数值代数 2022 秋期末考卷

2022 年 12 月 9 日

题目 1: 已知

$$A \in C^{n\times n}, ||A||_* < 1, ||I||_* = 1$$

证明

1. 对所有的范数，都有

$$\rho(A) \leq ||A||$$

2.

$$||(I-A)^{-1} - \sum_{k=0}^{m} A^k||_* \leq \frac{||A||_*^{m+1}}{1-||A||_*}$$

（10 分）

题目 1 的注记:都是书上的简单定理（定义课本上证明长度不超过半页纸的定理是简单定理）

题目 2:

$$A \in R^{n\times n}, A = 4I + 2J_n(0) - J_n(0)^T$$

证明，在 $w \in (0,1)$ 的时候 SOR 迭代法是收敛的（10 分）

题目 2 的注记:本质是证明对角严格占优阵的 SOR 收敛定理，属于书上简单定理的证明

题目 3:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{11}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-2}{5}\\ \frac{-2}{5} & \frac{8}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5}\\ -2 & 2 & 1 & -4\\ \frac{-18}{5} & \frac{12}{5} & \frac{-6}{5} & \frac{-9}{5}\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

证明

1. $X^{-1}AX$ 是对角阵
2. 写出 A 用幂法作用在初始向量后得到的向量序列，并且证明 $X^{-1}A$ 没有 0 分量的时候，序列存在两个收敛子列
3. 说出上述收敛子列极限和 A 的特征向量的关系

（20 分）

题目 3 的注记:如果熟悉幂法的话，自然不难知道迭代向量列长什么样。（事实上，课本证明幂法收敛定理的时候就做了和这题类似的操作）

题目 4: A 是 r 个 Household 变换的乘积，证明有分解式

$$A=I-WV^T$$

其中 W,V 都是 n×r 的矩阵（15 分）

题目 4 的注记:一道比较考验线性代数功夫的题目，需要一定的手法。

题目 5: H 是不可约的上 Hesse 阵，证明存在对角阵把他相似到下次对角元都是 1 的上 Hesse 阵（10 分）

题目 5 的注记:一道有手就行的题目。

题目 6: 课本第一章 16 题（20 分）

题目 6 的注记:不算特别困难的作业题，至少不是解题中特别多不平凡步骤的作业题。（20 分）

题目 7: A 有 k 个互异的特征值，是 n 阶方阵，r 是 n 阶向量，证明

$$dim(span(r,Ar,\cdots,A^{n-1}r))\le k$$

(15 分)

题目 7 的注记:不算特别困难的作业题，有线代功夫就可以做。