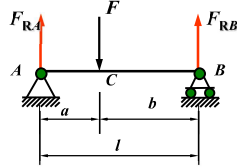


例题7 图示的简支梁在C点处受集中荷载 F 作用，试作此梁的剪力图和弯矩图。

解：(1) 求梁的支反力

$$F_{RA} = \frac{Fb}{l} \quad F_{RB} = \frac{Fa}{l}$$



因为AC段和CB段的内力方程不同，所以必须分段列剪力方程和弯矩方程。

将坐标原点取在梁的左端

将坐标原点取在梁的左端

AC段

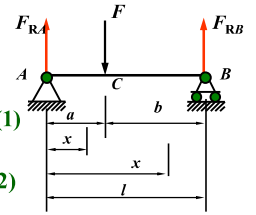
$$F_S(x) = \frac{Fb}{l} \quad (0 < x < a) \quad (1)$$

$$M(x) = \frac{Fb}{l}x \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2)$$

CB段

$$F_S(x) = \frac{Fb}{l} - F = -\frac{F(l-b)}{l} = -\frac{Fa}{l} \quad (a < x < l) \quad (3)$$

$$M(x) = \frac{Fb}{l}x - F(x-a) = \frac{Fa}{l}(l-x) \quad (a \leq x \leq l) \quad (4)$$



$$F_S(x) = \frac{Fb}{l} \quad (0 < x < a) \quad (1)$$

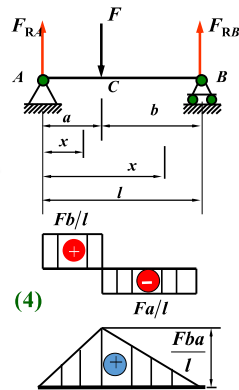
$$F_S(x) = -\frac{Fa}{l} \quad (a < x < l) \quad (3)$$

由(1), (3)两式可知, AC、CB两段梁的剪力图各是一条平行于 x 轴的直线。

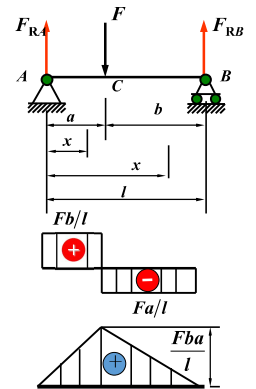
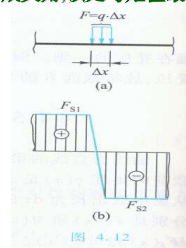
$$M(x) = \frac{Fb}{l}x \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2)$$

$$M(x) = \frac{Fa}{l}(l-x) \quad (a \leq x \leq l) \quad (4)$$

由(2), (4)式可知, AC、CB两段梁的弯矩图各是一条斜直线。



在集中荷载作用处的左、右两侧截面上剪力值(图)有突变, 突变值等于集中荷载 F 。弯矩图形成尖角, 该处弯矩值最大。



例题8 图示的简支梁在C点处受矩为 M 的集中力偶作用。试作此梁的的剪力图和弯矩图。

解：求梁的支反力

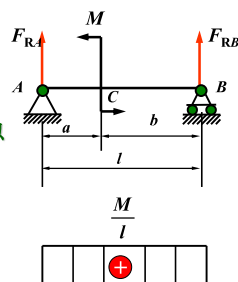
$$F_{RA} = \frac{M}{l} \quad F_{RB} = -\frac{M}{l}$$

将坐标原点取在梁的左端。

因为梁上没有横向外力, 所以全梁只有一个剪力方程

$$F_S(x) = \frac{M}{l} \quad (0 < x < l) \quad (1)$$

由(1)式画出整个梁的剪力图是一条平行于 x 轴的直线。



AC段和BC段的弯矩方程不同

AC段

$$M(x) = \frac{M}{l}x \quad (0 \leq x < a)$$

CB段

$$M(x) = \frac{M}{l}x - M = -\frac{M}{l}(l-x) \quad (a < x \leq l)$$

AC、CB 两梁段的弯矩图各是一条倾斜直线。

AC段

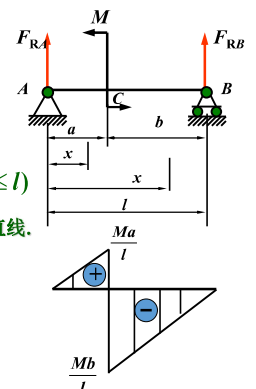
$$x=0, \quad M=0$$

$$x=a, \quad M_{C\pm} = \frac{Ma}{l}$$

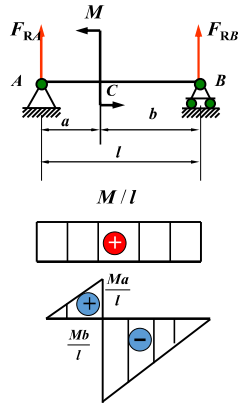
CB段

$$x=a, \quad M_{C\pm} = -\frac{Mb}{l}$$

$$x=l, \quad M=0$$



梁上集中力偶作用处左、右两侧横截面上的弯矩值(图)发生突变,其突变值等于集中力偶矩的数值。此外,此处剪力图没有变化。



小结

1. 取梁的左端点为坐标原点, x 轴向右为正; 剪力图向上为正; 弯矩图向上为正。
2. 以集中力、集中力偶作用处、分布荷载开始或结束处, 及支座截面处为界点将梁分段, 分段写出剪力方程和弯矩方程, 然后绘出剪力图和弯矩图。
3. 梁上集中力作用处左、右两侧横截面上, 剪力(图)有突变, 突变值等于集中力的数值。在此处弯矩图则形成一个尖角。
4. 梁上集中力偶作用处左、右两侧横截面上的弯矩(图)有突变, 其突变值等于集中力偶矩的数值。但在此处剪力图没有变化。
5. 梁上的 $F_{S\max}$ 发生在全梁或各梁段的边界截面处; 梁上的 M_{\max} 发生在全梁或各梁段的边界截面, 或 $F_S = 0$ 的截面处。

此结果说明, 当移动荷载 F 在简支梁的跨中时, 梁的最大弯矩为极大。

将 $x = \frac{l}{2}$ 代入式

$$M_C = F_{R4}x = \frac{F(l-x)}{l}x$$

得最大弯矩值

$$M_{\max} = \frac{1}{4}Fl$$

例 4.3 在均布荷载作用下的悬臂梁如图 4.10a 所示。试作梁的剪力图和弯矩图。

解: 悬臂梁的固定端约束了梁截面的移动和转动, 故有相应方向的约束力 F_{RA} 和反作用力偶 M_A 。由平衡方程 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum M_x = 0$, 求得

$$F_{RA} = ql, \quad M_A = \frac{ql^2}{2}$$

选取坐标系如图 4.10b 所示。在距原点为 x 的横截面的左侧, 有约束力 F_{RA} 、弯矩 M_A 和梁长为 x 的均布荷载, 但在截面的右侧只有均布荷载。所以, 宜用截面右侧的外力来计算剪力和弯矩。这样, 便不必首先求出左端的约束力, 而直接就能算出 F_S 和 M 为

$$F_S(x) = q(l-x) \quad (e)$$

$$M(x) = -q(l-x) \frac{(l-x)}{2} = -\frac{q(l-x)^2}{2} \quad (f)$$

式 (e) 表明, 剪力图是一斜直线, 只要确定两点就可定出这一斜直线, 如图 4.10b 所示; 式 (f) 表明, 弯矩图是一抛物线, 要确定曲线上的几点, 然后用光滑曲线画出。例如

$$x=0, \quad M(0) = -\frac{1}{2}ql^2; \quad x=\frac{l}{4}, \quad M\left(\frac{l}{4}\right) = -\frac{9}{32}ql^2$$

$$x=\frac{l}{2}, \quad M\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{1}{8}ql^2; \quad x=l, \quad M(l) = 0$$

最后绘出弯矩图如图 4.10c 所示。

例题 9 一简支梁受移动荷载 F 的作用如图 4.11a 所示。试求梁的最大弯矩为极大时荷载 F 的位置。

解: 先设 F 在距左支座 A 为 x 的任意位置, 求此情况下梁的最大弯矩为极大。荷载在任意位置时, 支反力为

$$F_{R4} = \frac{F(l-x)}{l}, \quad F_{RB} = \frac{Fx}{l}$$

当荷载 F 在距左支座为 x 的任意位置 C 时, 梁的弯矩为

$$M_C = F_{R4}x = \frac{F(l-x)}{l}x$$

令 $\frac{dM_C}{dx} = 0$ $\frac{F}{l}(l-2x) = 0$ $x = \frac{l}{2}$

例 4.4 在图 4.11a 中, 伸臂梁上均布荷载的集度为 $q = 3 \text{ kN/m}$, 集中力偶矩 $M_c = 3 \text{ kN}\cdot\text{m}$, 列出剪力方程和弯矩方程, 并绘出剪力图和弯矩图。

解: 由梁的平衡方程, 求出支座约束力为

$$F_{RA} = 14.5 \text{ kN}, \quad F_{RB} = 3.5 \text{ kN}$$

在梁的 CA、AD、DB 这三段内, 剪力和弯矩都不能用同一个方程式来表示, 所以应分三段考虑。对每一段都可仿照前面讲过的计算方法, 列出剪力方程和弯矩方程, 方程中 x 以 m 为单位, $F_S(x)$ 以 kN 为单位, $M(x)$ 以 $kN\cdot m$ 为单位。在 CA 段内:

$$F_S(x) = -qx = -3x \quad (0 \leq x < 2) \quad (g)$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2 = -\frac{3}{2}x^2 \quad (0 \leq x < 2) \quad (h)$$

在 AD 段内:

$$F_S(x) = F_{RA} - qx = 14.5 - 3x \quad (2 \text{ m} < x < 6 \text{ m}) \quad (i)$$

$$M(x) = F_{RA}(x-2) - \frac{1}{2}qx^2 = 14.5(x-2) - \frac{3}{2}x^2 \quad (2 \text{ m} < x < 6 \text{ m}) \quad (j)$$

$M(x)$ 是 x 的二次函数, 根据极值条件 $\frac{dM(x)}{dx} = 0$, 得

$$14.5 - 3x = 0$$

由此解出 $x = 4.83 \text{ m}$, 亦即在这一截面上, 弯矩为极值。代入式 (j) 得 AD 段内的最大弯矩为

$$M = 6.04 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

当截面取在 DB 段内时, 用截面右侧的外力计算剪力和弯矩比较方便, 结果是

$$F_S(x) = -F_{RB} = -3.5 \text{ kN} \quad (6 \text{ m} < x < 8 \text{ m}) \quad (k)$$

$$M(x) = -F_{RB}(8-x) = 3.5(8-x) \quad (6 \text{ m} < x < 8 \text{ m}) \quad (l)$$

根据剪力方程和弯矩方程, 分段作剪力图和弯矩图(图 4.11b 和 c)。从图中看出, 沿梁的全长来看, 最大剪力为 $F_{S\max} = 8.5 \text{ kN}$, 最大弯矩为 $M_{\max} = 7 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 。还可看出, 在集中力作用截面的弯矩, 弯矩有一尖角突变, 尖角数值等于集中力。在集中力偶作用截面的弯矩, 弯矩有一突然变化, 变化的数值等于集中力偶矩。

§ 4-4 剪力、弯矩与分布荷载集度间的关系 (Relationships between load, shear force, and bending moment)

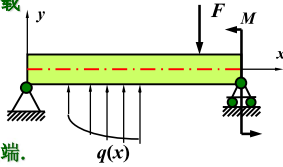
一、弯矩、剪力与分布荷载集度间的微分关系 (Differential relationships between load, shear force, and bending moment)

设梁上作用有任意分布荷载

其集度 $q = q(x)$

规定 $q(x)$ 向上为正。

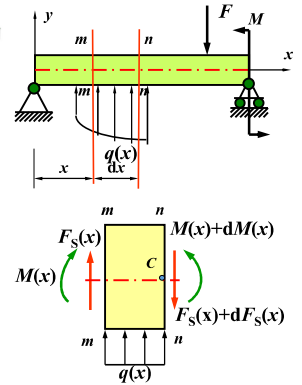
将 x 轴的坐标原点取在梁的左端。



假想地用坐标为 x 和 $x+dx$ 的两横截面 $m-m$ 和 $n-n$ 从梁中取出 dx 微段。

$m-m$ 截面上内力为 $F_S(x), M(x)$

$x+dx$ 截面处 则分别为 $F_S(x)+dF_S(x), M(x)+dM(x)$ 。
由于 dx 很小, 略去 $q(x)$ 沿 dx 的变化。



写出微段梁的平衡方程

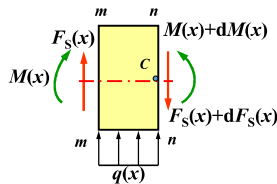
$$\sum F_x = 0 \quad F_S(x) - [F_S(x) + dF_S(x)] + q(x)dx = 0$$

$$\sum M_C = 0 \quad \text{得到} \quad \frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$$

$$[M(x) + dM(x)] - M(x) - F_S(x)dx - q(x)dx \frac{dx}{2} = 0$$

略去二阶无穷小量即得

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$$



$$\frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$$

公式的几何意义

- (1) 剪力图上某点处的切线斜率等于该点处荷载集度的大小;
- (2) 弯矩图上某点处的切线斜率等于该点处剪力的大小;
- (3) 根据 $q(x) > 0$ 或 $q(x) < 0$ 来判断弯矩图的凹凸性。

二、分布荷载集度、剪力和弯矩之间的积分关系 (Integral relationships between load, shear force, and bending moment)

$$\frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$$

若在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处两个横截面无集中力则

$$\int_{x_1}^{x_2} dF_S(x) = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx$$

$$F_S(x_2) - F_S(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx$$

$$F_S(x_2) - F_S(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx$$

$$F_S(x_2) - F_S(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx$$

式中, $F_S(x_1)$ 、 $F_S(x_2)$ 分别为在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处两个横截面上的剪力。

等号右边积分的几何意义是 x_1, x_2 两横截面间分布荷载图的面积。

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$$

若横截面 $x=x_1, x=x_2$ 间无集中力偶作用则得

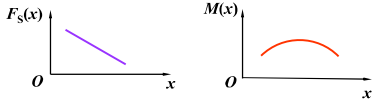
$$M(x_2) - M(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} F_S(x)dx$$

式中 $M(x_1)$ 、 $M(x_2)$ 分别为在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处两个横截面上的弯矩。

等号右边积分的几何意义是 x_1, x_2 两个横截面间剪力图的面积。

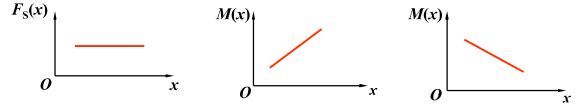
三、 $q(x)$ 、 $F_S(x)$ 图、 $M(x)$ 图三者间的关系
(Relationships between load, shear force, and bending moment diagrams)

1. 梁上有向下的均布荷载, 即 $q(x) < 0$ $\frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$
 $F_S(x)$ 图为一向右下方倾斜的直线。
 $M(x)$ 图为一向上凸的二次抛物线。



$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$$

2. 梁上无荷载区段, $q(x) = 0$ $\frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$
 剪力图为一条水平直线。
 弯矩图为一斜直线。
 当 $F_S(x) > 0$ 时, 向右上方倾斜。
 当 $F_S(x) < 0$ 时, 向右下方倾斜。



3. 在集中力作用处剪力图有突变, 其突变值等于集中力的值。弯矩图有转折。
 $\frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$
 4. 在集中力偶作用处弯矩图有突变, 其突变值等于集中力偶的值, 但剪力图无变化。
 $\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$
 5. 最大剪力可能发生在集中力所在截面的一侧; 或分布荷载发生变化的区段上。
 $\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$
 梁上最大弯矩 M_{max} 可能发生在 $F_S(x) = 0$ 的截面上; 或发生在集中力所在的截面上; 或集中力偶作用处的一侧。
 $F_S(x_2) - F_S(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx$
 $M(x_2) - M(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} F_S(x) dx$

表 4-1 在几种荷载下剪力图与弯矩图的特征

一段梁上的外力情况	向下的均布荷载 $q < 0$	无荷载	集中力 F	集中力偶 M
剪力图的特征	向下倾斜的直线	水平直线	在C处有突变	在C处无变化
弯矩图的特征	上凸的二次抛物线	一般斜直线 或	在C处有转折	在C处有突变
M_{max} 所在截面的可能位置	在 $F_S=0$ 的截面		在剪力突变的截面	在紧靠C的某一侧截面

荷载	$q=0$	$q=c > 0$	$q=c < 0$	P	M_0
Q图	⊕ 或 ⊖	↗	↘	↘	—
M图	↗ 或 ↘	抛物线	抛物线	P处有尖角	M_0

例 4.6 外伸梁及其所受荷载如图 4.15a 所示, 试作梁的剪力图和弯矩图。

解: 由静力平衡方程, 求得支反力 $F_A = 3 \text{ kN}$, $F_B = 7 \text{ kN}$

按照以前作剪力图和弯矩图的方法, 应分别列出 F_S 和 M 的方程式, 然后依照方程式作图。现在利用本书所得推论, 可以不列方程式直接作图。

在支反力 F_A 的右侧截面上, 剪力为 3 kN 。截面 A 到 C 之间的荷载为均布荷载, 剪力图为斜直线。算出截面 C 上的剪力为 $(3 - 2 \times 4) \text{ kN} = -5 \text{ kN}$, 即可确定这条斜直线(图 4.15b)。截面 C 和 B 之间梁上无荷载, 剪力图为水平线。截面 B 上有一集中力 F_B , 从 B 的左侧到 B 的右侧, 剪力图发生突然变化, 变化的数值即等于 F_B , 故 F_S 右侧截面上的剪力为 $(-5 + 7) \text{ kN} = 2 \text{ kN}$ 。截面 B 和 D 之间无荷载, 剪力图又为水平线。

截面 A 上的弯矩 $M_A = 0$, 从 A 到 C 梁上为均布荷载, 弯矩图为抛物线。在这一段内, 截面 E 上剪力等于零, 弯矩为极值。E 到左侧的距离为 $\frac{3 \text{ kN}}{2 \text{ kN/m}} = 1.5 \text{ m}$, 求出截面 E 上的极值弯矩为

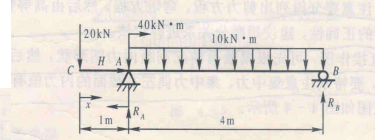
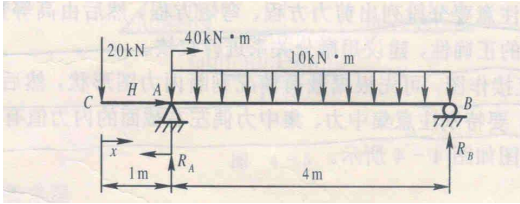
$$M_E = (3 \text{ kN})(1.5 \text{ m}) - \frac{1}{2}(2 \text{ kN/m})(1.5 \text{ m})^2 = 2.25 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

求出集中力偶矩 M_C 左侧截面上的弯矩为 $M_{C左} = -4 \text{ kN}\cdot\text{m}$, 由 M_A 、 M_E 和 $M_{C左}$, 便可连成 A 到 C 间的抛物线(图 4.15c)。截面 C 上有一集中力偶矩 $M_C = 10 \text{ kN}\cdot\text{m}$, 从 C 的左侧到 C 的右侧, 弯矩图有一突然变化, 变化的数值即等于 M_C 。所以在 M_C 的右侧截面上, $M_{C右} = (-4 + 10) \text{ kN}\cdot\text{m} = 6 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 。截面 C 与 B 间梁上无荷载, 弯矩图为斜直线。算出截面 B 上 $M_B = -4 \text{ kN}\cdot\text{m}$, 于是就确定了这条斜直线。B 到 D 之间弯矩图也为斜直线, 因 $M_D = 0$, 斜直线是容易画出的。在截面 B 上, 剪力突然变化, 故弯矩图的斜率也突然变化, 即在集中力作用的截面上, 弯矩图将出现一尖角。

建议读者用公式(4.4)和公式(4.5)校验所得结果。

《辅导》p49例4-1

例 4-1 作图 4-4 所示梁的剪力图、弯矩图，并求 $|Q|_{\max}$ 、 $|M|_{\max}$ 值。



解：(1) 求支反力。

由静力平衡方程

$$\sum X = 0 \quad H = 0$$

$$\sum m_A = 0 \quad R_B \times 4 + 20 \times 1 - 40 - \frac{1}{2} \times 10 \times 4^2 = 0$$

$$\sum m_B = 0 \quad 20 \times 5 + \frac{1}{2} \times 10 \times 4^2 - 40 - R_A \times 4 = 0$$

得支反力 $H=0, R_A=35 \text{ kN}, R_B=25 \text{ kN}$

若支反力计算错误，将导致梁的强度、刚度计算错误。所以建议再用一个静力平衡方程作校核。设用投影平衡方程：

$$\sum Y = 0$$

$$R_A + R_B - 20 - 10 \times 4 = 0$$

将 $R_A=35 \text{ kN}, R_B=25 \text{ kN}$ 代入上式，方程自动满足。

在弯曲问题中外力垂直于梁轴线。因此，对直梁而言， H 恒为 0，即 $\sum X=0$ 恒满足。这样对直梁将不再列求解水平支反力 H 的平衡方程，并且在受力图中也不画 H 反力。

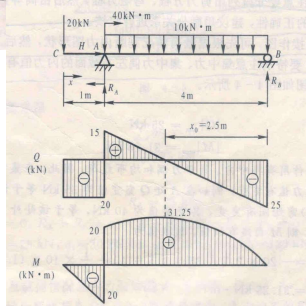
(2) 作内力图。

可由剪力方程、弯矩方程或由载荷集度、剪力、弯矩之间的微分关系作图。若用方程作图，注意分段列出剪力方程、弯矩方程，然后由高等数学知识根据方程作图。为保证内力图的正确性，建议用微分关系进行校核。

若用微分关系直接作图，可先根据载荷情况判断内力图形状，然后求各控制点（一般是取区间点）的内力值。要特别注意集中力、集中力偶左右截面的内力值有突变。

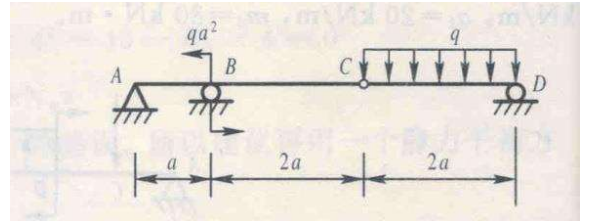
画剪力、弯矩图如图 4-4 所示。

由图中可知
 $|Q|_{\max} = 25 \text{ kN}$
 $|M|_{\max} = 31.25 \text{ kN}$



《辅导》p52例4-3

例 4-3 图 4-6 所示梁上受到集中力偶、均布载荷的作用，C 处为中间铰链。试作梁的剪力图、弯矩图。



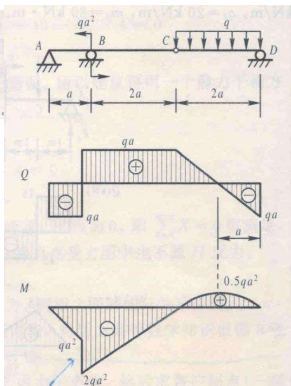
由平衡方程可求得

$$R_A = -qa \quad (\downarrow)$$

$$R_B = 2qa \quad (\uparrow)$$

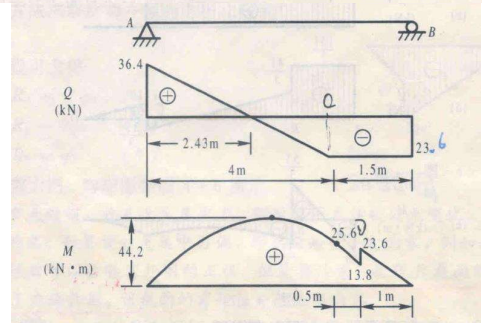
$$R_C = qa \quad (\uparrow)$$

画出梁的剪力图、弯矩图如图 4-6 所示。

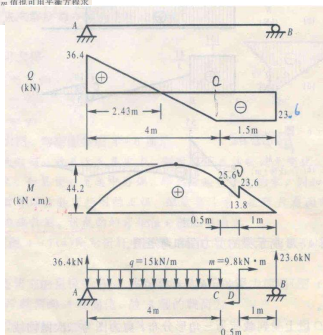


《辅导》p54例4-6

例 4-6 已知简支梁的剪力图 and 弯矩图 (图 4-9)，试反求梁上的载荷。

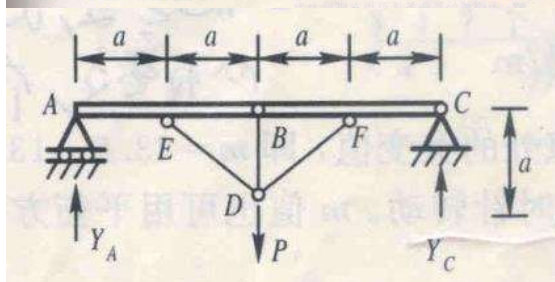


解：由剪力图可知，梁A、B端的反力 $R_A=36.4\text{ kN}(\uparrow)$ ， $R_B=23.6\text{ kN}(\uparrow)$ ；AC段有均布荷载，设集度为 q ，其数值等于该段Q图的斜率，即 $q = \frac{23.6 + 36.4}{4} = 15\text{ kN/m}$ （+）；BC段可知，梁D处作用有集中力偶 m ，其数值等于该处的突变值，即 $m = 23.6 - 13.8 = 9.8\text{ kN}\cdot\text{m}$ ，转向因D右侧处 M 值增大，所以 m 为顺时针转动， m 值可用平面法求取，荷载图如图4-9。

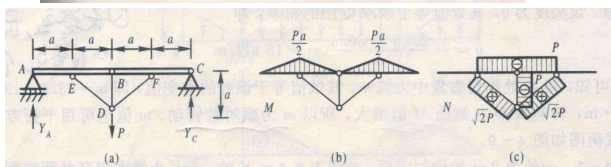


《辅导》p55例4-8

例4-8 试作出图4-11(a)所示结构各部分的内力图(弯矩图、轴力图)，并注意各截面上的内力值。
解：由结构的对称性，支反力



解：由结构的对称性，支反力
 $Y_A = Y_C = \frac{P}{2}$
杆件BD、ED和FD均为二力杆。研究左半部分对AB梁的B点取矩，得
 $\frac{P}{2} \times 2a - N_{DE} \sin 45^\circ \times a = 0$
 $N_{DE} = \sqrt{2}P$ (拉力)
同理点D的平衡条件得
 $\sum X = 0 \quad N_{DF} = N_{DE} = \sqrt{2}P$ (拉力)
 $\sum Y = 0 \quad N_{DB} = P - 2N_{DE} \cos 45^\circ = -P$ (压力)

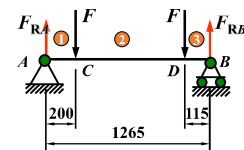


例题10 一简支梁受两个力 F 作用,如图所示.已知 $F=25.3\text{ kN}$,有关尺寸如图所示.试用本节所述关系作剪力图和弯矩图。

解：(1) 求梁的支反力

$$F_{RA} = 23.6\text{ kN} \quad F_{RB} = 27\text{ kN}$$

将梁分为AC、CD、DB三段，每一段均属无载荷区段。



(2) 剪力图

每段梁的剪力图均为水平直线

$$AC\text{段} \quad F_{S4右} = F_{RA} = 23.6\text{ kN}$$

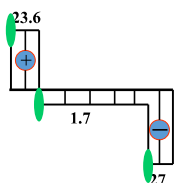
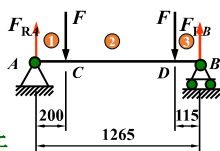
$$CD\text{段} \quad F_{S3右} = F_{RA} - F = -1.7\text{ kN}$$

$$DB\text{段} \quad F_{S2右} = -F_{RB} = -27\text{ kN}$$

$$F_{S1右} = 0\text{ kN}$$

最大剪力发生在DB段中的任一横截面上

$$F_{S\max} = 27\text{ kN}$$



(3) 弯矩图

每段梁的弯矩图均为斜直线，且梁上无集中力偶。

$$M_A = 0$$

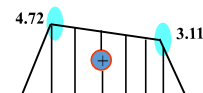
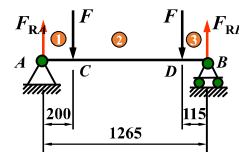
$$M_C = F_{RA} \times 0.2 = 4.72\text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_D = F_{RB} \times 0.115 = 3.11\text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_B = 0$$

最大弯矩发生在C截面

$$M_{\max} = 4.72\text{ kN}\cdot\text{m}$$



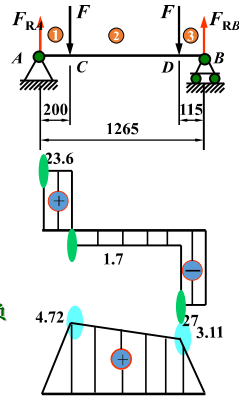
(4) 对图形进行校核

在集中力作用的C、D 两点剪力发生突变,突变值 $F=25.3\text{kN}$,而弯矩图有尖角。

在AC段剪力为正值,弯矩图为向上倾斜的直线。

在CD和DB段,剪力为负值,弯矩图为向下倾斜的直线。

最大弯矩发生在剪力改变正、负号的C截面处,说明剪力图和弯矩图是正确的。



例题11 一简支梁受均布荷载作用,其集度 $q=100\text{kN/m}$,如图所示,试用简易法作此梁的剪力图和弯矩图。

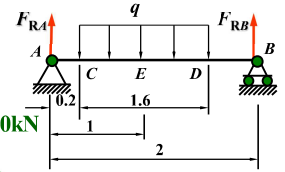
解:

(1) 计算梁的支反力

$$F_{RA} = F_{RB} = 0.5 \times 100 \times 1.6 = 80\text{kN}$$

将梁分为AC、CD、DB三段。

AC和DB上无荷载,CD段有向下的均布荷载。



(2) 剪力图

AC段 水平直线

$$F_{SA右} = F_{RA} = 80\text{kN}$$

CD段 向右下方的斜直线

$$F_{SC} = F_{RA} = 80\text{kN}$$

$$F_{SD} = -F_{RB} = -80\text{kN}$$

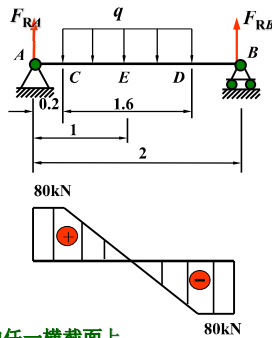
DB段 水平直线

$$F_{SB左} = -F_{RB} = -80\text{kN}$$

$$F_{SB右} = 0\text{kN}$$

最大剪力发生在AC和DB段的任一横截面上。

$$F_{Smax} = 80\text{kN}$$



例题12 作梁的内力图。

解: (1) 支座反力为

$$F_{RA} = 7\text{kN}$$

$$F_{RB} = 5\text{kN}$$

将梁分为AC、CD、

DB、BE四段。

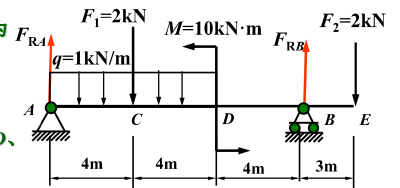
(2) 剪力图

AC段 向下斜的直线(∩)

$$F_{SA右} = F_{RA} = 7\text{kN} \quad F_{SC左} = F_{RA} - 4q = 3\text{kN}$$

CD段 向下斜的直线(∩)

$$F_{SC右} = F_{RA} - 4q - F_1 = 1\text{kN} \quad F_{SD} = F_2 - F_{RB} = -3\text{kN}$$



AC段 向下斜的直线(∩)

$$F_{SA右} = 7\text{kN}$$

$$F_{SC左} = 3\text{kN}$$

CD段 向下斜的直线(∩)

$$F_{SC右} = 1\text{kN}$$

$$F_{SD} = -3\text{kN}$$

DB段 水平直线(-)

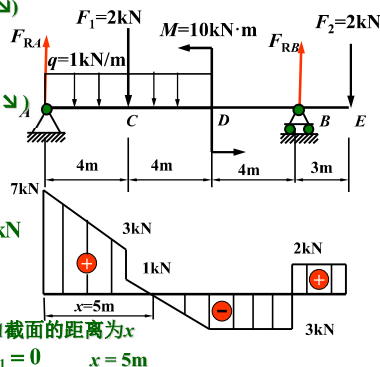
$$F_S = F_2 - F_{RB} = -3\text{kN}$$

EB段 水平直线(-)

$$F_{SB右} = F_2 = 2\text{kN}$$

F点剪力为零,令其距A截面的距离为x

$$F_{Sc} = F_{RA} - qx - F_1 = 0 \quad x = 5\text{m}$$



(3) 弯矩图

AC段 $M_A = 0$

$$M_C = 4F_{RA} - \frac{q}{2}4^2 = 20$$

CD段

$$M_{D左} = -7F_2 + 4F_{RB} + M = 16$$

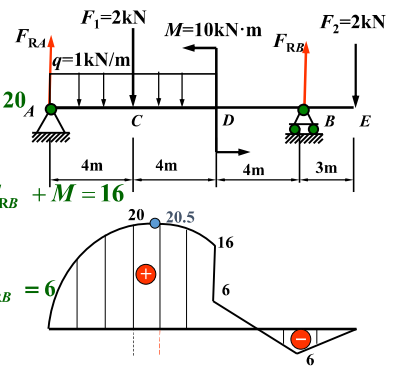
$$M_{max} = M_F = 20.5$$

DB段

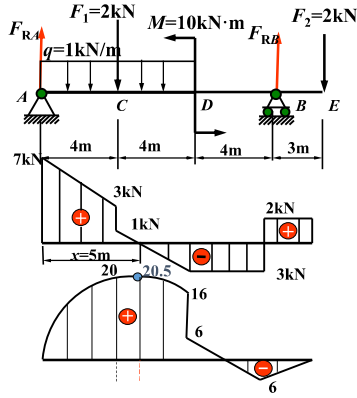
$$M_{D右} = -7F_2 + 4F_{RB} = 6$$

$$M_B = -3F_2 = -6$$

$$BE段 \quad M_E = 0$$



(4) 校核



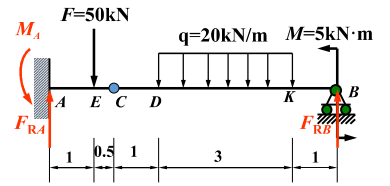
例题13 用简易法作组合梁的剪力图和弯矩图。

解： 支座反力为

$$F_{RA} = 81 \text{ kN}$$

$$F_{RB} = 29 \text{ kN}$$

$$M_A = 96.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



将梁分为 AE, EC, CD, DK, KB 五段。

(1) 剪力图

AE段 水平直线

$$F_{S4右} = F_{SE左} = F_{RA} = 81 \text{ kN}$$

ED段 水平直线

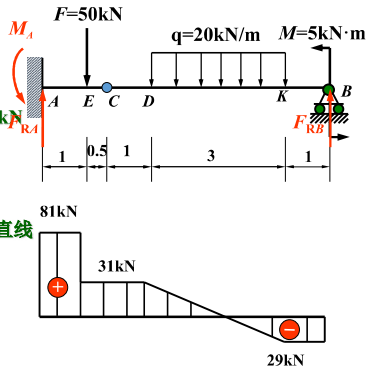
$$F_{SE右} = F_{RA} - F = 31 \text{ kN}$$

DK段 向右下方倾斜的直线

$$F_{SK} = -F_{RB} = -29 \text{ kN}$$

KB段 水平直线

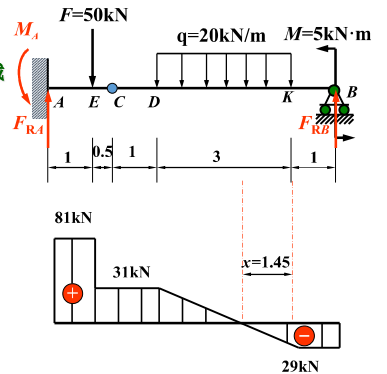
$$F_{SB左} = -F_{RB} = -29 \text{ kN}$$



设距K截面为 x 的截面上剪力 $F_S = 0$ 。即

$$F_{Sx} = -F_{RB} + qx = 0$$

$$x = \frac{F_{RB}}{q} = 1.45 \text{ m}$$



(2) 弯矩图

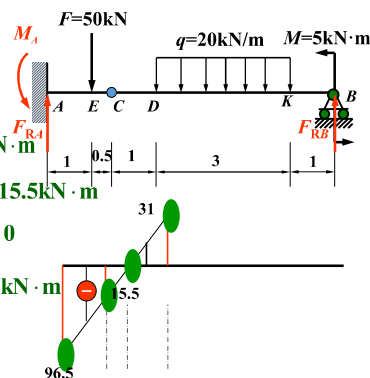
AE, EC, CD 梁段均为向上倾斜的直线

$$M_{A右} = -M_A = -96.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_E = M_A + 81 \times 1 = -15.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_C = M_E + 31 \times 0.5 = 0$$

$$M_D = M_C + 31 \times 1 = 31 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



DK段 向上凸的二次抛物线

$$M_K = F_{RB} \times 1 + M = 29 \times 1 + 5 = 34 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

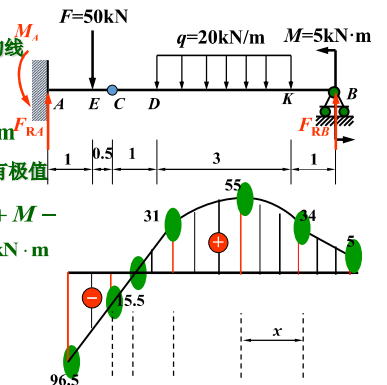
在 $F_S = 0$ 的截面上弯矩有极值

$$M_{\max} = F_{RB} \times 2.45 + M - \frac{q}{2} \times 1.45^2 = 55 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

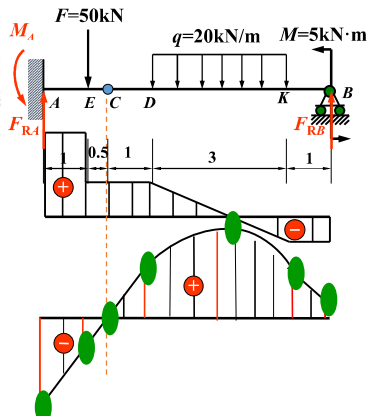
KB段 向下倾斜的直线

$$M_{B左} = M = 5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{B右} = 0$$



中间铰链传递剪力
(铰链左、右两侧的剪力相等);
但不传递弯矩(铰链处弯矩必为零).



例题14 已知简支梁的剪力图, 作梁的弯矩图和荷载图, 已知梁上没有集中力偶作用.

解: (1)画荷载图

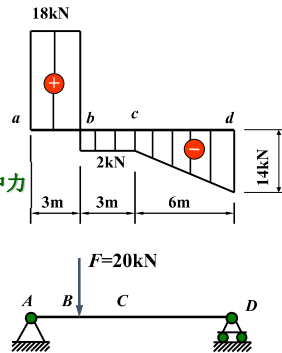
$$\frac{dF_S}{dx} = q(x)$$

AB段 没有荷载, 在B处有集中力

$$F_{SB左} = 18\text{kN}$$

$$F_{SB右} = -2\text{kN}$$

所以 $F=20\text{kN}$ 方向向下



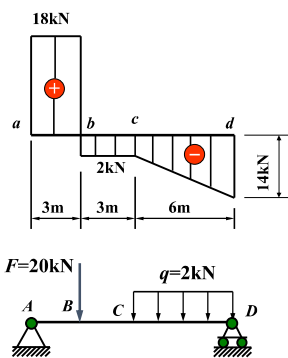
$$\frac{dF_S}{dx} = q(x)$$

BC段 无荷载

CD段 有均布荷载 $q(\downarrow)$

$$F_{SD} - F_{SC} = \int_c^d q(x)dx = 6q$$

$$q = \frac{(-14) - (-2)}{6} = -2\text{kN/m}$$



(2)弯矩图

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$$

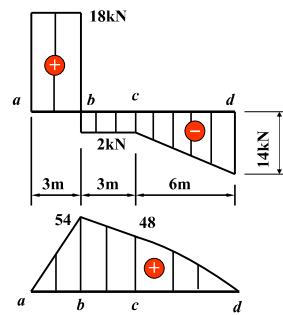
AB段 向右上倾斜的直线

$$M_B = M_A + \int_a^b F_S(x)dx = 0 + 18 \times 3 = 54\text{kN} \cdot \text{m}$$

BC段 向右下倾斜的直线.

$$M_C = M_B + \int_b^c F_S(x)dx = 54 + (-2) \times 3 = 48\text{kN} \cdot \text{m}$$

CD段 向上凸的二次抛物线, 该段内弯矩没有极值. $M_d = 0$



例题15 已知简支梁的弯矩图, 作出梁的剪力图和荷载图.

解: (1)作剪力图 $\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$

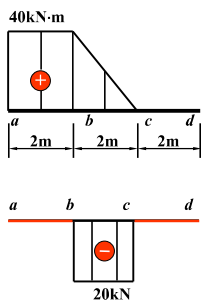
AB段 因为 $M(x) = \text{常量}$, 剪力图为水平直线, 且 $F_S(x) = 0$.

BC段 $F_S(x) = \text{常量}$, 剪力图为水平直线

$$M_C - M_B = \int_b^c F_S(x)dx = 2F_S$$

$$F_S = \frac{M_C - M_B}{2} = \frac{0 - 40}{2} = -20\text{kN}$$

CD段 剪力图为水平直线 且 $F_S(x) = 0$



(2)作荷载图 $\frac{dF_S}{dx} = q(x)$

AB段 无荷载 在A处有集中力偶

$$M_{A左} = 0 \quad M_{A右} = 40\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_c = 40\text{kN} \cdot \text{m} \quad ()$$

B处有集中力, $F_{SB左} = 0$

$$F_{SB右} = -20\text{kN}$$

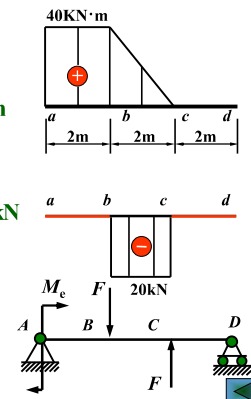
集中力 $F = 20\text{kN}$ (\downarrow)

BC段 无荷载 C处有集中力

$$F_{SB左} = -20\text{kN} \quad F_{SB右} = 0$$

集中力 $F = 20\text{kN}$ (\uparrow)

CD段 无荷载



§ 4-5 按叠加原理作弯矩图

(Drawing bending-moment diagram by superposition method)

一、叠加原理 (Superposition principle)

多个载荷同时作用于结构而引起的内力等于每个载荷单独作用于结构而引起的内力的代数和。

$$F_S(F_1, F_2, \dots, F_n) = F_{S1}(F_1) + F_{S2}(F_2) + \dots + F_{Sn}(F_n)$$

$$M(F_1, F_2, \dots, F_n) = M_1(F_1) + M_2(F_2) + \dots + M_n(F_n)$$

二、适用条件 (Application condition)

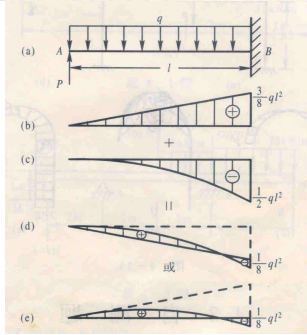
所求参数（内力、应力、位移）必然与荷载满足线性关系。即在弹性限度内满足胡克定律。

三、步骤 (Procedure)

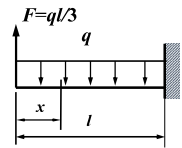
- (1) 分别作出各项荷载单独作用下梁的弯矩图；
- (2) 将其相应的纵坐标叠加即可（注意：不是图形的简单拼凑）

《辅导》p57例4-10

例 4-10 一悬臂梁如图 4-13(a)，试用叠加法作此梁的弯矩图，设 $P = \frac{3}{8}ql$ 。



例16 悬臂梁受集中荷载 F 和均布荷载 q 共同作用,试按叠加原理作此梁的弯矩图



解: 悬臂梁受集中荷载 F 和均布荷载 q 共同作用, 在距左端为 x 的任一横截面上的弯矩为

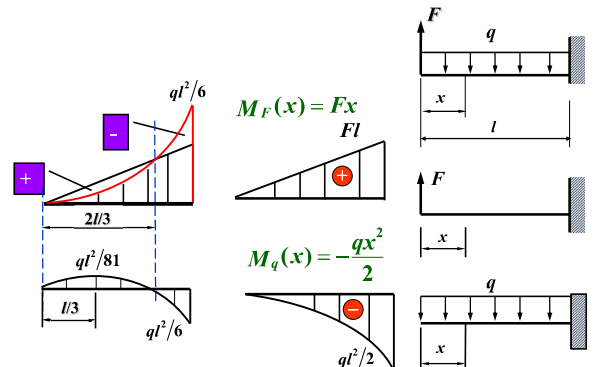
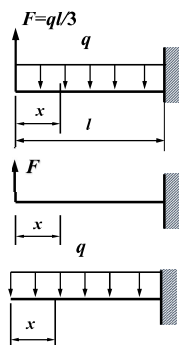
$$M(x) = Fx - \frac{qx^2}{2}$$

$$F \text{ 单独作用 } M_F(x) = Fx$$

$$q \text{ 单独作用 } M_q(x) = -\frac{qx^2}{2}$$

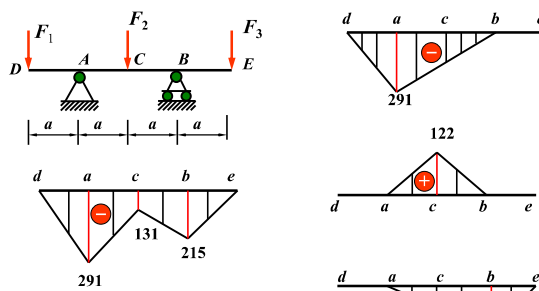
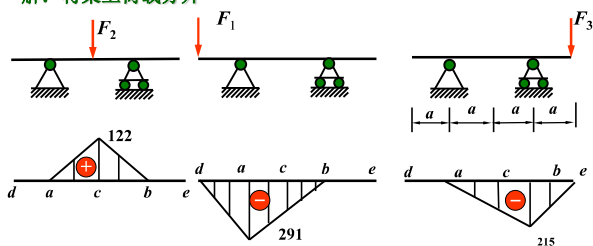
F, q 作用该截面上的弯矩等于 F, q 单独作用该截面上的弯矩的代数和

$$M(x) = Fx - \frac{qx^2}{2}$$



例题17 图示一外伸梁, $a = 425\text{mm}$, F_1 、 F_2 、 F_3 分别为 685 kN, 575 kN, 506 kN. 试按叠加原理作此梁的弯矩图, 求梁的最大弯矩.

解: 将梁上荷载分开



$$M_c = \frac{1}{2}(-291) + 122 + \frac{1}{2}(-215) = -131 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



§ 4-6 平面刚架和曲杆的内力图 (Internal diagrams for plane frame members & a curved bars)

一、平面刚架的内力图 (Internal diagrams for plane frame members)

平面刚架是由在同一平面内,不同取向的杆件,通过杆端相互刚性连结而组成的结构。



1. 平面刚架的内力 (Internal forces for plane frame members)

剪力 (shear force); 弯矩 (bending moment); 轴力 (axial force).

2、内力图符号的规定 (Sign convention for internal force diagrams)

弯矩图 (bending moment diagram)

画在各杆的受压侧,不注明正、负号。

剪力图及轴力图 (shear force and axial force diagrams)

可画在刚架轴线的任一侧(通常正值画在刚架的外侧),注明正、负号。

例 4.5 作图 4.13a 所示刚架的弯矩图。

解: 计算内力时,一般来说应先求出刚架的支反力。对于现在的情况,由于刚架的 A 端是自由端,无需确定支反力就可直接计算弯矩。在横杆 BC 的范围内,把坐标原点取在 C 点,并用截面 1-1 以左的外力来计算弯矩。

$$M(x_1) = Fx_1$$

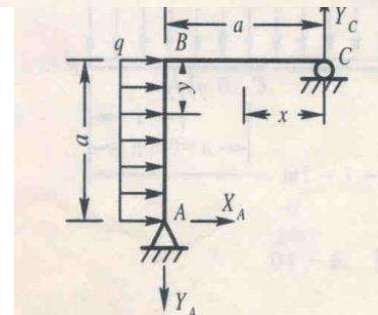
在竖杆 BC 的范围内,把原点放在 C 点,求任意截面 2-2 上的弯矩时,用截面 2-2 以上的外力来计算,得

$$M(x_2) = Fx_2 - F_1(a - x_2)$$

在给刚架的弯矩图时,将定把弯矩图画在杆件弯曲变形凹入的一侧,亦即画在受压的一侧。例如,根据竖杆的变形,在截面 B 处杆件的左侧凹入,即左侧受压,故将截面 B 的弯矩画在左侧(图 4.13b)。

《辅导》p56例4-9

例 4-9 试画图 4-12(a)所示刚架的内力图。



解: 由刚架的平衡条件可得支反力为

$$X_A = -qa, Y_A = \frac{1}{2}qa, Y_C = \frac{1}{2}qa$$

在 BC 段内将坐标原点取在 C 点,任意截面上的内力为

$$N(x) = 0 \quad (0 < x < a)$$

$$Q(x) = -Y_C = -\frac{1}{2}qa \quad (0 < x < a)$$

$$M(x) = Y_C x = \frac{1}{2}qax \quad (0 \leq x \leq a)$$

在 AB 段内将坐标原点取在 B 点,任意截面上的内力为

$$N(y) = Y_C = \frac{1}{2}qa \quad (0 < y < a)$$

$$Q(y) = qy \quad (0 < y < a)$$

$$M(y) = Y_C y + qa - \frac{1}{2}qy^2 \quad (0 \leq y \leq a)$$

弯矩力图如图 4-12(b), (c), (d) 所示。

例题 18 图示为下端固定的刚架,在其轴线平面内受集中力 F_1 和 F_2 作用,作此刚架的弯矩图和轴力图。

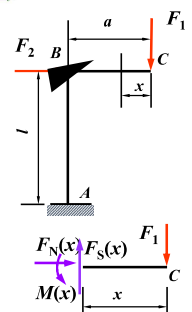
解: 将刚架分为 CB, AB 两段

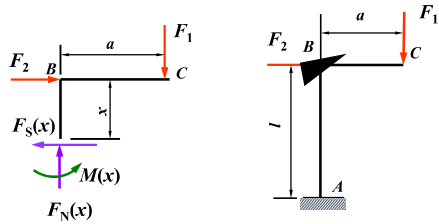
CB 段

$$F_N(x) = 0$$

$$F_S(x) = F_1 \quad (+) \quad (0 < x < a)$$

$$M(x) = F_1 x \quad (0 \leq x \leq a)$$





BA段

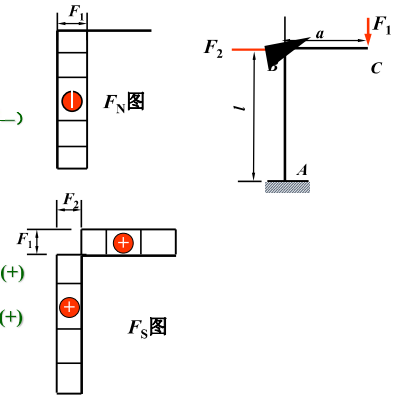
$$\begin{aligned}
 F_N(x) &= F_1 \quad (-) & (0 \leq x \leq l) \\
 F_S(x) &= F_2 \quad (+) & (0 < x < l) \\
 M(x) &= F_1 a + F_2 x & (0 \leq x \leq l)
 \end{aligned}$$

CB段 $F_N(x)=0$

BA段 $F_N(x) = F_1 \quad (-)$

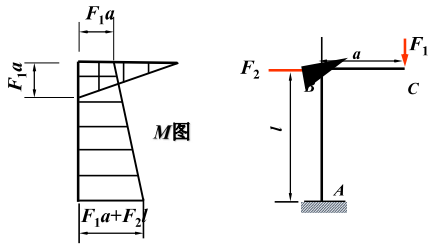
CB段 $F_S(x) = F_1 \quad (+)$

BA段 $F_S(x) = F_2 \quad (+)$



CB段 $M(x) = F_1 x \quad (0 \leq x \leq a)$

BA段 $M(x) = F_1 a + F_2 x \quad (0 \leq x \leq l)$



二、平面曲杆 (Plane curved bars)

1、平面曲杆 (Plane curved bars)

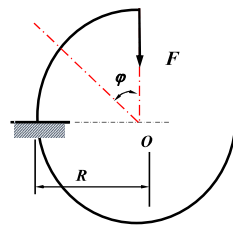
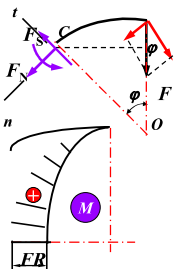
轴线为一平面曲线的杆件, 内力情况及绘制方法与平面刚架相同。

2、内力符号的确定 (Sign convention for internal force)

轴力 引起拉伸的轴力为正;

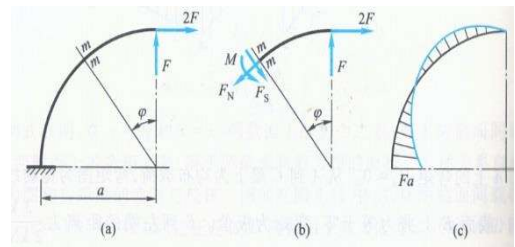
剪力 对所考虑的一端曲杆内一点取矩 产生顺时针转动趋势的剪力为正;

弯矩 使曲杆的曲率增加 (即外侧受拉) 的弯矩为正。



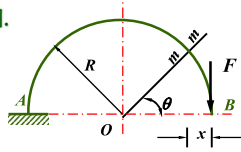
$$\begin{aligned}
 \sum F_n &= 0 & F_n + F \sin \varphi &= 0 \\
 \sum F_t &= 0 & F_t - F \cos \varphi &= 0 \\
 \sum M_C &= 0 & M - FR \sin \varphi &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_s &= F \cos \varphi \\
 F_n &= -F \sin \varphi \\
 M &= FR \sin \varphi
 \end{aligned}$$



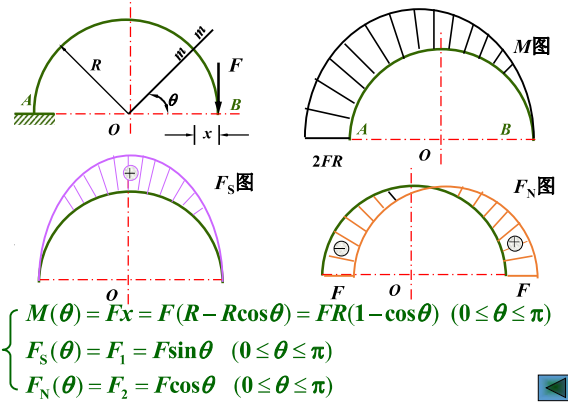
$$\begin{aligned}
 F_N &= F \sin \varphi + 2F \cos \varphi = F (\sin \varphi + 2 \cos \varphi) \\
 F_S &= F \cos \varphi - 2F \sin \varphi = F (\cos \varphi - 2 \sin \varphi) \\
 M &= 2Fa(1 - \cos \varphi) - Fas \sin \varphi = Fa(2 - 2 \cos \varphi - \sin \varphi)
 \end{aligned}$$

例19 如图所示的半圆环半径为 R ,在自由端受到载荷 F 的作用. 试绘制 F_S 图、 M 图和 F_N 图.



解: 建立极坐标系, O 为极点, OB 极轴, θ 表示截面 $m-m$ 的位置.

$$\begin{cases} M(\theta) = Fx = F(R - R\cos\theta) = FR(1 - \cos\theta) & (0 \leq \theta \leq \pi) \\ F_S(\theta) = F_1 = F\sin\theta & (0 \leq \theta \leq \pi) \\ F_N(\theta) = F_2 = F\cos\theta & (0 \leq \theta \leq \pi) \end{cases}$$



《辅导》p58例4-11

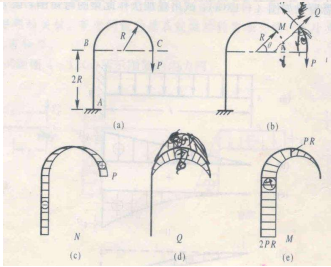
例4-11 图4-14(a)所示结构由直杆 AB 和半圆 BC 组成,试作该图的内力图.

解: 利用截面法写出各段的轴力、剪力和弯矩方程(图4-14(b)).

AB 段: $N = -P, Q = 0, M = 2PR$

BC 段: $N = P\cos\theta, Q = P\sin\theta, M = PR(1 - \cos\theta)$

利用方程作 N, Q, M 图如图4-14(c), (d), (e)所示.



第五章结束



第六章 弯曲应力 (Stresses in beams)

- § 6-1 准备知识-平面图形的几何性质
- § 6-2 引言
- § 6-3 梁的正应力和应变分析 (三条件法)
- § 6-4 梁的切应力分析
- § 6-5 提高梁强度的主要措施

§ 6-1 附录 I 截面的几何性质

(Appendix I Properties of plane areas)

1 截面的静矩和形心(The first moments of the area & centroid of an area)

2 极惯性矩 惯性矩 惯性积 (Polar moment of inertia Moment of inertia Product of inertia)

3 平行移轴公式 (Parallel-Axis theorem)

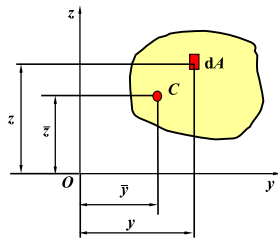
4 转轴公式 (Rotation of axes)

二、截面的形心(Centroid of an area)

$$\bar{z} = \frac{\int_A z dA}{A} = \frac{S_y}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A y dA}{A} = \frac{S_z}{A}$$

$$S_y = A\bar{z} \quad S_z = A\bar{y}$$



- (1) 若截面对某一轴的静矩等于零, 则该轴必过形心.
- (2) 截面对形心轴的静矩等于零.

1 截面的静矩和形心

(The first moment of the area & centroid of an area)

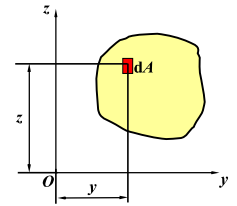
一、静矩(The first moment of the area)

截面对 y, z 轴的静矩为

$$S_y = \int_A z dA$$

$$S_z = \int_A y dA$$

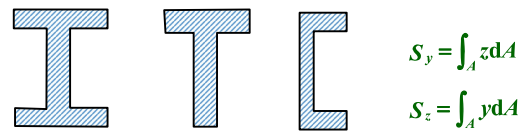
静矩可正, 可负, 也可能等于零.



三、组合截面的静矩和形心

(The first moments & centroid of a composite area)

由几个简单图形组成的截面称为组合截面.



截面各组成部分对于某一轴的静矩之代数和, 等于该截面对同一轴的静矩.

1. 组合截面静矩(The first moments of a composite area)

$$S_y = \sum_{i=1}^n A_i \bar{z}_i \quad S_z = \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i \quad S_y = \int_A z dA$$

$$S_y = A\bar{z}$$

其中 A_i —第 i 个简单截面积

(\bar{z}_i, \bar{y}_i) —第 i 个简单截面的形心坐标

$$S_z = \int_A y dA$$

$$S_z = A\bar{y}$$

2. 组合截面形心(Centroid of a composite area)

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \bar{z}_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

例 1.1 在图1.2中抛物线的方程为 $z = h \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$. 计算由抛物线、 y 轴和 z 轴所围成的平面图形对 y 轴和 z 轴的静矩 S_y 和 S_z , 并确定图形的形心 C 的坐标.

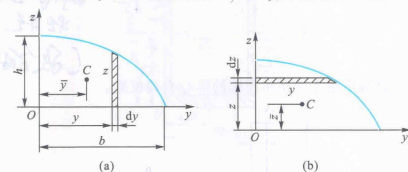
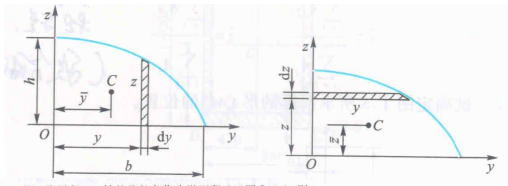


图 1.2



解: 取平行于 z 轴的狭长条作为微面积 dA (图 1.2a), 则

$$dA = z dy = h \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy$$

图形的面积和对 z 轴的静矩分别为

$$A = \int_A dA = \int_0^b h \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{2bh}{3}$$

$$S_z = \int_A y dA = \int_0^b y h \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{h^2 b}{4}$$

代入式(1.3), 得

$$\bar{y} = \frac{S_z}{A} = \frac{3}{8}b$$

取平行于 y 轴的狭长条作为微面积, 如图 1.2b 所示, 仿照上述方法, 即可求出

$$S_y = \frac{4bh^2}{3}, \quad \bar{z} = \frac{2h}{3}$$

例题1 试确定图示截面形心C的位置。

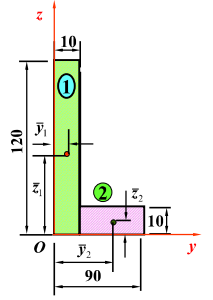
解: 组合图形, 用正负面积法解之。

方法1 用正面积法求解, 将截面分为1, 2两个矩形。

取 z 轴和 y 轴分别与截面的底边和左边边缘重合

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2}{A_1 + A_2}$$

$$\bar{z} = \frac{A_1 \bar{z}_1 + A_2 \bar{z}_2}{A_1 + A_2}$$



图(a)

矩形1 $A_1 = 10 \times 120 = 1200 \text{ mm}^2$

$$\bar{y}_1 = 5 \text{ mm} \quad \bar{z}_1 = 60 \text{ mm}$$

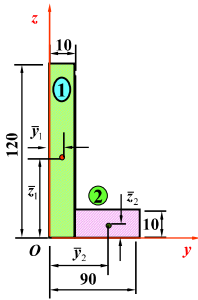
矩形2 $A_2 = 10 \times 80 = 800 \text{ mm}^2$

$$\bar{y}_2 = 10 + \frac{80}{2} = 50 \text{ mm}$$

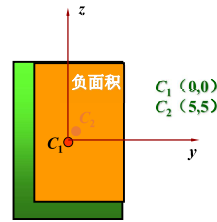
$$\bar{z}_2 = 5 \text{ mm}$$

所以
$$\bar{y} = \frac{A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2}{A_1 + A_2} = 23 \text{ mm}$$

$$\bar{z} = \frac{A_1 \bar{z}_1 + A_2 \bar{z}_2}{A_1 + A_2} = 38 \text{ mm}$$



方法2 用负面积法求解, 图形分割及坐标如图(b)



图(b)

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{A} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{5 \times (-80 \times 110)}{120 \times 90 - 80 \times 110} = -22$$

例1.3 某单臂液压机架的横截面尺寸如图1.4所示。试确定截面形心的位置。

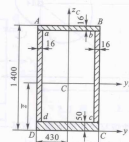


图 1.4

解: 截面有一垂直对称轴, 其形心必然在这一对称轴上, 因而只需确定形心在对称轴上的位置。把截面看成是由矩形 ABCD 减去矩形 abcd, 并设 ABCD 的面积为 A_1 , abcd 的面积为 A_2 , 以底边 DC 作为参考坐标轴 y。

$$A_1 = 1.4 \text{ m} \times 0.86 \text{ m} = 1.204 \text{ m}^2$$

$$\bar{z}_1 = \frac{1.4 \text{ m}}{2} = 0.7 \text{ m}$$

$$A_2 = (0.86 - 2 \times 0.016) \text{ m} \times (1.4 - 0.05 - 0.016) \text{ m} = 1.105 \text{ m}^2$$

$$\bar{z}_2 = \frac{1}{2} (1.4 - 0.05 - 0.016) \text{ m} + 0.05 \text{ m} = 0.717 \text{ m}$$

由公式(1.6), 整个截面的形心 C 的坐标 \bar{z} 为

$$\bar{z} = \frac{A_1 \bar{z}_1 - A_2 \bar{z}_2}{A_1 - A_2} = 0.51 \text{ m}$$

§ 1-2 极惯性矩、惯性矩、惯性积 (Polar moment of inertia、Moment of inertia、Product of inertia)

一、惯性矩 (Moment of inertia)

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

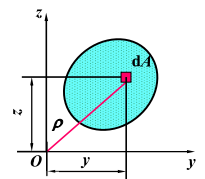
$$I_z = \int_A y^2 dA$$

二、极惯性矩 (Polar moment of inertia)

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \quad \rho^2 = z^2 + y^2 \quad I_p = \int_A \rho^2 dA$$

所以 $I_p = I_z + I_y$

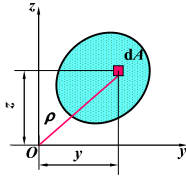
$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_y + I_z$$



三、惯性积 (Product of inertia)

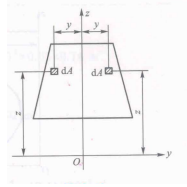
$$I_{yz} = \int_A yz dA$$

- (1) 惯性积的数值恒为正，惯性积则可能为正值，负值，也可能等于零；
- (2) 若 y, z 两坐标轴中有一个为截面的对称轴，则截面对 y, z 轴的惯性积一定等于零。



四、惯性半径

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$



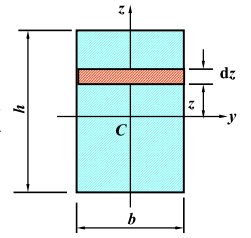
例题2 求矩形截面对其对称轴 y, z 轴的惯性矩。

解: $I_y = \int_A z^2 dA$

$$dA = b dz$$

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} b z^2 dz = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12}$$



例 1.5 计算圆形对其形心轴的惯性矩。

解: 取图 1.8 中的阴影线面积为 dA , 则

$$\begin{aligned} dA &= 2y dz = 2\sqrt{R^2 - z^2} dz \\ I_y &= \int_A z^2 dA = 2 \int_{-R}^R z^2 \sqrt{R^2 - z^2} dz \\ &= \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64} \end{aligned}$$

由于 z 轴和 y 轴都与圆的直径重合, 因此必然有

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}$$

由公式 (1.11), 可以求得圆形对圆心的极惯性矩

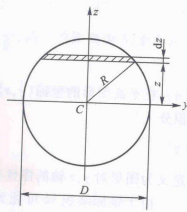


图 1.8

例题3 求圆形截面对其对称轴的惯性矩。

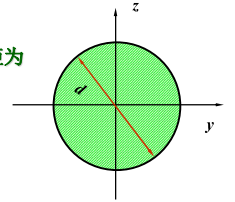
解: 因为截面对其圆心 O 的极惯性矩为

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_y + I_z = I_p$$

$$I_y = I_z$$

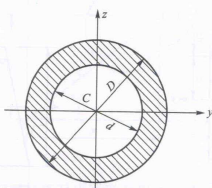
所以 $I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64}$



例如可以把图 1.9 所示空心圆, 看作是由直径为 D 的实心圆减去直径为 d 的实心圆, 由公式 (1.12), 并使用例 1.5 所得结果, 即可求得

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$$



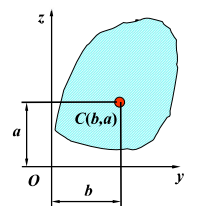
§ 1-3 平行移轴公式 (Parallel-axis theorem)

一、平行移轴公式 (Parallel-Axis theorem for moment of inertia)

y, z — 任意一对坐标轴

C — 截面形心

(b, a) — 形心 C 在 yOz 坐标系下的坐标



在图 I.11 中, C 为图形的形心, y_c 和 z_c 是通过形心的坐标轴。图形对形心轴 y_c 和 z_c 的惯性矩和惯性积分别记为

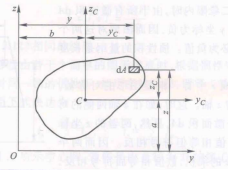
$$I_{y_c} = \int_A z_c^2 dA, \quad I_{z_c} = \int_A y_c^2 dA, \quad I_{y_c z_c} = \int_A y_c z_c dA \quad (a)$$

若 y 轴平行于 y_c , 且两者的距离为 a ; z 轴平行于 z_c , 且两者的距离为 b , 图形对 y 轴和 z 轴的惯性矩和惯性积应为

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_{yz} = \int_A yz dA \quad (b)$$

由图 I.11 可以看出

$$y = y_c + b, \quad z = z_c + a$$



以式(c)代入式(b), 得

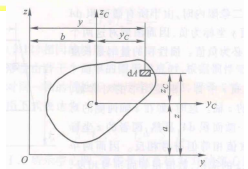
$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_A (z_c + a)^2 dA = \int_A z_c^2 dA + 2a \int_A z_c dA + a^2 \int_A dA$$

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_A (y_c + b)^2 dA = \int_A y_c^2 dA + 2b \int_A y_c dA + b^2 \int_A dA$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA = \int_A (y_c + b)(z_c + a) dA$$

$$= \int_A y_c z_c dA + a \int_A y_c dA + b \int_A z_c dA + ab \int_A dA$$

在以上三式中, $\int_A z_c dA$ 和 $\int_A y_c dA$ 分别为图形对形心轴 y_c 和 z_c 的静矩, 其值都等于零 (§ I.1)。注意到 $\int_A dA = A$, 如再应用式(a), 则上列三式简化为

$$\left. \begin{aligned} I_y &= I_{y_c} + a^2 A \\ I_z &= I_{z_c} + b^2 A \\ I_{yz} &= I_{y_c z_c} + abA \end{aligned} \right\} \text{平行移轴公式 (I.14)}$$


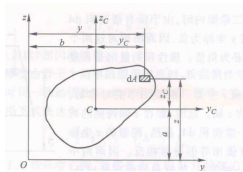
y_c, z_c —过截面的形心 C 且与 y, z 轴平行的坐标轴(形心轴)

I_y, I_z, I_{yz} —截面对 y, z 轴的惯性矩和惯性积。

$I_{y_c}, I_{z_c}, I_{y_c z_c}$ —截面对形心轴 y_c, z_c 的惯性矩和惯性积。

已知截面对形心轴 y_c, z_c 的惯性矩和惯性积, 求截面对与形心轴平行的 y, z 轴惯性矩和惯性积, 则平行移轴公式

$$\begin{aligned} I_y &= I_{y_c} + a^2 A \\ I_z &= I_{z_c} + b^2 A \\ I_{yz} &= I_{y_c z_c} + abA \end{aligned}$$



二、组合截面的惯性矩、惯性积 (Moment of inertia & product of inertia for composite areas)

组合截面的惯性矩, 惯性积

$$I_y = \sum_{i=1}^n I_{y_i}$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_z = \sum_{i=1}^n I_{z_i}$$

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n I_{y_z i}$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA$$

$I_{y_i}, I_{z_i}, I_{y_z i}$ —第 i 个简单截面对 y, z 轴的惯性矩, 惯性积。

例题4 求梯形截面对其形心轴 y_c 的惯性矩。

解: 将截面分成两个矩形截面。

截面的形心必在对称轴 z_c 上。

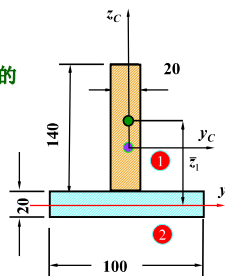
取过矩形 2 的形心且平行于底边的轴作为参考轴记作 y 轴。

$$A_1 = 20 \times 140 \quad \bar{z}_1 = 80$$

$$A_2 = 100 \times 20 \quad \bar{z}_2 = 0$$

所以截面的形心坐标为

$$\bar{z}_C = \frac{A_1 \bar{z}_1 + A_2 \bar{z}_2}{A_1 + A_2} = 46.7 \text{ mm}$$

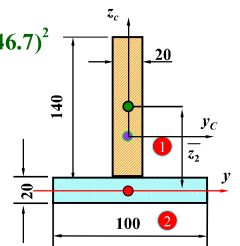


$$I_y = I_{y_c} + a^2 A$$

$$I_{y_c}^1 = \frac{1}{12} \times 20 \times 140^3 + 20 \times 140 \times (80 - 46.7)^2$$

$$I_{y_c}^2 = \frac{1}{12} \times 100 \times 20^3 + 100 \times 20 \times (46.7)^2$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^1 + I_{y_c}^2 = 12.12 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



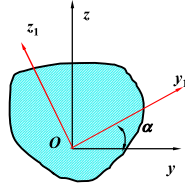
§ 1-4 转轴公式 (Rotation of axes)

一、转轴公式 (Rotation of axes)

yOz 为过截面上的任一点建立的坐标系

y_1Oz_1 为 yOz 转过 α 角后形成的新坐标系

α
 逆时针转取为 + 号
 顺时针转取为 - 号



已知截面对坐标轴 y, z 轴的惯性矩和惯性积求截面对 y_1, z_1 轴惯性矩和惯性积。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

任意平面图形(图 1.14)对 y 轴和 z 轴的惯性矩和惯性积为

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_{yz} = \int_A yz dA$$

若将坐标轴绕 O 点旋转 α 角, 且以逆时针转向为正, 旋转后得新的坐标轴 y_1, z_1 , 而图形对 y_1, z_1 轴的惯性矩和惯性积则应分别为

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA, \quad I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA, \quad I_{y_1 z_1} = \int_A y_1 z_1 dA \quad (b)$$

现在研究图形对 y, z 轴和对 y_1, z_1 轴的惯性矩及惯性积之间的关系。

由图 1.14, 微面积 dA 在新旧两个坐标系中的坐标 (y, z) 和 (y_1, z_1) 之间的关系为

$$\begin{cases} y_1 = y \cos \alpha + z \sin \alpha \\ z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha \end{cases} \quad (c)$$

把 z_1 代入式 (b) 中的第一式,

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dA$$

$$= \cos^2 \alpha \int_A z^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A yz dA$$

$= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$

以 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ 和 $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ 代入上式, 得出

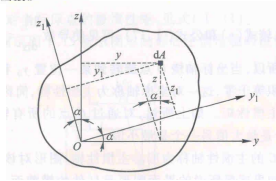
$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

同理, 利用式 (c), 由式 (b) 的第二式和第三式可以求得

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha$$

可见, $I_{y_1}, I_{z_1}, I_{y_1 z_1}$ 随 α 角的变化而变化, 它们都是 α 的函数。



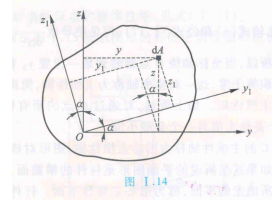
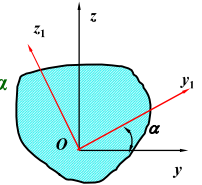
转轴公式为

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha$$

显然 $I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z$



二、截面的主惯性轴和主惯性矩 (principal axes & principal moment of inertia)

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha$$

主惯性轴 (Principal axes): 总可以找到一个特定的角 α_0 , 使截面对新坐标轴 y_0, z_0 的惯性积等于 0, 则称 y_0, z_0 为主惯性轴。

主惯性矩 (Principal moment of inertia): 截面对主惯性轴 y_0, z_0 的惯性矩。

形心主惯性轴 (Centroidal principal axes): 当一对主惯性轴的交点与截面的形心重合时, 则称为形心主惯性轴。

形心主惯性矩 (Centroidal principal moment of inertia): 截面对形心主惯性轴的惯性矩。

(1) 主惯性轴的位置 设 α_0 为主惯性轴与原坐标轴之间的夹角

则有 $\frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{yz} \cos 2\alpha_0 = 0$

由此 $\tan 2\alpha_0 = \frac{-2I_{yz}}{I_y - I_z}$ α_0 求出后, 就确定了主惯性轴的位置。

(2) 主惯性矩的计算公式 $I_{y_0} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2}$

过截面上的任一点可以作无数对坐标轴, 其中必有一对是主惯性轴。截面的主惯性矩是所有惯性矩中的极值。即

$$I_{\max} = I_{y_0} \quad I_{\min} = I_{z_0}$$

(3) 截面的对称轴一定是形心主惯性轴。

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \quad (1.15)$$

同理,利用式(e),由式(b)的第二式和第三式可以求得

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha \quad (1.16)$$

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha \quad (1.17)$$

可见, $I_{y_1}, I_{z_1}, I_{y_1 z_1}$ 随 α 角的变化而变化, 它们都是 α 的函数。
将公式(1.15)对 α 求导数

$$\frac{dI_{y_1}}{d\alpha} = -2 \left(\frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha \right) \quad (d)$$

若 $\alpha = \alpha_0$ 时, 能使导数 $\frac{dI_{y_1}}{d\alpha} = 0$, 则对 α_0 所确定的坐标轴, 图形的惯性矩为最大值或最小值。以 α_0 代入式(d), 并令其等于零, 得到

$$\frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{yz} \cos 2\alpha_0 = 0 \quad (e)$$

由此求出

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (1.18)$$

由公式(1.18)可以求出相差 90° 的两个角度 α_0 , 从而确定了一对坐标轴 y_0 和 z_0 。图形对这一对轴中的一个轴的惯性矩为最大值 I_{\max} , 而对另一个轴的惯性矩

求形心主惯性矩的方法

- (1) 确定形心的位置 $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$ $\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \bar{z}_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$
- (2) 选择一对通过形心且便于计算惯性矩(积)的坐标轴 y, z , 计算 I_y, I_z, I_{yz}

$$I_y = \sum I_{y_i} \quad I_z = \sum I_{z_i} \quad I_{yz} = \sum I_{y_i z_i}$$
- (3) 确定形心主惯性轴的方位 $2\alpha_0 = \tan^{-1} \left(\frac{-2I_{yz}}{I_y - I_z} \right)$
- (4) 计算形心主惯性矩 $I_{y_0} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2}$

例题5 计算所示图形的形心主惯性矩。

解: 该图形形心C的位置已确定, 如图所示。

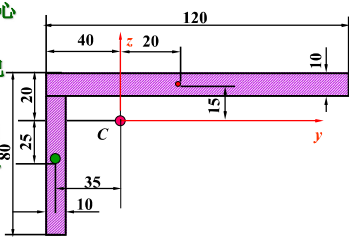
过形心C选一对坐标轴 y, z 轴, 计算其惯性矩(积):

$$I_y = I_{y_c} + a^2 A$$

$$I_z = I_{z_c} + b^2 A$$

$$I_{yz} = I_{y_c z_c} + abA$$

$$I_y = \left[\frac{1}{12} \times 120 \times 10^3 + 15^2 \times 120 \times 10 \right] + \left[\frac{1}{12} \times 10 \times 70^3 + 10 \times 70 \times (-25)^2 \right] = 100.4 \text{ mm}^4$$



$$I_z = 278.4 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = [0 + 15 \times 20 \times 120 \times 10] + [0 + (-25) \times (-35) \times 70 \times 10] = 97.3 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

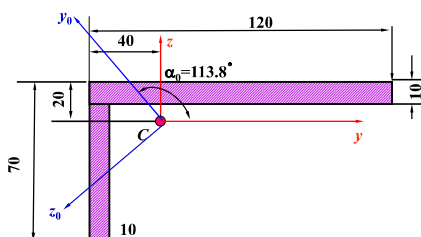
$$\tan 2\alpha_0 = \left(\frac{-2I_{yz}}{I_y - I_z} \right) = 1.093$$

$$I_y < I_z \quad 2\alpha_0 \text{ 在第三象限}$$

$$2\alpha_0 = 227.6^\circ \quad \alpha_0 = 113.8^\circ$$

形心主惯性轴 y_0, z_0

分别由 y 轴和 z 轴绕 C 点逆时针转 113.8° 得出。



形心主惯性矩为

$$I_{y_0} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} = 321 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_0} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} = 57.4 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

例题6 在矩形内挖去一与上边内切的圆, 求图形的形心主轴。

($b=1.5d$)

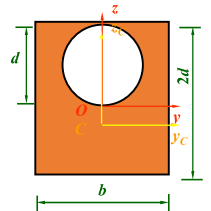
解: (1) 建立坐标系如图。

(2) 求形心位置。

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{A} = \frac{0}{A} = 0$$

$$\bar{z} = \frac{\sum \bar{z}_i A_i}{A} = \frac{-\frac{d}{2} \times \frac{\pi d^2}{4}}{3d^2 - \frac{\pi d^2}{4}} = -0.177d$$

(3) 建立形心坐标系, 求 $I_{y_c}, I_{z_c}, I_{y_c z_c}$



$$I_{y_c} = I_{\text{矩}y_c} - I_{\text{圆}y_c} = I_{\text{矩}y} + A_{\text{矩}}\bar{z}^2 - [I_{\text{圆}y} + A_{\text{圆}}(0.5d - \bar{z})^2]$$

$$= \frac{1.5d \times (2d)^3}{12} + 3d^2(-0.177d)^2 - [\frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4}(0.5d + 0.177d)^2]$$

$$= 0.685d^4$$

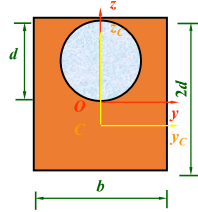
$$I_{z_c} = I_{\text{矩}z_c} - I_{\text{圆}z_c}$$

$$= \frac{(1.5d)^3 \times 2d}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = 0.513d^4$$

$$I_{y_c z_c} = 0$$

所以 $y_c z_c$ 便是形心主轴

$I_{y_c} I_{z_c}$ 便是形心主惯性轴



作业10. 求矩形、圆、圆环对其几何中心的静矩、惯性矩、极惯性矩、惯性积。

§ 5-2 引言 (Introduction)

一、弯曲构件横截面上的应力

(Stresses in flexural members)

当梁上有横向外力作用时，一般情况下，梁的横截面上既有弯矩 M ，又有剪力 F_S 。

内力 $\begin{cases} \text{剪力 } F_S \longrightarrow \text{切应力 } \tau \\ \text{弯矩 } M \longrightarrow \text{正应力 } \sigma \end{cases}$

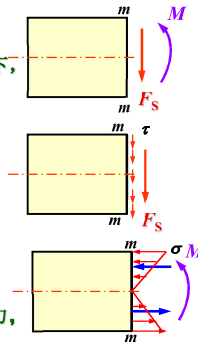
只有与切应力有关的切向内力元素

$dF_S = \tau dA$ 才能合成剪力；

只有与正应力有关的法向内力元素

$dF_N = \sigma dA$ 才能合成弯矩。

所以，在梁的横截面上一般既有正应力，又有切应力。



二、分析方法 (Analysis method)

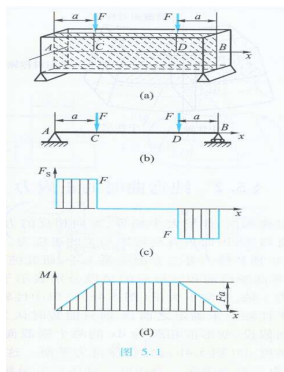
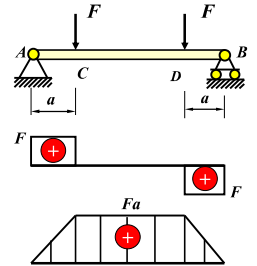
平面弯曲时横截面 σ ：纯弯曲梁（横截面上只有 M 而无 F_S 的情况）

平面弯曲时横截面 $\frac{\sigma}{z}$ ：横力弯曲（横截面上既有 F_S 又有 M 的情况）

三、纯弯曲 (Pure bending)

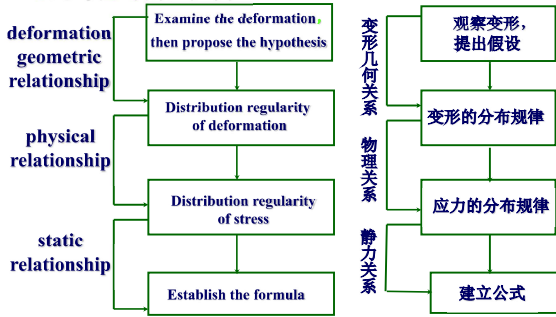
若梁在某段内各横截面的弯矩为常量，剪力为零，则该段梁的弯曲就称为纯弯曲。

简支梁 CD 段任一横截面上，剪力等于零，而弯矩为常量，所以该段梁的弯曲就是纯弯曲。



§ 6-3 梁的正应力和应变分析 (三条件法)

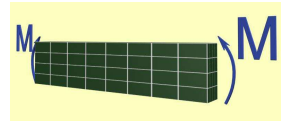
1. 纯弯曲时的正应力



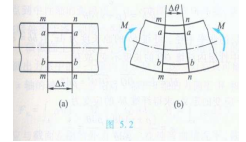
一、实验 (Experiment)

1. 变形现象 (Deformation phenomenon)

纵向线 各纵向线段弯成弧线, 且靠近顶端的纵向线缩短, 靠近底端的纵向线段伸长.



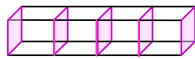
横向线 各横向线仍保持为直线, 相对转过了一个角度, 仍与变形后的纵向弧线垂直.



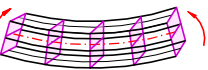
视频

2. 提出假设 (Assumptions)

(a) 平面假设: 变形前为平面的横截面变形后仍保持为平面且垂直于变形后的梁轴线;

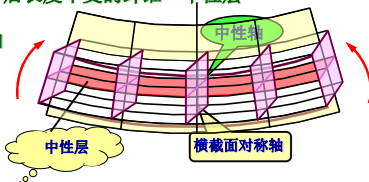
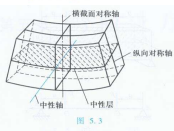


(b) 单向受力假设: 纵向纤维不相互挤压, 只受单向拉压.

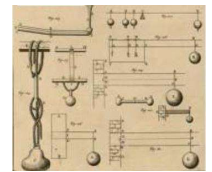


推论: 必有一层变形前后长度不变的纤维—中性层

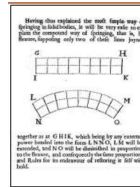
中性轴 ⊥ 横截面对称轴



伽利略《关于两门新科学的对话》(1638年)中研究悬臂梁的强度, 暗示中性层位于梁的下面.

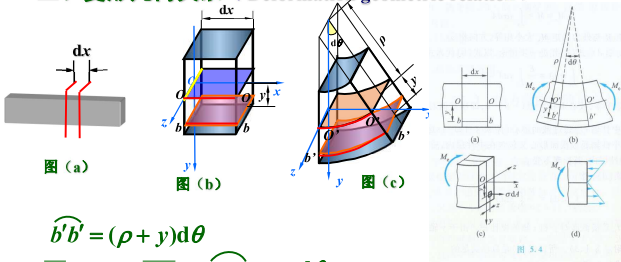


1686年, 马略特在《论水和其他流体的运动》中也认为中性层在梁的下侧, 但具体位置与伽利略有所不同.



1678年, 胡克在《论弹簧》中指出, 在弯曲时杆的一侧的纤维伸长, 另一侧被压缩.

二、变形几何关系 (Deformation geometric relation)



$$\widehat{b'b'} = (\rho + y)d\theta$$

$$\widehat{bb} = dx = \widehat{OO} = \widehat{O'O'} = \rho d\theta$$

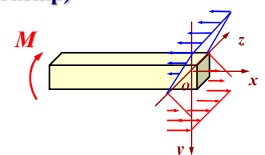
$$\text{应变分布规律: } \varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

直梁纯弯曲时纵向纤维的应变与它到中性层的距离成正比.

三、物理关系 (Physical relationship)

Hooke's Law $\sigma = E\varepsilon$

$$\text{所以 } \sigma = E \frac{y}{\rho}$$



应力分布规律:

直梁纯弯曲时横截面上任意一点的正应力, 与它到中性轴的距离成正比.

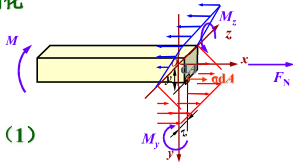
待解决问题: 中性轴的位置

中性层的曲率半径 ρ

四、静力关系 (Static relationship)

横截面上内力系为垂直于横截面的空间平行力系, 这一力系简化得到三个内力分量.

内力与外力相平衡可得



$$F_N = \int_A dF_N = \int_A \sigma dA = 0 \quad (1)$$

$$M_{iy} = \int_A dM_y = \int_A z \sigma dA = 0 \quad (2)$$

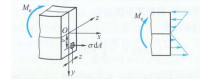
$$M_{iz} = \int_A dM_z = \int_A y \sigma dA = M \quad (3)$$

$$\begin{aligned} dF_N &= \sigma dA \\ dM_y &= z \sigma dA \\ dM_z &= y \sigma dA \end{aligned}$$

将应力表达式代入 (1) 式, 得

$$F_N = \int_A E \frac{y}{\rho} dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \Rightarrow S_z = \int_A y dA = 0$$

⇒ 中性轴通过横截面形心



将应力表达式代入 (2) 式, 得

$$M_{iy} = \int_A z E \frac{y}{\rho} dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A yz dA = 0 \Rightarrow I_{yz} = \int_A yz dA = 0$$

⇒ 自然满足

将应力表达式代入 (3) 式, 得

$$\begin{aligned} M_{iz} = \int_A y E \frac{y}{\rho} dA = M &\Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M \Rightarrow \frac{E}{\rho} I_z = M \\ &\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \end{aligned}$$

将 $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$ 代入 $\sigma = E \frac{y}{\rho}$

得到纯弯曲时横截面上正应力的计算公式:

$$\sigma = \frac{My}{I_z} \quad \text{代入 } \sigma = E\varepsilon \text{ 得到应变}$$

M 为梁横截面上的弯矩;

y 为梁横截面上任意一点到中性轴的距离;

I_z 为梁横截面对中性轴的惯性矩.

讨论

(1) 应用公式时, 一般将 M_y 以绝对值代入. 根据梁变形的情况直接判断 σ 的正负号. 以中性轴为界, 梁变形后凸出边的应力为拉应力 (σ 为正号), 凹入边的应力为压应力 (σ 为负号);

(2) 最大正应力发生在横截面上离中性轴最远的点处.

$$\sigma_{\max} = \frac{M y_{\max}}{I_z}$$

引用记号 $W = \frac{I_z}{y_{\max}}$ — 抗弯截面系数

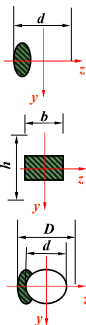
则公式改写为 $\sigma_{\max} = \frac{M}{W}$

(1) 当中性轴为对称轴时

实心圆截面 $W = \frac{I_z}{d/2} = \frac{\pi d^4 / 64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}$

矩形截面 $W = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^3 / 12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$

空心圆截面 $W = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \quad \alpha = \frac{d}{D}$

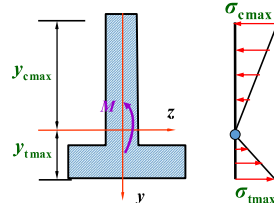


(2) 对于中性轴不是对称轴的横截面

应分别以横截面上受拉和受压部分距中性轴最远的距离

$y_{c\max}$ 和 $y_{t\max}$ 直接代入公式

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$



$$\sigma_{t\max} = \frac{M y_{t\max}}{I_z}$$

$$\sigma_{c\max} = \frac{M y_{c\max}}{I_z}$$

2 横力弯曲时的正应力

(Normal stresses of the beam in nonuniform bending)

一、横力弯曲(Nonuniform bending)

当梁上有横向力作用时,横截面上既又有弯矩又有剪力.梁在此种情况下的弯曲称为横力弯曲.

横力弯曲时,梁的横截面上既有正应力又有切应力.切应力使横截面发生翘曲,横向力引起与中性层平行的纵截面的挤压应力,纯弯曲时所做的平面假设和单向受力假设都不成立.

虽然横力弯曲与纯弯曲存在这些差异,但进一步的分析表明,工程中常用的梁,纯弯曲时的正应力计算公式,可以精确地计算横力弯曲时横截面上的正应力.

等直梁横力弯曲时横截面上的正应力公式为 $\sigma = \frac{M(x)}{W}$

2. 强度条件的应用(Application of strength condition)

(1) 强度校核 $\frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$ (2) 设计截面 $W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$

(3) 确定许可载荷 $M_{\max} \leq W[\sigma]$

对于铸铁等脆性材料制成的梁,由于材料的 $[\sigma_t] \neq [\sigma_c]$ 且梁横截面的中性轴一般也不是对称轴,所以梁的

$\sigma_{t\max} \neq \sigma_{c\max}$ (两者有时并不发生在同一横截面上)

要求分别不超过材料的许用拉应力和许用压应力

$\sigma_{t\max} \leq [\sigma_t]$

$\sigma_{c\max} \leq [\sigma_c]$

二、公式的应用范围

(The applicable range of the flexure formula)

1. 在弹性范围内

(All stresses in the beam are below the proportional limit)

2. 具有切应力的梁 (The beam with the shear stress) $l/h \geq 5$

3. 平面弯曲 (Plane bending)

4. 直梁 (Straight beams)

三、强度条件 (Strength condition)

梁内的最大工作应力不超过材料的许用应力.

1. 数学表达式 (Mathematical formula) $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$

例题1 螺栓压板夹紧装置如图所示.已知板长 $3a=150\text{mm}$,压板材料的弯曲许用应力 $[\sigma]=140\text{MPa}$.试计算压板传给工件的最大允许压紧力 F .

解: (1) 作出弯矩图的最大弯矩为 Fa ;

(2) 求惯性矩, 抗弯截面系数

$I_z = \frac{(3\text{cm})(2\text{cm})^3}{12} - \frac{(1.4\text{cm})(2\text{cm})^3}{12} = 1.07\text{cm}^4$

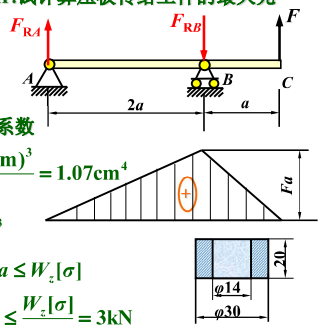
$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{1.07\text{cm}^4}{1\text{cm}} = 1.07\text{cm}^3$

(3) 求许可载荷

$M_{\max} \leq W_z[\sigma]$

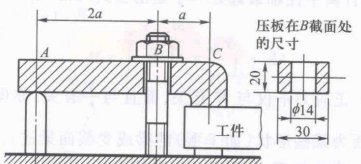
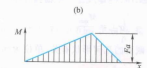
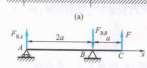
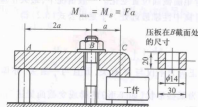
$Fa \leq W_z[\sigma]$

$F \leq \frac{W_z[\sigma]}{a} = 3\text{kN}$



例 5.1 螺栓压板夹紧装置如图 5.5a 所示。已知板长 $3a=150\text{mm}$,压板材料的弯曲许用应力 $[\sigma]=140\text{MPa}$ 。试计算压板传给工件的最大允许压紧力 F 。

解: 压板可简化为图 5.5b 所示的外伸梁。由梁的外伸部分 BC 可以求得截面 B 的弯矩为 $M_B = Fa$ 。此外又知 A 和 C 两截面上弯矩等于零。从而作弯矩图如图 5.5c 所示。最大弯矩在截面 B 上,且



根据截面 B 的尺寸求出

$I_z = \frac{(3\text{ cm}) \times (2\text{ cm})^3}{12} - \frac{(1.4\text{ cm}) \times (2\text{ cm})^3}{12} = 1.07\text{ cm}^4$

$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{1.07\text{ cm}^4}{1\text{ cm}} = 1.07\text{ cm}^3$

强度条件(5.6)改写成

于是有

$M_{\max} \leq W_z[\sigma]$

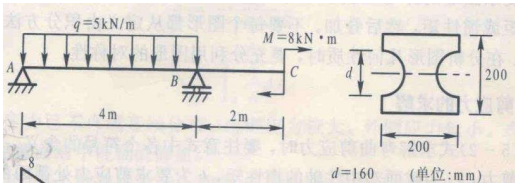
$Fa \leq W_z[\sigma]$

$F \leq \frac{W_z[\sigma]}{a} = 3\text{ kN}$

所以根据压板的强度,最大压紧力不应超过 3 kN。

《辅导》p68例5-1

例 5-1 已知一外伸梁截面形状和受力情况如图 5-1 所示。试作梁的 Q、M 图，并求梁内最大弯曲正应力。



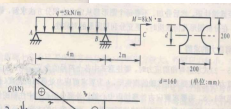
解：(1) 受力分析。
由平衡条件得支反力 $R_A = 8 \text{ kN}$, $R_B = 12 \text{ kN}$

作 Q、M 图如图 5-1。

由 M 图可知 $|M|_{\max} = 8 \text{ kN}\cdot\text{m}$

(2) 几何性质。
由于横截面的对称性，可确定中性轴的位置在图形的中点，利用负面积法求图形对中性轴的惯性矩

$$I_x = \frac{200 \times 200^3}{12} - \frac{\pi \times 160^4}{64} = 10.1 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$



(3) 最大弯曲正应力。

由正应力计算公式

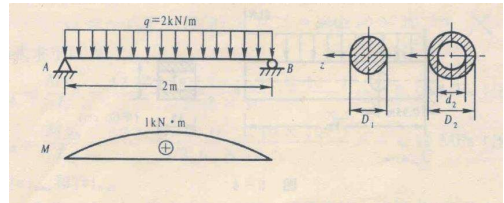
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_x} = \frac{8 \times 10^3 \times 0.1}{10.1 \times 10^{-4}} = 7.9 \text{ MPa}$$

在 B 截面上下边缘处。

讨论：在求解梁内力情况时，要注意到 AB 段中有 $Q=0$ 的截面，因此可由 AB 段剪力 $Q(x) = R_A - qx$ 求出 $Q=0$ 处 $x_0 = 8/5 \text{ m}$ ，然后求得弯矩极值 $M_{\max} = 6.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ，虽然该值不是全梁的弯矩最大值，但求出该极值也是非常重要的。
另外在求图形几何性质时，采用负面积法用矩形的惯性矩减去圆形的惯性矩，这是因为两个半圆对称于中性轴，等价于一个圆形，若图形不对称，则要采用平行移轴公式求解。同时要注意只有惯性矩、静矩可以求和(或差)，而抗弯截面系数 W 是不能求和(或差)的。

《辅导》p73例5-5

例 5-5 简支梁承受均布载荷作用(图 5-5)。若采用两种截面面积相等的实心 and 空心圆截面， $D_1 = 40 \text{ mm}$, $\alpha = d_2/D_2 = 3/5$ 。试分别计算其最大正应力，并求空心截面比实心截面的最大正应力减小了百分之几？

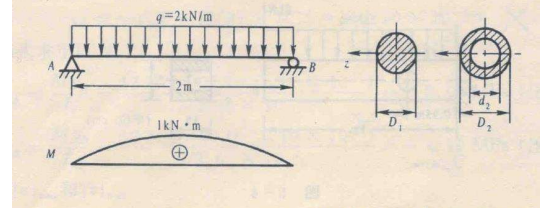


(3) 最大正应力的比较。

空心截面比实心截面的最大正应力减小

$$\frac{\sigma_{\max} - \sigma'_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{159.2 - 93.6}{159.2} = 41.2\%$$

从横截面上正应力沿截面高度的变化规律可见，空心圆截面要比实心圆截面合理，因为在靠近中性轴处正应力较小，而实心圆截面在 x 轴附近的材料反而多了，故不合理。本例为提高梁的承载能力，合理设计截面形状提供了依据。



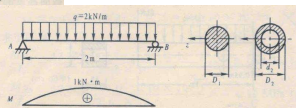
解：(1) 几何尺寸。

依题意两种截面面积相等，得

$$\frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi (D_2^2 - d_2^2)}{4} = \frac{\pi D_2^2}{4} (1 - \alpha^2)$$

$$D_1 = \frac{D_2}{\sqrt{1 - \alpha^2}} = \frac{40}{\sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2}} = 50 \text{ mm}$$

$$d_2 = \frac{3}{5} D_2 = 30 \text{ mm}$$



(2) 最大正应力。

对简支梁受均布载荷作用，可作其弯矩图(图 5-5)，得最大弯矩：

$$M_{\max} = \frac{q l^2}{8} = \frac{(2 \times 10^3) \times 2^2}{8} = 1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

实心截面

$$W_x = \frac{\pi D_1^3}{32}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{32 \times 1 \times 10^3}{\pi (0.04)^3} = 159 \text{ MPa}$$

空心截面

$$W'_x = \frac{\pi D_2^3}{32} [1 - \alpha^4]$$

$$\sigma'_{\max} = \frac{M_{\max}}{W'_x} = \frac{32 \times 1 \times 10^3}{\pi (0.05)^3 [1 - (\frac{3}{5})^4]} = 93.6 \text{ MPa}$$

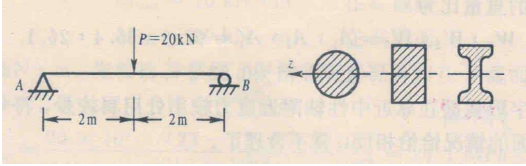
最大正应力发生在梁的上边缘处。

《辅导》p74例5-6

例 5-6 简支梁承受载荷如图 5-6 所示。材料的许用应力 $[\sigma]=160 \text{ MPa}$ ，试设计截面尺寸。

- (1) 圆截面；
- (2) 矩形截面， $b/h=1/2$ ；
- (3) 工字形截面。

并求这三种截面梁的重量比。



解：由对称性分析，梁的中间截面为危险截面，其最大弯矩为

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} = \frac{20 \times 4}{4} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(1) 截面设计。
由正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$$

圆截面 $W = \frac{\pi d^3}{32}$ 得

$$\sigma_{\max} = \frac{20 \times 10^3 \times 32}{\pi d^3} \leq 160 \times 10^6$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32(20 \times 10^3)}{\pi(160 \times 10^6)}} = 10.84 \text{ cm}$$

圆截面面积 $A_1 = \frac{\pi d^2}{4} = 92.3 \text{ cm}^2$

矩形截面 $W = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3}$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{20 \times 10^3 \times 3}{2b^3} \leq 160 \times 10^6$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{(20 \times 10^3) \times 3}{160 \times 10^6}} = 5.72 \text{ cm}$$

$$h = 2b = 11.44 \text{ cm}$$

$$A_2 = bh = 65.4 \text{ cm}^2$$

工字形截面 $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{20 \times 10^3}{W} \leq 160 \times 10^6$

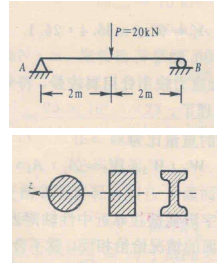
$$W \geq 125 \text{ cm}^3$$

查表选取 No. 16 号工字钢，横截面面积 $A_3 = 26.1 \text{ cm}^2$

(2) 重量比。
这三种截面梁的重量比为

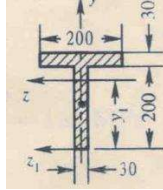
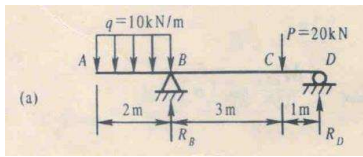
$$W_1 : W_2 : W_3 = A_1 : A_2 : A_3 = 92.3 : 65.4 : 26.1 = 1 : 0.71 : 0.28$$

由此可见，工字形截面在靠近中性轴附近应力较小处用料较少，符合正应力分布规律，因而截面的材料利用较合理。圆截面、矩形截面的材料利用就不合理了。



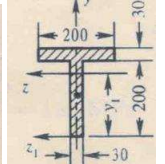
《辅导》p76例5-7

例 5-7 铸铁梁的载荷及截面尺寸如图 5-7(a) 所示。材料的许用拉应力 $[\sigma_t]=40 \text{ MPa}$ ，许用压应力 $[\sigma_c]=100 \text{ MPa}$ ，试校核梁的正应力强度。若载荷不变，将 T 形横截面倒置(成 L 形)，是否合理？



解：(1) 截面几何性质。
取参考坐标 z_1 ，形心至 z_1 轴距离 y_1 ，则

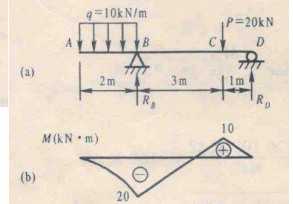
$$y_1 = \frac{(20 \times 3) \times 10 + (20 \times 3) \times 21.5}{2 \times (20 \times 3)} = 15.75 \text{ cm}$$

$$I_z = \frac{3 \times 20^3}{12} + (20 \times 3) \times 5.75^2 + \frac{20 \times 3^3}{12} + (20 \times 3) \times (21.5 - 15.75)^2 = 6013 \text{ cm}^4$$


(2) 强度校核。
由静力平衡条件求出 $R_B = 30 \text{ kN}$ ， $R_D = 10 \text{ kN}$

梁的弯矩图如图 5-7(b)，由 M 可知

$$M_{\max} = 10 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{在 C 截面}$$

$$M_{\min} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{在 B 截面}$$


$|M|_{\max} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ，先校核 B 截面。根据弯矩情况可知在 B 截面最大拉应力发生在边缘(图 5-7(c))，最大压应力发生在下边缘。

$$\sigma_{t, \max} = \frac{20 \times 10^3 \times (23 - 15.75) \times 10^{-3}}{6013 \times 10^{-8}} = 24.1 \text{ MPa} < [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c, \max} = \frac{20 \times 10^3 \times 15.75 \times 10^{-3}}{6013 \times 10^{-8}} = 52.4 \text{ MPa} < [\sigma_c]$$

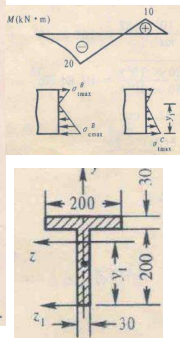
对 C 截面，稍加分析不难看出，最大拉应力发生在下边缘(图 5-7(e))，而最大压应力小于 B 截面的值，不需再计算，所以

$$\sigma_{t, \max} = \frac{10 \times 10^3 \times 15.75 \times 10^{-3}}{6013 \times 10^{-8}} = 26.2 \text{ MPa} < [\sigma_t]$$

故梁满足强度要求。

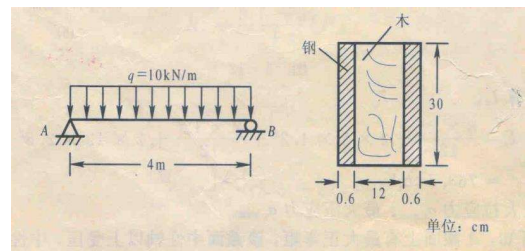
(3) 截面倒置。
若截面倒置成 L 形，则截面 B 最大拉应力将增加为 $\sigma_{t, \max} = 52.4 \text{ MPa} > [\sigma_t]$ ，显然，这拉应力强度不够，因而截面倒置是不合理的。

讨论：对铸铁等脆性材料制成的梁，因其抗压性能不同，且抗压性能高于抗拉性能，所以横截面一般应设计成不对称于中性轴的形状(如 T 形)，其形心位置应偏向受拉一侧更合理。



《辅导》p84例5-13

例 5-13 在木梁两侧用钢板加固，联接成整体，受力及截面如图 5-13 所示。已知 $E_{\text{钢}}=200 \text{ GPa}$ ， $E_{\text{木}}=10 \text{ GPa}$ 。试求梁的最大正应力。



解：简支梁受均布荷载作用，其最大弯矩为

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} = \frac{1}{8} \times 10 \times 4^2 = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

且

$$M_{max} = M_M + M_K$$

由上式无法解出 M_M 、 M_K ，但当梁弯曲变形时，钢板与木板的变形一致，即弯曲曲率相同，由曲率公式 $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ ，可得

$$\frac{M_M}{E_M I_M} = \frac{M_K}{E_K I_K}$$

$$I_M = \left(\frac{1}{12} \times 0.6 \times 30^3\right) \times 2 = 2700 \text{ cm}^4$$

$$I_K = \frac{12 \times 30^3}{12} = 27000 \text{ cm}^4$$

将已知条件代入，得

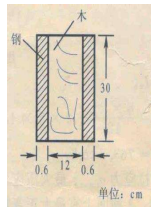
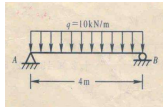
$$M_M = \frac{20}{3} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_K = \frac{40}{3} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(\sigma_M)_{max} = \frac{M_M y_{max}}{I_M} = \frac{20 \times 10^3 \times 15 \times 10^{-2}}{27000 \times 10^{-4}} = 74.07 \text{ MPa}$$

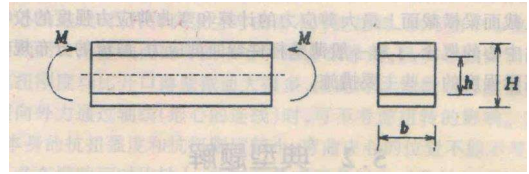
$$(\sigma_K)_{max} = \frac{M_K y_{max}}{I_K} = \frac{40 \times 10^3 \times 15 \times 10^{-2}}{27000 \times 10^{-4}} = 3.70 \text{ MPa}$$

可见钢板承受的工作应力要比木材大。



《典型题解》p88例5-2

例5-2 (上海交通大学 1997 年试题) 由两种材料胶结成的组合梁，上、下盖板的弹性模量为 E_1 ，中性层的弹性模量为 E_2 ，且 $E_1 = 3E_2$ ， $h = 3H/4$ 。试求：
 ① 正应力沿高度的变化规律；
 ② 盖板与中性层的最大正应力之比。



(1) 设平面假设仍然成立，于是

$$\epsilon = \frac{y}{\rho}$$

其中 ρ 是中性层的曲率半径。

上、下盖板和中间部分的应力应变关系为

$$\begin{cases} \sigma_1 = E_1 \epsilon = E_1 \frac{y_1}{\rho} \\ \sigma_2 = E_2 \epsilon = E_2 \frac{y_2}{\rho} \end{cases}$$

将上式代入平衡关系 $M = \int \sigma y dA$

$$M = \int_1 \frac{E_1 y_1^2 dA}{\rho} + \int_2 \frac{E_2 y_2^2 dA}{\rho} = \frac{1}{\rho} (E_1 I_1 + E_2 I_2)$$

其中 I_1 、 I_2 分别是上、下盖板横截面积和中间部分横截面对中性轴的惯性矩。由上式可得

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$$

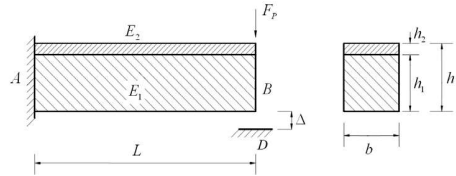
$$\therefore \begin{cases} \sigma_1 = \frac{E_1 y_1}{\rho} = \frac{E_1 M y_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \\ \sigma_2 = \frac{E_2 y_2}{\rho} = \frac{E_2 M y_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \end{cases}$$

(2) $\frac{\sigma_{1max}}{\sigma_{2max}} = \frac{E_1 y_{1max}}{E_2 y_{2max}} = \frac{E_1 \cdot \frac{1}{2} H}{E_2 \cdot \frac{3}{4} H} = 4$

2008年第八届力学竞赛题3：顶部增强的悬臂梁（30分）

有一模量为 E_2 的矩形截面悬臂梁 AB ， A 端固定， B 端自由。梁长为 L ，截面高度为 h_2 ，宽度为 b 。梁上表面粘着模量为 $E_2 = 2E_1$ 的增强材料层，该层高度 $h_2 = 0.1h_1$ ，长度和宽度与梁 AB 相同。工作台面 D 距离 B 端下表面高度为 Δ 。在 B 端作用垂直向下的载荷 F_p 。不考虑各部分的自重。

- 求组合截面形心的位置（6分）。
- 求使梁 B 端下表面刚好接触 D 台面所需的力 F_p （8分）。
- 求此时粘接面无相对滑动情况下的剪力（6分）。
- 计算梁的剪力值并画出其沿梁截面高度的分布图（10分）。



$$\epsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma = E\epsilon \quad \sigma = E \frac{y}{\rho}$$

$$F_N = \int_A E \frac{y}{\rho} dA = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho} \int_A E y dA = 0 \Rightarrow \int_A E y dA = 0$$

$$M_{iz} = \int_A y E \frac{y}{\rho} dA = M \Rightarrow \frac{1}{\rho} \int_A E y^2 dA = M$$

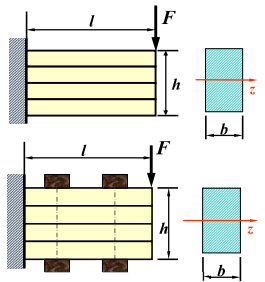
例题2 由 n 片薄片组成的梁，当每片间的摩擦力甚小时，每一薄片就独立弯曲，近似地认为每片上承担的外力等于 F/n

解：每一薄片中的最大正应力

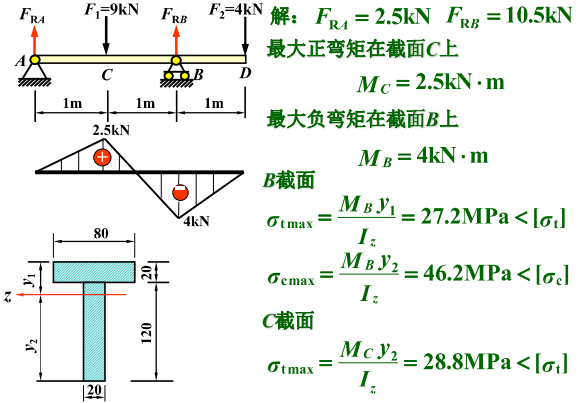
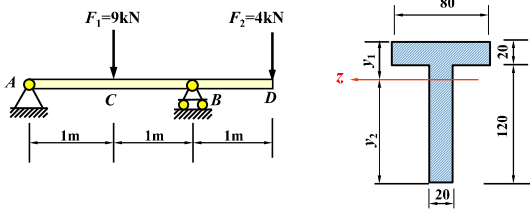
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{\frac{F \cdot l}{n}}{\frac{1}{6} \cdot b \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^2} = \frac{6Fl}{bh^2} \cdot n$$

若用刚度足够的螺栓将薄片联紧，杆就会象整体梁一样弯曲

最大正应力等于
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{Fl}{6bh^2} = \frac{6Fl}{bh^2}$$



例题3 T形截面铸铁梁的荷载和截面尺寸如图所示。铸铁的许用拉应力为 $[\sigma_t] = 30\text{MPa}$ ，许用压应力为 $[\sigma_c] = 160\text{MPa}$ 。已知截面对形心轴 z 的惯性矩为 $I_z = 763\text{cm}^4$ ， $y_1 = 52\text{mm}$ ，校核梁的强度。



解: $F_{R1} = 2.5\text{kN}$ $F_{R2} = 10.5\text{kN}$
 最大正弯矩在截面C上
 $M_C = 2.5\text{kN}\cdot\text{m}$
 最大负弯矩在截面B上
 $M_B = 4\text{kN}\cdot\text{m}$
B截面
 $\sigma_{t\max} = \frac{M_B y_1}{I_z} = 27.2\text{MPa} < [\sigma_t]$
 $\sigma_{c\max} = \frac{M_B y_2}{I_z} = 46.2\text{MPa} < [\sigma_c]$
C截面
 $\sigma_{t\max} = \frac{M_C y_2}{I_z} = 28.8\text{MPa} < [\sigma_t]$

例 5.3 T形截面铸铁梁的荷载和截面尺寸如图 5.7a 所示。铸铁的抗拉许用应力为 $[\sigma_t] = 30\text{MPa}$ ，抗压许用应力为 $[\sigma_c] = 160\text{MPa}$ 。已知截面对形心轴 z 的惯性矩为 $I_z = 763\text{cm}^4$ ，且 $|y_1| = 52\text{mm}$ 。试校核此梁的强度。

解: 由静力平衡方程求出梁的支反力为 $F_{R1} = 2.5\text{kN}$, $F_{R2} = 10.5\text{kN}$
 由弯矩图如图 5.7b 所示, 最大正弯矩在截面 C 上, $M_C = 2.5\text{kN}\cdot\text{m}$, 最大负弯矩在截面 B 上, $M_B = -4\text{kN}\cdot\text{m}$ 。
 T 形截面对中性轴不对称, 同一截面上的最大拉应力和最大压应力并不相等。计算最大拉应力时, 应以 y_1 和 y_2 分别代入公式(5.2)。在截面 B 上, 弯矩是负的, 最大拉应力发生于上边缘各点(图 5.7c), 且
 $\sigma = \frac{M_B y_1}{I_z} = \frac{(4 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m})(52 \times 10^{-3} \text{ m})}{763 \times 10^{-8} \text{ m}^4} = 27.3 \times 10^6 \text{ Pa} = 27.3 \text{ MPa}$
 最大压应力发生于下边缘各点, 且
 $\sigma = \frac{M_B y_2}{I_z} = \frac{(4 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m})(120 \times 10^{-3} \text{ m} + 20 \times 10^{-3} \text{ m} - 52 \times 10^{-3} \text{ m})}{763 \times 10^{-8} \text{ m}^4} = 46.1 \times 10^6 \text{ Pa} = 46.1 \text{ MPa}$
 在截面 C 上, 虽然弯矩 M_C 的绝对值小于 M_B , 但 M_C 是正弯矩, 最大拉应力发生于截面的下边缘各点, 而这些点到中性轴的距离却比较大, 因而就有可能发生比截面 B 还要大的拉应力。由公式(5.2),
 $\sigma = \frac{M_C y_2}{I_z} = \frac{(2.5 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m})(120 \times 10^{-3} \text{ m} + 20 \times 10^{-3} \text{ m} - 52 \times 10^{-3} \text{ m})}{763 \times 10^{-8} \text{ m}^4} = 28.8 \times 10^6 \text{ Pa} = 28.8 \text{ MPa}$
 综上所述, 最大拉应力出现在截面 C 的下边缘各点处, 但从所得结果看出, 无论是最大拉应力还是最大压应力, 都未超过许用应力, 强度条件是满足的。

例 5.2 卷扬机卷筒心轴的材料为 45 钢, 许用弯曲应力 $[\sigma] = 100\text{MPa}$, 心轴的结构和受力情况如图 5.6a 所示。 $F = 25.3\text{kN}$, 试校核心轴的强度。

解: 心轴的計算簡图表示为图 5.6b。由静力平衡方程求出支反力 F_{R1} 的支反力
 $F_{R1} = \frac{(25.3 \times 10^3 \text{ N})(200 \times 10^{-3} \text{ m}) + (25.3 \times 10^3 \text{ N})(950 \times 10^{-3} \text{ m} + 200 \times 10^{-3} \text{ m})}{1.265 \times 10^{-3} \text{ m}} = 27 \times 10^3 \text{ N} = 27 \text{ kN}$
 $F_{R2} = 2F - F_{R1} = 2 \times (25.3 \times 10^3 \text{ N}) - 27 \times 10^3 \text{ N} = 23.6 \times 10^3 \text{ N} = 23.6 \text{ kN}$
 四个集中力作用的截面上的弯矩分别是
 $M_1 = 0$, $M_2 = 0$
 $M_3 = F_{R1} \times (200 \times 10^{-3} \text{ m}) = 4.72 \text{ kN}\cdot\text{m}$
 $M_4 = F_{R2} \times (115 \times 10^{-3} \text{ m}) = 3.11 \text{ kN}\cdot\text{m}$
 连接 M_1, M_2, M_3, M_4 四点, 即得心轴在四个集中力作用下的弯矩图(图 5.6c), 从图中看出截面 1-1 上的弯矩最大。
 $M_{\max} = M_3 = 4.72 \text{ kN}\cdot\text{m}$
 所以截面 1-1 可能是危险截面。此外, 在截面 2-2 和 3-3 上虽然弯矩较小, 但这两个截面的直径也较小, 也有可能发生危险截面, 所以要分别算出这两个截面的弯矩:
 $M_2 = F_{R1} \left(200 \times 10^{-3} \text{ m} - \frac{110 \times 10^{-3} \text{ m}}{2} \right) = 3.42 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = 3.42 \text{ kN}\cdot\text{m}$
 $M_3 = F_{R2} \left(200 \times 10^{-3} \text{ m} + \frac{110 \times 10^{-3} \text{ m}}{2} \right) - F \left(\frac{110 \times 10^{-3} \text{ m}}{2} \right) = 4.63 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = 4.63 \text{ kN}\cdot\text{m}$

6-4 梁的 T 形截面如图 6-18(a) 所示。截面对中性轴的惯性矩 $I_z = 53.1 \times 10^{-6} \text{m}^4$ 。若截面上的正值弯矩 $M = 3.1 \text{kN}\cdot\text{m}$, 试求横截面上、下边缘的正应力以及中性轴以上部分截面上总压力的大小及作用位置。

现在对上述三个截面同时进行强度校核。
截面 1-1:
 $\sigma_1 = \frac{M_1}{W_{z1}} = \frac{4.72 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}}{\frac{\pi}{32} (95 \times 10^{-3} \text{ m})^3} = 56.1 \times 10^6 \text{ Pa} = 56.1 \text{ MPa} < [\sigma]$
截面 2-2:
 $\sigma_2 = \frac{M_2}{W_{z2}} = \frac{3.42 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}}{\frac{\pi}{32} (85 \times 10^{-3} \text{ m})^3} = 56.8 \times 10^6 \text{ Pa} = 56.8 \text{ MPa} < [\sigma]$
截面 3-3:
 $\sigma_3 = \frac{M_3}{W_{z3}} = \frac{4.63 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}}{\frac{\pi}{32} (88 \times 10^{-3} \text{ m})^3} = 69.2 \times 10^6 \text{ Pa} = 69.2 \text{ MPa} < [\sigma]$
 可见, 最大正应力并非发生于弯矩最大的截面上。当然, 心轴满足强度要求, 且有较大的安全储备。

6-4 梁的T形截面如图6-18(a)所示。截面对中性轴的惯性矩 $I_z = 53.1 \times 10^{-8} \text{ m}^4$ 。若截面上的正值弯矩 $M = 3.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ，试求横截面上、下边缘的正应力以及中性轴以上部分截面上总压力的大小及作用位置。

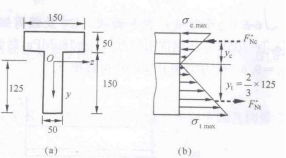


图 6-18

解 求正应力。

上边缘 (\bar{z}_1)
 $y_1 = 200 - 125 = 75 \text{ (mm)}$
 $\sigma_{\text{max}} = \frac{-My_1}{I_z} = \frac{-3.1 \times 10^3 \times 75 \times 10^{-3}}{53.1 \times 10^{-8}} = -4.38 \text{ (MPa)}$

下边缘 (\bar{z}_2)
 $y_2 = 125 \text{ mm}$, $\sigma_{\text{max}} = \frac{My_2}{I_z} = \frac{3.1 \times 10^3 \times 125 \times 10^{-3}}{53.1 \times 10^{-8}} = 7.30 \text{ (MPa)}$

横截面上正应力分布如图6-18(b)所示。

(2) 中性轴以下部分截面总拉力。

$$F_N^t = \frac{1}{2} \times 7.30 \times 125 \times 50 \times 10^{-3} = 22.81 \text{ (kN)}$$

F_N^t 作用点离中性轴 $y_1 = \frac{2}{3} \times 125 = 83.3 \text{ (mm)}$

上半部分截面总压力 $F_N^c = F_N^t = 22.81 \text{ kN}$, F_N^c ($y_1 + y_2$) = M

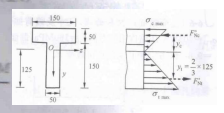
总压力到中性轴的距离为

$$y_c = \frac{M}{F_N^c} - y_1 = \frac{3.1}{22.81} \times 10^{-3} - 83.3 = 52.6 \text{ (mm)}$$

(3) 又解 $F_N^c = \int_{A'} \sigma dA = \int_{A'} \frac{My}{I_z} dA = \frac{M}{I_z} S_z'$

$$S_z' = 150 \times 50 \times (75 - 25) \times 10^{-3} + (150 - 125) \times 50 \times \frac{25}{2} \times 10^{-3} = 391 \times 10^{-3} \text{ (m}^3\text{)}$$

工 静 电 $F_N^c = \frac{3.1 \times 10^3}{53.1 \times 10^{-8}} \times 391 \times 10^{-3} = 22.8 \text{ (kN)}$



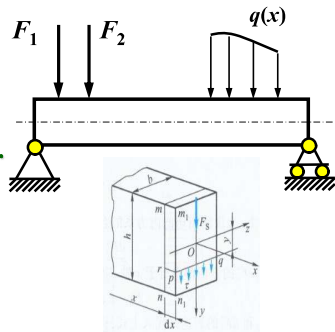
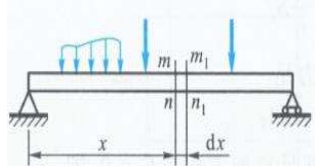
§ 5-4 梁的切应力分析

一、梁横截面上的切应力 (Shear stresses in beams)

1. 矩形截面梁(Beam of rectangular cross section)

(1) 两个假设(Two assumptions)

- (a) 切应力与剪力平行;
- (b) 切应力沿截面宽度均匀分布 (距中性轴等距离处切应力相等).



(2) 分析方法(Analysis method)

用横截面 $m-m, n-n$ 从梁中截取 dx 一段, 两横截面上的弯矩不等, 所以两截面同一 y 处的正应力也不等;

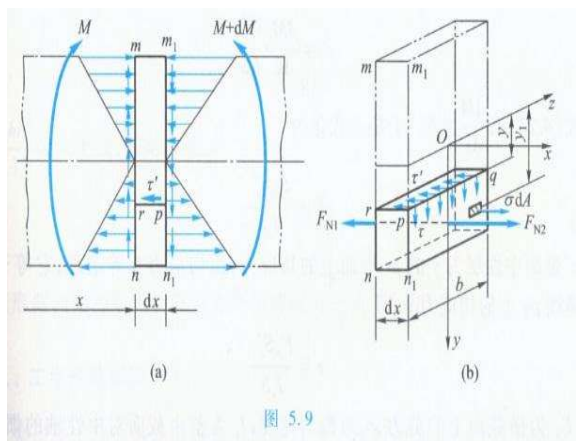
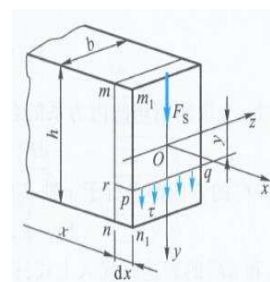
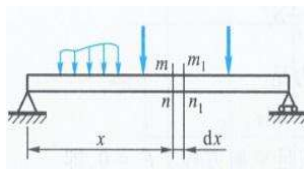
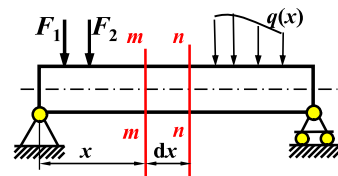


图 5.9

(3) 公式推导(Derivation of the formula)

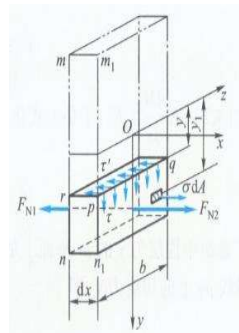
假设 $m-m, n-n$ 上的弯矩为 M 和 $M+dM$, 两截面上距中性轴 y_1 处的正应力为 σ_1 和 σ_2 .

$$\begin{aligned} F_{N1} &= \int_{A_1} \sigma_1 dA \\ &= \int_{A_1} \frac{My_1}{I_z} dA = \frac{M}{I_z} \int_{A_1} y_1 dA \\ &= \frac{M}{I_z} S_z^* \end{aligned}$$

$$F_{N2} = \int_{A_1} \sigma_2 dA = \frac{M+dM}{I_z} S_z^*$$

式中: A_1 为距中性轴为 y 的横线以外部分的横截面积.

$$S_z^* = \int_{A_1} y_1 dA \quad \text{为面积 } A_1 \text{ 对中性轴的静矩.}$$



$$F_{N1} = \frac{M}{I_z} S_z^*$$

$$F_{N2} = \frac{M+dM}{I_z} S_z^*$$

$$dF'_s = \tau' b dx$$

由平衡方程

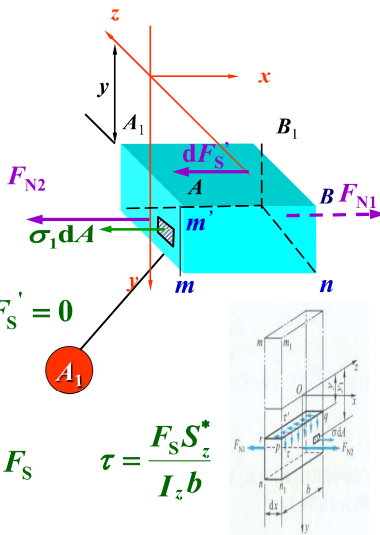
$$\sum F_x = 0 \quad F_{N2} - F_{N1} - dF'_s = 0$$

化简后得

$$\tau' = \frac{dM}{dx} \times \frac{S_z^*}{I_z b}$$

$$\frac{dM}{dx} = F_S$$

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$

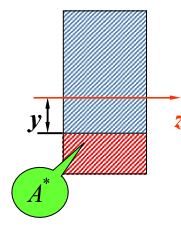


$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$

I_z —— 整个横截面对中性轴的惯性矩.

b —— 矩型截面的宽度.

S_z^* —— 距中性轴为 y 的横线以外部分横截面积对中性轴的静矩.



(4) 切应力沿截面高度的变化规律

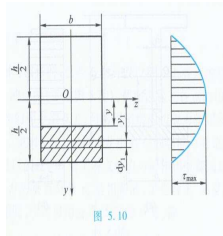
(The shear- stress distribution on the rectangular cross section)

τ 沿截面高度的变化由静矩 S_z^* 与 y 之间的关系确定.

$$S_z^* = \int_{A_1} y_1 dA$$

$$= \int_y^{h/2} y_1 b dy_1 = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b} = \frac{F_s}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$



可见，切应力沿截面高度按抛物线规律变化。
 $y = \pm h/2$ (即在横截面上距中性轴最远处) $\tau = 0$
 $y = 0$ (即在中性轴上各点处)，切应力达到最大值

$$\tau_{\max} = \frac{F_s h^2}{8I_z} = \frac{F_s h^2}{8 \times bh^3 / 12} = \frac{3}{2} \times \frac{F_s}{bh}$$

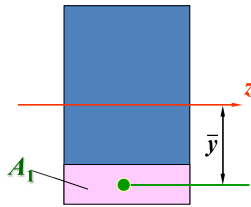
$$\tau_{\max} = \frac{3F_s}{2A} \quad \text{式中, } A=bh \text{ 为矩形截面的面积.}$$

截面静矩的计算方法

$$S_z = \int_A y dA = A\bar{y}$$

A 为截面面积

\bar{y} 为截面的形心坐标

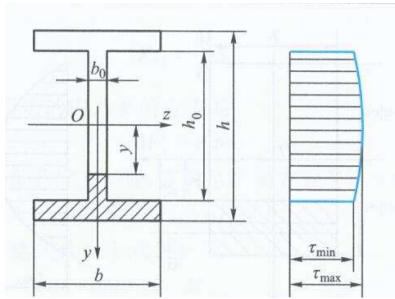
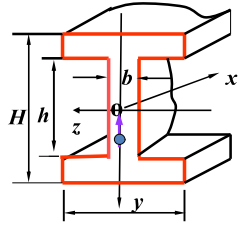


2. 工字形截面梁 (I-section beam)

研究方法同矩形截面，切应力的计算公式亦为

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b}$$

假设求应力的点到中性轴的距离为 y 。



$$\tau_{\max} = \frac{F_s}{I_z b_0} \left[\frac{b h^2}{8} - (b - b_0) \frac{h_0^2}{8} \right]$$

$$\tau_{\min} = \frac{F_s}{I_z b_0} \left(\frac{b h^2}{8} - \frac{b h_0^2}{8} \right)$$

$$\tau = \frac{F_s}{I_z b_0} \left[\frac{b}{8} (h^2 - h_0^2) + \frac{b_0}{2} \left(\frac{h_0^2}{4} - y^2 \right) \right]$$

从以上两式看出，因为腹板的宽度 b_0 远小于翼缘的宽度 b ，因此 τ_{\max} 与 τ_{\min} 实际上相差不大。所以，可以认为在腹板上切应力大致是呈均匀分布的。若以图 5.11b 中应力分布图的面积乘以腹板厚度 b_0 ，即可得到腹板上的总剪力 F_{s1} 。计算结果表明， F_{s1} 等于 $(0.95 \sim 0.97) F_s$ 。可见，横截面上的剪力 F_s 的绝大部分由腹板所负担。既然腹板几乎负担了截面上的全部剪力，而且腹板上的切应力又接近于均匀分布，这样，就可用腹板的截面面积除剪力 F_s ，近似地得出腹板内的切应力为

$$\tau = \frac{F_s}{b_0 h_0} \quad (5.11)$$

在翼缘上，也应有平行于 F_s 的切应力分量，分布情况比较复杂，但数量很小，并无实际意义，所以通常并不进行计算。此外，翼缘上还有平行于翼缘宽度 b 的切应力分量。它与腹板内的切应力比较，一般说也是次要的。如需计算时，可用例 5.4 给出的方法。

同时也注意到，工字梁翼缘的全部面积都在离中性轴最远处，每一点的正应力都比较大，所以翼缘负担了截面上的大部分弯矩。

$$S_z^* = b \left(\frac{h}{2} - \frac{h_0}{2} \right) \left[\frac{h_0}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{h_0}{2} \right) \right] + b_0 \left(\frac{h_0}{2} - y \right) \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{2} - y \right) \right]$$

$$= \frac{b}{8} (h^2 - h_0^2) + \frac{b_0}{2} \left(\frac{h_0^2}{4} - y^2 \right)$$

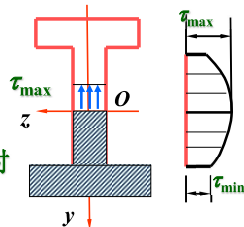
于是

$$\tau = \frac{F_s}{I_z b_0} \left[\frac{b}{8} (h^2 - h_0^2) + \frac{b_0}{2} \left(\frac{h_0^2}{4} - y^2 \right) \right]$$

$$\tau_{\max} = \frac{F_s S_{z \max}^*}{I_z d}$$

式中：

$S_{z \max}^*$ —中性轴任一边半个横截面面积对中性轴的静矩。

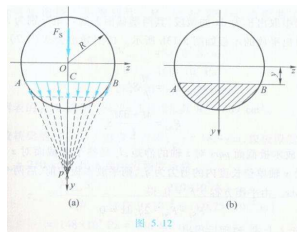


3. 圆截面梁 (Beam of circular cross section)

在截面边缘上各点的切应力的方向与圆周相切。

假设：(a) 沿宽度 $k-k'$ 上各点处的切应力均交汇于 O' 点；

(b) 各点处切应力沿 y 方向的分量沿宽度相等。



在中性轴上，切应力为最大值 τ_{\max} ，且各点的 τ_y 就是该点的总切应力。对中性轴上的点，有

$$b = 2R, \quad S_z^* = \frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{4R}{3\pi}$$

代入式 (c)，并注意到 $I_z = \frac{\pi R^4}{4}$ ，最后得出

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{F_s}{\pi R^2}$$

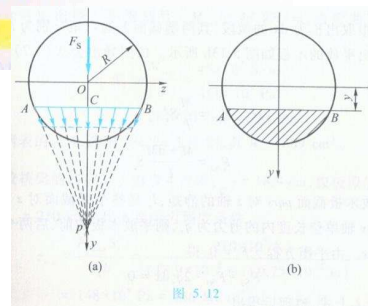
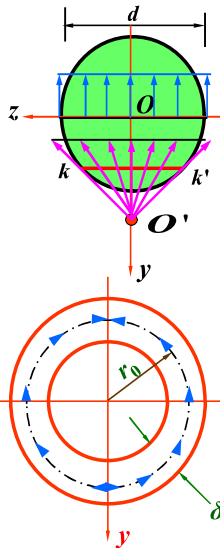


图 5.12

最大切应力发生在中性轴上

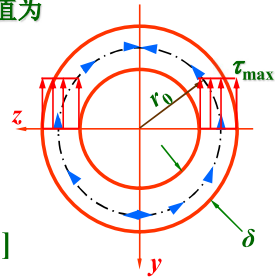
$$\tau_{\max} = \frac{F_S S_z^*}{I_z b} = \frac{4 F_S}{3 A}$$

式中 $A = \frac{\pi d^2}{4}$ 为圆截面的面积。



横截面上最大的切应力发生在中性轴上，其值为

$$\tau_{\max} = 2 \frac{F_S}{A} \quad \text{式中 } A = 2\pi r_0 \delta \text{ 为环形截面的面积}$$



4. 圆环形截面梁(Circular pipe beam)

图示为一段薄壁环形截面梁,环壁厚度为 δ , 环的平均半径为 r_0 , 由于 $\delta \ll r_0$ 故可假设

- (a) 横截面上切应力的大小沿壁厚无变化;
- (b) 切应力的方向与圆周相切.

二、强度条件 (Strength condition)

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad \tau_{\max} = \frac{F_{S\max} S_{z\max}^*}{I_z b} \leq [\tau]$$

三、需要校核切应力的几种特殊情况

- (1) 梁的跨度较短, M 较小, 而 F_S 较大时, 要校核切应力;
- (2) 铆接或焊接的组合截面, 其腹板的厚度与高度比小于型钢的相应比值时, 要校核切应力;
- (3) 各向异性材料(如木材)的抗剪能力较差, 要校核切应力.

例 5.4 由木板胶合而成的梁如图 5.13a 所示。试求胶合面上沿 x 轴单位长度内的剪力。

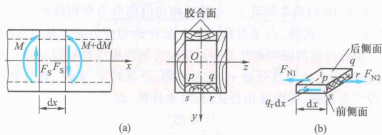


图 5.13

解: 从梁中取出长为 dx 的微段, 其两端截面上的弯矩分别为 M 和 $M+dM$ 。再从微段中取出平放的木板如图 5.13b 所示。仿照导出公式 (5.7) 的方法, 不难求出

$$F_{N1} = \frac{M}{I_z} S_z^*$$

$$F_{N2} = \frac{M+dM}{I_z} S_z^*$$

式中 S_z^* 是平放木板截面 $pqrs$ 对 z 轴的静矩, I_z 是整个梁截面对 z 轴的惯性矩。若胶合面上沿 x 轴单位长度内的剪力为 q , 则平放木板的前、后两个侧面上的剪力总共有 $2q \cdot dx$ 。由平衡方程 $\sum F_x = 0$, 得

$$F_{N2} - F_{N1} - 2q \cdot dx = 0$$

将 F_{N1} 和 F_{N2} 代入上式, 整理后得出

$$q_x = \frac{1}{2} \frac{dM}{dx} \frac{S_z^*}{I_z} = \frac{1}{2} \frac{F_S S_z^*}{I_z}$$

(b) 切应力强度校核

在计算最大切应力时, 应取荷载 F 在紧靠任一支座例如支座 A 处所示, 因为此时该支座的支反力最大, 而梁的最大切应力也就最大。

$$F_{S\max} = F_{RA} \approx F = 30 \text{ kN}$$

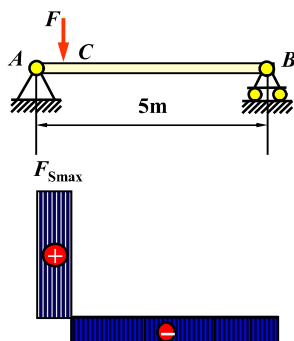
查型钢表中, 20a号工字钢, 有

$$\frac{I_z}{S_{z\max}^*} = 17.2 \text{ cm} \quad d = 7 \text{ mm}$$

据此校核梁的切应力强度

$$\tau_{\max} = \frac{F_{S\max} S_{z\max}^*}{I_z d} = 24.9 \text{ MPa} < [\tau]$$

以上两方面的强度条件都满足, 所以此梁是安全的。



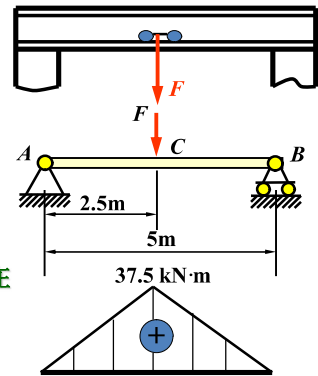
例题4 一简易起重设备如图所示。起重量(包含电葫芦自重) $F = 30 \text{ kN}$, 跨长 $l = 5 \text{ m}$ 。吊车大梁 AB 由 20a 工字钢制成。其许用弯曲正应力 $[\sigma] = 170 \text{ MPa}$, 许用弯曲切应力 $[\tau] = 100 \text{ MPa}$, 试校核梁的强度。

解: 此吊车梁可简化为简支梁, 力 F 在梁中间位置时有最大正应力。

$$M_{\max} = 37.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(a) 正应力强度校核 由型钢表查得 20a 工字钢的 $W_z = 237 \text{ cm}^3$

所以梁的最大正应力为 $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = 158 \text{ MPa} < [\sigma]$



例题5 简支梁 AB 如图所示。 $l = 2 \text{ m}$, $a = 0.2 \text{ m}$ 。梁上的载荷为 q 为 10 kN/m , $F = 200 \text{ kN}$ 。材料的许用应力为 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$, $[\tau] = 100 \text{ MPa}$, 试选择工字钢型号。

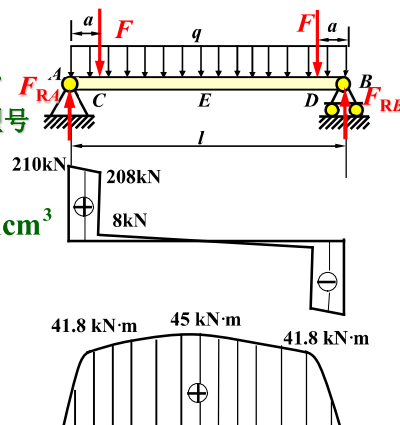
解: (1) 计算支反力做内力图。

(2) 根据最大弯矩选择工字钢型号

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{45 \times 10^3}{160 \times 10^6} = 281 \text{ cm}^3$$

查型钢表, 选用 22a 工字钢, 其

$$W_z = 309 \text{ cm}^3$$



(3) 校核梁的切应力 查表得 $\frac{I_z}{S_{z\max}^*} = 18.9\text{cm}$,

腹板厚度 $d=0.75\text{cm}$, 由剪力图知最大剪力为 210kN

$$\tau_{\max} = \frac{F_{S\max} S_{z\max}^*}{I_z b} = \frac{210 \times 10^3}{18.9 \times 10^{-2} \times 0.75 \times 10^{-2}}$$

$$= 148\text{MPa} > [\tau] = 100\text{MPa}$$

τ_{\max} 超过 $[\tau]$ 很多, 应重新选择更大的截面. 现已选 25b 工字钢进行试算

查表得 $\frac{I_z}{S_{z\max}^*} = 18.9\text{cm}, d=1\text{cm}$

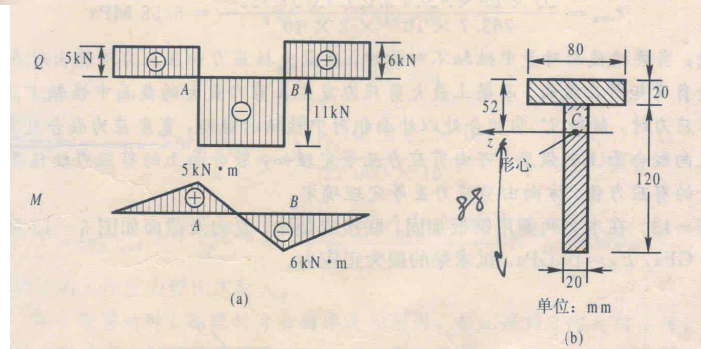
$$\tau_{\max} = \frac{210 \times 10^3}{21.3 \times 10^{-2} \times 1 \times 10^{-2}} = 98.6\text{MPa} \leq [\tau] = 100\text{MPa}$$

所以应选用型号为 25b 的工字钢.

《辅导》p83例5-12

例 5-12 如图 5-12 所示, T 形截面梁由相同材料的两部分胶合而成. 已知梁的剪力图、弯矩图、截面尺寸和形心位置. 试求:

- (1) 截面对形心 z 轴的惯性矩;
- (2) 最大拉应力和最大压应力;
- (3) 胶合面上及截面上的最大剪应力.



解: (1) 计算 I_z .

$$I_z = \frac{8 \times 2^3}{12} + 2 \times 8 \times 4.2^2 + \frac{2 \times 12^3}{12} + 2 \times 12 \times 2.8^2 = 763.7 \text{ cm}^4$$

(2) 计算最大拉应力 σ_{\max} 、最大压应力 σ_{\min} .
由弯矩图可知, A 截面上有最大正弯矩, 该截面中性轴以上受压, 中性轴以下受拉.

$$\sigma_t = \frac{5 \times 10^3 \times 8.8 \times 10^{-6}}{763.7 \times 10^{-8}} = 57.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \frac{5 \times 10^3 \times 5.2 \times 10^{-2}}{763.7 \times 10^{-8}} = 34 \times 10^6 \text{ Pa}$$

B 截面有最大负弯矩, 该截面中性轴以上受拉, 中性轴以下受压.

$$\sigma_t = \frac{6 \times 10^3 \times 5.2 \times 10^{-2}}{763.7 \times 10^{-8}} = 40.9 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$\sigma_c = \frac{6 \times 10^3 \times 8.8 \times 10^{-2}}{763.7 \times 10^{-8}} = 69.1 \times 10^6 \text{ Pa}$$

所以, 整个梁上

$$\sigma_{t\max} = 57.6 \text{ MPa} \quad (\text{A 截面下边缘})$$

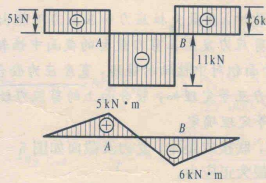
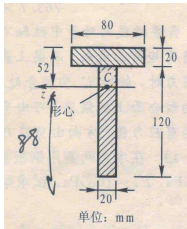
$$\sigma_{c\max} = 69.1 \text{ MPa} \quad (\text{B 截面下边缘})$$

(3) 计算 $\tau_{\text{胶}}$ 和 τ_{\max} .

从剪力图可知, 最大剪力在 B 处左侧截面 $|Q|_{\max} = 11 \text{ kN}$

$$\tau_{\text{胶}} = \frac{11 \times 10^3 \times 2 \times 8 \times 4.2 \times 10^{-6}}{763.7 \times 10^{-8} \times 2 \times 10^{-2}} = 4.84 \text{ MPa}$$

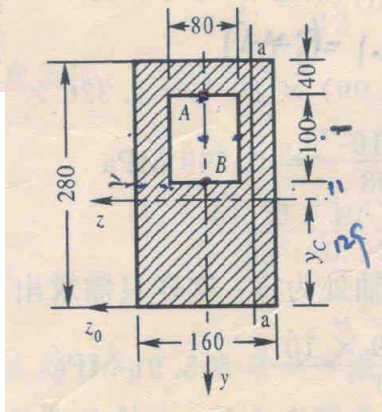
$$\tau_{\max} = \frac{11 \times 10^3 \times 2 \times 8.8 \times 4.4 \times 10^{-6}}{763.7 \times 10^{-8} \times 2 \times 10^{-2}} = 5.58 \text{ MPa}$$



《辅导》p71例5-3

例 5-3 已知直梁的横截面如图 5-3(a) 所示, 横向载荷作用在对称平面 xOy (即截面对称轴 y 与轴线 x 组成的平面) 内, 该截面上的剪力 $Q=12 \text{ kN}$, 弯矩 $M=12 \text{ kN} \cdot \text{m}$. 试计算该截面上:

- (1) A、B 两点处的正应力;
- (2) $|\sigma|_{\max}$ 和 $|\tau|_{\max}$;
- (3) 沿 a-a 的正应力和剪应力分布图.



解: (1) 求 A、B 两点处的正应力.

按题意的加载条件可知, 此梁为平面弯曲问题, (5-1) 式可用, 但式中的 y 和 I_z 都与 z 轴有关, 所以必须首先确定中性轴 z 的位置 (即形心位置). 取参考坐标系 (如图 (a)).

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{(16 \times 28 \times 14 - 10 \times 8 \times 19) \times 10^{-6}}{(16 \times 28 - 10 \times 8) \times 10^{-4}} = 1.29 \times 10^{-1} \text{ m}$$

利用负面积法求 I_z , 注意要平行移轴.

$$I_z = \left[\frac{16 \times 28^3}{12} + 16 \times 28 \times (14 - 12.9)^2 - \frac{8 \times 10^3}{12} - 8 \times 10 \times (19 - 12.9)^2 \right] \times 10^{-8} = 2.62 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

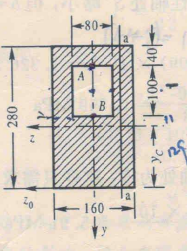
$$y_A = -(24 - 12.9) \times 10^{-2} = -1.11 \times 10^{-1} \text{ m}$$

$$y_B = -(14 - 12.9) \times 10^{-2} = -1.10 \times 10^{-1} \text{ m}$$

由 (5-1) 式求正应力

$$\sigma_A = \frac{M y_A}{I_z} = \frac{12 \times 10^3 \times (-1.11 \times 10^{-1})}{2.62 \times 10^{-4}} = -5.08 \text{ MPa} \quad (\text{压})$$

$$\sigma_B = \frac{M y_B}{I_z} = \frac{12 \times 10^3 \times (-1.10 \times 10^{-1})}{2.62 \times 10^{-4}} = -4.99 \text{ MPa} \quad (\text{压})$$



(2) 计算 $|\sigma|_{\max}$ 和 $|\tau|_{\max}$.

因 M, I_z 为定值, 故 $|\sigma|_{\max}$ 发生在 $|y|_{\max}$ 处, 即截面的上边缘点, $|y|_{\max} = 1.51 \times 10^{-1} \text{ m}$

$$|\sigma|_{\max} = \frac{M |y|_{\max}}{I_z} = \frac{12 \times 10^3 \times 1.51 \times 10^{-1}}{2.62 \times 10^{-4}} = 6.96 \text{ MPa}$$

由剪应力公式 (5-2) 可知, 同一截面上各点的剪应力数值正比于 S^*/b , 在中性轴处 S^* 最大, 但 $b=0.16 \text{ m}$, 在 B 点偏上处的 S^* 比中性轴处 S^* 略小, 但 $b=0.08 \text{ m}$, 故可断定最大剪应力发生在 B 点偏上处. 此处

$$S^* = (14 \times 16 \times 8.09 - 8 \times 10 \times 6.09) \times 10^{-6} = 1.326 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$|\tau|_{\max} = \frac{Q S^*}{I_z b} = \frac{12 \times 10^3 \times 1.326 \times 10^{-3}}{2.62 \times 10^{-4} \times 0.08} = 0.759 \text{ MPa}$$

(3) 沿 a-a 的正应力和剪应力分布.

由正应力公式可知 σ 按直线分布, 且在中性轴处为零, 这样只需求出下边缘点的 σ ,

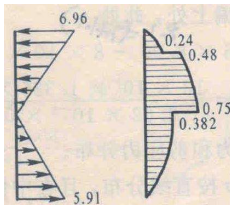
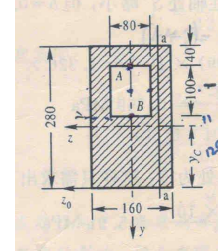
$$\sigma = \frac{M y_c}{I_z} = \frac{12 \times 10^3 \times 1.29 \times 10^{-1}}{2.62 \times 10^{-4}} = 5.91 \text{ MPa}$$

σ 分布如图 5-3(b).

剪应力按抛物线分布, 在上下边缘处为零, 中性轴处

$$\tau_{\text{中}} = \frac{Q S_{\text{中}}^*}{I_z b} = \frac{120 \times 10^3 \times 160 \times 129 \times \frac{129}{2} \times 10^{-9}}{2.62 \times 10^{-4} \times 160 \times 10^{-3}} = 0.382 \text{ MPa}$$

在宽度 b 突变处 τ 有跳跃, 计算方法同上, 读者可自行校核. 剪应力分布如图 5-3(b).

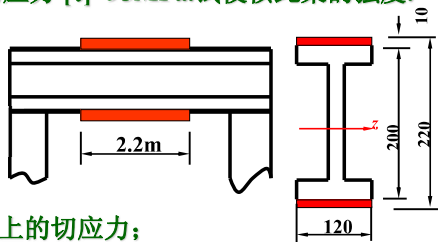


(单位: MPa)

例题6 对于图中的吊车大梁，现因移动荷载 F 增加为50kN，故在20a号工字钢梁的中段用两块横截面为120mm×10mm而长度2.2mm的钢板加强加强段的横截面尺寸如图所示.已知许用弯曲正应力 $[\sigma]=152\text{MPa}$ ，许用切应力 $[\tau]=95\text{MPa}$.试校核此梁的强度.

解：加强后的梁是阶梯状变截面梁.所以要校核

- (1) F 位于跨中时跨中截面上的弯曲正应力；
- (2) F 靠近支座时支座截面上的切应力；
- (3) F 移至未加强的梁段在截面变化处的正应力.



(1) 校核 F 位于跨中截面时的弯曲正应力

最大弯矩值为 $M_{\max} = 62.5\text{kN} \cdot \text{m}$

查表得20a工字钢 $I_z = 2370\text{cm}^4$

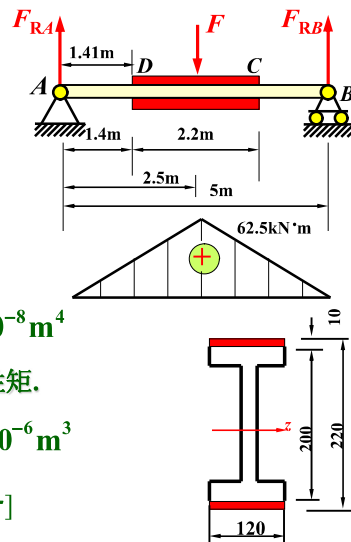
跨中截面对中性轴的惯性矩为

$$I_z = 2370 \times 10^{-8} + 2[10 \times 120(110 - 5) \times 10^{-12}] = 5020 \times 10^{-8} \text{m}^4$$

略去了加强板对其自身形心轴的惯性矩.

抗弯截面系数 $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = 456 \times 10^{-6} \text{m}^3$

$$\sigma_{\text{cmax}} = \frac{M_{\max}}{W_z} = 137\text{MPa} < [\sigma]$$



(2) 校核突变截面处的正应力，也就是校核未加强段的正应力强度.该截面上的最大弯矩为

$$M_D = \frac{Fab}{l} = 50.4\text{kN} \cdot \text{m}$$

从型钢表中查得20a工字钢

$$W_z = 237\text{cm}^3$$

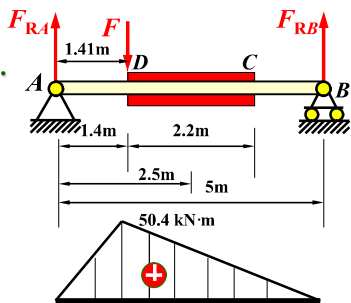
$\sigma_{D\max} = \frac{M_D}{W_z} = 213\text{MPa} > [\sigma]$ 梁不能满足正应力强度条件.

为此应将加强板适当延长.

(3) 校核阶梯梁的切应力

F 靠近任一支座时，支座截面为不利荷载位置 $F_{S\max} \approx F$

请同学们自行完成计算.



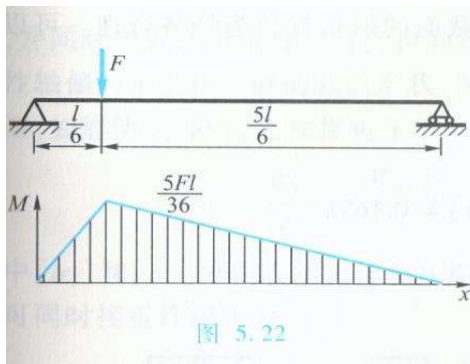
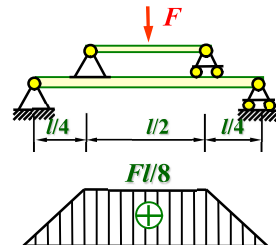
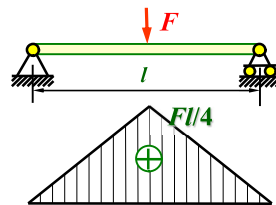
§ 5-5 提高梁强度的主要措施 (Measures to strengthen the strength of beams)

按强度要求设计梁时，主要是依据梁的正应力强度条件

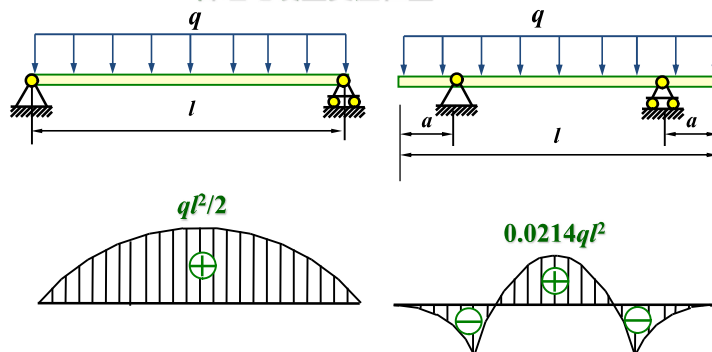
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

一、降低梁的最大弯矩值

1. 合理地布置梁的荷载



2. 合理地设置支座位置



当两端支座分别向跨中移动 $a=0.207l$ 时，最大弯矩减小.

二、增大 W_z

1. 合理选择截面形状

在面积相等的情况下，选择抗弯模量大的截面

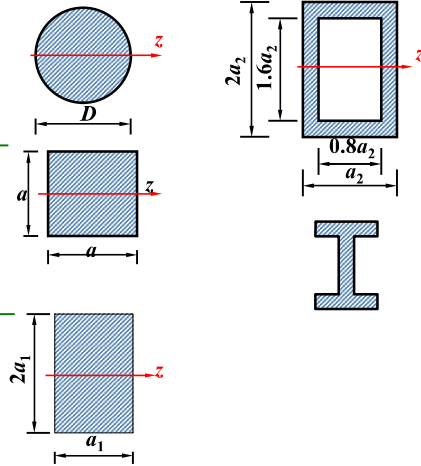
$$W_{z1} = \frac{\pi D^3}{32}$$

$$\frac{\pi D_1^2}{4} = a^2, a = \sqrt{\pi(D_1/2)}$$

$$W_{z2} = \frac{bh^2}{6} = \frac{(\sqrt{\pi R})^3}{6} = 1.18W_{z1}$$

$$\frac{\pi D_1^2}{4} = 2a_1^2, a_1 = \sqrt{2\pi}D_1$$

$$W_{z3} = \frac{bh^2}{6} = \frac{4a_1^3}{6} = 1.67W_{z1}$$



$$\frac{\pi D_1^2}{4} = 2a_2^2 - 0.8 \times 1.6a_2^2, a_2 = 1.05D_1$$

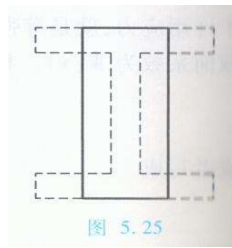
$$W_{z4} = 4.57W_{z1}$$

工字形截面与框形截面类似。

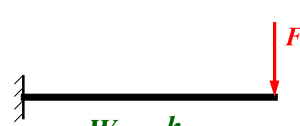
截面的形状不同，其抗弯截面系数 W_z 也就不同。可以用比值 $\frac{W_z}{A}$ 来衡量截面形状的合理性和经济性。比值 $\frac{W_z}{A}$ 较大，则截面的形状就较为经济合理。可以算出矩形截面的比值 $\frac{W_z}{A}$ 为

$$\frac{W_z}{A} = \frac{1}{6}bh^2 / (bh) = 0.167h$$

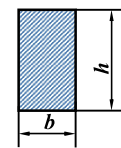
圆形的比值 $\frac{W_z}{A}$ 为

$$\frac{W_z}{A} = \frac{\pi d^3}{32} / \frac{\pi d^2}{4} = 0.125d$$


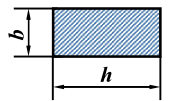
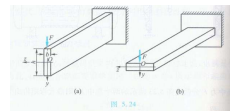
2. 合理的位置



$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{h}{b}$$



$$W_1 = \frac{bh^3}{12}$$



$$W_2 = \frac{hb^3}{12}$$

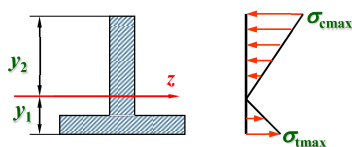
如何考虑经济性？
(表 5.1)

表 5.1 几种截面的 W_z 和 A 的比值

截面形状	矩形	圆形	槽钢	工字钢
$\frac{W_z}{A}$	0.167h	0.125d	(0.27~0.31)h	(0.27~0.31)h

三、根据材料特性选择截面形状

- 对于塑性材料制成的梁，选以中性轴为对称轴的横截面。
- 对于脆性材料制成的梁，宜采用 T 字形等对中性轴不对称的截面且将翼缘置于受拉侧。



要使 y_1/y_2 接近下列关系：最大拉应力和最大压应力同时接近许用应力

$$\frac{\sigma_{tmax}}{\sigma_{cmax}} = \frac{I_z}{I_z} \frac{M_{max}y_1}{M_{max}y_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}$$

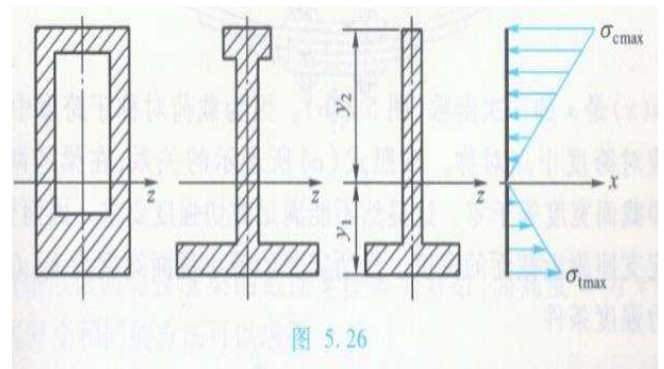
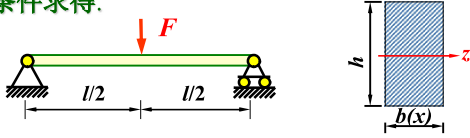


图 5.26

四、采用等强度梁

梁各横截面上的最大正应力都相等，并均达到材料的许用应力，则称为等强度梁。

例如，高度 h 保持不变而高度可变化的矩形截面简支梁，若设计成等强度梁，则其宽度随截面位置的变化规律 $b(x)$ ，可按正应力强度条件求得。



梁任一横截面上最大正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W(x)} = \frac{(F/2)x}{(1/6)b(x)h^2(x)} \leq [\sigma] \quad \text{求得 } b(x)$$

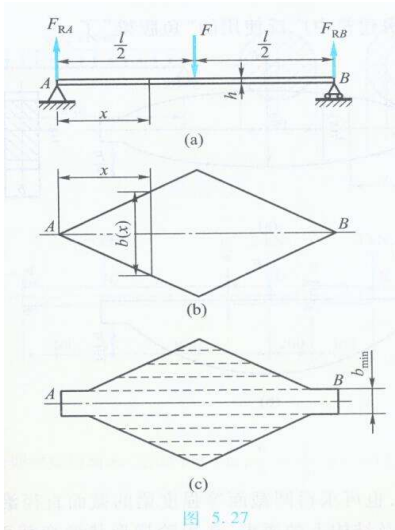
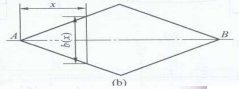


图 5.27

于是

$$W(x) = \frac{b(x)h^2}{6} = \frac{M(x)}{[\sigma]} = \frac{F}{2} \frac{x}{[\sigma]}$$



$$b(x) = \frac{3F}{[\sigma]h^2}x$$

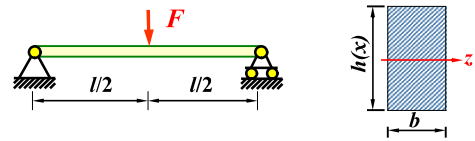
截面宽度 $b(x)$ 是 x 的一次函数(图 5.27b)。因为载荷对称于跨度中点,因而截面形状也应对跨度中点对称。按照式(c)所表示的关系,在梁的两端, $x=0$, $b(x)=0$,即截面宽度等于零。这显然不能满足剪切强度要求。因而要按剪切强度条件确定支座附近截面的宽度。设所需要的最小截面宽度为 b_{\min} (图 5.27c)。根据切应力强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{F_{S\max}}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{F}{2b_{\min}h} = [\tau]$$

由此求得

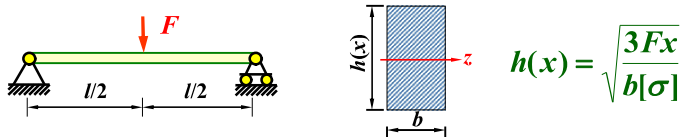
$$b_{\min} = \frac{3F}{4h[\tau]} \quad (d)$$

例如，宽度 b 保持不变而高度可变化的矩形截面简支梁，若设计成等强度梁，则其高度随截面位置的变化规律 $h(x)$ ，可按正应力强度条件求得。



梁任一横截面上最大正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W(x)} = \frac{(F/2)x}{(1/6)b(x)h^2(x)} \leq [\sigma] \quad \text{求得 } h(x)$$



但靠近支座处，应按切应力强度条件确定截面的最小高度

$$\tau_{\max} = \frac{3F_S}{2A} = \frac{3}{2} \frac{F/2}{bh_{\min}} = [\tau] \quad \text{求得 } h_{\min} = \frac{3F}{4b[\tau]}$$

按上确定的梁的外形，就是厂房建筑中常用的鱼腹梁。

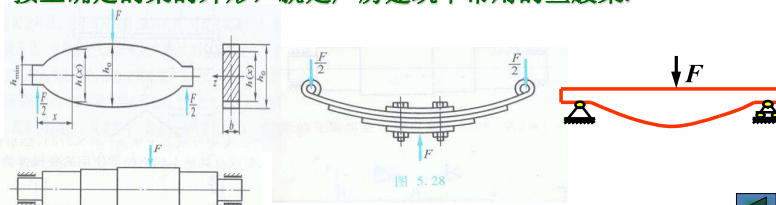
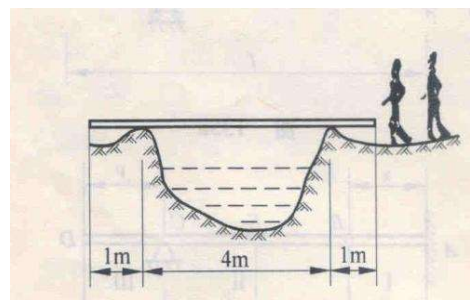


图 5.28

《力学小问题》p148题136

136. 宽为4m的水沟上横跨一长6m的窄跳板(如图 136a)。两体重为 $P=800\text{N}$ 的同伴欲过此沟。已知跳板是等截面的,允许的最大弯矩为 $[M]=600\text{N}\cdot\text{m}$ 。试说明两人采取何种办法可以安全过沟。(周道祥,合肥工业大学建筑分校。原第120题,1986, No. 3.)



解：若一人单独通过，则行至离沟边 1m 处时，跳板最大弯矩已达 $600\text{N} \cdot \text{m}$ ，不能再继续前进。

若两人同时上桥，一个在右侧外伸段距右端支座为 x_1 处，另一个在桥上，行至离左端支座 x_2 处，其弯矩如图 136b 所示。这时支座 A 的反力为

$$R_A = P(L - x_1 - x_2)/L$$

弯矩极大值为

$$M_1 = Px_1, \quad M_2 = P(L - x_1 - x_2)x_2/L$$

若要安全通过，要求 $M_1 \leq [M], M_2 \leq [M]$ ，由此得

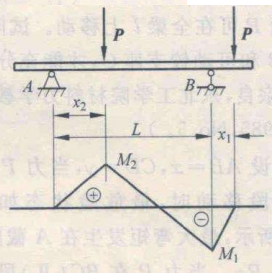
$$x_2^2 - (4 - x_1)x_2 + 3 \geq 0$$

欲使上式恒成立，则需

$$(4 - x_1)^2 - 12 \leq 0$$

解得 $0.536 \leq x_1 \leq 7.46$ 。考虑到 $M_1 \leq [M]$ ，得 $x_1 \leq 0.75\text{m}$ 。所以，当一人立于右侧

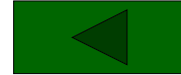
外伸段离右支座的距离为 $(0.536 \sim 0.75)\text{m}$ 之间时，另一人可安全通过跳板。通过跳板的人，立于左外伸段离左支座距离为 $(0.536 \sim 0.75)\text{m}$ 之间，另一人亦可安全通过。



作业：

5.17, 5.18, 5.20, 5.21, 5.26, 5.29, 5.30, 5.33, 5.34, 5.36

第六章结束



第七章 弯曲变形

Chapter7 Deflection of Beams

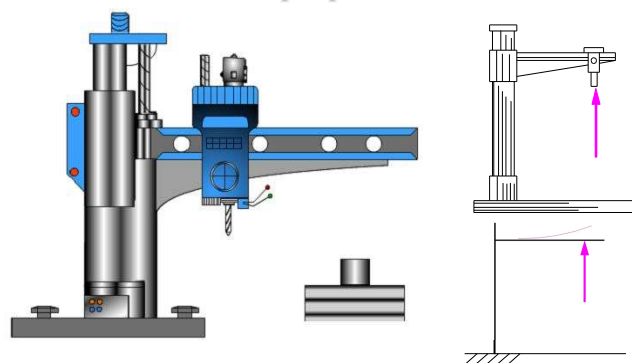
第七章 弯曲变形 (Deflection of Beams)

- ▶ § 7-1 基本概念及工程实例 (Basic concepts and example problems)
- ▶ § 7-2 挠曲线的微分方程 (Differential equation of the deflection curve)
- ▶ § 7-3 用积分法求弯曲变形 (Beam deflection by integration)
- ▶ § 7-4 用叠加法求弯曲变形 (Beam deflections by superposition)

§ 7-1 基本概念及工程实例

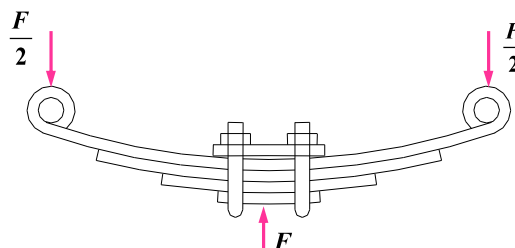
(Basic concepts and example problems)

一、工程实例 (Example problem)

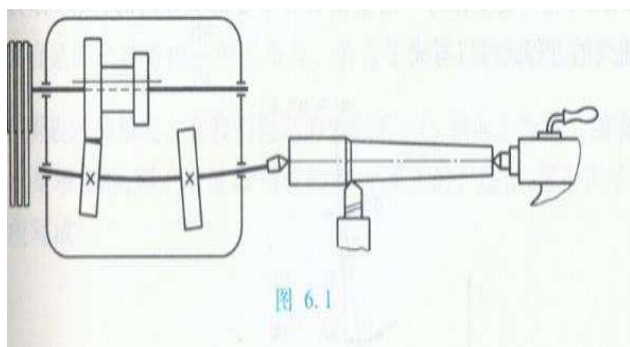


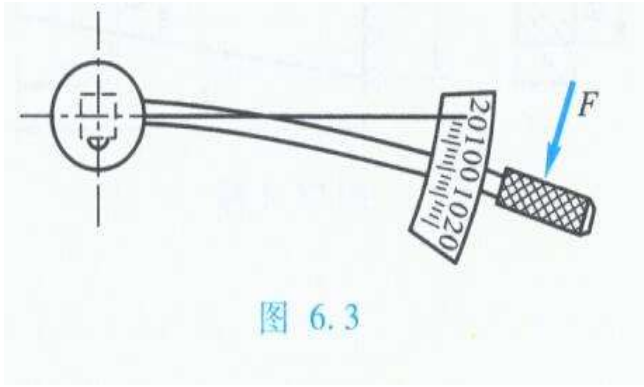
但在另外一些情况下,有时却要求构件具有较大的弹性变形,以满足特定的工作需要.

例如,车辆上的板弹簧,要求有足够大的变形,以缓解车辆受到的冲击和振动作用.



- ▶ § 7-5 静不定梁的解法 (Solution methods for statically indeterminate beams)
- ▶ § 7-6 提高弯曲刚度的措施 (The measures to strengthen rigidity)

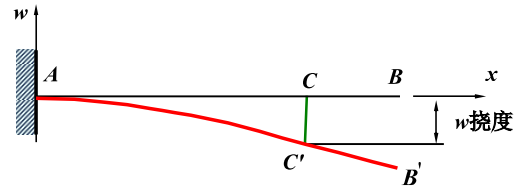




二、基本概念 (Basic concepts)

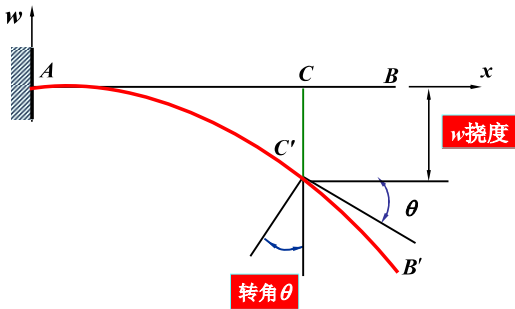
1. 挠度 (Deflection)

横截面形心 C (即轴线上的点) 在垂直于 x 轴方向的线位移, 称为该截面的挠度, 用 w 表示.



2. 转角 (Slope)

横截面对其原来位置的角位移, 称为该截面的转角. 用 θ 表示

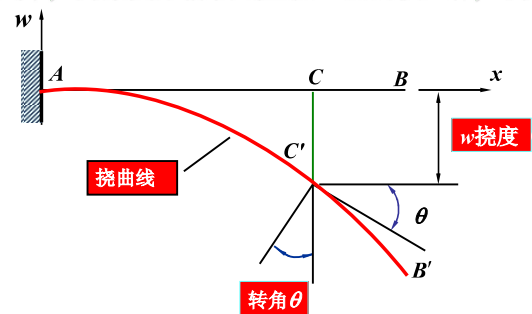


3. 挠曲线 (Deflection curve) 梁变形后的轴线称为挠曲线.

挠曲线方程 (equation of deflection curve) 为

$$w = f(x)$$

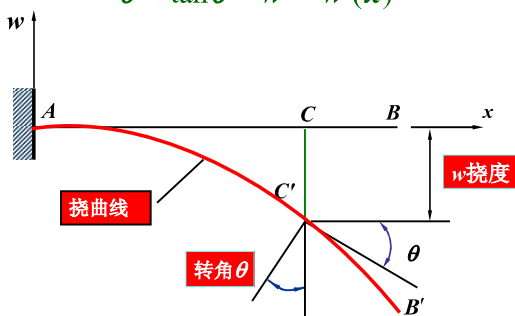
式中, x 为梁变形前轴线上任一点的横坐标, w 为该点的挠度.



4. 挠度与转角的关系

(Relationship between deflection and slope) :

$$\theta \approx \tan \theta = w' = w'(x)$$

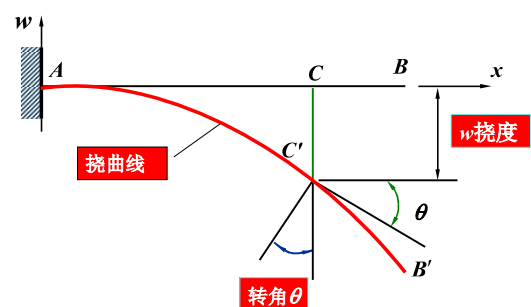


5. 挠度和转角符号的规定

(Sign convention for deflection and slope)

挠度向上为正, 向下为负.

转角自 x 转至切线方向, 逆时针转为正, 顺时针转为负.



§ 6-2 挠曲线的微分方程

(Differential equation of the deflection curve)

一、推导公式 (Derivation of the formula)

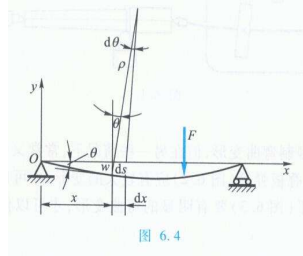
1. 纯弯曲时曲率与弯矩的关系 (Relationship between the curvature of beam and the bending moment)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

横力弯曲时, M 和 ρ 都是 x 的函数.

略去剪力对梁的位移的影响, 则

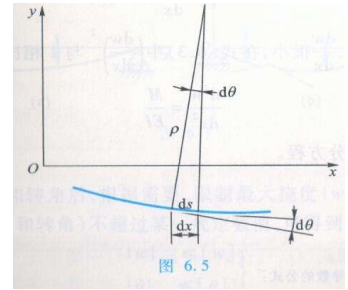
$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI}$$



2. 由数学得到平面曲线的曲率 (The curvature from the mathematics)

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{|w''|}{(1+w'^2)^{3/2}}$$

$$\pm \frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI}$$



在规定的坐标系中, x 轴水平向右

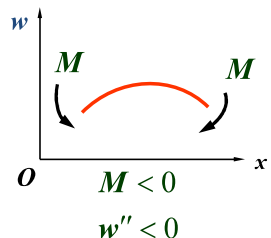
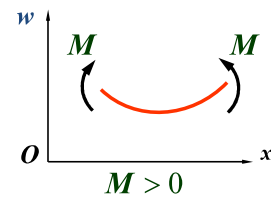
为正, w 轴竖直向上为正.

曲线向下凸时: $w'' > 0$ $M > 0$

曲线向上凸时: $w'' < 0$ $M < 0$

因此, w'' 与 M 的正负号相同

$$\pm \frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI}$$



$$\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI}$$

w'^2 与 1 相比十分微小而可以忽略不计, 故上式可近似为

$$w'' = \frac{M(x)}{EI} \quad (6.5)$$

此式称为 **梁的挠曲线近似微分方程** (differential equation of the deflection curve)

近似原因: (1) 略去了剪力的影响; (2) 略去了 w'^2 项;

(3) $\theta \approx \tan \theta = w' = w'(x)$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \text{的应用范围}$$

1. 在弹性范围内

(All stresses in the beam are below the proportional limit)

2. 具有切应力的梁 (The beam with the shear stress) $l/h \geq 5$

3. 平面弯曲 (Plane bending)

4. 直梁 (Straight beams)

§ 6-3 用积分法求弯曲变形

(Beam deflection by integration)

一、微分方程的积分

(Integrating the differential equation)

$$w'' = \frac{M(x)}{EI}$$

若为等截面直梁, 其抗弯刚度 EI 为一常量上式可改写成

$$EIw'' = M(x)$$

1. 积分一次得转角方程

(The first integration gives the equation for the slope)

$$EIw' = \int M(x)dx + C_1$$

2. 再积分一次, 得挠度方程

(Integrating again gives the equation for the deflection)

$$EIw = \iint M(x)dx dx + C_1x + C_2$$

二、积分常数的确定

(Evaluating the constants of integration)

1. 边界条件 (Boundary conditions)

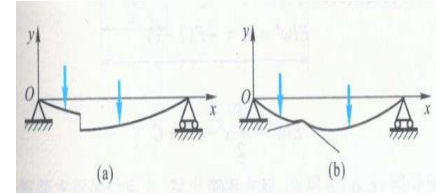
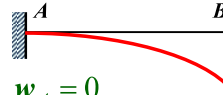
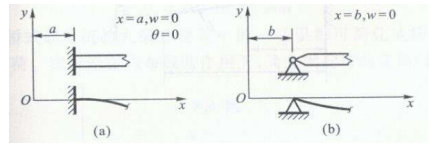
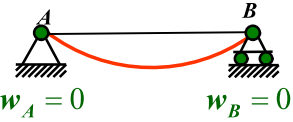
2. 连续条件 (Continue conditions)

在简支梁中, 左右两铰支座处的

挠度 w_A 和 w_B 都等于0.

在悬臂梁中, 固定端处的挠度 w_A

和转角 θ_A 都应等于0.



三、刚度条件 (Stiffness condition)

1. 数学表达式 (Mathematical formula)

$$w_{\max} \leq [w]$$

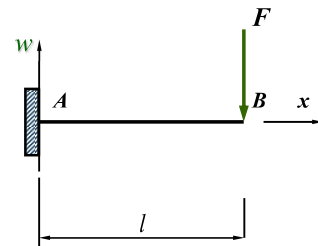
$$\theta_{\max} \leq [\theta]$$

$[w]$ 和 $[\theta]$ 是构件的许可挠度和转角.

2. 刚度条件的应用 (Application of stiffness condition)

- (1) 校核刚度 (Check the stiffness of the beam)
- (2) 设计截面尺寸 (Determine the allowable load on the beam)
- (3) 求许可载荷 (Determine the required dimensions of the beam)

例题1 图示一抗弯刚度为 EI 的悬臂梁, 在自由端受一集中力 F 作用. 试求梁的挠曲线方程和转角方程, 并确定其最大挠度 w_{\max} 和最大转角 θ_{\max}



解:

(1) 弯矩方程为

$$M(x) = -F(l-x) \quad (1)$$

(2) 挠曲线的近似微分方程为

$$EIw'' = M(x) = -Fl + Fx \quad (2)$$

对挠曲线近似微分方程进行积分

$$EIw' = -Flx + \frac{Fx^2}{2} + C_1 \quad (3)$$

$$EIw = -\frac{Flx^2}{2} + \frac{Fx^3}{6} + C_1x + C_2 \quad (4)$$

$$EIw' = -Flx + \frac{Fx^2}{2} + C_1 \quad (3)$$

$$EIw = -\frac{Flx^2}{2} + \frac{Fx^3}{6} + C_1x + C_2 \quad (4)$$

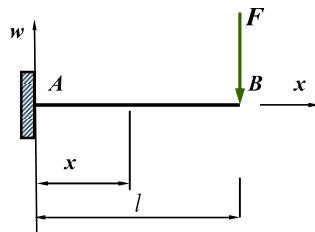
边界条件 $x=0, w=0$

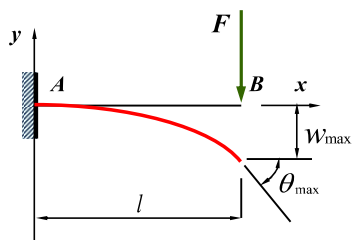
$$x=0, w'=0$$

将边界条件代入 (3) (4) 两式中, 可得 $C_1 = 0$ $C_2 = 0$

梁的转角方程和挠曲线方程分别为

$$EIw' = -Flx + \frac{Fx^2}{2} \quad EIw = -\frac{Flx^2}{2} + \frac{Fx^3}{6}$$





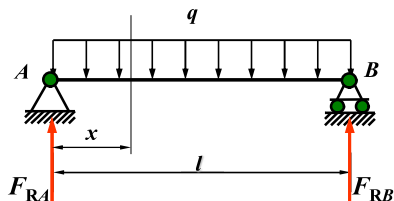
θ_{\max} 和 w_{\max} 都发生在自由端截面处

$$\theta_{\max} = \theta|_{x=l} = -\frac{Fl^2}{EI} + \frac{Fl^2}{2EI} = -\frac{Fl^2}{2EI} \quad (\curvearrowright)$$

$$w_{\max} = w|_{x=l} = -\frac{Pl^3}{3EI} \quad (\downarrow)$$

解: 由对称性可知, 梁的两个支反力为

$$F_{RA} = F_{RB} = \frac{ql}{2}$$

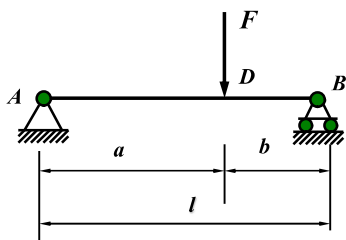


此梁的弯矩方程及挠曲线微分方程分别为

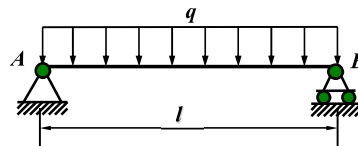
$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \quad EIw' = \frac{ql}{4}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + C$$

$$EIw'' = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \quad EIw = \frac{ql}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 + Cx + D$$

例题3 图示一抗弯刚度为 EI 的简支梁, 在 D 点处受一集中力 F 的作用. 试求此梁的挠曲线方程和转角方程, 并求其最大挠度和最大转角.



例题2 图示一抗弯刚度为 EI 的简支梁, 在全梁上受集度为 q 的均布荷载作用. 试求此梁的挠曲线方程和转角方程, 并确定其 θ_{\max} 和 w_{\max}



边界条件 $x=0$ 和 $x=l$ 时, $w=0$

梁的转角方程和挠曲线方程

分别为

$$\theta = \frac{q}{24EI}(6lx^2 - 4x^3 - l^3)$$

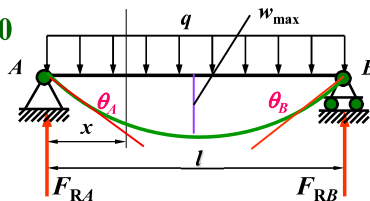
$$w = \frac{qx}{24EI}(2lx^2 - x^3 - l^3)$$

最大转角和最大挠度分别为

在 $x=0$ 和 $x=l$ 处转角的绝对值相等且都是最大值,

$$\theta_{\max} = -\theta_A = \theta_B = \frac{ql^3}{24EI}$$

在梁跨中点处有最大挠度值 $w_{\max} = w|_{x=l/2} = -\frac{5ql^4}{384EI}$



解: 梁的两个支反力为

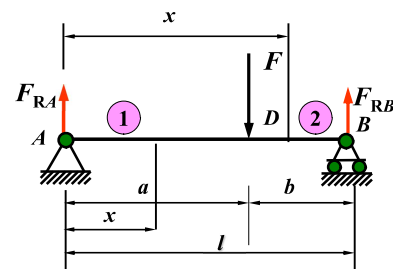
$$F_{RA} = F \frac{b}{l}$$

$$F_{RB} = F \frac{a}{l}$$

两段梁的弯矩方程分别为

$$M_1 = F_{RA}x = F \frac{b}{l}x \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$M_2 = F \frac{b}{l}x - F(x-a) \quad (a \leq x \leq l)$$



两段梁的挠曲线方程分别为

(a) ($0 \leq x \leq a$)

$$\text{挠曲线方程 } EIw_1'' = M_1 = F \frac{b}{l} x$$

$$\text{转角方程 } EIw_1' = F \frac{b}{l} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\text{挠度方程 } EIw_1 = F \frac{b}{l} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 x + D_1$$

(b) ($a \leq x \leq l$)

$$\text{挠曲线方程 } EIw_2'' = M_2 = F \frac{b}{l} x - F(x-a)$$

$$\text{转角方程 } EIw_2' = F \frac{b}{l} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{F(x-a)^2}{2} + C_2$$

$$\text{挠度方程 } EIw_2 = F \frac{b}{l} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{F(x-a)^3}{6} + C_2 x + D_2$$

边界条件

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } w_1 = 0$$

$$\text{在 } x=l \text{ 处, } w_2 = 0$$

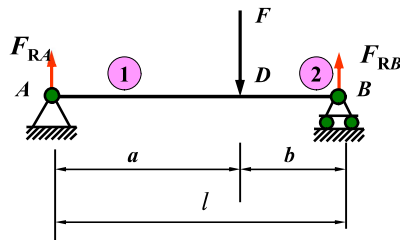
D点的连续条件

$$\text{在 } x=a \text{ 处 } w_1' = w_2'$$

$$w_1 = w_2$$

代入方程可解得:

$$D_1 = D_2 = 0 \quad C_1 = C_2 = -\frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)$$



(a) ($0 \leq x \leq a$)

$$\theta_1 = w_1' = \frac{Fb}{6EI}(l^2 - b^2 - 3x^2)$$

$$w_1 = \frac{Fbx}{6EI}[l^2 - b^2 - x^2]$$

(b) ($a \leq x \leq l$)

$$\theta_2 = w_2' = -\frac{Fb}{2EI}\left[\frac{l}{b}(x-a)^2 - x^2 + \frac{1}{3}(l^2 - b^2)\right]$$

$$w_2 = -\frac{Fb}{6EI}\left[\frac{l}{b}(x-a)^3 - x^3 + (l^2 - b^2)x\right]$$

将 $x=0$ 和 $x=l$ 分别代入转角方程左右两支座处截面的转角

$$\theta_A = \theta_1|_{x=0} = -\frac{Fb(l+b)}{6EI}$$

$$\theta_B = \theta_2|_{x=l} = \frac{Fb(l+a)}{6EI}$$

当 $a > b$ 时, 右支座处截面的转角绝对值为最大

$$\theta_{\max} = \theta_B = \frac{Fb(l+a)}{6EI}$$

简支梁的最大挠度应在 $w' = 0$ 处

先研究第一段梁, 令 $w_1' = 0$ 得

$$\theta_1 = w_1' = \frac{Fb}{6EI}(l^2 - b^2 - 3x^2) = 0$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} = \sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}}$$

当 $a > b$ 时, $x_1 < a$ 最大挠度确实在第一段梁中

$$w_{\max} = w|_{x=x_1} = -\frac{Fb}{9\sqrt{3}EI}\sqrt{(l^2 - b^2)^3} \approx 0.0642 \frac{Pbl^2}{EI}$$

梁中点 C 处的挠度为

$$w_C = \frac{Fb}{48EI} (3l^2 - 4b^2) \approx 0.0625 \frac{Fbl^2}{EI}$$

$$w_{\max} = y|_{x=x_1} = \frac{Fb}{9\sqrt{3}EI} \sqrt{(l^2 - b^2)^3} \approx 0.0642 \frac{Fbl^2}{EI}$$

结论:在简支梁中,不论它受什么荷载作用,只要挠曲线上无拐点,其最大挠度值都可用梁跨中点处的挠度值来代替,其精确度是能满足工程要求的.

积分法的原则

(a) 对各段梁,都是由坐标原点到所研究截面之间的梁段上的外力来写弯矩方程的.所以后一段梁的弯矩方程包含前一段梁的弯矩方程.只增加了 $(x-a)$ 的项.

(b) 对 $(x-a)$ 的项作积分时,应该将 $(x-a)$ 项作为积分变量.从而简化了确定积分常数的工作.

《辅导》p111

例 6-10 简支梁受三角形分布荷载作用如图 6-11 所示。

- (1) 试导出该梁的挠曲线方程;
- (2) 试确定该梁的最大挠度。

解: (1) 求挠曲线方程。

$$R_A = \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} ql \times \frac{1}{3} l \right) = \frac{ql}{6} \quad (\uparrow)$$

弯矩方程

$$M(x) = \frac{ql}{6} x - \frac{1}{6} \frac{q}{l} x^3 \quad (1)$$

$$EIv''(x) = -M(x) = -\frac{ql}{6} x + \frac{q}{6l} x^3 \quad (2)$$

$$EIv'(x) = -\frac{ql}{12} x^2 + \frac{q}{24l} x^4 + C \quad (3)$$

$$EIv(x) = -\frac{ql}{36} x^3 + \frac{q}{120l} x^5 + Cx + D \quad (4)$$

边界条件

$$\begin{cases} x=0, & v(0)=0 \\ x=l, & v(l)=0 \end{cases}$$

得

$$D=0 \quad C = -\frac{7ql^3}{360}$$

代入(4)式,得挠曲线方程

$$v(x) = \frac{qx}{360EI} (3x^4 + 7l^4 - 10l^2x^2) \quad (5)$$

(2) 求 f_{\max}

$$EIv'(x) = -\frac{ql}{12} x^2 + \frac{q}{24l} x^4 + \frac{7ql}{360} = 0$$

$$x = 0.519l$$

$$f_{\max} = 0.00652 \frac{ql^4}{EI}$$

讨论: 在建立挠曲线微分方程时,要注意坐标系的情况,此题坐标系不是右手系,所以在微分方程(2)式中加了一个负号。另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

令(3)式

$$EIv'(x) = -\frac{ql}{12} x^2 + \frac{q}{24l} x^4 + \frac{7ql}{360} = 0$$

$$x = 0.519l$$

$$f_{\max} = 0.00652 \frac{ql^4}{EI}$$

讨论: 在建立挠曲线微分方程时,要注意坐标系的情况,此题坐标系不是右手系,所以在微分方程(2)式中加了一个负号。另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

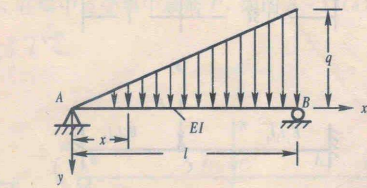
另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。

另外,对简支梁最大挠度发生在转角为零的截面处。



例 6-10 简支梁受三角形分布荷载作用如图 6-11 所示。

- (1) 试导出该梁的挠曲线方程;
- (2) 试确定该梁的最大挠度。

解: (1) 求挠曲线方程。

$$R_A = \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} ql \times \frac{1}{3} l \right) = \frac{ql}{6} \quad (\uparrow)$$

列弯矩方程

$$M(x) = \frac{ql}{6} x - \frac{1}{6} \frac{q}{l} x^3 \quad (1)$$

挠曲线微分方程

$$EIv''(x) = -M(x) = -\frac{ql}{6} x + \frac{q}{6l} x^3 \quad (2)$$

$$EIv'(x) = -\frac{ql}{12} x^2 + \frac{q}{24l} x^4 + C \quad (3)$$

$$EIv(x) = -\frac{ql}{36} x^3 + \frac{q}{120l} x^5 + Cx + D \quad (4)$$

边界条件

$$\begin{cases} x=0, & v(0)=0 \\ x=l, & v(l)=0 \end{cases}$$

得

$$D=0 \quad C = -\frac{7ql^3}{360}$$

代入(4)式,得挠曲线方程

$$v(x) = \frac{qx}{360EI} (3x^4 + 7l^4 - 10l^2x^2) \quad (5)$$

(2) 求 f_{\max}

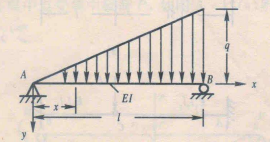


图 6-11

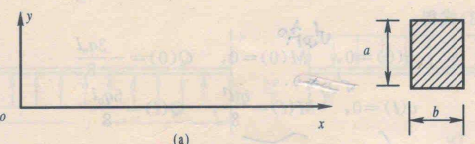
《辅导》p103

例 6-4 已知一直梁的挠曲线方程为

$$v = \frac{q_0 x}{48EI} (l^3 - 3lx^2 + 2x^3)$$

坐标系如图 6-5(a)所示,试求:

- (1) 端点 $(x=0)$ 及 $(x=l)$ 的约束情况;
- (2) 最大弯矩及最大剪力;
- (3) 载荷情况,并画梁的简图。



(a)

解：已知直梁的挠曲线方程

$$v = \frac{q_0 x}{48EI} (l^3 - 3lx^2 + 2x^3) \quad (1)$$

可以求得各阶导数分别为

$$v' = \frac{q_0}{48EI} (l^3 - 9lx^2 + 8x^3)$$

$$v'' = \frac{q_0}{24EI} (-9lx + 12x^2)$$

$$v''' = \frac{q_0}{24EI} (-9l + 24x)$$

$$v^{(4)} = \frac{q_0}{EI}$$

根据载荷集度、剪力和弯矩之间微分关系，由上述诸式分别得到弯矩、剪力和载荷集度的方程为

$$M(x) = EIv'' = \frac{q_0}{24} (-9lx + 12x^2) \quad (2)$$

$$Q(x) = EIv''' = \frac{q_0}{24} (-9l + 24x) \quad (3)$$

$$q(x) = EIv^{(4)} = q_0 \quad (4)$$

由(1)、(2)、(3)式得

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } v(0)=0, M(0)=0, Q(0)=-\frac{3q_0 l}{8}$$

$$\text{当 } x=l \text{ 时, } v(l)=0, M(l)=\frac{q_0 l^2}{8}, Q(l)=\frac{5q_0 l}{8}$$

于是可以看出：

① 直梁是一两端铰支梁，支反力分别为

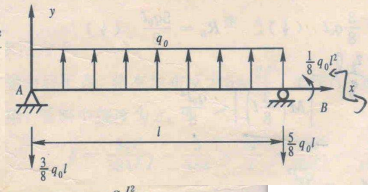
$$R_A = \frac{3}{8}q_0 l \quad (\downarrow), \quad R_B = \frac{5}{8}q_0 l \quad (\downarrow)$$

因为

所以

$$M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{8}$$

$$Q_{\max} = R_B = \frac{5}{8}q_0 l$$



② 梁上施加的载荷有均匀分布于全跨的载荷 q_0 和 B 端集中力偶 $\frac{q_0 l^2}{8}$ 。梁的简图如图 6-5(b) 所示。

§ 6-4 用叠加法求弯曲变形

(Beam deflections by superposition)

一、叠加原理 (Superposition)

梁的变形微小，且梁在线弹性范围内工作时，梁在几项荷载（可以是集中力，集中力偶或分布力）同时作用下的挠度和转角，就分别等于每一荷载单独作用下该截面的挠度和转角的叠加。当每一项荷载所引起的挠度为同一方向（如均沿 w 轴方向），其转角是在同一平面内（如均在 xy 平面内）时，则叠加就是代数和。这就是叠加原理。

$$EI \frac{d^2 w_F}{dx^2} = M_F, \quad EI \frac{d^2 w_q}{dx^2} = M_q \quad (b)$$

若 F 和 q 共同作用下的挠度为 w ，则 w 与 M 的关系也应该是

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M \quad (c)$$

将式(a)代入式(c)，并利用式(b)，得

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M_F + M_q = EI \frac{d^2 w_F}{dx^2} + EI \frac{d^2 w_q}{dx^2}$$

$$= EI \frac{d^2 (w_F + w_q)}{dx^2}$$

$w = w_F + w_q$

可见 F 和 q 联合作用下的挠度 w ，就是两个荷载单独作用下的挠度 w_F 和 w_q 的代数和。这一结论显然可以推广到荷载多于两个的情况。所以，当梁上同时作用几个荷载时，可先分别求出每一荷载单独引起的变形，然后把所得变形叠加即为这些荷载共同作用时的变形。这就是计算弯曲变形的叠加法。

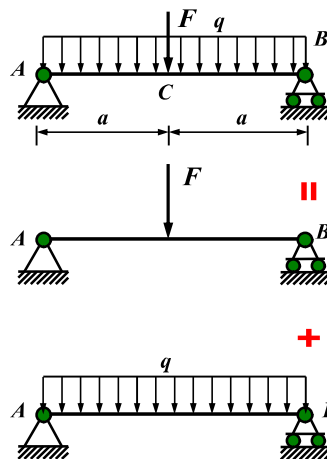
1. 荷载叠加 (Superposition of loads) 多个荷载同时作用于

结构而引起的变形等于每个荷载单独作用于结构而引起的变形的代数和。

$$\theta(F_1, F_2, \dots, F_n) = \theta_1(F_1) + \theta_2(F_2) + \dots + \theta_n(F_n)$$

$$w(F_1, F_2, \dots, F_n) = w_1(F_1) + w_2(F_2) + \dots + w_n(F_n)$$

2. 结构形式叠加 (逐段刚化法)



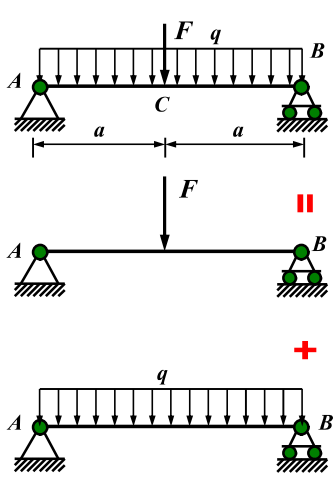
按叠加原理求 A 点转角和 C 点挠度。

解：(a) 荷载分解如图

(b) 由梁的简单荷载变形表，查简单荷载引起的变形。

$$(\theta_A)_F = -\frac{Fa^2}{4EI} \quad (w_C)_F = -\frac{Fa^3}{6EI}$$

$$(\theta_A)_q = -\frac{qa^3}{3EI} \quad (w_C)_q = -\frac{5qa^4}{24EI}$$



$$(\theta_A)_F = -\frac{Fa^2}{4EI} \quad (w_C)_F = -\frac{Fa^3}{6EI}$$

$$(\theta_A)_q = -\frac{qa^3}{3EI} \quad (w_C)_q = -\frac{5qa^4}{24EI}$$

(c) 叠加

$$\theta_A = (\theta_A)_F + (\theta_A)_q$$

$$= -\frac{a^2}{12EI} (3F + 4qa)$$

$$w_C = -\left(\frac{5qa^4}{24EI} + \frac{Fa^3}{6EI} \right)$$

p195 表6.1 经典载荷的变形

表 6.1 梁在简单载荷作用下的变形

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
1		$w = -\frac{M_0 x^2}{2EI}$	$\theta_B = \frac{M_0 l}{EI}$	$w_B = -\frac{M_0 l^2}{2EI}$
2		$w = -\frac{Fx^3}{6EI} (3l-x)$	$\theta_B = \frac{Fl^2}{2EI}$	$w_B = -\frac{Fl^3}{3EI}$
3		$w = -\frac{Fx^3}{6EI} (3a-x) \quad (0 \leq x \leq a)$ $w = -\frac{Fa^2}{6EI} (3x-a) \quad (a \leq x \leq l)$	$\theta_B = \frac{Fa^2}{2EI}$	$w_B = -\frac{Fa^2}{6EI} (3l-a)$
4		$w = -\frac{qx^3}{24EI} (x^2 - 4lx + 6l^2)$	$\theta_B = \frac{ql^3}{6EI}$	$w_B = -\frac{ql^4}{8EI}$

续表

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
5		$w = \frac{M_0 x}{6EI} (l-x) (2l-x)$	$\theta_A = \frac{M_0 l}{3EI}$ $\theta_B = \frac{M_0 l}{6EI}$	$x = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) l$ $w_{max} = \frac{M_0 l^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x = \frac{l}{2}, w_{\frac{l}{2}} = -\frac{M_0 l^2}{16EI}$
6		$w = \frac{M_0 x}{6EI} (l-x)^2$	$\theta_A = \frac{M_0 l}{6EI}$ $\theta_B = \frac{M_0 l}{3EI}$	$x = \frac{l}{\sqrt{3}}$ $w_{max} = \frac{M_0 l^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x = \frac{l}{2}, w_{\frac{l}{2}} = \frac{M_0 l^2}{16EI}$
7		$w = \frac{M_0 x}{6EI} (l^2 - 3b^2 - x^2)$ $w = \frac{M_0}{6EI} [-x^3 + 3l(x-a)^2 + (l^2 - 3b^2)x] \quad (a \leq x \leq l)$	$\theta_A = \frac{M_0}{6EI} (l^2 - 3b^2)$ $\theta_B = \frac{M_0}{6EI} (l^2 - 3a^2)$	

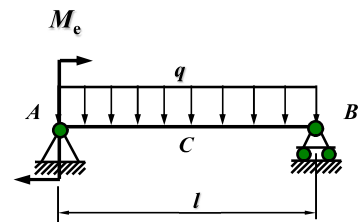
续表

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
8		$w = -\frac{Fx}{48EI} (3l^2 - 4x^2)$ $(0 \leq x \leq \frac{l}{2})$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{Fl^2}{16EI}$	$w_{max} = \frac{Fl^2}{48EI}$
9		$w = -\frac{Flbx}{6EI} (l^2 - x^2 - b^2)$ $(0 \leq x \leq a)$ $w = -\frac{Fl}{6EI} \left[\frac{l}{b} (x-a)^3 + (l^2 - b^2)x - x^3 \right]$ $(a \leq x \leq l)$	$\theta_A = \frac{Fab(l+b)}{6EI}$ $\theta_B = \frac{Fab(l+a)}{6EI}$	设 $a > b$, 在 $x = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$ 处, $w_{max} = -\frac{Fb(l^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EI}$ 在 $x = \frac{l}{2}$ 处, $w_{\frac{l}{2}} = \frac{Fb(3l^2 - 4b^2)}{48EI}$
10		$w = -\frac{qx}{24EI} (l^3 - 2lx^2 + x^3)$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{ql^3}{24EI}$	$w_{max} = \frac{5ql^4}{384EI}$

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
13		$y = -\frac{M_0 x}{6EI} (x^2 - l^2)$ $0 \leq x \leq l$ $y = -\frac{M}{6EI} (3x^2 - 4xl + l^2)$ $l \leq x \leq l+a$	$\theta_A = -\frac{1}{2} \theta_B = \frac{Ml}{6EI}$ $\theta_C = -\frac{M}{3EI} (l+3a)$	$f_C = -\frac{Ma}{6EI} (2l+3a)$
14		$y = \frac{qa^2 x}{12EI} (l^2 - x^2)$ $0 \leq x \leq l$ $y = -\frac{qa^2 x}{12EI} \times [x^2 - (2l+a)(x-l)^2 - \frac{l(x-l)^2}{2a^2 x}]$ $l \leq x \leq l+a$	$\theta_A = -\frac{\theta_B}{2} = \frac{qa^2 l}{12EI}$ $\theta_C = -\frac{qa^2}{6EI} (l+a)$	$f_C = -\frac{qa^2}{24EI} (3a+4l)$
12		$y = \frac{Pax}{6EI} (l^2 - x^2)$ $0 \leq x \leq l$ $y = -\frac{P(x-l)}{6EI} [(3a-l)(x-l)^2]$ $l \leq x \leq l+a$	$\theta_A = -\frac{1}{2} \theta_B = \frac{Pal}{6EI}$ $\theta_C = -\frac{Pa}{6EI} (2l+3a)$	$f_C = -\frac{Pa^2}{3EI} (l+a)$

$(3a(x-l) - (x-l)^2 + 2a)$

例题4 一抗弯刚度为 EI 的简支梁受荷载如图所示。试按叠加原理求梁跨中点的挠度 w_C 和支座处横截面的转角 θ_A, θ_B 。



解:将梁上荷载分为两项简单的荷载,如图所示

$$w_C = (w_C)_q + (w_C)_{M_c}$$

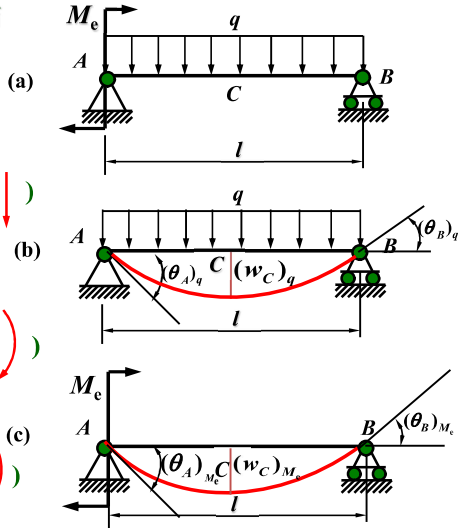
$$= \frac{5ql^4}{384EI} + \frac{M_c l^2}{16EI} \quad (\downarrow)$$

$$\theta_A = (\theta_A)_q + (\theta_A)_{M_c}$$

$$= -\left(\frac{ql^3}{24EI} + \frac{M_c l}{3EI}\right) \quad (\curvearrowright)$$

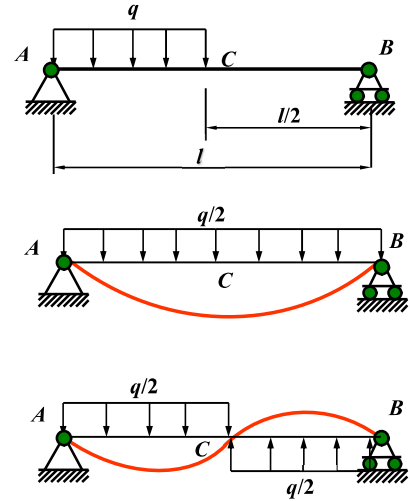
$$\theta_B = (\theta_B)_q + (\theta_B)_{M_c}$$

$$= +\frac{ql^3}{24EI} + \frac{M_c l}{6EI} \quad (\curvearrowright)$$



例题5 试利用叠加法,求图所示抗弯刚度为EI的简支梁跨中点的挠度 w_C 和两端截面的转角 θ_A, θ_B .

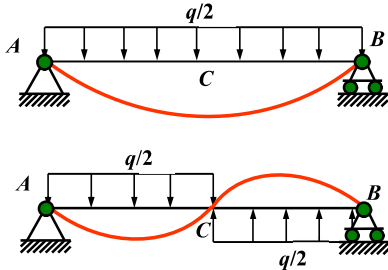
解:可视为正对称荷载与反对称荷载两种情况的叠加.



(1) 正对称荷载作用下

$$w_{C1} = -\frac{5(q/2)l^4}{384EI} = -\frac{5ql^4}{768EI}$$

$$\theta_{B1} = -\theta_{A1} = \frac{(q/2)l^3}{24EI} = \frac{ql^3}{48EI}$$



(2) 反对称荷载作用下

在跨中C截面处,挠度 w_C 等于零,但转角不等于零且该截面的弯矩也等于零

可将AC段和BC段分别视为受均布线荷载作用且长度为 $l/2$ 的简支梁

可得到: $w_{C2} = 0$

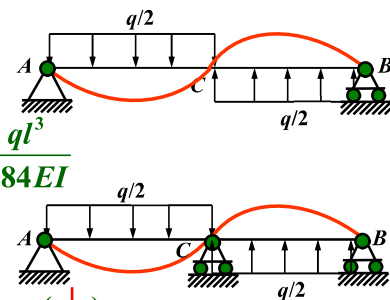
$$\theta_{A2} = -\theta_{B2} = -\frac{\left(\frac{q}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)^3}{24EI} = -\frac{ql^3}{384EI}$$

将相应的位移进行叠加,即得

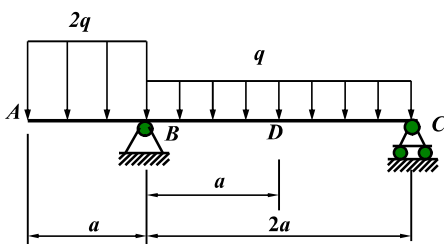
$$w_C = w_{C1} + w_{C2} = -\frac{5ql^4}{768EI} \quad (\downarrow)$$

$$\theta_A = \theta_{A1} + \theta_{A2} = -\frac{ql^3}{48EI} - \frac{ql^3}{384EI} = -\frac{3ql^3}{128EI} \quad (\curvearrowright)$$

$$\theta_B = \theta_{B1} + \theta_{B2} = +\frac{ql^3}{48EI} - \frac{ql^3}{384EI} = +\frac{7ql^3}{384EI} \quad (\curvearrowright)$$



例题6 一抗弯刚度为EI的外伸梁受荷载如图所示,试按叠加原理并利用附表,求截面B的转角 θ_B 以及A端和BC中点D的挠度 w_A 和 w_D .

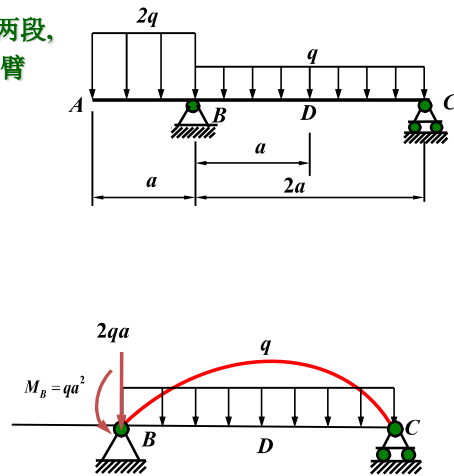
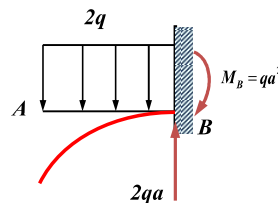


解:将外伸梁沿B截面截成两段,将AB段看成B端固定的悬臂梁,BC段看成简支梁.

B截面两侧的相互作用为:

$$2qa$$

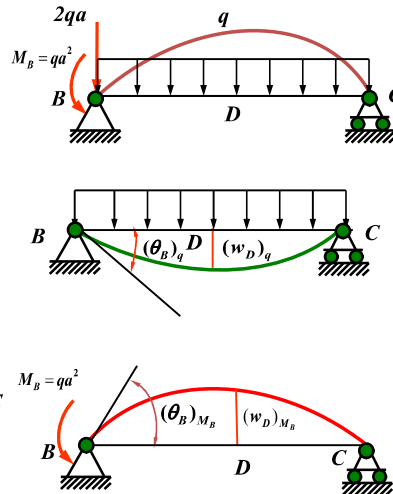
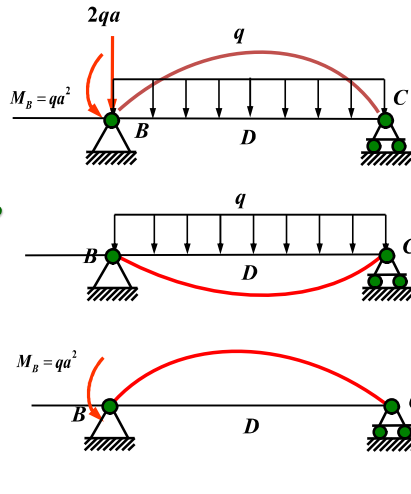
$$M_B = qa^2$$



简支梁BC的受力情况与外伸梁AC的BC段的受力情况相同

由简支梁BC求得的 θ_B, w_D 就是外伸梁AC的 θ_B, w_D

简支梁BC的变形就是 M_B 和均布荷载 q 分别引起变形的叠加。



(1) 求 θ_B, w_D

$$(\theta_B)_q = -\frac{ql^3}{24EI} = -\frac{qa^3}{3EI}$$

$$(\theta_B)_{M_B} = \frac{M_B l}{3EI} = \frac{2qa^3}{3EI}$$

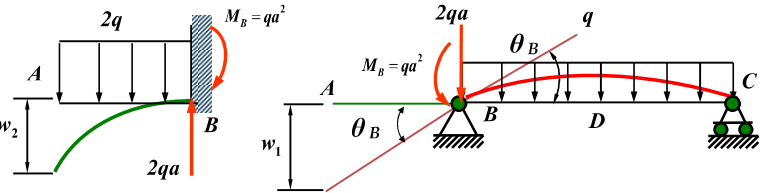
$$(w_D)_q = -\frac{5ql^4}{384EI} = -\frac{5qa^4}{24EI}$$

$$(w_D)_{M_B} = \frac{M_B l^2}{16EI} = \frac{qa^4}{4EI}$$

由叠加原理得:

$$\theta_B = (\theta_B)_q + (\theta_B)_{M_B} = \frac{qa^3}{3EI}$$

$$w_D = (w_D)_q + (w_D)_{M_B} = \frac{qa^4}{24EI}$$



(2) 求 w_A 悬臂梁AB本身的弯曲变形, 使A端产生挠度 w_2

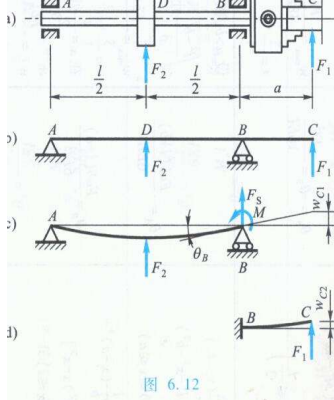
由于简支梁上B截面的转动, 带动AB段一起作刚体运动, 使A端产生挠度 w_1

因此, A端的总挠度应为 $w_A = w_1 + w_2 = -\theta_B \cdot a + w_2$

由表6-1查得 $w_2 = -\frac{(2q)a^2}{8EI}$

$$w_A = -\frac{qa^4}{3EI} - \frac{qa^4}{4EI} = -\frac{7qa^4}{12EI}$$

例6.5 车床主轴的计算简图可简化成外伸梁, 如图6.12a和b所示。 F_1 为切削力, F_2 为齿轮传动力。若近似地把外伸梁作为等截面梁, 试求截面B的转角和端点C的挠度。



解: 设想沿截面B将外伸梁分成两部分。AB部分成为简支梁(图6.12c), 梁上除集中力 F_2 外, 在截面B上还有剪力 F_3 和弯矩 M , 且 $F_3 = F_1, M = F_1 a$ 。剪力 F_3 直接传递到支座B, 不引起变形。在弯矩 M 作用下, 由表6.1序号6查出截面B的转角为

$$(\theta_B)_M = \frac{Ml}{3EI} = \frac{F_1 a l}{3EI}$$

在 F_2 作用下, 由表6.1序号8查出截面B的转角为

$$(\theta_B)_{F_2} = -\frac{F_2 l^2}{16EI}$$

右边的负号表示, 截面B因 F_2 引起的转角是顺时针的。叠加 $(\theta_B)_M$ 和 $(\theta_B)_{F_2}$, 得 M 和 F_2 共同作用下截面B的转角为

$$\theta_B = \frac{F_1 a l}{3EI} - \frac{F_2 l^2}{16EI}$$

这也就是图6.12b中外伸梁在截面B的转角。仅由这一转角引起C点向上的挠度是

$$w_{C1} = a\theta_B = \frac{F_1 a^2 l}{3EI} - \frac{F_2 a l^2}{16EI}$$

再把BC部分作为悬臂梁(图6.12d), 在 F_1 作用下, 由表6.1序号2查出C点的挠度是

$$w_{C2} = \frac{F_1 a^3}{3EI}$$

最终, 把外伸梁的BC部分看作是整体转动了一个 θ_B 的悬臂梁, 于是C点的挠度应为 w_{C1} 和 w_{C2} 的叠加, 故有

$$w_C = w_{C1} + w_{C2} = \frac{F_1 a^2}{3EI}(a+l) - \frac{F_2 a l^2}{16EI}$$

例6.6 在简支梁的一部分上作用均布荷载(图6.13)。试求跨度中点的挠度。设 $b < \frac{l}{2}$ 。

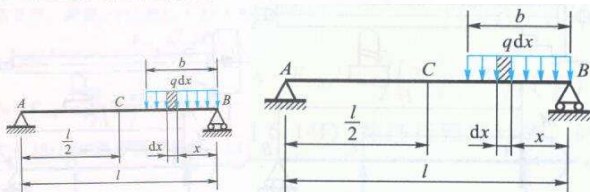


图 6.13

解: 这一问题可以把梁分成两段, 用积分法求解。现在我们用叠加法求解。利用例6.3所得结果或表6.1序号9的公式, 跨度中点C由微分荷载 $dF = qdx$ 引起的挠度为

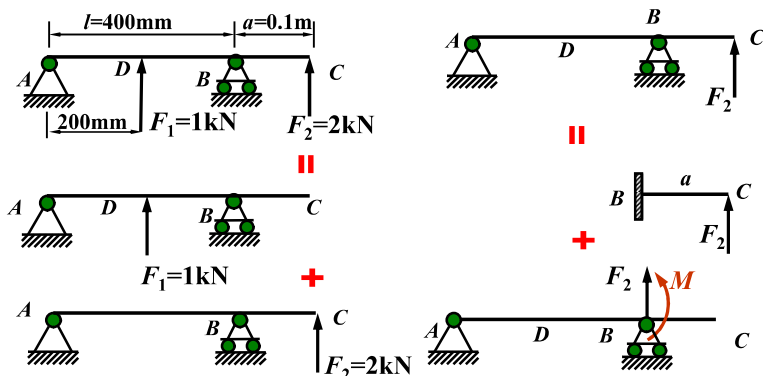
$$dw_C = -\frac{dF \cdot x}{48EI} (3l^2 - 4x^2) = -\frac{qx}{48EI} (3l^2 - 4x^2) dx$$

按照叠加法, 在图示均布荷载作用下, 跨度中点C的挠度应为 dw_C 的积分, 即

$$w_C = -\frac{q}{48EI} \int_0^b x(3l^2 - 4x^2) dx = -\frac{qb^2}{48EI} \left(\frac{3}{2}l^2 - b^2 \right)$$

→ 求挠曲线

例7 下图为一空心圆杆, 内外径分别为: $d=40\text{mm}, D=80\text{mm}$, 杆的 $E=210\text{GPa}$, 工程规定C点的 $|w/L|=0.00001$, B点的 $|\theta|=0.001$ 弧度, 试核此杆的刚度。



解：(1) 结构变换，查表求简

单载荷变形。

$$\theta_{1B} = -\frac{F_1 l^2}{16EI}$$

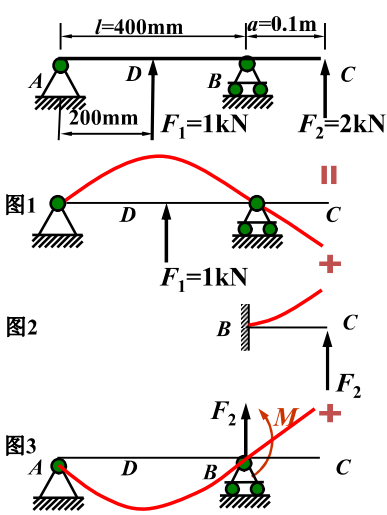
$$w_{1C} = \theta_{1B} a = -\frac{F_1 l^2 a}{16EI}$$

$$\theta_{2B} = 0$$

$$w_{2C} = +\frac{F_2 a^3}{3EI}$$

$$\theta_{3B} = +\frac{Ml}{3EI} = +\frac{laF_2}{3EI}$$

$$w_{3C} = \theta_{3B} a = +\frac{F_2 l a^2}{3EI}$$



(2) 叠加求复杂载荷下的变形

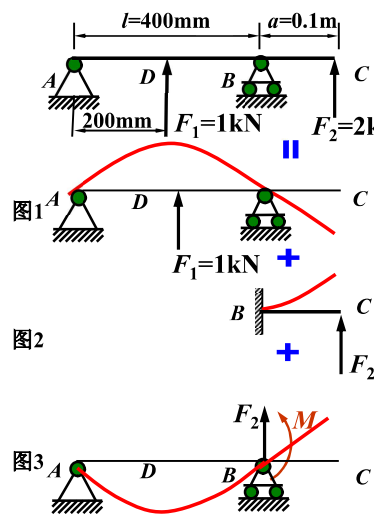
$$\theta_B = -\frac{F_1 l^2}{16EI} + \frac{F_2 la}{3EI}$$

$$w_C = -\frac{F_1 l^2 a}{16EI} + \frac{F_2 a^3}{3EI} + \frac{F_2 a^2 l}{3EI}$$

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$$

$$= \frac{3.14}{64}(80^4 - 40^4) \times 10^{-12}$$

$$= 188 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$



$$\theta_B = -\frac{F_1 l^2}{16EI} + \frac{F_2 la}{3EI} = \frac{0.4}{210 \times 1880} \left(-\frac{400}{16} + \frac{200}{3} \right) = +0.423 \times 10^{-4} \text{ (rad)}$$

$$w_C = -\frac{F_1 l^2 a}{16EI} + \frac{F_2 a^3}{3EI} + \frac{F_2 a^2 l}{3EI} = +5.19 \times 10^{-6} \text{ m}$$

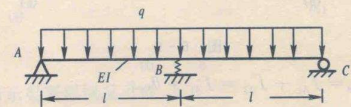
(3) 校核刚度: $\frac{|w_{\max}|}{l} \leq \left[\frac{w}{l} \right]$

$$|w_{\max}| = 5.19 \times 10^{-6} \text{ m} < [w] = 10^{-5} \text{ m}$$

$$|\theta_{\max}| = 0.423 \times 10^{-4} < [\theta] = 0.001$$

《辅导》p110

例 6-9 图 6-10 所示梁的 A、C 两端为铰支，梁的中点 B 处用一个弹簧支承。试确定使梁在弹簧作用点 B 处的弯矩为零时，弹簧的刚度 k 为多少？并画出梁的剪力图和弯矩图。



解：依题意 $M_B = 0$ ，考虑左半段梁 AB_{Σ}

$$\sum m_{B\Sigma} = 0, \quad R_A = \frac{ql}{2}$$

考虑全梁，由对称性，有

$$R_C = R_A = \frac{ql}{2}$$

$$\sum Y = 0 \quad R_B = 2ql - 2 \times \frac{ql}{2} = ql$$

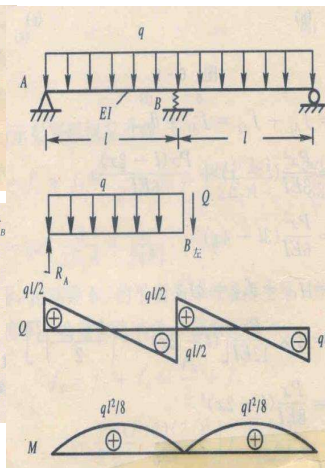
要求弹簧刚度，需求弹簧变形，由叠加法求 q 和 R_B 引起的弹簧变形 f_B

$$f_B = (f_B)_q + (f_B)_{R_B} = \frac{R_B(2l)^3}{48EI} - \frac{5q(2l)^4}{384EI}$$

$$= \frac{4ql^4}{24EI} - \frac{5ql^4}{24EI} = -\frac{ql^4}{24EI} \quad (\downarrow)$$

$$k = \frac{R_B}{|f_B|} = \frac{ql}{\frac{ql^4}{24EI}} = \frac{24EI}{l^3}$$

作 Q、M 图如图 6-10。



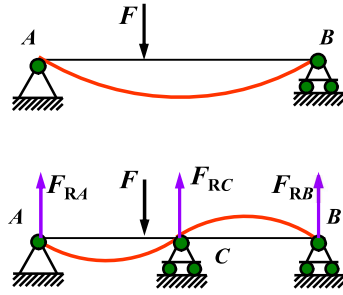
作业：6.1, 6.2, 6.3(c), 6.4(c), 6.5(b), 6.8(b), 6.10(d), 6.11(c), 6.14

§ 6-5 静不定梁的解法 (Solution methods for statically indeterminate beams)

一、基本概念 (Basic concepts)

1. 超静定梁 (statically indeterminate beams)

单凭静力平衡方程不能求出全部支反力的梁,称为超静定梁



2. “多余”约束 (Redundant constraint)

多于维持其静力平衡所必需的约束

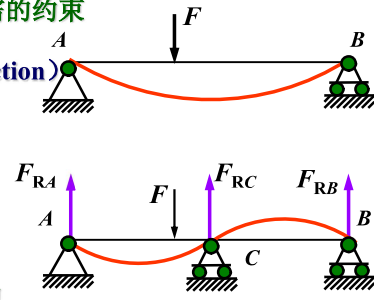
3. “多余”反力 (Redundant reaction)

“多余”与相应的支座反力

4. 超静定次数 (Degree of statically indeterminate problem)

超静定梁的“多余”约束的数目就等于其超静定次数。

$$n = \text{未知力的个数} - \text{独立平衡方程的数目}$$



二、求解超静定梁的步骤 (procedure for solving a statically indeterminate)

1. 画静定基建立相当系统:

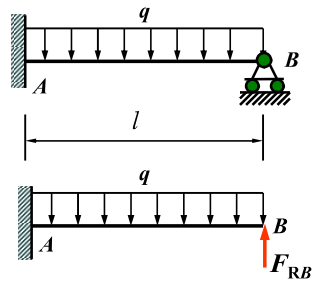
将可动铰链支座看作多余约束,解除多余约束代之以约束反力 R_B ,得到原超静定梁的基本静定系。

2. 列几何方程——变形协调方程

超静定梁在多余约束处的约束条件,梁的变形协调条件 $w_B = 0$

根据变形协调条件得变形几何方程: $w_B = (w_B)_q + (w_B)_{F_{RB}}$

变形几何方程为 $(w_B)_q + (w_B)_{F_{RB}} = 0$



3. 列物理方程——变形与力的关系

查表得

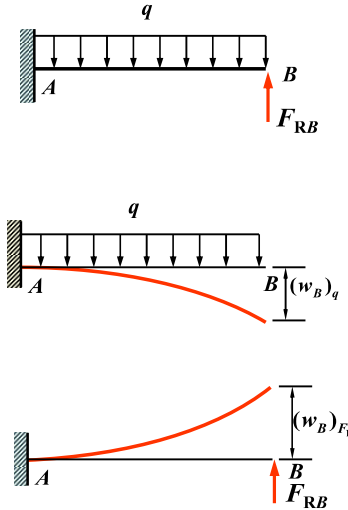
$$(w_B)_q = -\frac{ql^4}{8EI}$$

$$(w_B)_{F_{RB}} = +\frac{F_{RB}l^3}{3EI}$$

4. 建立补充方程

将力与变形的关系代入

变形几何方程得补充方程



补充方程为

$$-\frac{ql^4}{8EI} + \frac{F_{RB}l^3}{3EI} = 0$$

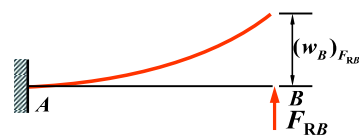
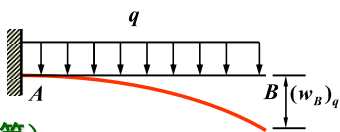
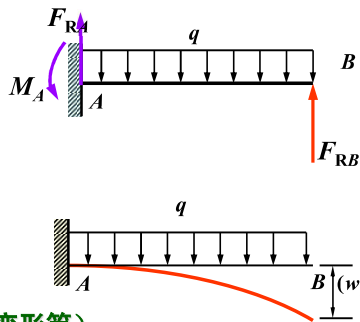
由该式解得

$$F_{RB} = \frac{3}{8}ql$$

5. 求解其它问题 (反力, 应力, 变形等)

求出该梁固定端的两个支反力

$$F_{RB} = \frac{5}{8}ql \quad M_A = \frac{1}{8}ql^2$$



方法二

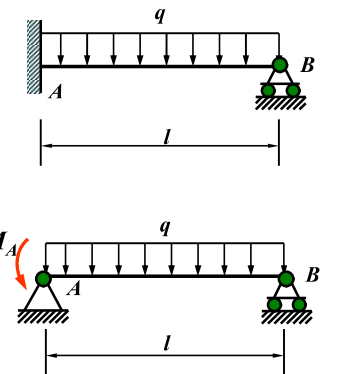
取支座 A 处阻止梁转动的约束为多余约束。

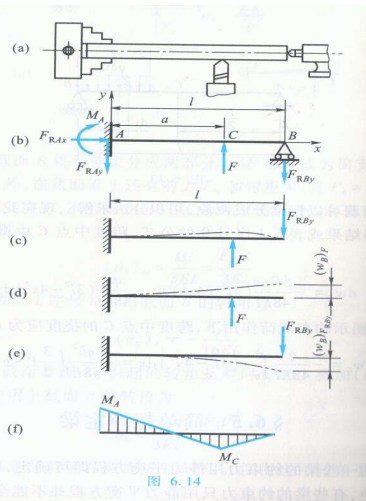
代以与其相应的多余反力偶 M_A 得基本静定系。

变形相容条件为

$$\theta_A = 0$$

请同学们自行完成!





$(w_B)_{F_{R,By}}$ 的代数和。但 B 端实际上为铰支座,它不应有铅垂位移,即

$$w_B = (w_B)_F + (w_B)_{F_{R,By}} = 0 \quad (1)$$

这就是变形协调方程。利用表 6.1, 求出

$$(w_B)_F = \frac{F a^3}{6EI} (3l - a), \quad (w_B)_{F_{R,By}} = -\frac{F_{R,By} l^3}{3EI}$$

代入式(1)后即可解出

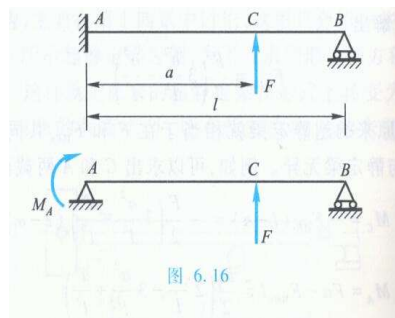
$$F_{R,By} = \frac{F}{2} \left(3 \frac{a^3}{l^2} - \frac{a^3}{l^3} \right)$$

解出 $F_{R,By}$ 后, 原来的超静定梁就相当于在 F 和 $F_{R,By}$ 共同作用下的悬臂梁。进一步的计算就与静定梁无异。例如, 可以求出 C 和 A 两截面的弯矩分别是

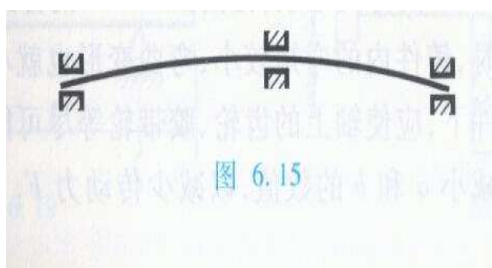
$$M_C = -F_{R,By}(l-a) = -\frac{F}{2} \left(3 \frac{a^3}{l^2} - \frac{a^3}{l^3} \right) (l-a)$$

$$M_A = F a - F_{R,By} l = \frac{F l}{2} \left(2 \frac{a}{l} - 3 \frac{a^3}{l^2} + \frac{a^3}{l^3} \right)$$

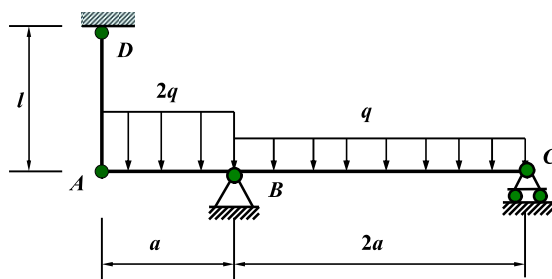
于是可作梁的弯矩图(图 6.14f), 并进行强度计算。同理, 也可以进行变形计算, 这些不再赘述。



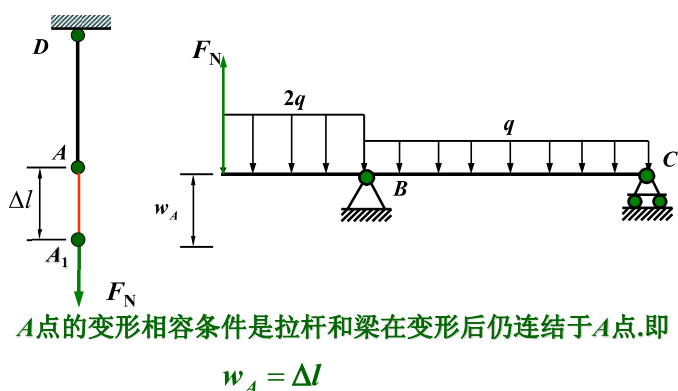
$$\theta_A = (\theta_A)_{M_A} + (\theta_A)_F = 0$$



例题8 梁AC如图所示,梁的A端用一钢杆AD与梁AC铰接,在梁受荷载作用前,杆AD内没有内力,已知梁和杆用同样的钢材制成,材料的弹性模量为E,钢梁横截面的惯性矩为I,拉杆横截面的面积为A,其余尺寸见图,试求钢杆AD内的拉力 F_N 。



解:这是一次超静定问题。将AD杆与梁AC之间的连接结看作多余约束,拉力 F_N 为多余反力,基本静定系如图



根据叠加法A端的挠度为

$$w_A = (w_A)_q + (w_A)_{F_N}$$

变形几何方程为

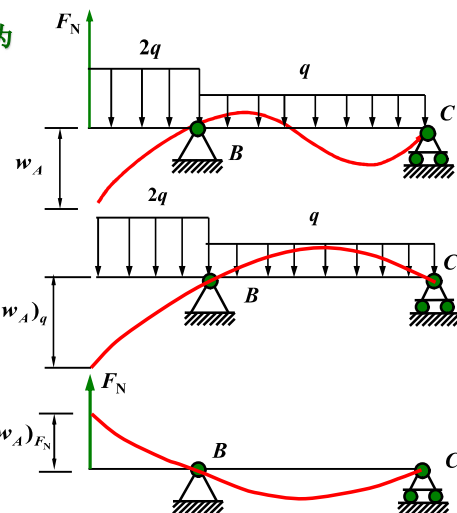
$$(w_A)_q + (w_A)_{F_N} = \Delta l$$

在例题中已求得

$$(w_A)_q = \frac{7qa^4}{12EI}$$

可算出:

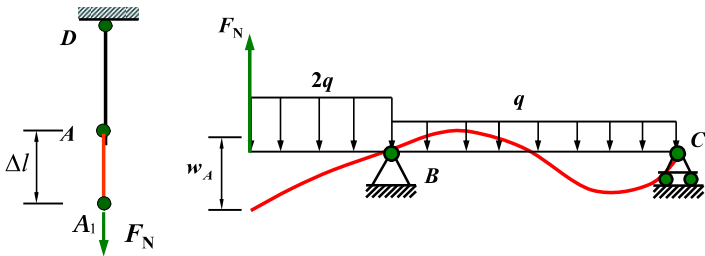
$$(w_A)_{F_N} = -\frac{F_N a^3}{EI}$$



拉杆 AD 的伸长为: $\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$

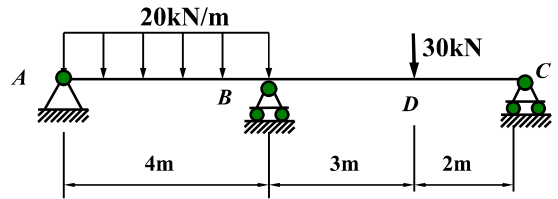
补充方程为: $\frac{7qa^4}{12EI} - \frac{F_N a^3}{EI} = \frac{F_N l}{EA}$

由此解得: $F_N = \frac{7qa^4 A}{12(l + Aa^3)}$



例题 9 求图示梁的支反力,并绘梁的剪力图和弯矩图.

已知 $EI = 5 \times 10^3 \text{ kN}\cdot\text{m}^3$.



解:这是一次超静定问题

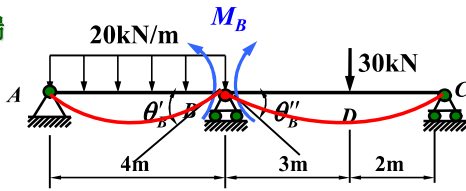
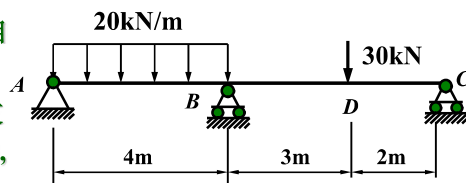
取支座 B 截面上的相对转动约束为多余约束.

基本静定系为在 B 支座截面上安置铰的静定梁,如图所示.

多余反力为分别作用于简支梁 AB 和 BC 的 B 端处的一对弯矩 M_B .

变形相容条件为,简支梁 AB 的 B 截面转角和 BC 梁 B 截面的转角相等.

$\theta'_B = \theta''_B$



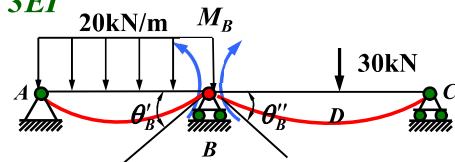
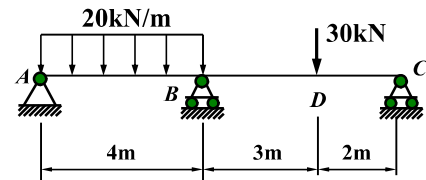
由表中查得:

$$\theta'_B = -\frac{20 \times 4^3}{24EI} - \frac{M_B \times 4}{3EI}$$

$$= -\left(\frac{1280}{24EI} + \frac{4M_B}{3EI}\right)$$

$$\theta''_B = \frac{30 \times 3 \times 2(5+2)}{6EI \times 5} + \frac{M_B \times 5}{3EI}$$

$$= \frac{42}{EI} + \frac{5M_B}{3EI}$$



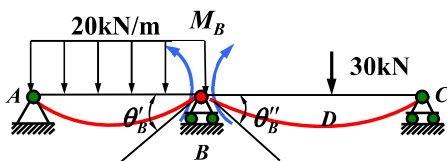
补充方程为:

$$-\frac{1280}{24EI} - \frac{4M_B}{3EI} = \frac{42}{EI} + \frac{5M_B}{3EI}$$

解得:

$M_B = -31.80 \text{ kN}\cdot\text{m}$

负号表示 B 截面弯矩与假设相反.



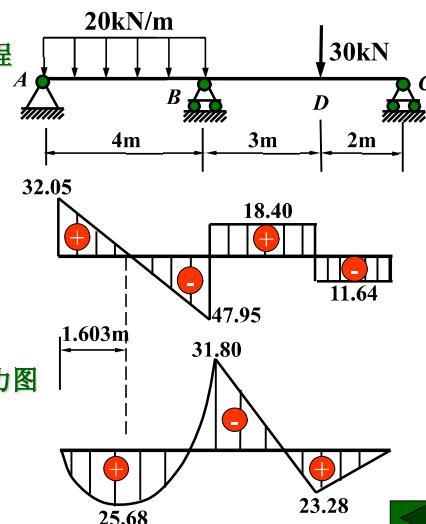
由基本静定系的平衡方程可求得其余反力

$F_{RA} = 32.05 \text{ kN}$

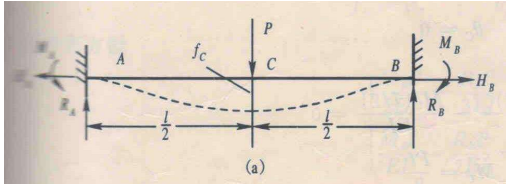
$F_{RB} = 66.35 \text{ kN}$

$F_{RC} = 11.6 \text{ kN}$

在基本静定系上绘出剪力图和弯矩图.



例 6-12 EI 为常数的两端固定梁 AB ，在梁中点受集中载荷 P ，如图 6-13(a) 所示。试求支座反力、弯矩图及梁中点挠度。



解：(1) 求支反力。

两端固定共有六个未知反力。由于梁无水平方向载荷作用，在小变形条件下，忽略水平反力，即 $H_A = H_B = 0$ 。

由于梁及载荷的对称性，可知

$$R_A = R_B \quad M_A = M_B$$

由静力平衡方程

$$\sum Y = 0 \quad R_A + R_B - P = 0$$

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

还剩下一个未知反力 M_A (或 M_B)，但静力平衡方程已经用尽，故为一次静不定梁。

取简支梁为基本静定系统(图 6-13(c))，由变形协调条件

$$\theta_A (= \theta_B) = 0$$

补充方程

$$\frac{Pl^2}{16EI} - \frac{M_A l}{3EI} - \frac{M_A l}{6EI} = 0$$

$$M_A = M_B = \frac{Pl}{8}$$

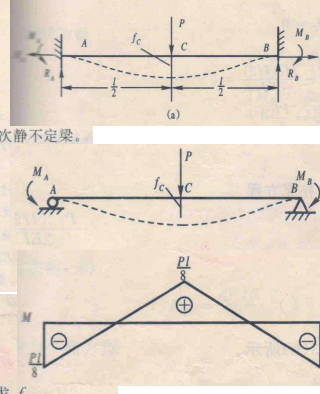
(2) 梁的弯矩图。

已知梁的全部外力，可作梁弯矩图如图 6-13(b) 所示。

(3) 梁中点的挠度。

在静定基为简支梁(图 6-13(c))的受力情况下，用叠加法求 f_c 。

$$f_c = \frac{Pl^3}{48EI} - 2 \times \frac{M_A l^2}{16EI} = \frac{Pl^3}{48EI} - \frac{Pl}{8} \times \frac{l^2}{8EI} = \frac{Pl^3}{192EI} \quad (\downarrow)$$



§ 6-6 提高弯曲刚度的措施

影响梁弯曲变形的因素不仅与梁的支承和载荷情况有关，而且还与梁的材料、截面尺寸、形状和梁的跨度有关。所以，要想提高弯曲刚度，就应从上述各种因素入手。

一、增大梁的抗弯刚度 EI

$$EIw' = \int M(x)dx + C_1$$

$$EIw = \iint M(x)dx dx + C_1 x + C_2$$

选取合理的截面形状，增大截面的惯性矩

工程中常采用工字形，箱形截面（加筋），槽型截面，T形截面

还可利用对称性，在对称面 C 处剪力为零，取一半梁作为静定基(如图 6-13(d))，变形协调条件

$$\theta_c = 0$$

补充方程

$$\frac{P/2(l/2)^2}{2EI} - \frac{M_c(l/2)}{EI} = 0$$

$$M_c = \frac{Pl}{8}$$

由平衡条件可求得 $M_A = M_B = \frac{ql}{8}$ 。

(2) 梁的弯矩图。

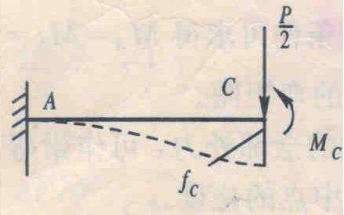
已知梁的全部外力，可作梁弯矩图如图 6-13(b) 所示。

(3) 梁中点的挠度。

在图 6-13(d) 所示静定基上求梁中点挠度

$$f_c = \frac{P/2(l/2)^3}{3EI} - \frac{M_c(l/2)^2}{2EI} = \frac{P/2(l/2)^3}{3EI} - \frac{Pl}{8} \times \frac{(l/2)^2}{2EI}$$

$$= \frac{Pl^3}{192EI} \quad (\downarrow)$$



$$EIw'' = M(x) \quad EIw = \iint M(x)dx dx + C_1 x + C_2$$

二、减小跨度或增加支承

减小M

三、改变加载方式和支座位置

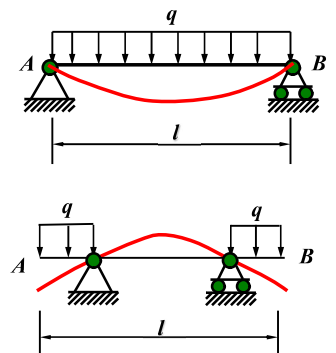
调整跨长和改变结构

设法缩短梁的跨长，将能显著地减小其挠度和转角。这是提高梁的刚度的一个很有效的措施。

桥式起重机的钢梁通常采用两端外伸的结构就是为了缩短跨长而减小梁的最大挠度值。

同时，由于梁的外伸部分的自重作用，将使梁的 AB 跨产生向上的挠度，从而使 AB 跨向下的挠度能够被抵消一部分，而有所减小。

增加梁的支座也可以减小梁的挠度。



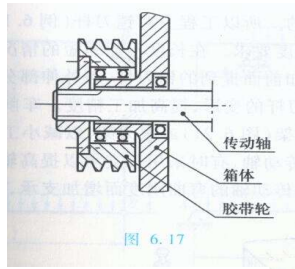


图 6.17

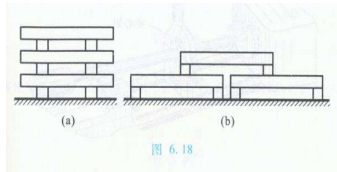


图 6.18

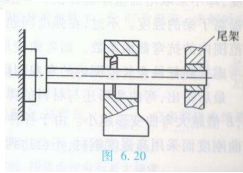


图 6.20

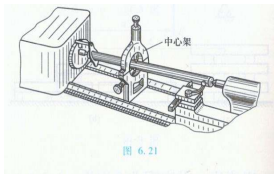


图 6.21

汽车过桥

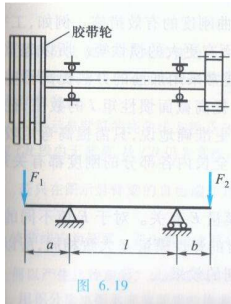


图 6.19

《辅导》p106

例 6-6 一根等截面直梁 AB, 长为 L, 重量为 P, 放在刚性平面上, 如图 6-7(a) 示, 如在其 A 端用 P/4 力铅直向上提起, 试求:

- (1) 该梁离开刚性平面被提起部分的长度及最大弯矩;
- (2) A 点的铅垂位移。

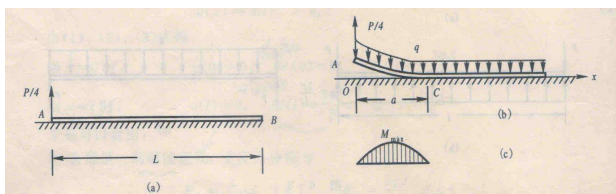
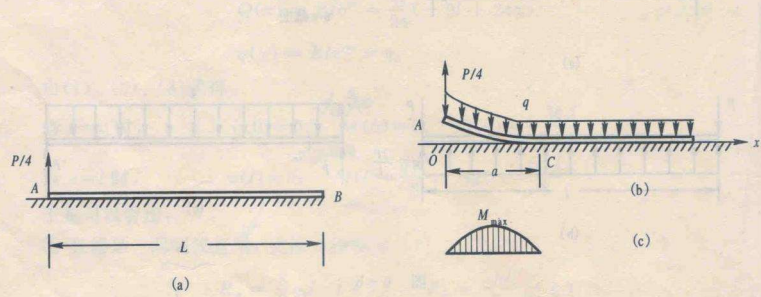


图 6-7

解: (1) 求最大弯矩。

在梁的 A 端加 P/4 力之后, 梁的左部分在长度 a 内被提起来(图 6-7(b)), 右面部分仍落在刚性平面上, 保持直线状态。因此右段所有截面的弯矩均为零, 其中 x=a 的横截面内弯矩为零, 但该截面有剪力 Q。

令 $q=P/L$ 为梁单位长度重量。根据被悬起部分的平衡条件, 有

$$\sum Y = 0 \quad \frac{P}{4} - Q - qa = 0$$

$$\sum m_c = 0 \quad \frac{1}{4}Pa - \frac{1}{2}qa^2 = 0$$

将 $q=P/L$ 代入, 解得被悬起部分的长度 a 与截面 C 的剪力 Q 为

$$a = \frac{L}{2}, \quad Q = \frac{P}{4}$$

作出梁被提起部分的弯矩图, 如图 6-7(c) 所示, 最大弯矩为

$$M_{max} = \frac{qa^2}{8} = \frac{Pa^2}{8L}$$

(2) 求 A 点的铅垂位移。

被提起部分的挠曲线近似微分方程为

$$EIv'' = M(x) = \frac{q}{2} \left(\frac{L}{2}x - x^2 \right)$$

$$EIv' = \frac{q}{2} \left(\frac{L}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) + C \quad (1)$$

$$EIv = \frac{q}{2} \left(\frac{L}{12}x^3 - \frac{1}{12}x^4 \right) + Cx + D \quad (2)$$

边界条件为 $x=a, v'=0$, 将(1)、(2)式代入, 得方程

$$\frac{q}{2} \left(\frac{L}{4}a^2 - \frac{1}{3}a^3 \right) + C = 0$$

$$\frac{q}{2} \left(\frac{L}{12}a^3 - \frac{1}{12}a^4 \right) + Ca + D = 0$$

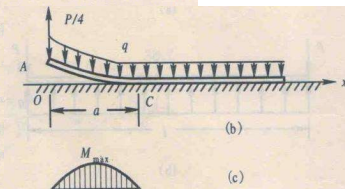
解得

$$C = \frac{qa^2}{2} \left(\frac{a}{3} - \frac{L}{4} \right)$$

$$D = \frac{PL^2}{384}$$

梁被提起部分的挠曲线方程为

$$EIv = \frac{qx^3}{24}(L-x) - \frac{qL^3}{96}x + \frac{qL^4}{384}$$



梁被提起部分的挠曲线方程为

$$EIv = \frac{qx^3}{24}(L-x) - \frac{qL^3}{96}x + \frac{qL^4}{384}$$

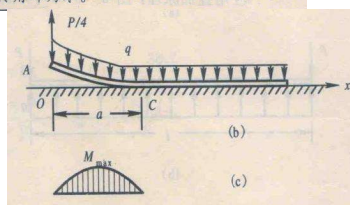
当 $x=0$ 时, 得 A 点的铅直位移

$$f_A = \frac{PL^2}{384EI} \quad \text{或} \quad f_A = \frac{Pa^2}{48EI}$$

由于在 C 截面的转角、挠度均为零, 所以研究变形时, 被提起段可以看成悬臂梁。因此还可利用叠加法求 A 点的铅直位移, 即

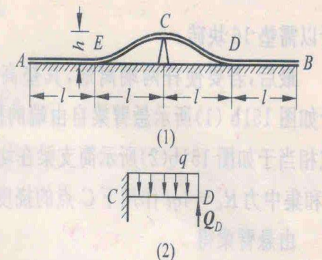
$$f_A = \frac{P}{4} \left(\frac{L}{2} \right)^3 \frac{1}{3EI} - \frac{P}{L} \left(\frac{L}{2} \right)^4 \frac{1}{8EI} = \frac{PL^2}{384EI}$$

讨论: 这种类型的题在分析考虑时, 要注意右面未被悬起部分弯矩为零, 由此可求得提起部分的长度, 但在 C 截面剪力不为零, 挠度和转角均为零。



《力学小问题》p163

151. 单位长度重 q 的均质杆 AB 置于刚性水平地面上, 已知在中点 C 处垫一块高 h 的砖时(支承处可简化为一点), 恰使杆的半长离地, 如图 151a(1)。问使端部开始与地面成点接触时(即少垫一块砖就成线接触), 需垫几块同样的砖? 使杆两端离地, 至少需垫同样的砖多少块? (何蕴增, 哈尔滨船舶工程学院材料力学教研室。原第 63 题, 1984, No. 1.)



解：由变形连续条件知，抬起半长时在D处杆的曲率为零，因而弯矩 $M_D=0$ ，同样转角 $\theta_D=0$ 。因此杆CD段可以视同一悬臂梁，如图151a(2)。在均布载荷 q 和未知力 Q_D 作用下，自由端的转角 $\theta_D=0$ 。据此，可以求出 Q_D 和 h 。

易知，在 q 作用下， $\theta_D = -ql^2/(6EI)$ ；在 Q_D 作用下， $\theta_D = Q_D l^2/(2EI)$ ，由 $\theta_D = \theta_D + \theta_D = 0$ ，得

$$-\frac{ql^2}{6EI} + \frac{Q_D l^2}{2EI} = 0$$

因此

$$Q_D = \frac{ql}{3}$$

从而知砖高

$$h = \frac{ql^4}{8EI} - \frac{Q_D l^3}{3EI} = \frac{ql^4}{72EI} \quad (1)$$

另一种解法：杆ED段可以视同一两端固支的梁，如图151a(3)。在均布载荷 q 和未知支反力 R_C 作用下，使得两固定端的反力矩为0。据此，可以求出 h 。

易知，在 q 作用下， $M_E = M_D = ql^2/3$ ，在 R_C 作用下， $M_E = M_D = R_C l/4$ ，由 $M_E = M_E + M_D = 0$ ，得 $R_C = 4ql/3$ 。在 q 作用下，C点向下的挠度 $y_C = ql^4/(24EI)$ ，在 R_C 的作用下，C点向上的挠度 $y_C' = R_C l^3/(24EI) = 4ql^4/(72EI)$ 。

因此

$$h = y_C' - y_C = \frac{ql^4}{72EI}$$

与(1)式相同。

同理，用 $2l$ 代替 l ，可以求得端部开始与地面成点接触时(这时 $M_A = M_B = 0$)，

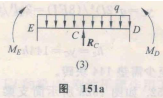
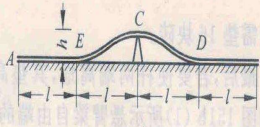
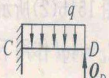


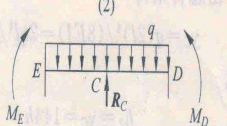
图 151a



(1)



(2)



(3)

$$h_1 = \frac{q(2l)^4}{72EI} = 16h$$

所以需垫16块砖。

最后，若要使杆两端离地，其垫高量相当于如图151b(1)所示悬臂梁自由端的挠度值。或相当于如图151b(2)所示简支梁在均布载荷 q 和集中力 $R_C = 4ql$ 作用下C点的挠度值。

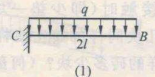
由悬臂梁得

$$y_C = q(2l)^4/(8EI) = 2ql^4/(EI)$$

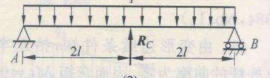
因此

$$h_2 = y_C = 144h$$

可见至少需垫144块砖。

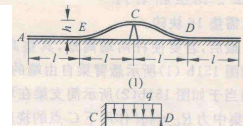


(1)



(2)

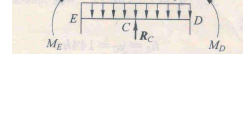
图 151b



(1)



(2)



(3)

《力学小问题》p164

152. 如图152a所示简支梁AB，跨度为 $4a$ ，离某刚性水平面的距离为 δ_0 ，当作用于梁上的两个载荷 P 逐渐增加时，迫使梁的中间段CD与平面 $A'B'$ 相接触。已知 δ_0 ， EI 及接触段CD的长度 a ，求：(1)载荷 P 的值。(2)梁A端的转角 θ_A 。(黄纪山，南京化工学院1983年硕士研究生试题。原第57题，1983，No.6。)

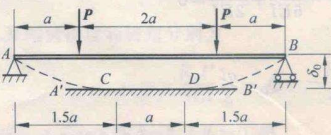


图 152a

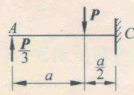


图 152b

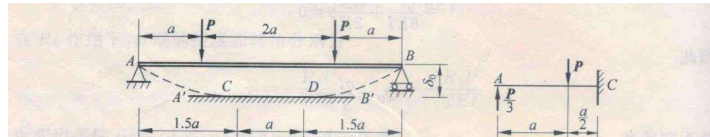


图 152a

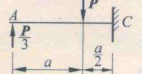


图 152b

解：根据变形条件，已知梁在C点和D点的曲率为零，曲率半径 $\rho_C = \rho_D$ 为无穷大。由对称性知，只需考虑AC段梁。由弯矩与曲率的关系公式知

$$\frac{1}{\rho_C} = \frac{M_C}{EI} = 0$$

因此截面C处的弯矩 $M_C = 0$ 。且截面C处的转角 $\theta_C = 0$ ，梁的挠度 $y_C = \delta_0$ 。

考虑AC段梁的平衡，由 $M_C = 0$ 的条件，将 P 与 R_A 对C点取矩，得

$$R_A \times 1.5a - P \times 0.5a = 0$$

所以

$$R_A = \frac{P}{3}$$

方向与 P 相反，即向上。

这样一来，AC段梁可以视同图152b所示的悬臂梁，该悬臂梁C端固定，A端向上的挠度为 δ_0 ，需求载荷 P 和A端的转角 θ_A 。

利用矩法或单位载荷法，得

$$EI\delta_0 = \frac{5}{24}Pa^3$$

$$EI\theta_A = \frac{Pa^2}{4}$$

所以

$$P = \frac{24EI\delta_0}{5a^3} = 4.8EI\delta_0/a^3$$

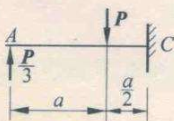
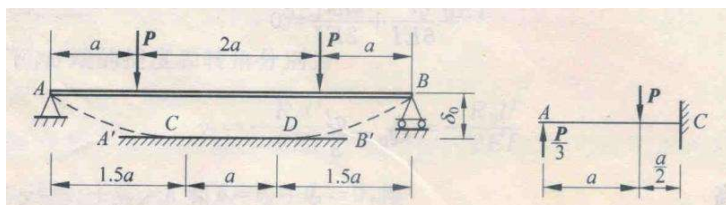
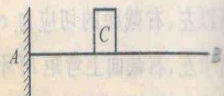
$$\theta_A = \frac{Pa^2}{4EI} = \frac{1.2\delta_0}{a}$$

《力学小问题》p150

139. 物块C的重量为 G ，置于悬臂梁AB上(图139a)，梁长 L ，弯曲刚度 EI ，物块与梁间的摩擦系数为 μ ，求：

(1)物块开始滑动时的位置；

(2)物块滑离B端时的速度。(董加林，王桂清，沈阳机电厂。原第127题，1986，No.5。)



解：(1) 设物块开始滑动时的位置为 s ，如图 139b 所示，则 AD 段的挠曲线方程为

$$y = -\frac{Gx^2}{6EI}(3s-x) \quad (0 \leq x \leq s)$$

由此可知

$$\theta_D = y'_D = -Gs^2/(2EI) \quad (1)$$

由静力平衡条件，可求得摩擦力为

$$F = \mu G \cos|\theta_D|$$

而物块开始滑动的条件为

$$G \sin|\theta_D| \geq F$$

由以上二式易得

$$\tan|\theta_D| \approx |\theta_D| \geq \mu$$

将式(1)代入上式，即可得到物块开始滑动时的位置为

$$s \geq \left(\frac{2EI\mu}{G}\right)^{1/2}$$

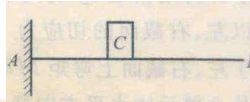


图 139b

(2) 物块由 D 处滑至 B 处，在此阶段的始、末两处的挠度分别为

$$f_D = -\frac{Gs^3}{3EI}, \quad f_B = -\frac{GL^3}{3EI}$$

设物块滑离 B 端时的速度为 v ， W 为摩擦力 F 在此滑动过程中所作的功，由能量守恒定律可得

$$\frac{Gv^2}{2g} = G\left(\frac{GL^3 - Gs^3}{3EI}\right) - W \quad (2)$$

这里假定物块很小，其转动动能可忽略不计。

由于

$$dW = F ds$$

而

$$F = \mu G \cos|\theta|$$

$$ds = (1+y'^2)^{1/2} dx$$

$$\cos|\theta| = dx/ds = (1+y'^2)^{-1/2}$$

故有

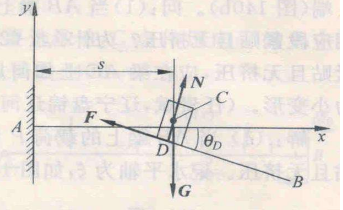
$$dW = \mu G \cos|\theta| \cdot (1+y'^2)^{1/2} dx = \mu G dx$$

积分上式，得

$$W = \mu G(L-s) \quad (3)$$

将式(3)代入式(2)，最后得到

$$v = \left\{ 2g(L-s) \left[\frac{G}{3EI}(L^2 + Ls + s^2) - \mu \right] \right\}^{1/2}$$



第八章 应力和应变分析 强度理论

Chapter 8 Analysis of Stress and Strain Strength Theories

- ▶ § 8-1 应力状态概述 (Concepts of stress-state)
- ▶ § 8-2 平面应力状态分析-解析法 (Analysis of plane stress-state)
- ▶ § 8-3 平面应力状态分析-图解法 (Analysis of plane stress-state)
- ▶ § 8-4 三向应力状态分析 (Analysis of three dimensional stress state)

- ▶ § 8-5 平面应变状态分析 (Analysis of plane strain-state)
- ▶ § 8-6 广义胡克定律 (Generalized Hook's law)
- ▶ § 8-7 复杂应力状态的变形比能 (Strain-energy density in general stress-state)
- ▶ § 8-8 强度理论 (Failure criteria)
- ▶ § 8-9 莫尔强度理论 (Mohr's failure criterion)

§ 8-1 应力状态概述

(Introduction of stress-state)

一、应力状态的概念 (Concepts of stresses-state)

请看下面几段动画

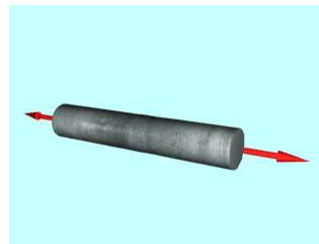
1. 低碳钢和铸铁的拉伸实验

(A tensile test of low-carbon steel and cast iron)

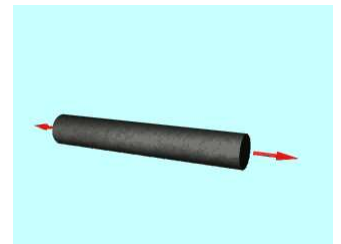
2. 低碳钢和铸铁的扭转实验

(A torsional test of low-carbon steel and cast iron)

低碳钢和铸铁的拉伸



低碳钢 (low-carbon steel)

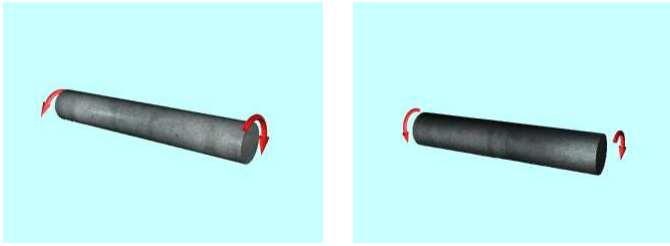


铸铁 (cast-iron)



塑性材料拉伸时为什么会出现滑移线?

低碳钢和铸铁的扭转



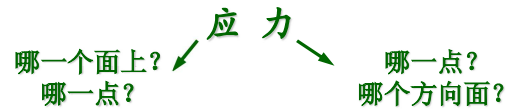
低碳钢
(low-carbon steel)

铸铁
(cast-iron)

? 为什么脆性材料扭转时沿45°螺旋面断开?

3. 重要结论 (Important conclusions)

- (1) 拉中有剪, 剪中有拉;
- (2) 不仅横截面上存在应力, 斜截面上也存在应力;
- (3) 同一面上不同点的应力各不相同;
- (4) 同一点不同方向面上的应力也是各不相同



4. 一点的应力状态 (state of stresses of a given point)

过一点不同方向面上应力的情况, 称之为**这一点的应力状态** (state of stresses of a given point), 亦指该点的应力全貌.

二、应力状态的研究方法 (The method for investigating the state of stress)

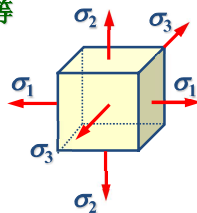
1. 单元体 (Element body)

2. 单元体特征 (Element characteristic)

- (1) 单元体的尺寸无限小, 每个面上应力均匀分布
- (2) 任意一对平行平面上的应力相等

3. 主单元体 (Principal body)

各侧面上切应力均为零的单元体

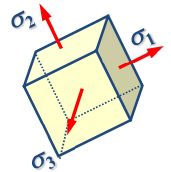


4. 主平面 (Principal plane)

切应力为零的截面

5. 主应力 (Principal stress)

主面上的正应力



说明: 一点处必定存在这样的单元体, 三个相互垂直的面均为主平面, 三个互相垂直的主应力分别记为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 且规定按代数值大小的顺序来排列, 即

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

在研究一点的应力状态时, 通常用 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 代表该点的三个主应力, 并以 σ_1 代表代数值最大的主应力, σ_3 代表代数值最小的主应力, 即 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

三、应力状态的分类

(The classification of stresses-state)

1. 空间应力状态 (Triaxial stress-state or three-dimensional stress-state)

三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 均不等于零

2. 平面应力状态 (Biaxial stress-state or plane stress-state)

三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 中有两个不等于零

3. 单向应力状态 (Uniaxial stress-state or simple stress-state)

三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 中只有一个不等于零

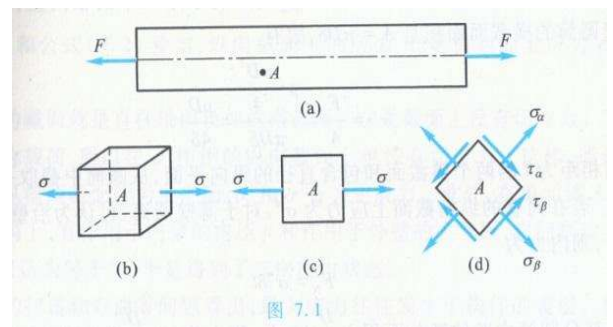
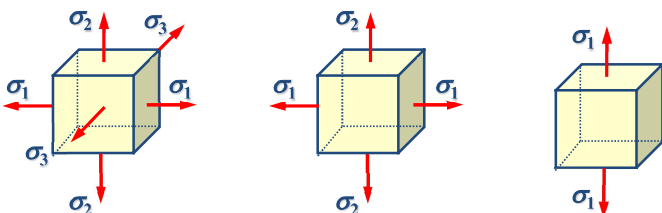
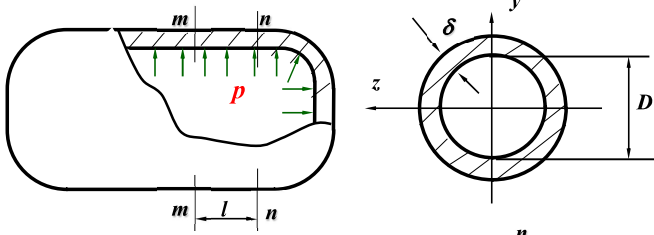


图 7.1

例题1 分析薄壁圆筒受内压时的应力状态

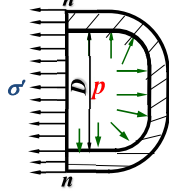


(1) 沿圆筒轴线作用于筒底的总压力为F

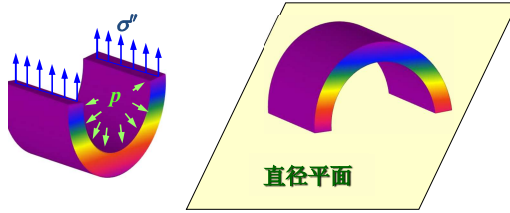
$$F = p \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

薄壁圆筒的横截面面积

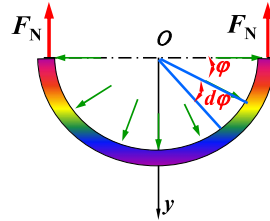
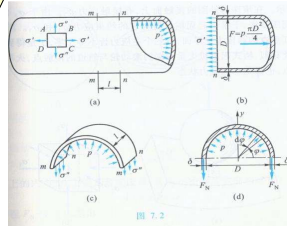
$$A = \pi D \delta \quad \sigma' = \frac{F}{A} = \frac{p \cdot \frac{\pi D^2}{4}}{\pi D \delta} = \frac{pD}{4\delta}$$



(2) 假想用一直径平面将圆筒截分为二,并取下半环为研究对象



直径平面



$$\sum F_y = 0 \quad \int_0^\pi p l \cdot \frac{D}{2} \sin \phi d\phi = p l D$$

$$2\sigma'' \delta l - p l D = 0 \quad \sigma'' = \frac{pD}{2\delta}$$

例 7.1 由 Q235 钢制成的蒸汽锅炉。壁厚 $\delta = 10 \text{ mm}$, 内径 $D = 1 \text{ m}$ (图 7.2)。壁内受蒸汽内压 $p = 3 \text{ MPa}$ 。试计算锅炉壁内任意点处的三个主应力。

解: 由公式 (7.1) 和公式 (7.2), 得

$$\sigma' = \frac{pD}{4\delta} = \frac{(3 \times 10^6 \text{ Pa})(1 \text{ m})}{4(10 \times 10^{-3} \text{ m})} = 75 \times 10^6 \text{ Pa} = 75 \text{ MPa}$$

$$\sigma'' = \frac{pD}{2\delta} = \frac{(3 \times 10^6 \text{ Pa})(1 \text{ m})}{2(10 \times 10^{-3} \text{ m})} = 150 \times 10^6 \text{ Pa} = 150 \text{ MPa}$$

按照关于主应力记号的规定,

$$\sigma_1 = \sigma'' = 150 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma' = 75 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 \approx 0$$

例 7.2 薄壁球形容器 (图 7.4a) 的壁厚为 δ , 内径为 D , 内压为 p 。试求容器壁内的应力。

解: 用包含直径的平面把容器分成两个半球, 其一如图 7.4b 所示。半球上内压力的合力 F , 等于半球在直径平面上的投影面积 $\frac{\pi D^2}{4}$ 与 p 的乘积, 即

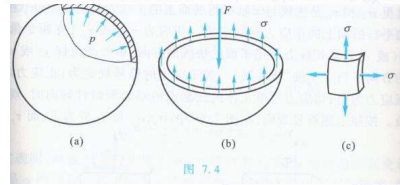


图 7.4

$$F = p \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

容器截面上的内力为 (由于是薄壁圆球, 认为 σ 沿厚度方向为常量)

$$F_N = \pi D \delta \cdot \sigma$$

由平衡方程 $F_N - F = 0$, 求出

$$\sigma = \frac{pD}{4\delta}$$

由容器的对称性可知, 包含直径的任意截面上皆无切应力, 且正应力都等于由上式算出的 σ (图 7.4c)。与 σ 相比, 半径方向的应力可以忽略, 则三个主应力为

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \quad \sigma_3 = 0$$

即: 球内各点均处于二向应力状态

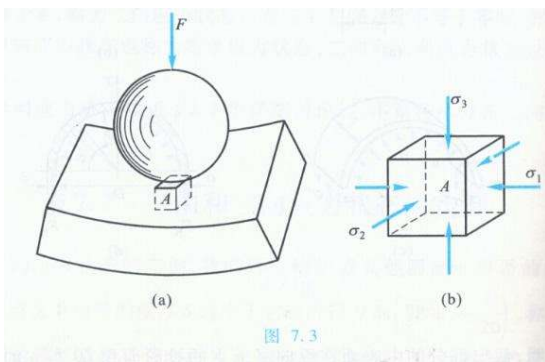
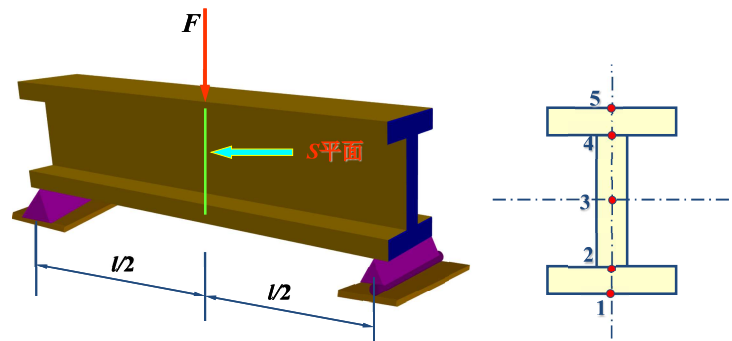
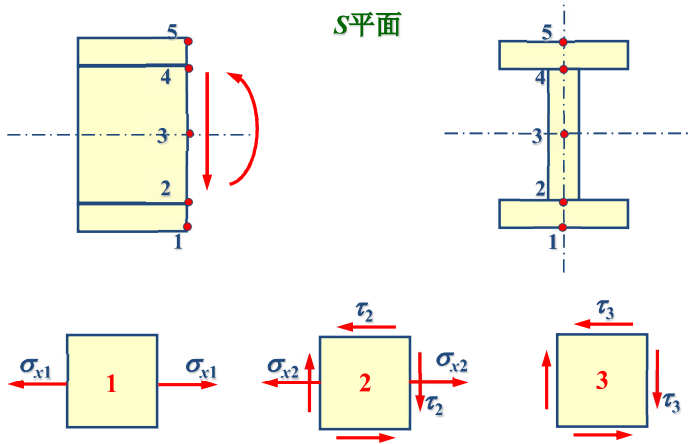


图 7.3

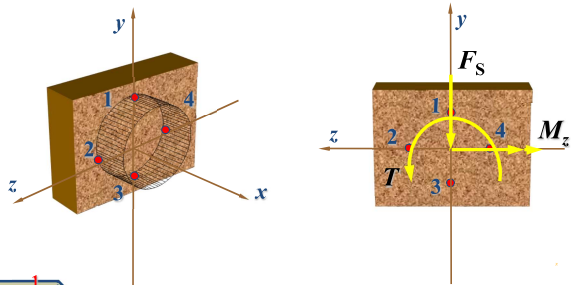
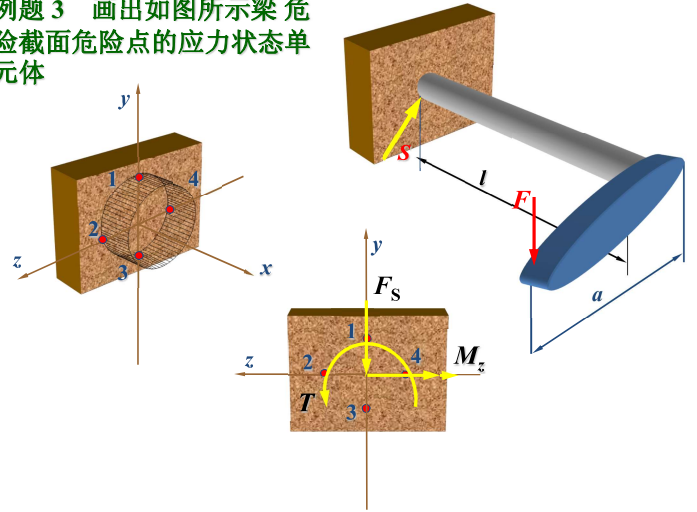
图 7.3b 所示。在滚珠与外圈的接触面上, 有接触应力 σ_3 。由于 σ_3 的作用, 单元体将向周围膨胀, 于是引起周围材料对它的约束应力 σ_2 和 σ_1 。所取单元体的三个相互垂直的面皆为主平面, 且三个主应力皆不等于零, 于是得到三向应力状态。与此相似, 桥式起重机大梁两端的滚动轮与轨道的接触点, 火车车轮与钢轨的接触点, 也都是三向应力状态。

例题 2 画出如图所示梁 S 截面的应力状态单元体。





例题3 画出如图所示梁危险截面危险点的应力状态单元体



作业: 6.22, 6.25, 6.28, 6.33, 6.37, 6.39, 6.44, 7.2

$$\tau_1 = \frac{T}{W_t} \quad \sigma_{x1} = \frac{M_z}{W_z}$$

$$\tau_2 = \frac{T}{W_t} + \frac{4F_S}{3A}$$

$$\sigma_{x3} = \frac{M_z}{W_z} \quad \tau_3 = \frac{T}{W_t}$$