

暴胀理论及其观测检验

严骐鸣 PB19020515

邮箱:asadoubi233@mail.ustc.edu.cn

2021 秋季学期粒子宇宙学课程论文

主讲老师: 蔡一夫 助教: 王晴晴

2022 年 1 月 30 日

摘要

在 20 世纪 80 年代, 主要为了解决当时的宇宙学理论对宇宙初始条件的要求过于严苛的问题, 宇宙学家设想在宇宙极早期存在一个宇宙加速膨胀的过程, 即暴胀。此后理论物理学家构造了种种物理模型使得暴胀能够发生并持续足够长的时间, 这些模型中的大部分可以等效为在宇宙早期存在一个实标量场, 这个标量场主导宇宙经历近似于指数增长形式的膨胀, 即单场慢滚暴胀。同时, 暴胀模型还认为在暴胀开始前这个标量场的量子涨落为极早期宇宙带来了使宇宙偏离完全均匀情况的微小的扰动, 而这些扰动随着宇宙演化逐渐形成了宇宙微波背景辐射的各向异性。在宇宙学扰动理论的框架下, 可以计算这些扰动的功率谱, 同时, 根据对宇宙微波背景辐射各向异性的观测也可以给出功率谱, 将两功率谱对比就可以检验不同的暴胀模型和对真实宇宙的观测的相符程度。

目录

1 引言	2
2 为什么需要暴胀	4
2.1 暴胀未提出时的宇宙学	4
2.2 暴胀未提出时的宇宙学面临的疑难	5
2.2.1 视界问题	6
2.2.2 平直性问题	7
2.3 暴胀如何解决疑难	7
3 单场、慢滚暴胀	8
4 不同的暴胀模型简介	11
4.1 幂律暴胀	11
4.2 坡顶暴胀	12
4.3 自然暴胀	13
4.4 修改引力	14
4.5 其它暴胀模型	16
4.5.1 D-膜暴胀	16
4.5.2 含有指数项的势能	16
4.5.3 超对称性的自发破缺驱动暴胀	17
4.5.4 α 吸引子	17
4.5.5 非最小耦合的暴胀模型	17

5 联系理论和观测：扰动理论	18
6 观测结果的检验	20
6.1 宇宙微波背景辐射简介	20
6.2 根据数据比较模型优劣的方法	24
6.3 Planck 卫星的最新数据对不同的暴胀模型的审判	25
6.3.1 修改引力	27
6.3.2 幂律暴胀	28
6.3.3 自然暴胀	28
6.3.4 坡顶暴胀	28
6.3.5 D 膜暴胀	29
6.3.6 含有指数项的势能	29
6.3.7 超对称性的自发破缺驱动暴胀	29
6.3.8 α 吸引子	29
6.3.9 非最小耦合的暴胀模型	30
7 总结与展望	30

1 引言

现代宇宙学理论的开端可以说是 Einstein 在 1916 年提出了广义相对论, 此后宇宙学家得以在广义相对论的框架下描述宇宙的时空。由于 20 世纪初天文观测的范围尚非常小, 甚至还需要辩论银河系以外是否存在和银河系大小量级相同的天体, 因此当时科学家普遍接受宇宙是稳恒、一成不变的。不过在 1924 年, Hubble 基于造父变星的周光关系确认很多天体位于银河系外很远的位置, 并且大部分银河系外的天体都在远离我们, 这暗示了宇宙并非一成不变, 而可能处于膨胀之中。在 1927 年, 比利时神父兼科学家 Lemaitre 提出, 宇宙在膨胀, 并且宇宙可以向前追溯到一个原初的“原子”中, 我们今天所见的一切当时都被压缩到这个“原子”中, 此后这个“原子”“向外”“爆炸”产生了膨胀的宇宙。¹

不过当时 Lemaitre 的理论并没有受科学界的重视, 主流理论仍然认为宇宙处于近似的稳恒态中, 只不过为了解释遥远的天体基本都在离地球而去的观测结果需要对原来的稳恒宇宙理论进行“修补”。在 1948 年, Hoyle 等人提出了在无限大的宇宙中, 宇宙在膨胀, 同时物质不断在因膨胀而新产生的空间中产生以保持宇宙的密度和其它物理性质仍然基本保持不变的新的稳恒态宇宙模型。

同一时期, 得益于粒子物理学的进展, Gamow 等人描述了现今所见的宇宙中的原子如何从最初温度和密度都很高的等离子体随着宇宙膨胀、密度和温度下降而演化得到。该理论的当时反对者将这个理论戏称为“大爆炸” (Big Bang), 此后就成了这个理论的通称。

此后稳恒宇宙理论和大爆炸理论分庭抗礼, 直到在 1965 年, Penzias 和 Wilson 无意中探测到了宇宙微波背景辐射, 而这正是大爆炸理论的预言, 此后大爆炸逐渐为科学界所公认。

然而, 根据大爆炸理论, 根据现在这样一个近似处处均匀且各向同性的宇宙反推回宇宙早期的情况, 就必须要求宇宙在初始时物质分布高度均匀, 并且初始时宇宙中各组分的能量密度总和也必须非常接近一个特定的值。尽管物理学的任务通常是在给定初始条件的情况下得到系统在未来的状态, 而非决定初始条件, 只不过对于当时的大爆炸理论来说, 反推得到的初始条件太过苛刻, 似乎需要被“校正”到一个范围非常小的值, 这令宇宙学家无法接受。

¹关于宇宙学理论发展历史的介绍可以参考文献 [18] 第 3 章

不过宇宙学家很快找到了一种“修补”原来的大爆炸宇宙学的方案：只要让宇宙在极早期经历过一个足够长的加速膨胀阶段，此后再依次进行原来的大爆炸宇宙学中的辐射、（非相对论性）物质主导宇宙的演化的阶段，就宇宙在初始时的条件不必只在一个非常严苛的范围内取值。这个宇宙极早期经历的加速膨胀阶段就被定义为暴胀。

自然，此后理论物理学家就开始构造能够让宇宙经历暴胀的物理机制。起初的尝试并不顺利，Guth 在 20 世纪 80 年代初通过宇宙的从“假真空”到“真真空”的衰变过程使得宇宙经历暴胀的模型（现在称为“旧暴胀模型”）并不成功。²，此后，Linde 等一批宇宙学家构造出由一个势函数变化较为平缓的标量场（或者时其它的效果可以等效为一个标量场的物理机制）在宇宙早期的能量密度中占主导并驱动宇宙经历暴胀的模型，即单场慢滚暴胀模型，这类模型取得了巨大的成功。

不过和类似像高温超导这样“无理论可用”的尴尬情况恰好相反，暴胀理论面临的问题可以说是太多的模型都能给出宇宙经历暴胀这一结果。在 20 世纪 80 年代初期就出现了两类模型：暴胀过程中标量场的场值变化较大的大场暴胀模型和变化较小的小场暴胀模型，前者的代表是幂律暴胀，后者的代表是坡顶暴胀。此外还有根本不存在标量场，但是能通过修改引力理论带来等效于标量场效果的修改引力以产生暴胀的模型。进入 20 世纪 90 年代，由于此前类似幂律暴胀这样的暴胀模型中假设的标量场的势函数与粒子物理的理论中通常出现的大相径庭，就又有理论物理学家从粒子物理的视角出发构建暴胀模型，并认为这样的暴胀模型才和自然更加相符，故冠以自然暴胀的名称。而支持超越粒子物理标准模型的种种理论的理论物理学家也基于尚未被加速器检验的理论构造暴胀模型，比如，基于有望统一 3 种规范相互作用的超对称理论可以构造出由超对称性自发破缺驱动宇宙暴胀的模型，或者基于有更大野心想要统一所有 4 种相互作用的弦理论（更准确地说是 M 理论），则可构造出 D 膜暴胀，并且由于这些超越标准模型的理论存在“可调”的参数，类似 D 膜暴胀这样的模型也有参数不同的版本。

理论物理学家“创造”了太多只在论文上存在的“宇宙”，面对如此之多的“宇宙”，甚至有人觉得暴胀理论的可靠程度和科幻小说一样。³ 因此必须检验这些“宇宙”中的哪些能够较好地刻画我们所生活的宇宙。

得益于在 20 世纪 70 年代发展起来的宇宙学扰动理论，在给定某时刻宇宙的不均匀程度的情况下，（只要不均匀的程度不是很大，还在线性近似的可用范围内）就可以从理论上计算出此后宇宙的不均匀程度。而暴胀理论认为驱动暴胀的标量场在暴胀之前是一个量子场，存在随机的量子涨落，这样的量子涨落提供了暴胀前宇宙的不均匀性。

另一方面，随着天文观测手段的进步，“精确宇宙学”时代的到来，人类已经有能力探测宇宙的不均匀性（对于目前活动范围只限于在宇宙学尺度上和一个点无异的银河系的人类来说，宇宙的不均匀性在观测上就是各向异性）。人类探测宇宙的各向异性的一个重要手段就是探测宇宙微波背景辐射的各项异性，由此可反推出宇宙微波背景辐射产生时的宇宙的不均匀程度。第一个主要为了探测宇宙微波背景辐射各向异性的太空探测器是 Wilkinson 微波各向异性探测器，其后继者，也是目前为止实际投入运行的太空探测器中性能最新、性能最优异的，就是 Planck 卫星，现已结束运行。到 2018 年，Planck 卫星团队已经公布全部的三批数据。基于这样高精度的数据，哪怕不同的暴胀模型计算出的宇宙不均匀程度只有微小的差别，也可将其区分并检验哪些模型和我们所生活的宇宙较符合。

作为一篇文献综述，本文共分为七部分。在第一部分的引言之后第二部分将简要介绍暴胀理论被提出前的宇宙学理论，并回顾当时的宇宙学理论在反推得到宇宙的初始条件时遇到的两个主要疑难：视界问题和平坦性问题，此后说明暴胀如何解决前述的两个问题。在本文第三部分，将介绍许多暴胀模型所共有的框架：单场、慢滚暴胀。在第四部分，将具体介绍不同的暴胀模型，主要包括提出影响较大，同时也常成为后来的许多暴胀模型的某种特殊情况的几种暴胀模型：幂律暴胀、坡顶暴胀、自然暴胀和修改引力。并简

²见参考文献 [17] 中在导论部分的介绍。

³比如怀疑主义者所写的关于宇宙学的“科普”（参考文献 [18]）甚至认为暴胀理论无法被检验（[18] 第 32 页）

要介绍一些根据尚未在加速器上被检验的前沿物理理论提出或者理论构架更复杂暴胀模型。在第五部分，以非常简略地方式介绍联系暴胀模型的预言和观测结果的宇宙学扰动理论，在这过程引出定量刻画宇宙非均匀性的扰动功率谱的定义。第六部分的目的是介绍 Planck 卫星团队主要基于 Planck 卫星得到的数据对不同的暴胀模型进行的检验，故首先简介了宇宙微波背景辐射以及对其的观测能够得到哪些信息，以便之后理解 Planck 卫星团队给出的数据；此后介绍 Planck 卫星团队为比较定量比较不同暴胀模型的好坏所采用的统计学方法，最后介绍 Planck 卫星团队对不同的暴胀模型与观测相符程度的检验；第七部分总结本文的内容，并展望其它的宇宙学理论和宇宙学的未来发展。

单位制与符号约定 取自然单位制：

$$c = \hbar = 1$$

希腊字母 $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ ，拉丁字母 $i, j, \dots = 1, 2, 3$ ，重复指标代表求和。除特别说明的情况外，闵可夫斯基时空的度规 $\eta_{\mu, \nu}$ 为：

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$$

逗号表示求导，如 $V(\phi)_{,\phi}$ 表示 $\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}$ 。特别地，打点表示对 (物理) 时间 t 求导，如 $\dot{a}(t)$ 表示 $\frac{da(t)}{dt}$ 。用分号表示协变导数，如 $f_{;\mu}$ 表示 $\nabla_{\mu} f$ 。

2 为什么需要暴胀

2.1 暴胀未提出时的宇宙学

到 20 世纪 70 年代，现代宇宙学的基本框架已经形成。对宇宙大尺度结构的巡天已经开始，在 1964 年首次探测了宇宙微波背景辐射，这些观测上结果已经基本证实了一个长久以来被称为“宇宙学原理”的假设：**在大尺度上，宇宙是均匀且各向同性的。**

宇宙学原理结合 Hubble 定律以及作为理论框架的 Einstein 提出的广义相对论，就可以非常有把握地说，宇宙整体上可以由 Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker 度规 (FLRW) 度规描述，即采用“时间 + 球坐标” (t, r, θ, ϕ) ，时空线元 ds^2 为：⁴

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (1)$$

其中 $a(t)$ 为尺度因子，这个因子仅仅依赖于时间而和空间坐标无关，这反映了宇宙学原理，径向坐标为 r 的点和原点的物理距离 R 为 $R = a(t)r$ ，而即使该处一物体本身速度为 0， r 不变，只因尺度因子 $a(t)$ 随时间的变化，就能引起物理距离 R 的变化，通常用 Hubble 参数 H 来表征尺度因子的变化，

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2)$$

其中 $\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}$ ，即打点表示对 (物理) 时间 t 的导数。故对于一个径向坐标为 r 并且本身没有运动的点，和原点的物理距离变化率为：

$$\frac{dR}{dt} = RH \quad (3)$$

若 $H > 0$ ，就对应本身没有运动的点都在离原点而远去，这就对应了宇宙本身在膨胀，而这正是我们现在所生活的宇宙的情况，这一由上式表示的事实早已被确认为 Hubble 定律。

这样的情况就好比：宇宙就好比一个大气球，在上面画上经纬度 (对应 (r, θ, ϕ) 坐标) 宇宙中的一切东西就像生活在气球上的一群群蚂蚁，就算蚂蚁不动，只要大气球在膨胀，蚂蚁间的距离还是会不断增加。

⁴已经取了真空中的光速 $c = 1$ 。

上面这个比方中的大气球也可以换成一块在桌面上铺开的（可以伸缩的）弹力布，有好事者，可以把水平的桌面换成一个弯曲的双曲面（马鞍面）。大气球、水平桌面上的弹力布和马鞍面上的弹力布分别对应宇宙的曲率分别为正曲率、零曲率（平直）和负曲率的情况分别对应中式(1)中 $k = -1, 0, 1$ 的情况。

自然要问，我们所生活的宇宙是哪一种情况？即使目前最新的观测数据也不能给出明确的答案，不过可以确定，我们所生活的宇宙非常接近平直的情况，即使我们所生活的宇宙实际上像个大气球，这个大气球也是如此之大，以至于在人类这只蚂蚁看来就像生活在平面上。总之，观测数据表明，我们所生活的宇宙 **高度平直**。

不妨令地球位于原点，一个特殊的径向坐标 r 满足：

$$H \times (ar) = c = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{aH} \quad (4)$$

由于不存在运动速度超过光速的粒子，假如 H 保持当前的值不变的话，那么现在起 $r \geq 1/(aH)$ 的区域都不会对地球造成任何影响，同样，地球也不会和这些区域有任何的相互作用。称 $1/(aH)$ 为共动 Hubble 半径，即同一时刻（共动）距离大于共动 Hubble 半径的两点之间没有任何相互作用。

当然 H 不会保持不变，根据 Einstein 场方程可以得到：

$$\dot{H} + H^2 = \frac{-4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (5)$$

其中 ρ 为宇宙中各种组分能量密度的总和， p 为宇宙的各种组分贡献的压强总和。这个方程称为第一 Friedmann 方程。结合能量守恒给出的方程：

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) \quad (6)$$

可以积分得到：

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (7)$$

这个方程称为第二 Friedmann 方程。

记 ρ_i 为宇宙中第 i 种组分的能量密度，并在(7)中先假设 $k = 0$ 得到一个 ρ 的值，记为 ρ_{crit} ，有 $\rho_{crit} = 3H^2/(8\pi G)$ ，称为临界密度，当宇宙中个组分能量密度总和 $\rho = \rho_i > \rho_{crit}$ 时，有 $k > 0$ ，宇宙是正曲率的，反之则为负曲率的，故临界密度由此得名。记 $\Omega_i = \rho_i/\rho_{crit}$ 表示第 i 种成分的能量密度在临界密度种的占比，故有

$$\sum_i \Omega_i - \frac{k}{a^2 H^2} = 1 \quad (8)$$

形式化地记 $-\frac{k}{a^2 H^2} \equiv \Omega_K$ 表示曲率带来的贡献大小， $\Omega_K > 0$ 代表我们所生活的宇宙是负曲率的，而最新的观测数据给出：（[5] 中的 (21) 式）

$$\Omega_K = 0.0007 \pm 0.0037 \quad 95\% \text{ 置信度} \quad (9)$$

其绝对值小于测量的不确定的度，因此不能肯定地说我们所生活的宇宙是负曲率的，但是由此定量地知道宇宙确实是高度平直的。

2.2 暴胀未提出时的宇宙学面临的疑难

然而大尺度上，宇宙均匀各向同性以及宇宙是高度平直的两个有充分证据的事实对于上世纪 70 年代暴胀未提出的时的宇宙学家来说，却成为了当时宇宙学模型中令人非常不安心之处。下面将会指出，这两个事实虽然原则上不一定和理论有冲突，然而这两个事实要求我们所生活的宇宙在初始时的各组分的分

布和总能量密度都满足即为严苛的条件。让一个“上帝”去“校正”宇宙初始时所有位置各组分的状态以满足这样严苛的条件，是不责任的科学也是不负责任的神学。这就如看到动物的器官的精巧构造就直接说是“上帝”的设计一般要让“上帝”活在科学理论尚不清楚的夹缝中。

因此，这样的疑难表明，需要提出新的宇宙学理论。

2.2.1 视界问题

“我们所生活的宇宙现在很均匀”——这是个问题。

首先，在天文学尺度上，重要的相互作用只有引力，然而引力具有不稳定性。开始时放置地比较均匀的一团粒子，只考虑彼此间的引力，密度高的区域的密度会不断上升，其余的区域则更像是“空洞”。对宇宙的观测也表明了这一点，通过统计星系密度得到的年龄较晚时期的宇宙的不均匀程度显著高于通过接收宇宙微波背景辐射得到的更早期的宇宙的不均匀程度。换句话说，宇宙越年轻，其越均匀。照此推断，当宇宙还很年轻时，对于（可观测）宇宙中的某小块区域来说，能够和它进行相互作用的区域就在今天的可观测中有较大的占比，这样这一小块区域和周围足够大的区域就能进行充分的相互作用，使得这些区域的密度分布更为接近，宇宙整体上的密度分布就更均匀。

然而，下面的计算表明，根据当时的宇宙学模型，宇宙越年轻，对宇宙中的某小块区域来说，能和它进行相互作用的区域在可观测宇宙中的占比反而非常小。

为方便计算，将式(1)给出的 FLRW 度规的径向坐标进行变换：

$$r^2 = \Phi_k(\chi^2) \equiv \begin{cases} \sinh^2 \chi & k = -1 \\ \chi^2 & k = 0 \\ \sin^2 \chi & k = +1 \end{cases} \quad (10)$$

得到：

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (d\chi^2 + \Phi_k(\chi^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) \quad (11)$$

现在想知道，对于一直位于原点的粒子， t 时刻曾与范围多大区域存在过相互作用，这应该是半径为 $\tau_p(t)$ 的一个球，其中 $\tau_p(t)$ 表示从宇宙大爆炸（这个时刻记为 t_i ，有 $a(t_i) = 0$ ，为化简表达式通常取 $t_i = 0$ ）到现在一个光子走过的（共动）距离，即 χ 的改变，由于光子满足 $ds^2 = 0$ ，故有：

$$d\chi = \frac{dt}{a} \quad (12)$$

故

$$\tau_p(t) = \int d\chi = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (13)$$

$\tau_p(t)$ 反映了 t 时刻多大的区域和这个粒子发生过相互作用，故称为粒子视界 (particle horizon) 记现在宇宙的年龄为 t_0 ， $\tau_p(t_0)$ 就代表了（在共动坐标中）目前可观测宇宙的半径。

宇宙中个组分的物态方程都近似有 $p = w\rho$ 这样简单的形式，将此式代入(5)中，注意到 $\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{d(\dot{a})^2}{2ada}$ ，并由(7)(忽略曲率项的贡献)可消去 ρ ，可得：

$$\frac{d(\dot{a})^2}{2ada} = \frac{-(1+3w)}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \quad (14)$$

积分一次后可得

$$dt \propto a^{(1+3w)/2} da \quad (15)$$

由此可得：（结合 $a(t=0) = 0$ ）

$$a(t) \propto t^{2/(3(1+w))} \quad (16)$$

$$\tau_p(t) \propto (a(t))^{(1+3w)/2} \quad (17)$$

然而，这样计算出来的反映宇宙早期能和原点的这个粒子进行相互作用的范围和今天可观测宇宙的范围的比值 $\frac{\tau_p(t)}{\tau_p(t_0)}$ 实在是太小了！宇宙的演化到最近为止的大部分时间由非相对论性粒子主导，有 $w \approx 0$ ，在宇宙的更年轻的适合，演化由相对论性粒子（辐射）主导，有 $w \approx 1/3$ ，不管怎么算，这样 $\frac{\tau_p(t)}{\tau_p(t_0)}$ 如此之小的值都意味着我们的可观测宇宙曾经是非常多块彼此没有任何联系的区域。

举个例子，宇宙微波背景辐射反映了 $t \approx 10^5$ 年时的情况，而今天宇宙的年龄约为 $t_0 \approx 10^{10}$ 年，从那时到现在宇宙的演化主要由非相对论性粒子主导，故有 $\frac{\tau_p(t)}{\tau_p(t_0)} = t^{(1+3w)/3(1+w)} \stackrel{w \approx 0}{\approx} \left(\frac{10^5}{10^{10}}\right)^{1/3} = 0.02$ ，这意味着，我们今天看到的宇宙微波背景辐射是由大约 $1/0.02 = 100$ 块彼此之间此前没有任何相互作用的区域构成的，把天区等分为 100 份，这样的计算结果期望某一份和天区其它部分的微波背景辐射分布截然不同——然而我们却看到了一个高度各向同性的宇宙微波背景辐射！

在早期宇宙中粒子视界太小以至于宇宙中各区域没法进行相互作用的情况下，我们所生活的宇宙早期高度的均匀性就只能意味着初始时宇宙各处的密度就非常接近但是又不能完全一模一样，必须要“校正”到刚好能让不均匀性通过引力不稳定性正好增加到今天所观测的值的的地步。这样的“微调”对宇宙学家来说难以接受，当时的宇宙学家就把这里论述的难题称为“视界问题”(horizon problem)。

2.2.2 平直性问题

由之前得到的 $a(t) \propto t^{2/(3(1+w))}$ 可以导出曲率项 $\Omega_K \equiv -k/(aH)^2$ 满足：

$$\Omega_K \propto (a(t))^{1+3w} \quad (18)$$

和前一个问题类似，宇宙越年轻时， a 越小，不论对于物质主导宇宙演化的时期还是辐射主导宇宙演化的时期，就 Ω_K 越小，而今天观测到的 Ω_K 已经如此之小，那么在宇宙初始时其会被“校正”到一个非常接近 0 的值，或者说，宇宙初始各组分的总能量密度非常接近 ρ_{crit} ，同样这对当时宇宙学家来说难以接受，他们称此为平直性问题 (flatness problem)。

2.3 暴胀如何解决疑难

从平直性问题涉及到的 $\Omega_K \equiv -k/(aH)^2$ 的形式出发，猜想如果宇宙早期存在一个使得共动 Hubble 半径 $1/(aH)$ 减小的时期，那么反推回去宇宙初始时 Ω_K 就不必非常小，而可以是 $\mathcal{O}(1)$ 量级，也就是说，解决平直性问题的必要条件是，宇宙早期存在一段时期满足**共动 Hubble 半径减小**：

$$\frac{d(1/(aH))}{dt} < 0 \quad (19)$$

而且最好这个时期还要足够长，才能将 Ω_K 降到所需要的很小的值，在这个时期过后，进入之前的热大爆炸宇宙学中描述的辐射主导宇宙演化的时期。

$\frac{d(1/(aH))}{dt} < 0$ 可推出 $\ddot{a} > 0$ ，即这个时期宇宙在**加速膨胀**，而根据式(5)，这对应于：

$$\rho + 3p < 0 \quad (20)$$

假设这个共动 Hubble 半径减小时期由某种能量密度的 ρ ，压强为 p 的东西主导宇宙的演化，那么这种东西一定具有负的压强，即有 $p < -1/3\rho < 0$ 。

此外，由 $\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a}$ ，故这个时期一直有 $H^2 > -\dot{H}$ ，这个时期应该有个结束时刻并在此后进入辐射主导宇宙演化的时期，因此有 $\dot{H} < 0$ 。然而为了将 Ω_K 从 $\mathcal{O}(1)$ 降到足够小的值，这段时期又需要足够长，具体来说，定义下面的“慢滚参数” ϵ ：

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (21)$$

应该有 $|\epsilon| \ll 1$ 。这种情况下， H 的变换缓慢，近似于一个常数，因此在这段时期近似有：

$$a(t) \propto e^{Ht} \quad (22)$$

即，在这段时期，宇宙中的任何一个区域的物理尺寸都经历了近似于指数增大的膨胀过程。

这时我们发现，由上式以及以及粒子视界的定义 $\tau_p(t) = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')}$ ，在这段时期中有：

$$\tau_p(t) \propto \frac{1}{H} \left[\frac{1}{a(t_i)} - \frac{1}{a(t)} \right] \quad (23)$$

上式中 t_i 表示这段时期的初始时刻。如果在这段时期结束时 (结束时刻记为 t_f)，有 $a(t_i) \ll a(t_f)$ ，在这段时期结束时，就得到了一个非常大的粒子视界 $\frac{1}{Ha(t_i)}$ ，此后依次进入辐射、非相对论性粒子主导宇宙演化的时期，粒子视界虽然还有增长，但是比起 $\frac{1}{Ha(t_i)}$ 增长的幅度并不算大，(只要让 $a(t_i)$ 非常小)。这样一来，我们看到的宇宙微波背景辐射在它们被产生之时，各个部分已经在很久以前发生了足够充分的相互作用，因此各部分高度相似并不奇怪。简单来说，暴胀为早期宇宙提供了“额外的”的粒子视界，解决了视界问题！

这样一个共动 Hubble 半径减小、宇宙进行接近指数增长形式的加速膨胀的时期就称为**暴胀 (inflation)**，而刚才已经看到，暴胀同时解决了平直性问题和视界问题！

用形象化的语言来说，现在看到的这样大的可观测宇宙，在暴胀之前就是大气球 (或者桌面/马鞍面上的弹力布) 上的一小块，这一小块上的蚂蚁群可以快乐地一起交流 (可观测宇宙中的各部分可以进行充分相互作用)，忽然有人使劲吹气球 (拉扯桌布)，曾经的小小区域成了一大片，任何“弯曲”都被拉平了 (Ω_K 大幅减小)。

然而，暴胀发生要求 $p < -1/3\rho$ ，而对应暴胀持续足够长时间的条件 $|\epsilon| \ll 1$ 则要求：

$$\frac{|\rho + p|}{\rho} \ll 1 \quad (24)$$

这样的话就得出：

$$p \approx -\rho \quad (25)$$

接下来的问题是，怎样的“物质”满足这样条件？从 20 世纪 80 年代开始，各种各样的暴胀模型被提出来，这些理论家“创造”的各种“宇宙”将在之后进行简要介绍。

3 单场、慢滚暴胀

宇宙学家提出，满足上一节中条件，能用于驱动暴胀的“物质”是一个标量场，这个标量场对应的粒子就称为暴胀子 (inflaion)。

具体来说，记这个场的场量为 ϕ ，对应的拉氏量密度 \mathcal{L}_ϕ 为：

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \quad (26)$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 为 (认为宇宙的总曲率为 0 情况下的) FLRW 度规，即 $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, a^2, a^2, a^2\}$ ，($g^{\mu\nu}$ 为其逆度规)。 $\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ 为该场的动能项， $V(\phi)$ 为该场的势能项。

认为在暴胀时期宇宙的演化就由这个暴胀场主导，因此总作用量 S 可以写为：

$$S = \frac{1}{16\pi G}S_H + S_\phi \quad (27)$$

其中 S_H 为时空本身的 Einstein-Hilbert 作用量:

$$S_H = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (28)$$

其中 $g = \det(g_{\mu\nu})$ 为度规张量的行列式, R 为 Ricci 标量。而 S_ϕ 为暴胀场贡献的作用量, 为:

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi \quad (29)$$

而标量场的能动张量 $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$ 为:

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_\phi \quad (30)$$

近似认为 ϕ 场的空间分布是均匀的⁵, 只和时间有关, 即 $\phi(x^\mu) \approx \phi(t)$ 。故 $\partial_i \phi = 0$, 又由 $T^{(\phi)\mu}{}_\nu = g^{\alpha\mu} T_{\alpha\nu}^{(\phi)}$, 可得:

$$T^{(\phi)\mu}{}_\nu = \begin{pmatrix} -(\frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + V(\phi)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - V(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - V(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - V(\phi) \end{pmatrix} \quad (31)$$

上式对比理想流体的能动张量 $T^\mu{}_\nu$:

$$T^\mu{}_\nu = (\rho + p)u^\mu u_\nu + p\delta^\mu{}_\nu \quad (32)$$

其中 ρ, p 为理想流体的能量密度和压强, 而 u^σ 为某个观察者的 4-速度, 满足 $u^\sigma u_\sigma = -1$, 对于本身不运动, 只静静地看着宇宙在膨胀的观察者来说, 可取 $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, 这样 $u_\nu = (-1, 0, 0, 0)$, 故理想流体的能动张量可明显写为:

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (33)$$

因此对比得到暴胀场的能量密度 ρ_ϕ 和压强 p_ϕ 为:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (34)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (35)$$

将能量密度 ρ_ϕ 和压强 p_ϕ 的表达式代入能量守恒给出的方程 $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$ 中, 得到:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 \quad (36)$$

另外, (在忽略曲率项 $-k/a^2$ 的情况下,) 由第二 Friedmann 方程:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (37)$$

而根据上一节的要求 $p \approx -\rho$, 可以得到:

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad (38)$$

即在暴胀的过程中, 场的势能项 $V(\phi)$ 占主导。

⁵暴胀之前的宇宙仅仅是大气球/大桌布上的一小块, 因此 ϕ 场的空间分布均匀是自然的。后面将提到, ϕ 在空间上仍存在的起伏来源于量子涨落。

式(36)具有类似阻尼振动的形式(取 $V(\phi) \propto (\phi)^2$ 就和阻尼振动的形式完全一样), $\ddot{\phi}$ 对应加速度, $3H\dot{\phi}$ 对应“粘滞”力, $V_{,\phi}$ 对应回复力。而为了让暴胀持续得够久, 即 $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$ 持续得够久, 不能很快让 ϕ 演化到平衡位置附近, 类比阻尼振动中要尽可能延缓趋于平衡位置的过程, 要求代表粘滞力的部分的贡献远远大于代表加速度的部分, 即要求:

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}| \quad (39)$$

这样能够进行得足够久的暴胀称为慢滚 (slow-roll) 暴胀, 即满足被称为“慢滚条件”的式(38)和(39)的暴胀。

这样, 由式(36), 就近似有:

$$\dot{\phi} \approx \frac{-V_{,\phi}}{3H} \quad (40)$$

又根据式(38)和(37), 在暴胀期间近似有:

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}V(\phi)} \quad (41)$$

以上二式结合式(38)得到:

$$\frac{1}{G}\left(\frac{V_{,\phi}}{V}\right)^2 \ll 1 \quad (42)$$

并注意到 $\ddot{\phi} = \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$, 故式(39)化为 $\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} \ll |3H|$, 并将式(41)以及式(40)代入, 并结合已经得出的式(42), 可得:

$$\frac{1}{G} \left| \frac{V_{,\phi\phi}}{V} \right| \ll 1 \quad (43)$$

这样, 就把暴胀能进行得足够久转化成了对势能 $V(\phi)$ 形式的要求, 即要求在暴胀期间 $V(\phi)$ 足够平坦。

在慢滚条件的情况下, 可以方便地计算暴胀过程中的尺度因子 a 的变化。注意到 $H = \frac{d \ln(a)}{dt} = \dot{\phi} \frac{d \ln(a)}{d\phi}$, 代入式(41),(40), 消去所有对时间 t 的导数, 得到:

$$\sqrt{\frac{8\pi G}{3}V(\phi)} \approx -\frac{V_{,\phi}}{3\sqrt{\frac{8\pi G}{3}V(\phi)}} \frac{d \ln(a)}{d\phi} \quad (44)$$

记暴胀开始时刻为 t_i , 对上式积分得到:

$$a(t) = a(t_i) \exp\left(-8\pi G \int_{\phi(t_i)}^{\phi(t)} d\phi \frac{V}{V_{,\phi}}\right) \quad (45)$$

记暴胀结束时刻为 t_f , 故通常定义暴胀的 e 倍变化数 (e-folding number) N :

$$a(t_f) \equiv a(t_i) \exp(N) \quad (46)$$

通常, 为了让 Ω_K 从 $\mathcal{O}(1)$ 量级降到辐射主导宇宙演化时的非常小 (但又不为 0) 的值, N 的量级大概为 50 到 60。参考文献 [5] 的 3.4 部分基于目前测量到的 Ω_K 上限给出了 N 的下限约为 34.2(具体数字还和暴胀结束后宇宙的温度有关, 见参考文献 [5] 的 (28) 式。)

暴胀不会无限制地进行, 随着 ϕ 逐渐接近平衡位置, $V(\phi), H$ 减小, 当 $H^2 + \dot{H} = 0$ 时, 暴胀结束, 宇宙从加速膨胀进入减速膨胀, 此后, ϕ 将在平衡位置附近振荡, 这个时候式(36)中的“粘滞”力项 $3H\dot{\phi}$ 较之 $\ddot{\phi}$ 可以忽略, 此时可以同工下面的方法来估计暴胀场的 $\dot{\phi}^2$, 进而得到其 ρ, p 。在忽略了 $3H\dot{\phi}$ 这一项情况下, 将式(36)并乘以 ϕ , 可以得到:

$$\frac{d(\phi\dot{\phi})}{dt} - \dot{\phi}^2 + \phi V_{,\phi} \approx 0 \quad (47)$$

上式对在平衡位置来回振荡的多个周期进行平均，第一项的平均值近似为 0，故得到 $\dot{\phi}^2$ 的均值 $\langle \dot{\phi}^2 \rangle$ 近似为：

$$\langle \dot{\phi}^2 \rangle \approx - \langle \phi V_{,\phi} \rangle \quad (48)$$

在 ϕ 于平衡位置附近振荡的时期，理论物理学家认为此时暴胀子会衰变为其它粒子，通过这样的相互作用将暴胀场的能量转移给其它粒子，故记此时 $p_\phi = w_{int}\rho_\phi$ ，根据上面求得的 $\langle \dot{\phi}^2 \rangle$ 以及 $\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$, $p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$ 得到在暴胀场和其它粒子发现的相互作用不可忽略的阶段， w_{int} 为：

$$w_{int} = \left\langle \frac{\phi V_{,\phi} - 2V}{\phi V_{,\phi} + 2V} \right\rangle \quad (49)$$

4 不同的暴胀模型简介

不过，到此为止，我们并没有指定 $V(\phi)$ 的具体形式，实际上，根据理论物理学家们不同的动机， $V(\phi)$ 的形式五花八门，将简要介绍部分暴胀模型对此的构造。

大致来说，暴胀模型按照暴胀过程中场值的改变 $\Delta\phi \equiv |\phi(t_i) - \phi(t_f)|$ 来分类（常记 $\phi_i = \phi(t_i)$, $\phi_f = \phi(t_f)$ ）， $\Delta\phi$ 远远大于约化 Planck 质量 $M_{Pl} \equiv \sqrt{(\hbar c)/(8\pi G)} = \sqrt{1/(8\pi G)}$ 的暴胀模型，称为大场暴胀 (large-field inflation)，否则称为小场暴胀 (small-field inflation)。

4.1 幂律暴胀

幂律暴胀 (power-law inflation) 指的是 $V(\phi)$ 具有幂函数形式的暴胀模型：

$$V(\phi) = \lambda_p \phi^p \quad (50)$$

通常幂律暴胀要求 $\phi_i \gg M_{Pl}$ ，而 $\phi_f \approx 0$ 因此幂律暴胀属于大场暴胀。之所以这样要求，可以认为是为了使得暴胀过程提供足够大的 N ，举例来说，考虑 $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$, m 的物理意义可以认为是暴胀子的“有效质量”，根据式(45)和(46)，有：

$$N = -8\pi G \int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi \frac{V}{V_{,\phi}} = -8\pi G \int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi \frac{1}{2}\phi = \frac{1}{4M_{Pl}^2}(\phi_i^2 - \phi_f^2) \quad (51)$$

取 $N = 60$ ，这要求 $\phi_i > \sqrt{240}M_{Pl} \approx 15M_{Pl} \gg M_{Pl}$ 。 $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ 给出的暴胀过程如下图所示：

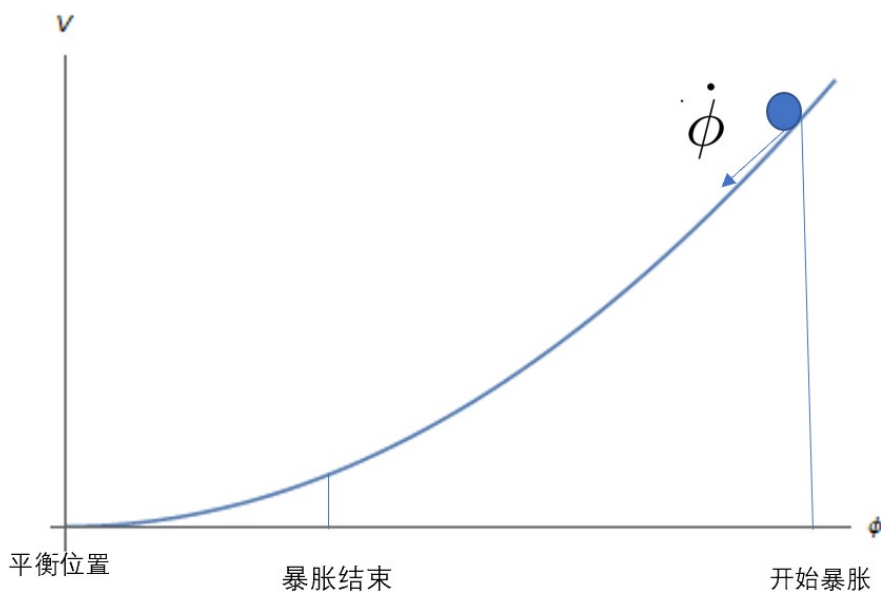


图 1: 幂律暴胀 ($V(\phi) \propto \phi^2$ 情形) 示意图

幂律暴胀最初由 (当时还是个苏联人的)A.D.Linde 在 1983 年提出 (参考文献 [11]), 最初的形式为 $V(\phi) \propto \phi^4$, 此后的理论物理学家又出于各种动机构造了幂指数 p 不同的幂律暴胀模型, 有时候是作为大场暴胀模型的一种极限情况而存在, 甚至出于理论上的特定目的可以让 p 取分数值, 如有理论物理学家基于对于轴子 (axion) 性质的考虑使得 $p = 4/3, 2/3$ 。

在幂律暴胀提供的宇宙图景中, 暴胀前 ϕ 是一个量子场, 且此时对应于我们的可观测宇宙的那部分宇宙可以认为出于一个混沌的量子态中, 原则上 ϕ 可以取不使得场的能量密度进入 Planck 能标而使现在的理论失效的任何值, 即 $\phi \in (-\lambda_p^{1/p} M_{Pl}, \lambda_p^{1/p} M_{Pl})$, 即 ϕ 在暴胀前的初值是“混沌”的, 因此幂律暴胀也被称为混沌暴胀 (chaotic inflation)。

不过这又带来了初值问题: 既然混沌暴胀允许 ϕ_i 在一个很大的范围内取值, 凭什么 ϕ_i 要取对应当前通过观测估计的 N 的值? 本来暴胀就想避免宇宙的密度分布和总能量密度取特定的初值, 然而这个暴胀模型解决了之前的初值问题, 却带来新的初值问题⁶, 这并不令人十分满意, 而下面要介绍的坡顶暴胀就不存在这个问题。

4.2 坡顶暴胀

在上世纪 80 年代暴胀刚提出不久的时候, 理论物理学家容易将暴胀中出现的标量场和粒子物理标准模型中出现的唯一的标量场, 即 Higgs 场联系起来, 即认为 $V(\phi)$ 具有下面的形式:

$$V(\phi) = V_0 \left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^2 \right]^2 \quad (52)$$

其中 μ 为参数。而暴胀过程是通过对称性自发破缺驱动的。即, 最开始, ϕ 位于一个 (不稳定) 的平衡位置, 也是拥有较高对称性的位置, 然而这个位置并不稳定, 受到一点小小的扰动之后就使得这个扰动被放大, ϕ 场往这个扰动所决定的方向演化, 丧失了原来的对称性, 直到最终到达一个新的具有较低能量和对称性的稳定平衡位置。

⁶虽然这个新的初值不需要“校正”到非常准确的程度

暴胀的过程如下图所示 ($\phi = 0$ 就是初始时的 (不稳定) 平衡位置):

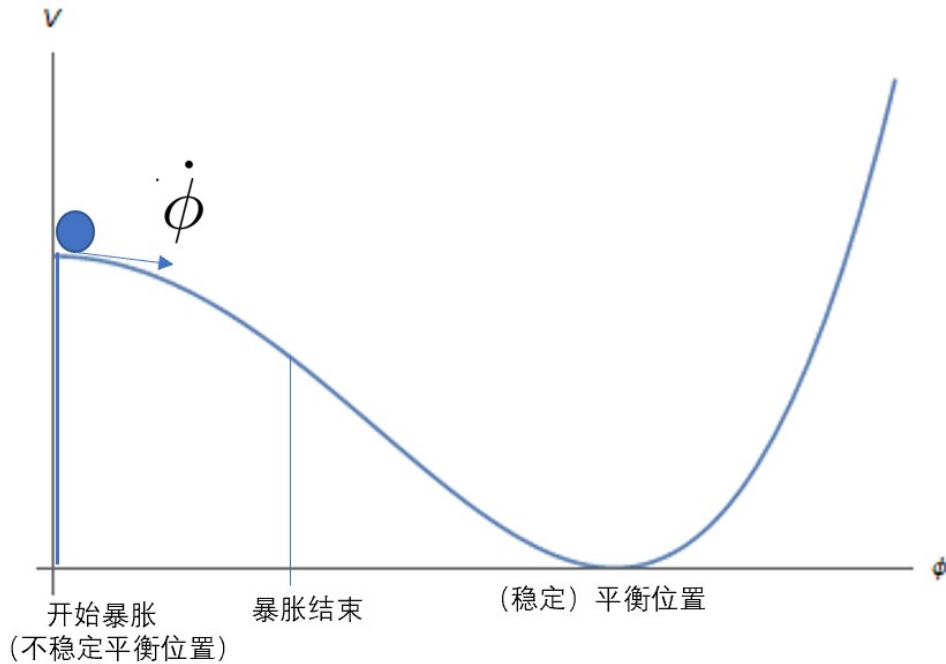


图 2: 具有类似类似 Higgs 场形式的 $V(\phi)$ 以及 ϕ 的演化示意, 可以想象 $V(\phi)$ 在 ϕ 的负半轴还有与上图对称的一半, 故初始时 $\phi = 0$ 是一个具有较高对称性的不稳定平衡位置, 而暴胀则破缺了这样的对称性。其中的暴胀阶段可认为是坡顶暴胀。

这样的模型中, 只在离开最初的不稳定平衡位置的一个小范围内能够进行慢滚暴胀, 暴胀会在不大的 ϕ 值结束, 因此通常用下面的 $V(\phi)$ 来近似暴胀过程中的情况:

$$V(\phi) = V_0 \left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^p \right] + \dots \quad (53)$$

其中省略的高阶项在暴胀期间虽然不重要, 但是在暴胀结束后 ϕ 继续演化的过程中保证了势函数存在一个稳定极小值, $V(\phi)$ 具有上式形式的暴胀模型称为坡顶暴胀 (hilltop inflation), 因为在暴胀期间 ϕ 的演化正像从一个山坡的顶上滚下来一般。由于暴胀过程只在靠近坡顶的一小段中持续, 满足 $\Delta\phi < M_{Pl}$, 因此坡顶暴胀属于小场暴胀。

坡顶暴胀固定了 ϕ_i 的位置, 不存在混沌暴胀中的“选择” ϕ_i 的问题。此外, 坡顶暴胀也较容易实现慢滚暴胀中 $V(\phi)$ 较为平坦的条件, 因为暴胀过程本身就是就是在 $V(\phi)$ 的极大值点附近进行, 对比幂律暴胀中要使得 $V(\phi) \propto \phi^p$ 形式的势能满足 $\frac{1}{G} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \ll 1$, 只好让暴胀期间 $\phi \gg M_{Pl}$ 。更多有关坡顶暴胀的介绍可以参考文献 [12]。

4.3 自然暴胀

尽管在 20 世纪 80 年代, 理论物理学家已经提出了很多能够实现慢滚暴胀的模型, 然而直到 1990 年, 这些模型在构造 $V(\phi)$ 时只是“凭空创造”, 并没有从基于实际自然, 或者说基于已知的粒子物理的角度出发构建暴胀模型⁷。

⁷至少当时在自然暴胀的提出者看来是这样, 见 [13]。不过在新世纪到来之时, 类似幂律暴胀这样的模型也可以从物理的角度被构造出来。比如文献 [10] 在开头提到, $V(\phi) = 1/2m^2\phi^2$ 的暴胀模型在 2000 年时已经可以基于超引力 (supergravity) 理论而得到。

于是在 1990 年, Katherine Freese 等人首次基于粒子物理, 通过在粒子物理中常见的赝南部-戈德斯通玻色子 (pseudo Nambu-Goldstone boson, pNGB) 的势函数来构造 $V(\phi)$ (见参考文献 [13])。当一个物理系统的全局对称性 (global symmetry) 自发性破缺时, 南部-戈德斯通玻色子就会出现; 如果这时又附加一个明显对称性破缺 (explicit symmetry breaking), 这些粒子就成了赝南部-戈德斯通玻色子。Katherine Freese 等人这样得到的暴胀模型称为自然暴胀 (natural inflation)。其 $V(\phi)$ 具有下面的形式:

$$V(\phi) = V_0 \left[1 + \cos \left(\frac{\phi}{f} \right) \right] \quad (54)$$

其中 f 是一个参数, f 较大时 ($f > \frac{M_{Pl}}{2\pi}$) 自然暴胀属于大场暴胀, 否则为小场暴胀。下图示意了 f 较大情形时的自然暴胀过程。

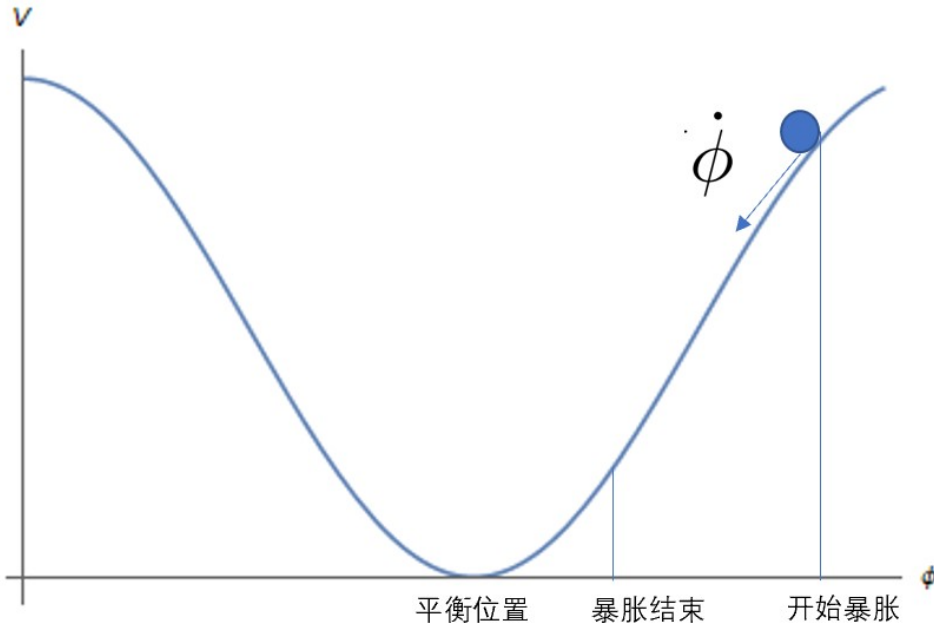


图 3: 属于大场暴胀的自然暴胀过程示意图

4.4 修改引力

修改引力 (modified gravity), 即“推翻”广义相对论, 在新的引力理论下, 根本不需要存在暴胀子这种“物质”, 时空本身的性质就自然能让暴胀发生, 因此严格来说不属于由一个标量场驱动的“单场暴胀”模型的范围, 然而下面将会看到, 在经过共形变换到一个新的度规后, 这个理论中也出现了一个等效的“标量场”。

这一理论最初由 Starobinsky, Mukhanov 等人在 1980 年前后提出并完善, 下面的计算参考 Mukhanov 在其所写教材 (参考文献 [3])5.6 节中的介绍, 为了使得表达式的形式与其一致, 在这一小节中临时性地修改度规的符号差约定, 即取 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ 。注意这种约定下具有势 $V(\phi)$ 的标量场 ϕ 能动张量 $T^{(\phi)\mu}_{\nu}$ 的表达式为:

$$T^{(\phi)\mu}_{\nu} = \phi^{,\mu}\phi_{,\nu} - \left(\frac{1}{2}\phi^{,\gamma}\phi_{,\gamma} - V(\phi) \right) \delta^{\mu}_{\nu} \quad (55)$$

广义相对论认为, (在真空中) 用于刻画时空的度规 $g_{\mu\nu}$ 应该让 Einstein-Hilbert 作用量 S_H 取极值:

$$S_H = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (56)$$

即由

$$\frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (57)$$

给出 $g_{\mu\nu}$ 应该满足的方程:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (58)$$

其中 $R_{\mu\nu}, R$ 分别为 Ricci 张量, Ricci 标量。为了方便对比, 将上式的一个指标抬升后得到:

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R = 0 \quad (59)$$

然而有人对广义相对论不满意, (部分) 理由可简述如下: “广义相对论是一个可以同时确定粒子坐标和动量的经典理论, 而我们所生活的世界是量子的, 因此广义相对论肯定不对, 只能被视为一个低能有效理论。如果未来量子的引力理论问世, 那么把作用量展开到领头阶就得到了 Einstein-Hilbert 作用量 S_H , 但是在 Planck 尺度下, 领头阶之后的项肯定也起不可忽略的作用。”

因此, 他们将 Einstein-Hilbert 作用量 S_H 的 R 换成一个 R 的函数 $f(R)$, 即 (真空情况下的) 作用量 S 为:

$$S = \int f(R)\sqrt{-g}d^4x \quad (60)$$

并且 $f(R)$ 应可以写成 $f(R) = R + \alpha R^2 + \dots$ 的形式, 也就是这个引力理论在不那么极端的情况下应该回到广义相对论。这样建立起来的引力理论被称为 $f(R)$ 引力 ($f(R)$ gravity)。同样令:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (61)$$

可以得到和式(59)平行的 $f(R)$ 引力中的 (真空中的) 场方程:

$$\frac{\partial f}{\partial R}R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu f + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)_{;\alpha}^\alpha \delta^\mu_\nu - \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)_{;\nu}^\mu = 0 \quad (62)$$

不出意外, 上式在 $f(R) \rightarrow R$ 时回到式(59)。

这时候, 对度规 $g_{\mu\nu}$ 进行共形变换:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = Fg_{\mu\nu} \quad (63)$$

这样 Ricci 张量, Ricci 标量 $R_{\mu\nu}$ 分别对应地变为 $\tilde{R}_{\mu\nu}, \tilde{R}$:

$$R^\mu_\nu \rightarrow \tilde{R}^\mu_\nu = F^{-1}R^\mu_\nu - F^{-2}F_{;\nu}^\mu - \frac{1}{2}F^{-2}F_{;\alpha}^\alpha \delta^\mu_\nu + \frac{3}{2}F^{-3}F_{;\nu}F^{;\mu} \quad (64)$$

$$R \rightarrow \tilde{R} = F^{-1}R - 3F^{-2}F_{;\alpha}^\alpha + \frac{3}{2}F^{-3}F_{;\alpha}F^{;\alpha} \quad (65)$$

这个时候, 取 $F = \frac{\partial f}{\partial R}$, 就可以将式(62)除以 F^2 后写为:

$$\tilde{R}^\mu_\nu - \frac{1}{2}\tilde{R}\delta^\mu_\nu = 8\pi G\tilde{T}^\mu_\nu \quad (66)$$

其中 \tilde{T}^μ_ν 为:

$$\tilde{T}^\mu_\nu = \frac{1}{8\pi G} \left[\frac{3}{2F^3}F^{;\mu}F_{;\nu} - \left(\frac{1}{2} \frac{3}{2F^3}F_{;\alpha}^\alpha F_{;\alpha} - \frac{1}{2} \frac{f - RF}{F^2} \right) \delta^\mu_\nu \right] \quad (67)$$

发现 \tilde{T} 形式上和这样一个“标量场”的能动张量相同:

$$\phi \equiv \sqrt{\frac{3}{16\pi G}} \ln(F) \quad (68)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{16\pi G} \frac{f - R\partial f/\partial R}{(\partial f/\partial R)^2} \quad (69)$$

由此可见，在 $f(R)$ 理论框架中时空本身就能带来类似广义相对论中的一个标量场的效果，以驱动暴胀。而修改引力以实现暴胀的模型，具体考虑取

$$f(R) = R - \frac{6}{m^2} R^2 \quad (70)$$

其中 m 为参数，这样根据式(68),(69)有：

$$V = \frac{1}{16\pi G} \frac{R^2}{6m^2} \frac{1}{(1 - R^2/(3m^2))^2} \quad (71)$$

$$R = 3m^2(1 - \exp\left(\frac{16\pi G}{3}\phi\right)) \quad (72)$$

由以上两式得：

$$V(\phi) = \frac{3m^2}{32G} \left(1 - \exp\left(-\frac{16\pi G}{3}\phi\right)\right)^2 \quad (73)$$

为了说明 m 的物理意义，考虑 $\frac{16\pi G}{3}\phi \ll 1$ 的极限情况，此时近似有 $V(\phi) \approx \frac{1}{2}m^2\phi^2$ ，故这里的 m 的地位和大场暴胀中的暴胀子的质量的相同。

需要留意的是，得到了在 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ 情况下等效的“标量场”驱动的暴胀后，需要重新将这些结果变换回原来的 $g_{\mu\nu}$ 情况中。

修改引力以驱动暴胀的提出时间相对来说很早，但是在本文最后一部分将会看到，其和目前的观测数据符合得非常好。

4.5 其它暴胀模型

理论物理学家出于一些宏伟的目标（比如统一所有的相互作用），提出了许多超越粒子物理标准模型的理论，比如超对称理论，弦理论。这些高深的理论中有些机制也正如之前介绍的修改引力一样，也能带来等效的“标量场”并驱动宇宙暴胀。

在这一小节中，由于作者水平有限，只给出这些理论构造出的暴胀模型等效的暴胀场的势能 $V(\phi)$ 的形式而略去这些理论的细节。更多的介绍可以参考 [6] 的 6.2 节以及在那里给出的参考文献。

4.5.1 D-膜暴胀

D-膜暴胀 (D-brane inflation) 是在弦理论 (string theory) 框架下的一种驱动暴胀的机制。其认为我们所生活的宇宙的“膜” (brane) 和“反膜” (anti-brane) 的相互作用驱动了暴胀，并具体等效于 $V(\phi)$ 取下式：

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left(1 - \left(\frac{\mu}{\phi}\right)^p\right) \quad (74)$$

p 这个参数在不同版本的理论中取值不同，如 $p = 2$ (见 Dvali 等人于 2001 提出)，对应的 μ 记为 μ_{D2} 或 $p = 4$ (见 Garcia-Bellido 于 2002 提出)，对应的 μ 记为 μ_{D4} 。

4.5.2 含有指数项的势能

基于弦论和超引力 (supergravity) 理论构造出的暴胀模型的 $V(\phi)$ 通常含有指数项，具体来说，具有下面的形式：

$$V(\phi) = V_0 \left(1 - e^{-q\phi/M_{\text{pl}}} + \dots\right) \quad (75)$$

其中 q 是一个参数。

4.5.3 超对称性的自发破缺驱动暴胀

超对称性 (Supersymmetry) 是指每个粒子标准模型中的粒子都有一个“伙伴”粒子 (超对称伙伴), 理论上通过设定超对称性存在, 可以解释为什么有质量的粒子具有质量, 或者说, 在标准模型中赋予有质量粒子质量的 Higgs 粒子为什么具有现在探测到的“这么轻”的质量。超对称理论还预言, 电磁力、弱力和强力在极高的能标下 (比如宇宙极早期) 的作用强度是一样的, 也就是说, 超对称理论是一种大统一理论 (grand unified theory)。如果超对称理论是正确的, 那么可能在欧洲大型强子对撞机 (LHC) 上发现标准模型中的粒子的超对称伙伴。⁸ 更多关于超对称性的介绍可以参考 CERN 的网站 [9]。

超对称性的自发破缺 (SB SUSY) 可以驱动暴胀。其等效于取 $V(\phi)$ 为:

$$V(\phi) = V_0 [1 + \alpha_h \log(\phi/M_{\text{pl}})] \quad (76)$$

其中 α_h 是一个大于 0 的无量纲参数。

4.5.4 α 吸引子

这种暴胀模型基于共形场论和超引力的一些成果, 在模型中的一个参数 α 满足一定条件时, 虽然 $V(\phi)$ 的形式可以有一定的任意性, 给出结果基本相同, 都被“吸引”到同样的情况上了。详见参考文献 [10]。

有两类暴胀模型属于 α 吸引子的类别。

第一种 (E-model) 等效于取 $V(\phi)$ 为:

$$V(\phi) = V_0 \left(1 - e^{-\sqrt{2}\phi/(\sqrt{3\alpha}M_{\text{pl}})}\right)^{2n} \quad (77)$$

α, n 都是参数。

第二种 (T-model) 等效于取 $V(\phi)$ 为:

$$V(\phi) = V_0 \tanh^{2m} \left(\frac{\phi}{\sqrt{6\alpha}M_{\text{pl}}} \right) \quad (78)$$

α, m 都是参数。

4.5.5 非最小耦合的暴胀模型

之前考虑的暴胀模型中, 在作用量 S 的表达式中, 暴胀场仅仅通过和度规耦合对时空产生影响, 这是一个标量场和引力的耦合的最简单情况, 即最小耦合 (minimally coupled)。即作用量 S 写成:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (79)$$

且暴胀场的势能 $V(\phi)$ 中不含 Ricci 标量 R 等和时空有关的项。

然而, 真实的宇宙也完全有可能不这样简单, 而是非最小耦合的情况, $V(\phi)$ 中可能含有 R 等物理量, 比如可以加上一项 $\xi R\phi^2$, 其中 ξ 为一个参数。一种由 Higgs 机制驱动的暴胀模型就认为存在非最小耦合⁹, 相当于在 ϕ^4 形式的势能上再加入耦合带来的一项, 即取 $V(\phi)$ 为:

$$V(\phi) = \lambda\phi^4 + \xi R\phi^2/2 \quad (80)$$

⁸可惜到目前为止都没发现

⁹引入非最小耦合才能和观测符合地较好

5 联系理论和观测：扰动理论

通过尝试解释宇宙为什么这样均匀、平坦而构造出来的暴胀理论，还认为，最初暴胀场 ϕ 是一个量子场，存在量子涨落，这样的量子涨落带来了微小的不均匀性，而这样的不均匀性此后逐渐演化成今天所见的宇宙中有些区域较之周围密度或者温度高的结构，而宇宙的密度和温度分布都可以通过观测得到。对照观测的情况和暴胀模型的预言，就能在众多的暴胀的模型中分出哪些和我们所生活的宇宙的相符，而另一些更大可能只是存在于理论物理学家的脑中和论文里的“宇宙”。

不过，由于量子涨落是随机的，因此理论没法直接预测从地球上哪个方向上星系的密度高。但是量子涨落幅度的期望却可以从理论上计算，¹⁰ 并可以由此决定一些可以和观测数据对应起来的物理量的扰动（将某个物理量偏离平均值的部分称为“扰动”，而平均值称为“背景”）幅度随着该扰动本身的线度的变化，即该物理量的功率谱 (power spectra)。而功率谱一方面可以由理论推导得出，另一方面又可以通过处理观测数据而得到，因此检验暴胀模型归结于对比理论模型得到的功率谱和由观测数据得到的功率谱的区别。

而为了得到功率谱，则需要在宇宙学扰动理论的框架内进行计算。下面简要介绍宇宙学扰动理论的基本思想并（不加证明地）给出较为重要的表达式。有关扰动理论更详细的介绍可以参考 [1]、[3] 和 [2]。

存在不均匀性的宇宙会偏离空间均匀各向性的 FLRW 度规，（认为宇宙的总曲率为 0 情况下）设扰动存在时的时空线元 ds^2 为：

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -(1 + 2\Phi) dt^2 + 2aB_i dx^i dt + a^2 [(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + E_{ij}] dx^i dx^j \end{aligned} \quad (81)$$

其中 Φ, B_i, Ψ, E_{ij} 都是一阶小量。一般把扰动分解为标量 (scalar)、矢量 (vector) 和张量 (tensor) 部分，即进行 SVT 分解 (SVT decomposition) 因为将方程只保留到一阶的情况下，这三部分的扰动所满足的方程是相互独立的，举例来说，在计算和标量扰动有关的方程时，可以完全不考虑张量扰动。对于上面的 Φ, B_i, Ψ, E_{ij} 来说， Φ, Ψ 本身就是标量，不需要分解，矢量 B_i 可以拆成标量部分（旋度为 0）和矢量部分（散度为 0）：

$$B_i \equiv \partial_i B - S_i \quad (82)$$

其中 B 是一个标量而 S_i 的散度为 0: $\partial^i S_i = 0$ 。对于张量 E_{ij} 来说，可以拆成标量部分、矢量部分和张量部分：

$$E_{ij} \equiv 2\partial_{[i} E + 2\partial_{(i} F_{j)} + h_{ij} \quad (83)$$

其中 E 是标量而矢量 F_i 满足 $\partial^i S_i = 0$ ，张量 h_{ij} 满足 $h_i^i = \partial^i h_{ij} = 0$ ，这部分即对应了原初引力波。

在不均匀的宇宙中，能动张量自然也会偏离理想流体的 $T_\nu^\mu = \text{diag}\{-\rho, p, p, p\}$ 的形式，用一横表示该物理量的均值（只和时间 t 有关），如 $\bar{\rho}$ 表示能量密度的均值，将一个物理量拆成背景部分和扰动部分，如令 $\rho(t, \vec{x}) = \bar{\rho}(t) + \delta\rho(t, \vec{x})$ ，这样，存在扰动的情况下的能动张量为：

$$T_0^0 = -(\bar{\rho} + \delta\rho) \quad (84)$$

$$T_i^0 = (\bar{\rho} + \bar{p}) a v_i \quad (85)$$

$$T_0^i = -(\bar{\rho} + \bar{p}) (v^i - B^i) / a \quad (86)$$

$$T_j^i = \delta_j^i (\bar{p} + \delta p) + \Sigma_j^i \quad (87)$$

¹⁰详细的计算涉及到弯曲时空中的量子场论，这里不进行详细介绍，可以参考 [14]

其中 v_i 表示在该处能量的流动速度, Σ_j^i 代表该处的各向异性压力 (anisotropic pressure), 满足 $\Sigma_i^i = 0$, 通常, 该项的贡献可以忽略。对能动张量的扰动也可进行 SVT 分解, 具体来说, 令 $q_i = (\bar{\rho} + \bar{p})v_i$, q_i 可分解为标量部分和张量部分:

$$q_i = \partial_i q + \hat{q}_i \quad (88)$$

其中 q 是标量而 $\partial^i \hat{q}_i = 0$ 。

得到了度规和能动张量的在存在扰动之后的形式以后, 可以根据对度规的扰动先后得到对联络和曲率张量的扰动, 进而得到存在扰动情况的 Einstein 场方程, 将对度规的扰动和对能动张量的扰动联系起来, 决定扰动随时间的演化。

不过以上定义的这些量并不 (全) 是规范不变的, 但是对应各部分的扰动, 可以组合出规范不变的量, 而只有规范不变的物理量能够和观测直接联系起来。

对于标量扰动, 可以选择 \mathcal{R} 作为这样的规范不变量, 其定义为:

$$\mathcal{R} \equiv \Psi - \frac{H}{\bar{\rho} + \bar{p}} \delta q \quad (89)$$

将 \mathcal{R} 从位形空间变换到 Fourier 空间:

$$\mathcal{R}_k = \int d^3x \mathcal{R}(x) e^{-ik \cdot x} \quad (90)$$

虽然说, 对于一个宇宙, 每一处都有确定的 $\mathcal{R}(x)$ 的值, 因此 \mathcal{R}_k 的值也是确定的。但是量子涨落是随机的, 因此设想有一个物理规律和这个宇宙完全一样的宇宙, 但是其量子涨落的情况和前一个宇宙完全不同, 因此得到新的 $\mathcal{R}(x), \mathcal{R}_k$ 的值。这样我们可以设想存在无数个物理规律相同的宇宙, 每个都计算出一个 \mathcal{R}_k , 然后就可以计算 \mathcal{R}_k 的均值, 这个均值用 $\langle \mathcal{R}_k \rangle$ 来表示, 这就是 $\langle \mathcal{R}_k \rangle$ 的系综平均 (ensemble average)¹¹。不过不用计算也能预料, 对一个固定的 k , \mathcal{R}_k 在无数个宇宙中的平均值将和没有扰动下的情况相同。故有意义的是计算 $\langle \mathcal{R}_k \mathcal{R}_{k'} \rangle$, 其结果为:

$$\langle \mathcal{R}_k \mathcal{R}_{k'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{\mathcal{R}}(k) \quad (91)$$

而将下面 $\Delta_{\mathcal{R}}^2(k)$ 的定义为 \mathcal{R} 的功率谱 (即标量扰动的功率谱):

$$\Delta_s^2 \equiv \Delta_{\mathcal{R}}^2(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k) \quad (92)$$

粗略地说, 如果宇宙中存在很多块在 (共动坐标中) 距离为 $1/k$ 的两块区域, 且这两块区域的 \mathcal{R} 偏离均值很多, 即 (在共动坐标中) 尺度为 $1/k$ 的扰动幅度很大, 那么功率谱 $\Delta_{\mathcal{R}}^2(k)$ 就比较大。

在第二节中已经提到, 共动 Hubble 半径 $1/(aH)$ 代表了宇宙中一点能和周围 (在当时) 有联系的区域 (在共动坐标中的) 半径, 而在暴胀模型中, 共动 Hubble 半径 $1/(aH)$ 不断收缩, 故当共动 Hubble 半径 $1/(aH)$ 收缩到 $1/(aH) = 1/k$ 时, 本来由 (在共动坐标中) 尺度为 $1/k$ 的扰动联系的两区域不可能进行相互作用, 故 (在共动坐标中) 尺度为 $1/k$ 的扰动停止演化, 即扰动被“冻结”了, 而这里有关功率谱的计算, 都是在此时进行的, 计算出的功率谱称为原初功率谱。

慢滚暴胀模型会计算得到 $\Delta_s^2(k)$ 近似等于一个和 k 的无关的常数, 即扰动的幅度是近似标度不变的。因此, 可把 $\Delta_s^2(k)$ 写成:

$$\Delta_s^2(k) = A_S(k_*) \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s(k_*) - 1} \quad (93)$$

¹¹为了和观测结果对比, 宇宙学家必须假设这样根据“无数个宇宙平均”得到的结果代表了我们所生活的宇宙 (这个假设通常不在教科书中明确写出)

其中 n_s 称为标量扰动功率谱谱指数 (scalar spectral index), 定义为:

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_s^2}{d \ln k} \quad (94)$$

而 k_* 是可以任意选择的一个尺度, A_s 为该尺度下功率谱的取值。

矢量扰动部分通常会随着暴胀的进行而快速衰减, 其理论预言的强度远远低于现在的观测精度, 故通常不考虑矢量扰动部分。

对张量扰动可以类似标量的情形给出功率谱。张量扰动中, h_{ij} 是规范不变的, 故通过计算 h_{ij} 的 Fourier 变换 h_k 的乘积的系综平均而给出功率谱:

$$\langle h_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_h(k) \quad (95)$$

$$\Delta_h^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} P_h(k) \quad (96)$$

然而引力波有两种偏振模式 (“+” 模式和 “×” 模式, 可以参考 [15] 第 16 章), 故张量扰动的总功率谱 Δ_t^2 为 Δ_h^2 的两倍。

定义张量扰动功率谱和标量扰动功率谱的比值为张标比 (tensor-to-scalar ratio) r :

$$r \equiv \frac{\Delta_t^2(k)}{\Delta_s^2(k)} \quad (97)$$

通常, 对比由观测数据得到的功率谱和由理论给出的功率谱简化为对比标量扰动功率谱谱指数 n_s 和张标比 r 这两个量在观测上的可能范围和理论上的计算值。即, 根据暴胀模型在扰动理论框架下计算出的 n_s, r 联系了理论物理学家的宇宙和我们所生活的宇宙。

6 观测结果的检验

6.1 宇宙微波背景辐射简介

由于下文中主要通过用于探测宇宙微波背景辐射的 Planck 卫星的数据为基础来检验各种暴胀模型的好坏, 为了方便理解其数据的含义, 这里对宇宙微波背景辐射的进行简要的介绍。

在宇宙大爆炸后约 10^5 年 (对应于红移 $z \approx 1100$), 宇宙中的电子的动能降低到足以被原子核束缚, 不能再从前那样和光子那样发生康普顿散射, 这样光子就可以在宇宙中自由传播, 即宇宙在那时变得变得“透明”了, 这些光子传播到地球时, 大部分光的波长已经随着宇宙的膨胀而被拉长到了微波波段。此外, 由于在大爆炸后约 10^5 年时期的宇宙是高度均匀各项同性的, 因此, 地球上的探测器在任何一个方向上的接受到这些光子都相差无几。同时这些光子来自于比现在能观测到任何恒星、星系等天体都远的地方, 故称为这些光子为宇宙微波背景辐射 (cosmic microwave background, CMB)。

CMB 光谱近似于一个各向同性的、温度为 $T_0 = 2.73K$ 的黑体辐射谱, 但是由于宇宙存在微小的不均匀性, 不同角位置的 CMB 的温度也不完全相同, CMB 温度的各向异性如下图所示:

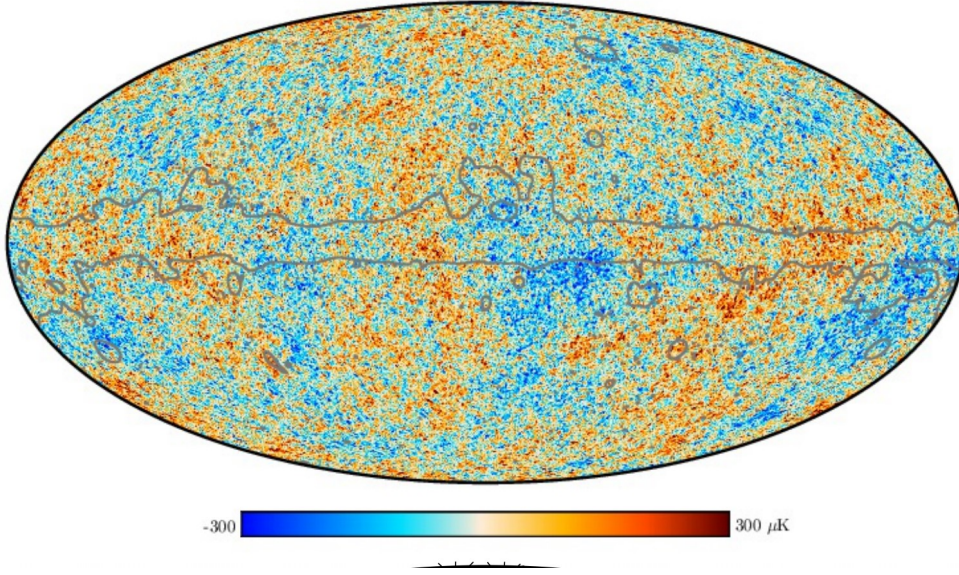


图 4: CMB 温度分布, 截取自参考文献 [4]Fig6

恰恰是这样的不均匀性可以用来检测在宇宙学扰动理论的框架下不同暴胀模型给出的预言。可以用球谐函数 $Y_{lm}(\hat{n})$ 将 CMB 温度分布各向异性的情况进行展开 (其中 \hat{n} 为指向天球面上某点的单位矢量):

$$\Theta(\hat{n}) \equiv \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{n}) \quad (98)$$

然而 $a_{\ell m}$ 的具体值会因为坐标轴的选取而不同, 因此定义下面的和坐标选取无关的 CMB 温度角功率谱 C_ℓ^{TT} :

$$C_\ell^{TT} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m \langle a_{\ell m}^* a_{\ell m} \rangle \quad (99)$$

其中 C_ℓ^{TT} 角尺度为 $2\pi/l$ 的温度扰动的强度, 由此知道, 要得到 l 较大的数据需要足够高的角分辨率。

CMB 温度角功率谱 C_ℓ^{TT} 可以和上一节中的 $P_{\mathcal{R}}(k)$ 通过下式相联系:

$$C_\ell^{TT} = \frac{2}{\pi} \int k^2 dk P_{\mathcal{R}}(k) \Delta_{T\ell}^2(k) \quad (100)$$

其中 $\Delta_{T\ell}^2(k)$ 为扰动在暴胀结束后后期演化, 具体形式也可以通过宇宙学扰动理论给出, 但为较复杂, 一个近似表达式可以参考 [1]17.1.2 小节。

在 Planck 卫星团队展示的数据 (参考文献 [4]) 中, 常用如下定义的 \mathcal{D}_ℓ^{XY} 来表示功率谱:

$$\mathcal{D}_\ell^{XY} \equiv \frac{\ell(\ell + 1) C_\ell^{XY}}{2\pi} \quad (101)$$

其中

$$C_\ell^{XY} \equiv \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m \langle a_{X,\ell m}^* a_{Y,\ell m} \rangle, \quad X, Y = T, E, B \quad (102)$$

这里 X, Y 可以是 T 或者下面要提到的 E, B 。

CMB 温度角功率谱 (\mathcal{D}_ℓ^{TT}) 如下图所示:

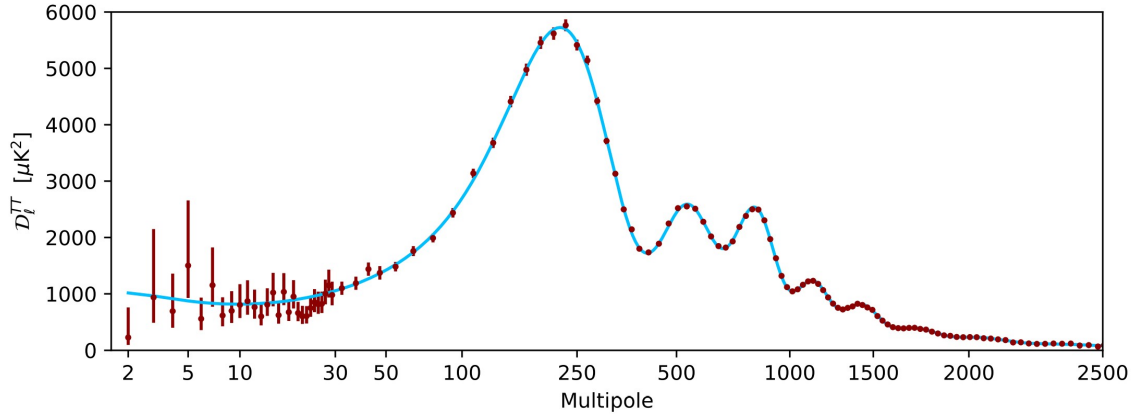


图 5: CMB 温度角功率谱, 横坐标即为 ℓ 。从数据点的误差棒长度可以看出在 ℓ 较小的情况下测量的精度有限。图中的实线为根据目前的宇宙学模型预言的结果, 考虑到模型只有 6 个参数, 而要拟合的数据点是如此之多, 居然还能取得非常好的拟合结果, 由此可见现代宇宙学的成功。图片截取自参考文献 [4]Fig9

由于宇宙微波背景辐射中的光子在开始传播前和接连和电子进行康普顿散射, 故 CMB 也是有极化的, 只不过极化的效果并不明显 (见参考文献 [16]10.5 节), 为刻画电磁波的极化, 可以在垂直于电磁波的传播方向上建立坐标系, 并用四个斯托克斯参数: 辐射强度 I 、水平方向线偏振分量强度 Q 、方位角为 45° 方向上的线偏振分量强度 U 和圆偏振分量强度 V 来刻画。对于 CMB, $V = 0$, 故偏振特性由 Q, U 来刻画, 同样用球谐函数 $Y_{\ell m}(\hat{n})$ 将 CMB 极化的情况进行展开:

$$(Q \pm iU)(\hat{n}) = \sum_{\ell, m} a_{\pm 2, \ell m} \pm 2Y_{\ell m}(\hat{n}) \quad (103)$$

更常用的是 $a_{\pm 2, \ell m} \pm 2$ 的线性组合:

$$a_{E, \ell m} \equiv -\frac{1}{2}(a_{2, \ell m} + a_{-2, \ell m}), \quad a_{B, \ell m} \equiv -\frac{1}{2i}(a_{2, \ell m} - a_{-2, \ell m}) \quad (104)$$

并由此给出旋度为 0 的 E 模式偏振 (E-mode polarization) 和散度为 0 的 B 模式偏振 (B-mode polarization):

$$E(\hat{n}) = \sum_{\ell, m} a_{E, \ell m} Y_{\ell m}(\hat{n}), \quad B(\hat{n}) = \sum_{\ell, m} a_{B, \ell m} Y_{\ell m}(\hat{n}). \quad (105)$$

在 CMB 辐射中, E 模式偏振的成分远远大于 B 模式偏振。

CMB 的偏振情况如下图所示:

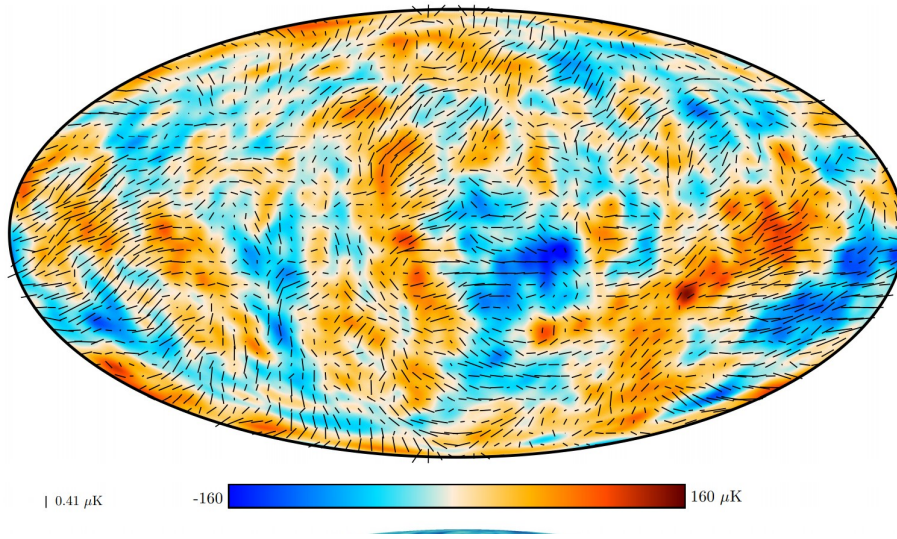


图 6: 在 CMB 的温度分布基础上叠加上 CMB 的偏振 (极化) 分布情况。为方便可视化, 上图在 5° 的范围内进行了平滑处理, 实际上 CMB 的偏振分布存在的结构尺度小得多。图片截取自参考文献 [4] 的 fig6

而 TE 角功率谱 D_ℓ^{TE} 如下图所示:

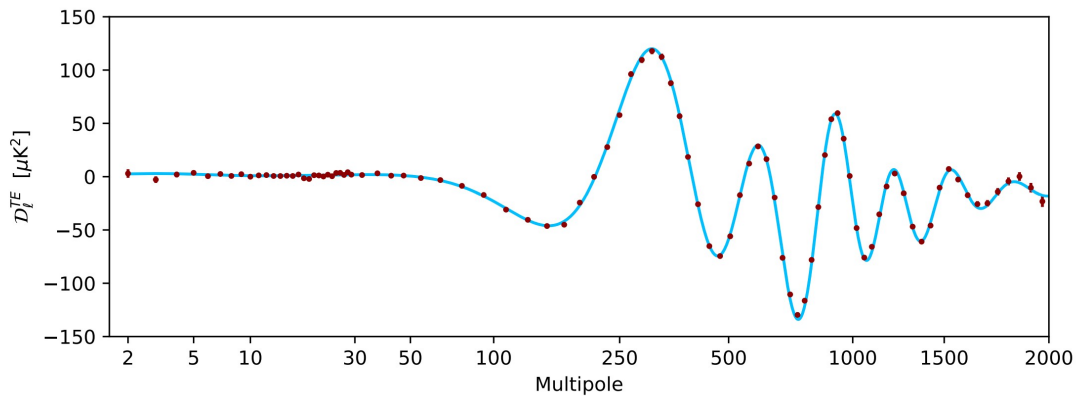


图 7: CMB 的 TE 角功率谱, 图片截取自参考文献 [4] 的 fig9

除了有关 CMB 在开始向地球传播时尚年轻的宇宙的信息, 也通过 CMB 得到引力势的分布。因为在属于 CMB 的光子在到达地球的途中, 会受到比如星系团/暗物质晕等的引力作用, 因为引力透镜效应而发生偏折, 通常偏折角的量级为 2 到 3 角分, 这些作为引力透镜的“前景”通常位于红移 $z \in (0.5, 10)$ 的距离。这样的引力透镜会对探测到的 CMB 产生一系列影响, 比如会稍微将 CMB 功率谱中的“峰”和“谷”变得更平滑, 以及将部分 E 模式偏振信号转变为 B 模式偏振信号。从 CMB 本身就可以反推中引力势的分布, 并得到“引力透镜功率谱” (lensing spectrum), 这样得到的结果也可以与对大尺度结构巡天得到结果进行对照。下图给出了根据 CMB 得到的引力势分布。

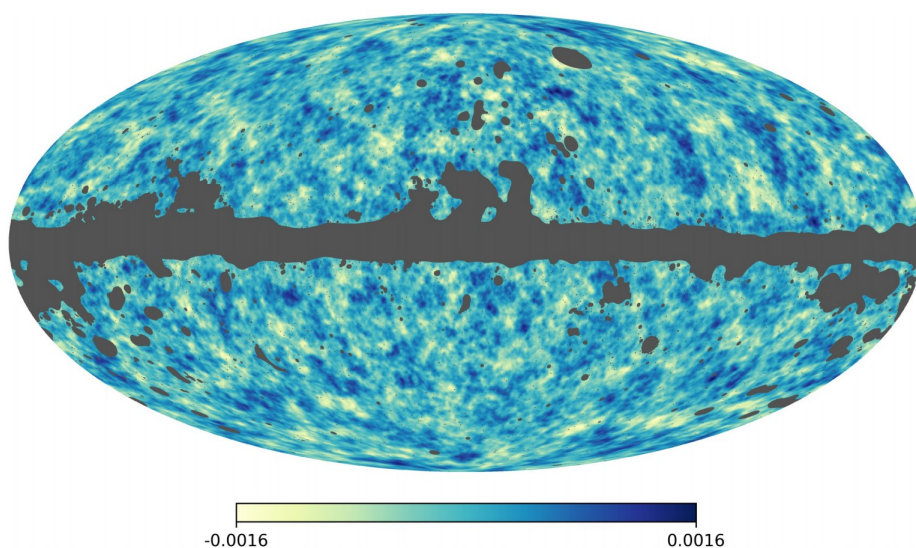


图 8: 根据 CMB 得到的引力势分布。其中灰色的区域为银河系盘面, 不存在数据。图片截取自参考文献 [4] 的 fig6

6.2 根据数据比较模型优劣的方法

在得到观测数据之后, 下面就需要观测数据评价不同的暴胀模型和数据的相符程度, 即要构造一个定量的指标来表征模型的优劣。在参考文献 [7] 的 3.3,3.4 部分介绍了用于比较不同的暴胀模型优劣的方法。其主要的思想是极大似然估计和贝叶斯估计¹², 这里简介如下。对于某个有 k 个可变参数 $\vec{\theta} = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ 的模型 (记为 \mathcal{M})。现在观测数据已经确定, 记为 x , 那么当参数取定某组值时模型给出观测数据 x 的概率为 $C\mathcal{L}(x|\vec{\theta})$, 其中 C 为一个和 $x, \vec{\theta}$ 均无关的常数。称 $\mathcal{L}(x|\vec{\theta})$ 为似然函数 (likelihood function), 极大似然估计方法认为模型 \mathcal{M} 的参数 $\vec{\theta}$ 应该使得 $\mathcal{L}(x|\vec{\theta})$ 取极大值。故有:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x|\vec{\theta})}{\partial \theta_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (106)$$

记找到使其取最大值的似然函数的值为 $\mathcal{L}_{max}(\mathcal{M})$ 。

下面给出两种对比不同模型优劣的方法。

第一种方法是取定一种模型 \mathcal{M}_B 为基准, 比较一个模型 \mathcal{M}_i 和这个作为基准的模型的 \mathcal{L}_{max} , 即计算如下定义的 χ^2 (正比于两个模型似然函数的极大值的比值的对数):

$$\Delta\chi^2 \equiv 2[\ln(\mathcal{L}_{max}(\mathcal{M}_B)) - \ln(\mathcal{L}_{max}(\mathcal{M}_i))] \quad (107)$$

故, $\Delta\chi^2$ 越大的模型越差, 且当 $\Delta\chi^2 > 0$ 时, 模型 \mathcal{M}_i 比基准模型更差。当 \mathcal{M}_B 和 \mathcal{M}_i 中可调参数的数量不同时, 参数更多的模型更容易和现有的数据更接近, 然而这样的更接近可能是过拟合, 为平衡这个效应, 上式要进行一定的修正。

第二种方法为贝叶斯估计, 不是比较两个模型在最优参数下的结果, 而是考虑了模型中参数取遍不同值的综合效果。具体来说, 就是计算模型 \mathcal{M}_i 的平均似然 (model averaged likelihood), 又称为贝叶斯证据 (Bayesian evidence) \mathcal{E}_i :

$$\mathcal{E}_i = \int d^k \vec{\theta} P(\vec{\theta} | \mathcal{M}_i) \mathcal{L}(x | \vec{\theta}) \quad (108)$$

¹²详见参考文献 [8] 第 4 章

在计算之前，需要人为地或称先验地指定模型中的参数 $\vec{\theta} = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ 服从一个分布，该分布的概率密度函数为 $P(\vec{\theta} | \mathcal{M}_i)$ 。对比两个模型仅仅需要将对应模型的贝叶斯证据相除即可，相除后的结果称为贝叶斯因子 (Bayes factor)，仍记基准模型为 M_B ，模型 \mathcal{M}_i 的贝叶斯因子 B 为：

$$B_i = \frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_B} \quad (109)$$

贝叶斯因子这个比值也被形象地称为两个模型的“赔率” (betting odds)。相比于第一种方法，其缺点是需要先验地指定模型中的参数的分布，最后的计算的结果也和这个分布有关，此外，其计算量比起第一种方法来也更大，不过现在已经有许多算法能快速给出贝叶斯证据的数值结果。

参考文献 [5] 中给出的结果则同时采用了上面两种比较方法。在更早的参考文献 [6] 还说明了该团队通过 CosmoMC 程序包进行具体的计算。详见参考文献 [6]6.2 部分。

6.3 Planck 卫星的最新数据对不同的暴胀模型的审判

Planck 卫星是第三代也是已经实际投入运行的最新一代用于探测 CMB 的卫星，于 2009 年 5 月 14 日发射升空，在 2009 年 7 月 2 日进入其工作的 L_2 (第二拉格朗日点) 轨道，在 2013 年 10 月 23 日，Planck 卫星接受了来自地面的最后一条指令，彻底停止工作。

在 2013 年 5 月，Planck 团队发布了对应了最初的任务测量得到第一批数据 (PR1)，在 2015 年发布了第二批数据 (PR2)，最后，在 2018 年，发布了最后一批也是最新一批数据。有关 Planck 卫星及其数据的更多介绍可参考 [4]。

参考文献 [5] 主要基于 Planck 卫星最新的这批数据，并结合了 BICEP2 和凯克 (Keck) 阵列在 2014 年探测的 B 模式极化的数据 (BK14) 和重子声学振荡 (BAO) 的结果，比较了不同的 (单场、满滚) 暴胀模型给出的预言情况的好坏。

用于判断的主要指标是 $k = k_* \equiv 0.002 Mpc^{-1}$ 时的标量扰动的原初功率谱指数 n_s 和张标比 r ，下图对比了观测给出的 n_s, r 的可能范围和不同的暴胀模型所预言的结果。

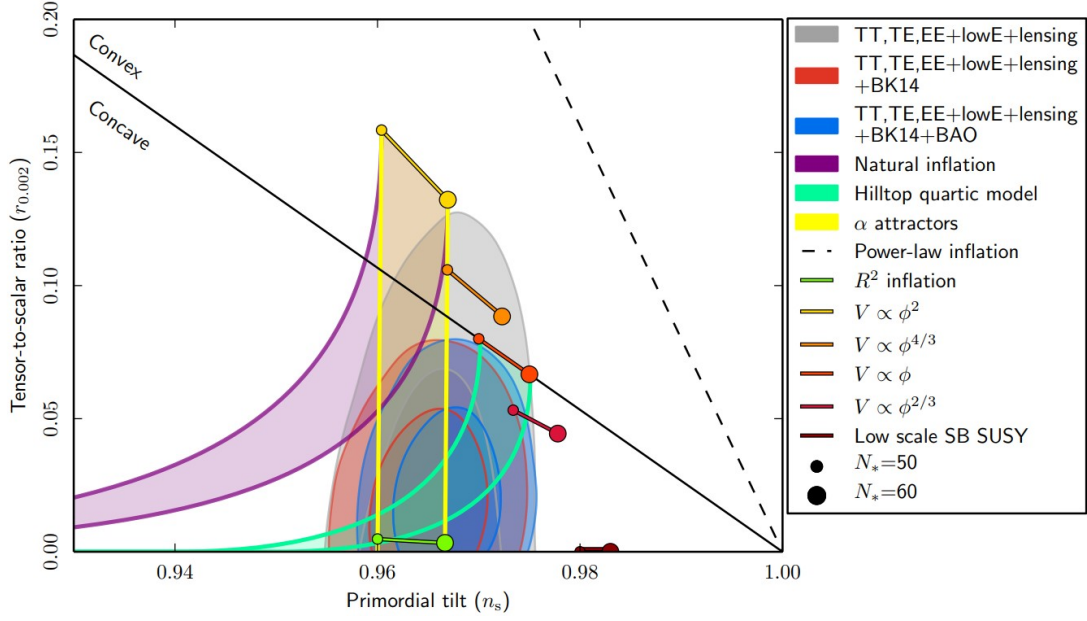


图 9: 上图给出了根据三种观测数据集 (仅仅根据 Planck 卫星, 以及在此基础上 BK14 的数据和加上 BK14 和根据 BAO 得到的数据的情况) 定出的 n_s, r 的可能取值范围, 较小、颜色较深的范围对应 68% 的置信度, 较大、颜色较前的范围对应应在 95% 的置信度情况下多出来的可能范围。这三种数据集给出的 n_s, r 的可能取值范围较为接近, 都给出 n_s 的最可能值约为 0.9625, 并且大概率对应一个较小的 r 。上图还给出了在 N 在 [50,60] 范围内不同模型预言的 n_s, r , 包括自然暴胀 (natural inflation)、 $(V(\phi) = V_0 \left(1 - \frac{\phi^2}{\mu^2} + \dots\right))$ 情形下的) 坡顶暴胀 (hilltop inflation)、 α 吸引子 (α attractors)、修改引力 (R^2 inflation)、四种情况的幂律暴胀 ($V(\phi) \propto (\phi)^p, p = 2, 4/3, 1, 2/3$)、以及 (低能标下) 自发超对称性破缺驱动的暴胀 (low scale SB SUSY)。其中自然暴胀、坡顶暴胀和 α 吸引子中都有可调参数, 因此给出的 n_s, r 范围是一块区域, 而其它没有可调参数的模型给出的 n_s, r 范围是一线段。对比这些模型给出的预言值和观测得到的可能范围, 可以看出修改引力与观测符合地最好, 而 $V(\phi) \propto (\phi)^p, p = 2, 4/3$ 这两种情况不受观测数据的支持。同样有很大概率被观测数据排除的还有 (低能标下) 自发超对称性破缺驱动的暴胀。自然暴胀在大部分参数取值情况下都不能和观测数据符合地较好, 对比之下 α 吸引子和坡顶暴胀有更大概率为观测数据所支持。图中的实线以上为 $V(\phi)$ 为凸 (convex) 函数的情况, 即 $V(\phi)$ 对 ϕ 的二阶导数大于 0, 该条实线以下表示 $V(\phi)$ 为凹 (concave) 函数。从图中可以看出, 整体来说, $V(\phi)$ 为凹 (concave) 函数的情况与观测的相符程度远远优于其为凸函数的情况。图片引自参考文献 [5] 的 fig8。

考虑 n_s 的边沿分布, 四种暴胀模型 (自然暴胀、坡顶暴胀、修改引力和幂律暴胀中的 $V(\phi) \propto \phi^{2/3}$ 的情况) 的理论预言和观测结果的对比如下图所示:

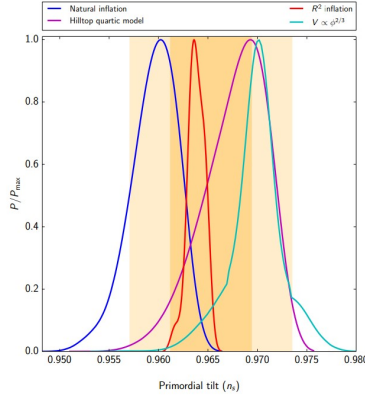


图 10: 上图对比了在 $k = 0.002Mpc^{-1}$ 下四种暴胀模型对 n_s 的预言和观测结果。上图深色区域和为 n_s 在 68% 置信度下的取值范围，深色区域加上浅色区域为 n_s 在 95% 置信度下的取值范围。图片截取自参考文献 [5] 的 fig9。

只考虑 r 的边沿分布，四种暴胀模型的理论预言和观测结果的对比如下图所示：

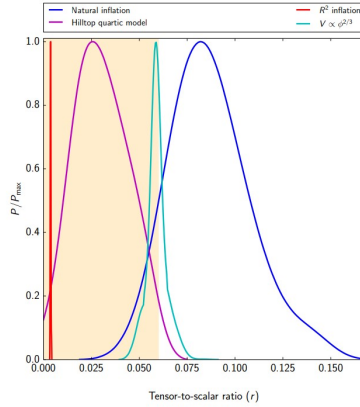


图 11: 上图对比了在 $k = 0.002Mpc^{-1}$ 下四种暴胀模型对 r 的预言和观测结果。上图深色区域和为 r 在 68% 置信度下的取值范围，深色区域加上浅色区域为 r 在 95% 置信度下的取值范围。图片截取自参考文献 [5] 的 fig9。

通常，大场暴胀倾向于给出较大的 r ，而小场暴胀倾向于给出较小的 r ，而目前的观测数据支持 r 较小的情况。

从上面的图以及分析中已经能够粗略看出不同的暴胀模型和观测符合的程度，根据6.2中给出的比较不同模型优劣的方法，下面进一步给出观测数据对不同的暴胀的暴胀模型的“判词”。其中如无特别标注， n_s 和 r 的计算结果引自参考文献 [6]6.2 部分。而对于 $\Delta\chi^2, B$ 的计算来自 [5] 的 4.2 部分。

6.3.1 修改引力

作为提出时间最早的模型，反而和观测数据符合地最好。这个暴胀模型近似地给出：

$$n_s - 1 \approx -\frac{2}{N}, \quad r \approx \frac{12}{N^2} \quad (110)$$

这本身和观测数据给出的较小的张标比相符合，并且，在 95% 置信度下， N 的范围为 (49, 58)，和理论预言的 $N = 54$ 相契合。

由于这个模型表现得很优秀，就选择这个模型作为6.2中计算其它模型的 $\Delta\chi^2$ 和 B 的基准模型 \mathcal{M}_B 。当 $\Delta\chi^2$ 为 $\mathcal{O}(1)$ 量级甚至是负数， B 为 $\mathcal{O}(1)$ 量级甚至更大的时候，说明这个暴胀模型和修改引力的表现差不多优秀甚至更优秀。而当 B 为 $\mathcal{O}(10^{-3})$ 量级时，可以认为观测数据非常不支持这个模型。

6.3.2 幂律暴胀

虽然在很多地方幂律暴胀中的 $V(\phi) \propto \phi^2$ 的情况常被作为暴胀场的例子，观测数据却表明，这个模型代表了宇宙真实情况的可能性微乎其微。其 $\Delta\chi^2 = 22.3, B = 8.25 \times 10^{-4}$ ，而 $V(\phi) \propto \phi^4$ 的形式甚至更糟，其 $\Delta\chi^2 = 89.1, B = 3.45 \times 10^{-15}$ 。总体来说，对于 $V(\phi) \propto \phi^p$ 形式的势能，在一阶近似下，有：

$$n_s - 1 \approx -2 \frac{p+2}{4N+p} \quad (111)$$

$$r \approx \frac{16p}{4N+p} \quad (112)$$

$p \geq 2$ 的情况基本上已经被观测数据排除，并且 p 越大的模型和观测数据的符合情况越差。

有些人出于对（目前只在论文里存在的）轴子（axion）的性质的考虑，提出了 $p = 1, 2/3$ 等值的幂律暴胀，这些 p 较小的暴胀模型和观测数据符合地更好，比如对于 $p = 1$ 的情况，其 $\Delta\chi^2 = 2.5, B = 0.150$ 。¹³

6.3.3 自然暴胀

虽然自然暴胀从粒子物理学的角度来说比较“自然”，但是自然似乎不喜欢自然暴胀。自然暴胀模型的 $\Delta\chi^2 = 9.4$ ，由于其 $V(\phi) = V_0[1 + \cos(\phi/f)]$ 中参数 f 待定，在贝叶斯估计中需要设定 f 的先验分布，在取 f/M_{Pl} 为 $[0.3, 2.5]$ 上的均匀分布后，其贝叶斯因子 $B = 1.50 \times 10^{-2}$ 。从这两个数据可以看出，观测数据并不支持自然暴胀模型。¹⁴

6.3.4 坡顶暴胀

对于具有 $V(\phi) = V_0 \left(1 - \frac{\phi^p}{\mu^p} + \dots\right)$ 形式的坡顶暴胀，在一级近似下给出

$$r \approx 8p^2 \left(\frac{M_{Pl}}{\mu}\right)^2 \frac{x^{2p-2}}{(1-x^p)^2} \quad (113)$$

$$n_s - 1 \approx -2p(p-1) \left(\frac{M_{Pl}}{\mu}\right)^2 \frac{x^{2p-2}}{(1-x^p)^2} - \frac{3}{8}r \quad (114)$$

其中 $x \equiv \frac{\phi_*}{\mu}$, * 表示该物理量在 k_* 出视界即 $1/k_* = 1/(aH)$ 时的值。

具体考虑 $p = 2$ 和 $p = 4$ 两种坡顶暴胀。坡顶暴胀中同样需要人为地设定参数 μ 的先验分布，在 $p = 2$ 的情形，设定 $\log_{10}(\mu/M_{Pl})$ 服从 $[0.3, 4.85]$ 上的均匀分布，此时， $\Delta\chi^2 = 1.7, B = 0.135$ 说明坡顶暴胀虽然稍逊于修改引力，不过还是一个能和观测符合地较好的模型。

对于 $p = 4$ 的情形，设定 $\log_{10}(\mu/M_{Pl})$ 服从 $[-2, 2]$ 上的均匀分布，此时， $\Delta\chi^2 = -0.3, B = 0.246$ 。即 $p = 4$ 的坡顶暴胀模型比 $p = 2$ 的更好地和观测结果相吻合。

¹³不过蔡老师在课堂上称这样“修补”模型以和观测对上的行为是“无赖行为”

¹⁴在 [5] 中给出的自然暴胀的参考文献 [13] 中 n_s 的计算只适用于 f 较小的情况，和现在的 f 的范围不符，故在这里没有列出 n_s 以及 r 的表达式

6.3.5 D 膜暴胀

由于 D 膜暴胀等效的势能的形式 $V(\phi) = \Lambda^4(1 - (\frac{\mu}{\phi})^p)$ 相当于把坡顶暴胀的 p 改为 $-p$, 其 n_s 和 r 的计算结果和也只需把坡顶暴胀结果中的 p 替换为 $-p$ 。

对 $p = 2$ 的情形, 设定 $\log_{10}(\mu/M_{Pl})$ 服从 $[-6, 0.3]$ 上的均匀分布, 此时, $\Delta\chi^2 = -2.3, B = 4.95$ 。

对 $p = 4$ 的情形, 设定 $\log_{10}(\mu/M_{Pl})$ 服从 $[-6, 0.3]$ 上的均匀分布, 此时, $\Delta\chi^2 = -2.2, B = 2.22$ 。

可见 D 膜暴胀和观测数据相符的情形甚至略优于修改引力的情况¹⁵。

6.3.6 含有指数项的势能

等效势能项为 $V(\phi) = V_0(1 - e^{-q\phi/M_{Pl}} + \dots)$ 给出的 n_s 和 r 分别近似为:

$$n_s - 1 \approx -q^2 e^{-q\phi/M_{Pl}} \frac{2 + e^{-q\phi/M_{Pl}}}{(1 - e^{-q\phi/M_{Pl}})^2} \quad (115)$$

$$r \approx 8q^2 \left(\frac{e^{-q\phi/M_{Pl}}}{(1 - e^{-q\phi/M_{Pl}})} \right)^2 \quad (116)$$

设定 $\log_{10}(q)$ 服从 $[-3, 3]$ 上的均匀分布, 此时, $\Delta\chi^2 = -0.5, B = 0.368$, 可见这个模型和观测相符的程度和坡顶暴胀模型接近。

6.3.7 超对称性的自发破缺驱动暴胀

等效势能项为 $V(\phi) = V_0[1 + \alpha_h \log(\phi/M_{Pl})]$ 。其 n_s 的计算可参考 [?], 其中给出了 $n_s \approx 0.98$, 与目前测量到的 ([5] 中的 (16) 式) $n_s = 0.9625 \pm 0.0048, (68\%)$ 置信度相差 3 个 σ 以上。 $\log_{10}(\alpha_h)$ 服从 $[-2.5, 1]$ 上的均匀分布, 此时, $\Delta\chi^2 = 9, B = 6.73 \times 10^{-3}$, 与观测数据相符的糟糕程度接近 $V(\phi) \propto \phi^2$ 的情况。

6.3.8 α 吸引子

对于 E-model 情形 ($V(\phi) = V_0 \tanh^{2m}(\frac{\phi}{\sqrt{6\alpha}M_{Pl}})$), 当 $n = 1$ 情况下 n_s, r 表达式为:

$$r \approx 64 / \left[3\alpha \left(1 - e^{\sqrt{2}\phi/(\sqrt{3\alpha}M_{Pl})} \right)^2 \right] \quad (117)$$

$$n_s - 1 \approx -8[1 + e^{\sqrt{2}\phi/(\sqrt{3\alpha}M_{Pl})}] / \left[3\alpha \left(1 - e^{\sqrt{2}\phi/(\sqrt{3\alpha}M_{Pl})} \right)^2 \right] \quad (118)$$

对于 T-model 情形 ($V(\phi) = V_0 \tanh^{2m}(\frac{\phi}{\sqrt{6\alpha}M_{Pl}})$), n_s, r 表达式为:

$$r \approx \frac{48\alpha m}{4mN^2 + 2Ng(\alpha, m) + 3\alpha m} \quad (119)$$

$$n_s - 1 \approx -\frac{8mN + 6\alpha m + 2g(\alpha, m)}{4mN^2 + 2Ng(\alpha, m) + 3\alpha m} \quad (120)$$

其中 $g(\alpha, m) \equiv \sqrt{3\alpha(4m^2 + 3\alpha)}$ 。

对这两个模型中的参数 α , 先验分布都设定为 $\log_{10}(\alpha)$ 服从 $[-2, 4]$ 上的均匀分布。这样, 对于 $n = 1$ 时的 E-model, 给出 $\Delta\chi^2 = 0.2, B = 0.368$; 而 $n = 2$ 时的 E-model, 给出 $\Delta\chi^2 = -0.2, B = 2.01$; 对于 $m = 1$ 时的 T-model, 给出 $\Delta\chi^2 = -0.1, B = 1.10$ 对于 $m = 2$ 时的 T-model, 给出 $\Delta\chi^2 = -0.4, B = 1.10$ 。故 α 吸引子这类暴胀模型与数据相符的程度与修改引力接近。

¹⁵ 这一定程度上得益于 D 膜暴胀模型中可调的参数更多

6.3.9 非最小耦合的暴胀模型

对于 $V(\phi) = \lambda\phi^4 + \xi R\phi^2/2$ 的非最小耦合的暴胀模型, 对于耦合强度参数 ξ , 其先验分布设定为 $\log_{10} \xi$ 服从 $[-4, 4]$ 上的均匀分布。此时有 $\Delta\chi^2 = 3.1, B = 0.202$, 可见同为 ϕ^4 形式的场, 在非最小耦合情形下与观测数据的符合程度远远优于最小耦合的情形。

7 总结与展望

本文在介绍了现代宇宙学约 1 个世纪的发展历程后, 首先回顾了暴胀提出之前的宇宙学面临的两个主要疑难: 视界问题和平坦性问题; 并说明了暴胀如何解决这些问题。实际上, 暴胀还能同时解决诸如熵产生、磁单极子数量等等文中并未提及的问题。这强有力地回答了“为什么需要暴胀”这个问题。

随后介绍了一个理论框架的单场、慢滚暴胀模型。而后较详细地介绍了幂律暴胀、坡顶暴胀、自然暴胀和修改引力这四种具体的暴胀模型, 并以给出势函数的形式简要介绍了 D 膜暴胀、含有指数项的势能、超对称性的自发破缺驱动的暴胀、 α 吸引子、非最小耦合的暴胀模型这些类暴胀模型。

为了和观测结果对比, 需要在宇宙学扰动理论的框架下计算前述不同的标量扰动、张量扰动功率谱, 并在最后和主要基于 Planck 卫星的观测数据进行比较, 检验各种暴胀模型的好坏。检验的结果是: 修改引力和观测数据符合地非常好, 而幂律暴胀中幂较大的情况则已经基本出局, 其它的各种暴胀模型处于这两个极端之间。

实际上, 解决暴胀提出前的宇宙学面临的问题也有暴胀之外的方案, 比如如果有一个阶段 $H < 0$, 即宇宙在收缩, 也能解决和暴胀所能解决的许多问题, 这一理论就是反弹宇宙。反弹宇宙也可以类似地在宇宙学扰动理论的框架下计算并给出功率谱而后接受观测数据的检验。

而在暴胀理论之内, 除了单场慢滚暴胀之外, 也有许多其它本文未涉及但是也有许多宇宙学家在研究的暴胀模型, 比如多场暴胀。暴胀理论的另一个较不明确之处是暴胀结束后, ϕ 在平衡位置附近振荡同时通过暴胀子和其它粒子的相互作用而将暴胀子的能量转移给其它粒子的时期, 这个时期称为再热 (reheating) 时期, 对于再热时期暴胀子怎样和其它粒子进行相互作用, 取决于 (很可能是标准模型之外的) 粒子物理, 而目前尚不十分明确。

在从理论到观测的宇宙学扰动理论中, 一直以来大家通常只考虑扰动是线性的, 但是也很有可能, 扰动的非线性效应会对最后的结果造成不可忽略的影响, 特别在观测数据精度更进一步提升的未来尤其如此。另外, 在 20 世纪 70 年代在宇宙学家中较为流行的宇宙的拓扑缺陷也能贡献扰动, 也许在未来能够观察到它们的留下的印记。

而 Planck 卫星也不会是人类对 CMB 探测的终点。(在没有其它干扰的情况下)CMB 的 BB 功率谱只由张量扰动决定, 然而 Planck 卫星对 BB 功率谱的测量精度相对较低。未来, 像 AliCPT 等主要职能为探测 CMB 中的偏振信息的探测项目有望给出更好的结果。另外, 张量扰动也对应原初引力波, 这有可能在未来被空间激光干涉引力波探测器探测到。

总之, 人类对宇宙的探索, 才刚刚开始!

参考文献

- [1] Daniel Baumann, TASI Lectures on Inflation, arXiv:0907.5424v2 [hep-th]
- [2] Daniel Baumann, Cosmology
- [3] Mukhanov. Physical foundations of Cosmology [M]. Cambridge University Press, 2005

- [4] Planck Collaboration, Planck 2018 results. I. Overview, and the cosmological legacy of Planck, arXiv:1807.06205v1 [astro-ph.CO] 17 Jul 2018
- [5] Planck Collaboration, Planck 2018 results. X. Constraints on inflation, arXiv:1807.06211v1 [astro-ph.CO] 17 Jul 2018
- [6] Planck Collaboration, Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation, arXiv:1502.02114v2 [astro-ph.CO] 14 Sep 2017
- [7] Planck Collaboration, Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation, arXiv:1303.5082v3 [astro-ph.CO] 3 Feb 2015
- [8] 陈希孺, 概率论与数理统计 [M]. 中国科学技术大学出版社. 2009
- [9] CERN, <https://home.cern/science/physics/supersymmetry>
- [10] Renata Kallosh, Andrei Linde and Diederik Roest, Superconformal Inflationary α -Attractors, arXiv:1311.0472v1 [hep-th] 3 Nov 2013
- [11] A.D. Linde, Chaotic Inflation. 1983, Phys. Lett., B129, 177
- [12] Boubekur, L.; Lyth, D., Hilltop inflation. 2005, JCAP, 0507, 010, arXiv:hep-ph/0502047
- [13] Freese, K., Frieman, J. A.; Olinto, A. V., Natural inflation with pseudoNambu-Goldstone bosons. 1990, Phys. Rev. Lett., 65, 3233
- [14] Daniel Baumann, TASI Lectures on Primordial Cosmology, arXiv:1807.03098v1 [hep-th]
- [15] James B. Hartle, Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity [M]. Pearson Education, 2003
- [16] Dodelson 著, 张杰同, 于浩然译. 现代宇宙学 [M]. 科学出版社. 2016
- [17] 鄢盛丰. 暴胀宇宙学与扰动理论, 近代物理进展课程论文. (可通过作者邮箱 sfyan22@mail.ustc.edu.cn 联系原作者获取论文)
- [18] Hands 著, 李海宁, 吴晓姝, 王靓译. 宇宙简史: 从宇宙诞生到人类文明 [M]. 机械工业出版社. 2017