中国科学技术大学2015-2016第二学期期末试卷

考试科目：数学分析A2　　　　　　得分：

姓名：　　　　　　　　　　学号：

1. 计算（60分）：

(1) 讨论二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

在原点$(0,0)$处的连续性、方向导数以及可微性。

(2) 计算二重积分

$$\iint_D \arctan\frac{y}{x}dxdy,$$

其中$D=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1 \text{ 且 } x,y\geq 0\}$。

(3) 求函数$f(x,y)=\cos y+\sin x+\cos(x-y)$在正方形$[0,\pi/2]^2$上的极值。

(4) 对方程$e^z-xyz=0$叙述隐函数定理，并通过该定理计算$\dfrac{\partial z}{\partial x}$以及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

(5) 求常数c使得向量场

$$\mathbf{v}=(x^2+5cy+3yz,5x+3czx-2,(c+2)xy-4z)$$

是有势场，并求出相应的势函数。

2. （15分）设点$P_0(x_0,y_0,z_0)$在曲面$F(x,y,z)=1$上并满足$\nabla F|_{P_0}\neq 0$。若函数F在P_0的某邻域U内可微且为n次齐次, 即

$$F(tx,ty,tz)=t^nF(x,y,z),\ \forall t>0,(x,y,z)\in U,$$

证明：此曲面在P_0处的切平面方程为

$$xF'_x(P_0)+yF'_y(P_0)+zF'_z(P_0)=n.$$

3. (15分) 设S是$\mathbb{R}^3$中的定向曲面，$\mathbf{n}$是S的正向单位法向量场，∂S是简单分段光滑闭曲线。设$\mathbf{e}$是一个常向量，$\mathbf{r}=(x,y,z)$是空间位置向量，证明

$$\iint_S \mathbf{e}\cdot\mathbf{n}d\sigma=\frac{1}{2}\int_{\partial S}\mathbf{e}\times\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}.$$

4. (10分) 设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$为有界闭区域，其边界$\partial\Omega$是可定向的光滑曲面，$\mathbf{n}$是$\partial\Omega$的单位外法向量场。试解决以下问题：

(i) 设f是Ω上的C^2-标量场，证明：

$$\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}d\sigma=\iiint_\Omega \triangle f d\mu.$$

(ii) 设$\mathbf{u_1},\mathbf{u_2}$是$\Omega$上的光滑向量场，其满足$\nabla\times\mathbf{u_1}=\nabla\times\mathbf{u_2}$且$\nabla\cdot\mathbf{u_1}=\nabla\cdot\mathbf{u_2}$，证明：若$\mathbf{u_1}|_{\partial\Omega}=\mathbf{u_2}|_{\partial\Omega}$，则必有$\mathbf{u_1}=\mathbf{u_2}$.