- [71] P. D. Drummond and C. W. Gardiner, “Generalised p-representations in quantum optics,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 13, p. 2353, jul 1980.
- [72] D. S. Phillips, M. Walschaers, J. J. Renema, I. A. Walmsley, N. Treps, and J. Sperling, “Benchmarking of gaussian boson sampling using two-point correlators,” *Phys. Rev. A*, vol. 99, p. 023836, Feb 2019.
- [73] S. Boixo, S. V. Isakov, V. N. Smelyanskiy, R. Babush, N. Ding, Z. Jiang, M. J. Bremner, J. M. Martinis, and H. Neven, “Characterizing quantum supremacy in near-term devices,” *Nature Physics*, vol. 14, no. 6, pp. 595–600, 2018.
- [74] C. Oh, L. Jiang, and B. Fefferman, “Spoofing cross-entropy measure in boson sampling,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 131, p. 010401, Jul 2023.
- [75] M. Bentivegna, N. Spagnolo, C. Vitelli, D. J. Brod, A. Crespi, F. Flamini, R. Ramponi, P. Mataloni, R. Osellame, E. F. Galvão, *et al.*, “Bayesian approach to boson sampling validation,” *International Journal of Quantum Information*, vol. 12, no. 07n08, p. 1560028, 2015.
- [76] N. Spagnolo, D. J. Brod, E. F. Galvão, and F. Sciarrino, “Non-linear boson sampling,” *npj Quantum Information*, vol. 9, p. 3, Jan 2023.
- [77] T. Giordani, V. Mannucci, N. Spagnolo, M. Fumero, A. Rampini, E. Rodolà, and F. Sciarrino, “Certification of gaussian boson sampling via graph theory,” *arXiv preprint arXiv:2202.07711*, 2022.
- [78] K. Brádler, S. Friedland, J. Izaac, N. Killoran, and D. Su, “Graph isomorphism and gaussian boson sampling,” *Special Matrices*, vol. 9, no. 1, pp. 166–196, 2021.
- [79] M. Schuld, K. Brádler, R. Israel, D. Su, and B. Gupt, “Measuring the similarity of graphs with a gaussian boson sampler,” *Phys. Rev. A*, vol. 101, p. 032314, Mar 2020.
- [80] J. M. Arrazola, T. R. Bromley, and P. Rebentrost, “Quantum approximate optimization with gaussian boson sampling,” *Phys. Rev. A*, vol. 98, p. 012322, Jul 2018.
- [81] L. Banchi, N. Quesada, and J. M. Arrazola, “Training gaussian boson sampling distributions,” *Phys. Rev. A*, vol. 102, p. 012417, Jul 2020.
- [82] Y.-H. Deng, S.-Q. Gong, Y.-C. Gu, Z.-J. Zhang, H.-L. Liu, H. Su, H.-Y. Tang, J.-M. Xu, M.-H. Jia, M.-C. Chen, H.-S. Zhong, H. Wang, J. Yan, Y. Hu, J. Huang, W.-J. Zhang, H. Li, X. Jiang, L. You, Z. Wang, L. Li, N.-L. Liu, C.-Y. Lu, and J.-W. Pan, “Solving graph problems using gaussian boson sampling,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 130, p. 190601, May 2023.
- [83] S. Jahangiri, J. M. Arrazola, N. Quesada, and N. Killoran, “Point processes with gaussian boson sampling,” *Phys. Rev. E*, vol. 101, p. 022134, Feb 2020.

- [84] J. Huh, G. G. Guerreschi, B. Peropadre, J. R. McClean, and A. Aspuru-Guzik, “Boson sampling for molecular vibronic spectra,” *Nature Photonics*, vol. 9, pp. 615–620, Sep 2015.
- [85] L. Banchi, M. Fingerhuth, T. Babej, C. Ing, and J. M. Arrazola, “Molecular docking with gaussian boson sampling,” *Science Advances*, vol. 6, no. 23, p. eaax1950, 2020.
- [86] G. Thekkadath, S. Sempere-Llagostera, B. Bell, R. Patel, M. Kim, and I. Walmsley, “Experimental demonstration of gaussian boson sampling with displacement,” *PRX Quantum*, vol. 3, p. 020336, May 2022.
- [87] A. Khrennikov, “Roots of quantum computing supremacy: superposition, entanglement, or complementarity?,” *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 230, pp. 1053–1057, Jun 2021.