# 第 10 章　多 重 积 分

设 $f$ 是定义在 $n$ 维欧氏空间中有界点集 $D$ 上的函数，我们将要定义 $f$ 在 $D$ 上的积分，并称之为 $f$ 在 $D$ 上的 $n$ **重积分**. $n$ 重积分是本教材上册第 6 章中所讨论的单变量函数的 Riemann 积分的推广. 为便于学习，我们首先重点介绍**二重积分**，即二元函数的积分. 将来我们会看到，$n$ 重积分的概念和理论基本上与重数 $n$ 没有关系，因此，当我们把二重积分的理论牢固地建立起来之后，再过渡到 $n$ 重积分，并不会有本质的困难. 在那些产生区别的地方，我们将着重指明.

设有界点集 $D \subset \mathbf{R}^2$，函数 $f: D \to \mathbf{R}$. 如同一元函数的积分那样，我们可以用很直观的方式引入 $f$ 在 $D$ 上的积分这一概念. 先设在 $D$ 上 $f \geqslant 0$. 函数 $f$ 的图像是分布在 $D$ 上的一块曲面(图 10.1). 由 $D$ 和这块曲面夹成的一个曲顶柱体可以表示为

$$\{(x, y, z): 0 \leqslant z \leqslant f(x, y), (x, y) \in D\},$$

我们要来计算(严格地说是要来定义)这个曲顶柱体的体积. 为此，将 $D$ 划分成若干小块，记为 $D_1, D_2, \cdots, D_k$(图 10.2). 在每一小块 $D_i$ 上，任取一点 $\boldsymbol{\xi}_i$，先计算函数值 $f(\boldsymbol{\xi}_i)$，并作和

$$\sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(D_i),$$

这里 $\sigma(D_i)$ 是小块 $D_i$ 的面积. 上面的和式表示曲顶柱体体积的一个近似值. 要想得到曲顶柱体体积的合理定义，就应当把分割无限地加细. 这是一个极限过程，就是说，我们定义曲顶柱体的体积为

$$V = \lim \sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(D_i).$$

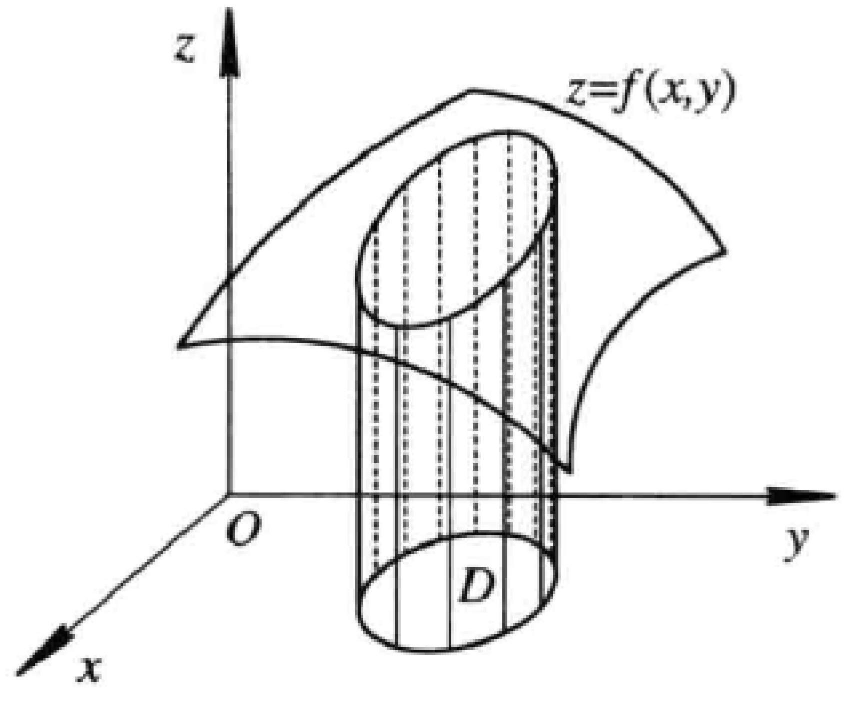



图 10.1

在这里，极限是对

$$\max(\mathrm{diam}(D_1),\mathrm{diam}(D_2),\cdots,\mathrm{diam}(D_k))$$

来取的，并且要求 $V$ 的存在性和数值不依赖于 $\xi_i$ 在 $D_i$ 中的选择 $(i=1,2,\cdots,k)$.

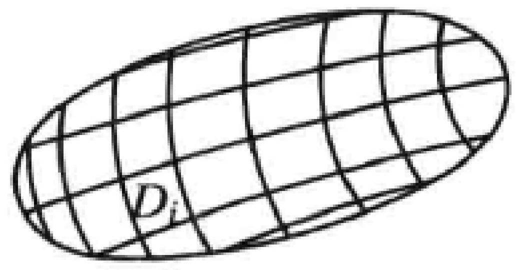


图 10.2

在这种情况下，记

$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

也可以写成

$$V=\int_D f(\boldsymbol{p})\mathrm{d}\sigma,$$

这里的 $\mathrm{d}\sigma$ 表示**面积元素**.

回忆在一元函数积分的定义中，我们把区间 $[a,b]$ 进行分割，即把它分成若干个子区间，计算这些区间的长度没有任何困难. 但是在 $\mathbf{R}^2$ 中，一个点集 $D$ 即使有界，也可能是相当复杂的集合. 如何将 $D$ 进行分割？在分割之后，小块 $D_i$ 的"面积" $\sigma(D_i)$ 又如何确定？这些都是在建立二重积分的时候遇到的最大障碍. 为了克服这些障碍，采取分两步走的方法. 首先讨论矩形上的二重积分，然后再讨论 $\mathbf{R}^2$ 中任一有界点集上的二重积分.

设 $I=[a,b]\times[c,d]$，我们称 $I$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个闭矩形，它的两对对边分别平行于横轴和纵轴. 我们定义 $I$ 的面积

$$\sigma(I)=(b-a)(d-c).$$

这一定义显然是合理的. 本章中提到的矩形都是指这种类型的矩形.

## 10.1 矩形区域上的积分

设 $I$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭矩形，$I=[a,b]\times[c,d]$. 作 $[a,b]$ 的分割

$$\pi_x: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b;$$

又作 $[c,d]$ 的分割

$$\pi_y: c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d.$$

两族平行直线 $x=x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 与 $y=y_j(j=0,1,\cdots,m)$，把 $I$ 分割成 $k=n\times m$ 个子矩形：

$$[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\quad(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m).$$

这 $k$ 个子矩形的全体组成 $I$ 的一个分割 $\pi=\pi_x\times\pi_y$. 用一定的次序重排这 $k$ 个子

矩形,将它们编号为 $I_1, I_2, \cdots, I_k$. 在每一个 $I_i$ 中任取一点 $\boldsymbol{\xi}_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$,作**积分和**(也称 **Riemann 和**)

$$\sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(I_i). \tag{1}$$

记

$$\|\pi\| = \max(\mathrm{diam}(I_1), \mathrm{diam}(I_2), \cdots, \mathrm{diam}(I_k)),$$

这里 $\mathrm{diam}(I_i)$是矩形 $I_i$ 的对角线的长度,我们称 $\|\pi\|$ 为分割 $\pi$ 的**宽度**.

令 $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k)$,称 $\boldsymbol{\xi}$ 为积分和(1)的**值点向量**,称 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k$ 为**值点**.

**定义 10.1.1**　如果存在数 $A$,使得对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $\|\pi\|<\delta$ 时,不论值点 $\boldsymbol{\xi}_i$ 在子矩形 $I_i$ 中如何选择,都有

$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(I_i) - A\right| < \varepsilon,$$

则称函数 $f$ 在矩形 $I$ 上**可积**,并将 $A$ 写作

$$\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad 或 \quad \int_I f\,\mathrm{d}\sigma,$$

称之为 $f$ 在矩形 $I$ 上的**二重积分**,或者简称 $f$ 在 $I$ 上的**积分**,这里 $f$ 称为**被积函数**,$I$ 称为**积分区域**.

在这一定义中所表述的极限过程常常记为

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(I_i) = A,$$

从而可以省去许多文字.

**例 1**　设函数 $f$ 在 $I$ 上取常数值 $c$,那么

$$\int_I f\,\mathrm{d}\sigma = c\sigma(I).$$

从以上的讨论来看,二重积分的定义与单变量函数在闭区间上积分的定义实质上没有任何差别.因此单变量函数在区间上积分的许多性质可以无须另作证明而直接对二重积分建立起来.

**定理 10.1.1**　如果 $f$ 在 $I$ 上可积,那么 $f$ 必在 $I$ 上有界.

**定理 10.1.2**　设 $f$ 和 $g$ 在 $I$ 上可积,那么:

(1) 若 $c$ 为任何常数,那么 $cf$ 在 $I$ 上也可积,并且

$$\int_I (cf)\,\mathrm{d}\sigma = c\int_I f\,\mathrm{d}\sigma,$$

这表明,常数因子可以直接提到积分号的外面;

(2) $f\pm g$ 在 $I$ 上可积,并且

$$\int_I (f \pm g)\mathrm{d}\sigma = \int_I f\mathrm{d}\sigma \pm \int_I g\mathrm{d}\sigma.$$

**定理 10.1.3** 设 $f$ 和 $g$ 在 $I$ 上可积,那么:

(1) 若 $f\geqslant 0$,则

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma \geqslant 0;$$

(2) 若 $f\geqslant g$,则

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma \geqslant \int_I g\mathrm{d}\sigma.$$

**证明** 结论(1)是显然的,下面只证明(2).利用(1),可得

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma - \int_I g\mathrm{d}\sigma = \int_I (f-g)\mathrm{d}\sigma \geqslant 0.$$ □

我们十分关心的是,矩形 $I$ 上怎样的有界函数一定在 $I$ 上可积.这就要进行可积性的研究.

在给定函数 $f$ 之后,积分和(1)可以写为

$$S(f,\pi) = \sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(I_i).$$

这说明一个 Riemann 和既依赖于 $I$ 的分割 $\pi$,又依赖于值点 $\boldsymbol{\xi}_i\in I_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 的选取.令

$$m_i = \inf f(I_i), \quad M_i = \sup f(I_i) \quad (i = 1,2,\cdots,k).$$

定义

$$\underline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^{k} m_i\sigma(I_i), \quad \overline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^{k} M_i\sigma(I_i),$$

分别称它们为函数 $f$ 关于分割 $\pi$ 的**下和**与**上和**,它们只与分割 $\pi$ 有关.显然可见,对同一分割 $\pi$ 而言,任何积分和都介于下和与上和之间,即

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant S(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi).$$

设 $\pi=\pi_x\times\pi_y$ 与 $\pi'=\pi'_x\times\pi'_y$ 是 $I$ 的两个分割.如果 $\pi_x\leqslant\pi'_x$ 且 $\pi_y\leqslant\pi'_y$,这里涉及的是数轴上两个分割粗与细的比较(见上册 6.5 节),那么我们称分割 $\pi$ 比 $\pi'$ 粗,或者说分割 $\pi'$ 比 $\pi$ 细,记为 $\pi\leqslant\pi'$.类似于定理 6.5.1,我们有:

**定理 10.1.4** 设 $\pi$ 和 $\pi'$ 是矩形 $I$ 的两个分割,并且 $\pi\leqslant\pi'$,那么

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant \underline{S}(f,\pi') \leqslant \overline{S}(f,\pi') \leqslant \overline{S}(f,\pi).$$

这就是说,在细分之下,下和不会减少而上和不会增大.

这个定理的证明与定理 6.5.1 的证明完全相似,故从略.

**定理 10.1.5** 设 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 是 $I$ 的任何两个分割,那么

$$\underline{S}(f,\pi_1) \leqslant \overline{S}(f,\pi_2).$$

也就是说,任意下和绝不大于任意上和.

**证明** 设 $\pi_i = \pi_{ix} \times \pi_{iy}(i=1,2)$,把区间$[a,b]$上的两个分割 $\pi_{1x}$ 与 $\pi_{2x}$ 的分点合在一起,组成$[a,b]$的分割 $\pi_x$;又把区间$[c,d]$的两个分割 $\pi_{1y}$ 与 $\pi_{2y}$ 的分点合在一起,组成$[c,d]$的分割 $\pi_y$. 令 $\pi = \pi_x \times \pi_y$,这是矩形 $I$ 的一个分割,显然 $\pi$ 比 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 都要细. 依定理 10.1.4,有

$$\underline{S}(f,\pi_1) \leqslant \underline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi_2). \qquad \square$$

为了书写简便,我们把上述由分割 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 而得到分割 $\pi$ 的过程称为"把 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 合在一起得到分割 $\pi$".

由上述定理,可知下和所成的集是有上界的. 令

$$\underline{\int}_I f\mathrm{d}\sigma = \sup_{\pi} \underline{S}(f,\pi),$$

称这个数为 $f$ 在 $I$ 上的**下积分**. 对称地,上和所成的集是有下界的. 令

$$\overline{\int}_I f\mathrm{d}\sigma = \inf_{\pi} \overline{S}(f,\pi),$$

称这个数为 $f$ 在 $I$ 上的**上积分**. 很明显,

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant \underline{\int}_I f\mathrm{d}\sigma \leqslant \overline{\int}_I f\mathrm{d}\sigma \leqslant \overline{S}(f,\pi') \tag{2}$$

对矩形 $I$ 的任意两个分割 $\pi$ 和 $\pi'$ 成立.

**定理 10.1.6** 等式

$$\underline{\int}_I f\mathrm{d}\sigma = \overline{\int}_I f\mathrm{d}\sigma$$

成立的充分必要条件是,对任意给定的 $\varepsilon$,存在 $I$ 的一个分割 $\pi$,使得

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon.$$

**证明** 必要性. 设

$$A = \underline{\int}_I f\mathrm{d}\sigma = \overline{\int}_I f\mathrm{d}\sigma.$$

由下积分的定义,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在矩形 $I$ 的一个分割 $\pi_1$,使得

$$\underline{S}(f,\pi_1) > A - \frac{\varepsilon}{2};$$

又由上积分的定义,存在矩形 $I$ 的一个分割 $\pi_2$,使得

$$\overline{S}(f,\pi_2) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

把分割 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 合在一起得到分割 $\pi$，从而可知

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,\pi_1) \leqslant \underline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi_2) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此推出

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

充分性. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在矩形 $I$ 的一个分割 $\pi$，使得

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon,$$

那么由不等式(2)，可知

$$0 \leqslant \overline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma - \underline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma \leqslant \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon$ 是任意的正数，故必须有

$$\underline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma = \overline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma.$$ □

更进一步，我们有：

**定理 10.1.7** 函数 $f$ 在矩形 $I$ 上可积的充分必要条件是

$$\underline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma = \overline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma. \tag{3}$$

这个公共的值就是积分值 $\underline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma$.

**证明** 必要性. 设 $f$ 在 $I$ 上可积，将其积分值记为 $A$. 这时，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，必存在 $I$ 的一个分割 $\pi=\{I_1,I_2,\cdots,I_k\}$，对任意的值点 $\xi_i\in I_i(i=1,2,\cdots,k)$，有不等式

$$A - \varepsilon < \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i) < A + \varepsilon.$$

由于 $\xi_i$ 在 $I_i$ 中可以任取，从上式可得

$$A - \varepsilon \leqslant \underline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi) \leqslant A + \varepsilon.$$

由此推知

$$A - \varepsilon \leqslant \underline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma \leqslant \overline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma \leqslant A + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$，可得

$$\underline{\int}_I f\mathrm{d}\sigma = \overline{\int}_I f\mathrm{d}\sigma = A.$$

充分性. 现在设式(3)成立,将其公共值记为 $A$. 由定理 10.1.6,可知对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $I$ 的分割 $\pi_\varepsilon=\{J_1,J_2,\cdots,J_t\}$,使得

$$\overline{S}(f,\pi_\varepsilon)-\underline{S}(f,\pi_\varepsilon)<\varepsilon. \tag{4}$$

将子矩形 $J_i$ 的每一边平行地向矩形内部收缩同一距离 $\delta>0$,作成一个开矩形 $\widetilde{J}_i\subset J_i$ $(i=1,2,\cdots,t)$,见图 10.3. 令

$$K=I\cap\left(\bigcup_{i=1}^{t}\widetilde{J}_i\right)^{\mathrm{c}}.$$

显然 $K$ 是一个闭集,取 $\delta$ 充分小,使得 $\sigma(K)<\varepsilon$. 由于 $K$ 是若干个没有公共内点的矩形的并集,$\sigma(K)$ 可被定义为那些矩形的面积之和. 设 $I$ 的分割 $\pi=\{I_1,I_2,\cdots,I_k\}$ 满足条件 $\|\pi\|<\delta$. 对任何值点向量 $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)$,我们有

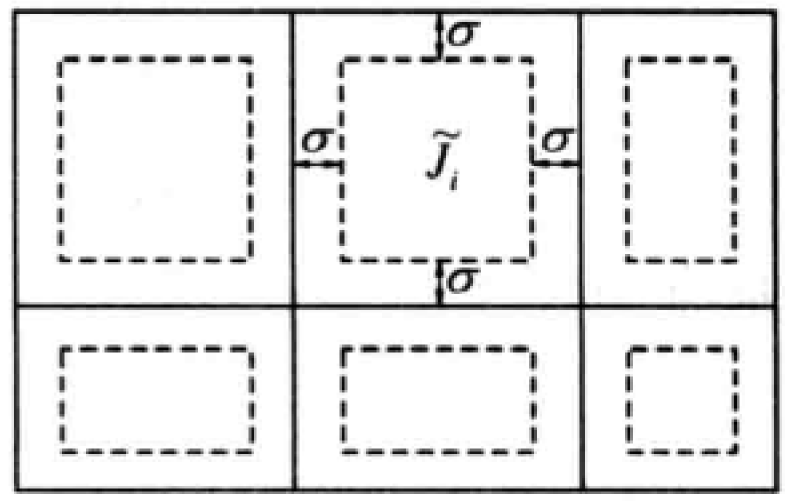



图 10.3

$$\underline{S}(f,\pi)\leqslant S(f,\pi)\leqslant\overline{S}(f,\pi). \tag{5}$$

此外,有

$$\underline{S}(f,\pi)\leqslant A\leqslant\overline{S}(f,\pi). \tag{6}$$

由式(5)和式(6),得

$$\begin{aligned}|S(f,\pi)-A|&\leqslant\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)\\&=\sum_{j=1}^{k}(M_j-m_j)\sigma(I_j)\\&=\Sigma_1+\Sigma_2,\end{aligned}$$

式中

$$\Sigma_1=\sum_{I_j\subset K}(M_j-m_j)\sigma(I_j),$$

$$\Sigma_2=\sum_{I_j\not\subset K}(M_j-m_j)\sigma(I_j).$$

一方面,由于函数 $f$ 在 $I$ 上有界,可设正数 $M$ 满足 $|f(\boldsymbol{p})|\leqslant M(\boldsymbol{p}\in I)$,于是得到

$$\Sigma_1\leqslant 2M\sum_{I_j\subset K}\sigma(I_j)\leqslant 2M\sigma(K)<2M\varepsilon.$$

另一方面,和式 $\Sigma_2$ 中的 $I_j\not\subset K$,这样的 $I_j$ 必与某个 $\widetilde{J}_i$ 相交. 由 $\widetilde{J}_i$ 的做法可知

$I_j \subset J_i$，因此

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \sum_{i=1}^{t}\sum_{I_j\subset J_i}(M_j - m_j)\sigma(I_j)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{t}(\sup f(J_i) - \inf f(J_i))\sum_{I_j\subset J_i}\sigma(I_j)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{t}(\sup f(J_i) - \inf f(J_i))\sigma(J_i)\\ &= \overline{S}(f,\pi_\varepsilon) - \underline{S}(f,\pi_\varepsilon) < \varepsilon,\end{aligned}$$

从而有 $|S(f,\pi)-A|<(2M+1)\varepsilon$. 这表明 $f$ 在 $I$ 上可积，并且

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma = A. \qquad \square$$

从定理 10.1.6 和定理 10.1.7，可得：

**定理 10.1.8** 设 $f$ 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上有界，那么以下四个条件等价：

(1) $f$ 在 $I$ 上可积；

(2) $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{k}\omega_i\sigma(I_i)=0$，其中 $\omega_i = M_i - m_i (i=1,2,\cdots,k)$，$M_i$ 和 $m_i$ 分别为 $f$ 在 $I_i$ 上的上、下确界；

(3) 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $I$ 的一个分割 $\pi$，使得

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon;$$

(4) $\underline{\int}_I f\mathrm{d}\sigma = \overline{\int}_I f\mathrm{d}\sigma$.

证明留作练习.

利用上面的定理，立刻可以证明闭矩形上的连续函数可积. 证明和单变量中相应定理的证明完全相同.

**例 2** 如果 $x,y\in\mathbf{R}$ 为有理数，则 $\mathbf{R}^2$ 中的点 $(x,y)$ 称为**二维有理点**. 定义 Dirichlet 函数

$$D(p) = \begin{cases}1, & \text{当 } p \text{ 是 } \mathbf{R}^2 \text{ 中的有理点},\\ 0, & \text{当 } p \text{ 不是 } \mathbf{R}^2 \text{ 中的有理点}.\end{cases}$$

易见，对 $\mathbf{R}^2$ 中的任何矩形 $I$，函数 $D$ 在 $I$ 上不可积. 这是因为

$$\underline{\int}_I D\mathrm{d}\sigma = 0, \quad \overline{\int}_I D\mathrm{d}\sigma = \sigma(I) > 0. \qquad \square$$

## 练习题 10.1

1. 设一元函数 $f,g$ 在区间$[0,1]$上可积.求证:二元函数 $f(x)g(y)$在 $I=[0,1]^2$ 上可积,并且

$$\iint_I f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y.$$

2. 计算积分

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. 设 $a>0, I=[-a,a]\times[-a,a]$.求证:

$$\iint_I \sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

并试从几何上说明这一结果.

4. 证明定理 10.1.8.
5. 证明:闭矩形上的连续函数可积.

# 10.2 Lebesgue 定理

在单变量积分中,已经证明:如果一个有界函数 $f$ 的不连续点集是一零测集,那么它是可积的;反之亦然.由于二重积分的定义和性质本质上同单变量积分的定义和性质完全一样,我们很自然地会问:在二元情形下,还有没有作为可积的充分必要条件的 Lebesgue 定理?为此,我们需要引入二维零测集的概念.

**定义 10.2.1** 设 $B\subset\mathbf{R}^2$.如果对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在可数个闭矩形序列 $\{I_i\}(i=1,2,\cdots)$,使得

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sigma(I_i)<\varepsilon,$$

则 $B$ 称为(二维)**零测集**.

如果在上述定义中,要求矩形的个数为有限的,则有:

**定义 10.2.2** 设 $B\subset\mathbf{R}^2$.如果对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在有限个闭矩形 $I_1$, $I_2,\cdots,I_m$,使得

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{m}I_i,\quad \sum_{i=1}^{m}\sigma(I_i)<\varepsilon,$$

则称 $B$ 为**零面积集**.

很显然,零面积集必定是零测集.

**注意** 在零测集和零面积集的定义中,闭矩形 $I_i$ 也可以改为开矩形 $I_i$,什么时候用闭矩形,什么时候用开矩形,视方便而定.

**定理 10.2.1** 下列性质是明显的:

(1) 至多可数集是零测集;

(2) 至多可数个零测集的并是零测集;

(3) 有限个零面积集的并是零面积集;

(4) $B$ 为零面积集,必须且只需 $\overline{B}$ 也是零面积集;

(5) 如果 $B$ 是有界闭集,则 $B$ 为零测集的充分必要条件是 $B$ 为零面积集.

**证明** 前三条性质至为明显,我们只证(4)和(5).

(4)的充分性是显然的:由 $B\subset\overline{B}$,可知当 $\overline{B}$ 为零面积集时,$B$ 必为零面积集.

为了证明必要性,设 $B$ 为零面积集,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在有限个闭矩形 $I_1,I_2,\cdots,I_m$,使得

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{m}I_i,\quad \sum_{i=1}^{m}\sigma(I_i)<\varepsilon$$

同时成立.由于这时 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}I_i$ 为闭集,所以仍有

$$\overline{B}\subset\bigcup_{i=1}^{m}I_i.$$

由此可见 $\overline{B}$ 是零面积集.

再来证明(5),只需证明其必要性.

设 $B$ 是紧致的零测集,则对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在开矩形序列$\{I_i\}$,使得

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sigma(I_i)<\varepsilon.$$

由有限覆盖定理知,从$\{I_i\}$中可选出有限个开矩形仍能覆盖住 $B$,这些开矩形面积的和自然仍小于 $\varepsilon$,所以 $B$ 是零面积集. □

但是,如果 $B$ 是零测集,那么便不能断言 $\overline{B}$ 必是零测集.例如,用 $B$ 来记 $[0,1]^2$ 中所有有理点所成的集,由于 $B$ 是可数的,所以是一零测集,但是这时 $\overline{B}=[0,1]^2$,不是零测集.这个例子也说明零测集未必是零面积集.

**例 1** 设 $B\subset\mathbf{R}^2$ 是一段连续的参数曲线,并且其中至少有一个分量有连续的导数.证明:$B$ 是零面积集.

**证明** 设 $B$ 有参数方程

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

其中 $x$ 和 $y$ 是$[\alpha,\beta]$上的连续函数.不妨再设 $y$ 在$[\alpha,\beta]$上有连续的导数.对任意给定的 $\varepsilon>0$,必有分割

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta,$$

使得当 $s,t\in[t_{i-1},t_i]$$(i=1,2,\cdots,m)$时,有$|x(s)-x(t)|<\varepsilon$.令

$$a_i = \min x([t_{i-1},t_i]), \quad b_i = \max x([t_{i-1},t_i]),$$

则有 $b_i - a_i<\varepsilon$.再令

$$c_i = \min y([t_{i-1},t_i]), \quad d_i = \max y([t_{i-1},t_i]),$$

$$\boldsymbol{I}_i = [a_i,b_i]\times[c_i,d_i] \quad (i = 1,2,\cdots,m),$$

于是当 $t\in[t_{i-1},t_i]$时,$(x(t),y(t))\in \boldsymbol{I}_i(i=1,2,\cdots,m)$,从而有

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{m} \boldsymbol{I}_i .$$

设$|y'(t)|\leqslant M$ 对 $t\in[\alpha,\beta]$成立,则由微分中值定理知,存在常数 $M>0$,使得

$$d_i - c_i \leqslant M(t_i - t_{i-1}) \quad (i = 1,2,\cdots,m).$$

因此

$$\sum_{i=1}^{m}\sigma(\boldsymbol{I}_i) = \sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i)(d_i - c_i)$$

$$< M\varepsilon\sum_{i=1}^{m}(t_i - t_{i-1}) = M\varepsilon(\beta - \alpha).$$

由于 $\varepsilon$ 是任意的,所以 $B$ 是零面积集. □

**注意** 若 $x$ 与 $y$ 都不具备连续可导的条件,例 1 的结论可能就不成立.我们将在 15.8 节中构造一条连续的参数曲线,它可以充满整个正方形,当然这条连续曲线就不是零面积集.

**例 2** 设函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 连续,那么 $f$ 的图像

$$G(f) = \{(x,f(x)): x \in [a,b]\}$$

是零面积集.

**证明** 把 $f$ 的图像改写为参数方程

$$x = t, \quad y = f(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

则由例 1 的结果可得. □

**例 3** 光滑曲线段是零面积集.

**证明** 在 9.5 节中说过,光滑曲线段是指参数曲线$(x(t),y(t))$$(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$,

其中 $x',y'$在$[\alpha,\beta]$上连续,并且$(x'(t))^2+(y'(t))^2>0$,所以光滑曲线段当然是零面积集. □

现在,我们着手介绍 Lebesgue 定理.

**定义 10.2.3** 设集合 $B\subset\mathbf{R}^2$,$f:B\to\mathbf{R}$ 有界.对任何 $\boldsymbol{x}\in B$ 及 $r>0$,令 $I_{\boldsymbol{x},r}=B\cap B_r(\boldsymbol{x})$.用 $\omega_f(\boldsymbol{x},r)$表示函数 $f$ 在$I_{\boldsymbol{x},r}$上的振幅.令

$$\omega_f(\boldsymbol{x})=\lim_{r\to0^+}\omega_f(\boldsymbol{x},r),$$

称之为函数 $f$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的振幅.

请读者自行证明

$$\omega_f(\boldsymbol{x},r)=\sup\{|f(\boldsymbol{y}_1)-f(\boldsymbol{y}_2)|:\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in I_{\boldsymbol{x},r}\}.$$

以下三条引理的证明和引理 6.6.2~6.6.4 的证明完全类似,这里从略.

**引理 10.2.1** 设集合 $B\subset\mathbf{R}^2$.函数 $f$ 在点 $\boldsymbol{x}\in B$ 处连续的充分必要条件是 $\omega_f(\boldsymbol{x})=0$.

设 $I$ 是一个矩形.对 $\delta>0$,记

$$D_\delta=\{\boldsymbol{x}\in I:\omega_f(\boldsymbol{x})\geqslant\delta\}.$$

用 $D(f)$记 $f$ 在矩形 $I$ 上不连续点的全体,那么有:

**引理 10.2.2** $D(f)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_{1/n}$.

**引理 10.2.3** 设 $f$ 是定义在有限闭矩形 $I$ 上的函数.如果存在一列开矩形 $I_j(j=1,2,\cdots)$,使得 $D(f)\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}I_j$.记 $K=I\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}I_j$,那么对任意的 $\varepsilon>0$,一定存在 $\delta>0$,当 $\boldsymbol{x}\in K,\boldsymbol{y}\in I$ 且 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta$ 时,有$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|<\varepsilon$.

现在可以证明本节的主要定理了.

**定理 10.2.2**(Lebesgue 定理) 设函数 $f$ 在闭矩形 $I$ 上有界,那么 $f$ 在 $I$ 上 Riemann 可积的充分必要条件是,$f$ 在 $I$ 上的全体不连续点所成的集 $D(f)$是一零测集.

**证明** 必要性.由引理 10.2.2,只要证明 $D_{1/n}$是零测集.因为 $f$ 在 $I$ 上可积,故由定理 10.1.8,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $I$ 的一个分割 $\pi=\{I_1,I_2,\cdots,I_m\}$,使得

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i\sigma(I_i)<\frac{\varepsilon}{n}.\tag{1}$$

令 $E_n=D_{1/n}\setminus l(\pi)$,这里 $l(\pi)$为 $\pi$ 的分割线所构成的集合.由本节的例 3 得知 $l(\pi)$是一个零面积集,从而只要证明 $E_n$ 是零测集就够了.

由于 $I\setminus l(\pi)=\bigcup\limits_{i=1}^{m}I_i$,这里 $I_i(i=1,2,\cdots,m)$都是开矩形,所以

$$E_n = D_{1/n} \cap (\bigcup_{i=1}^{m} I_i) \subset \bigcup \{I_i : D_{1/n} \cap I_i \neq \varnothing\}.$$

这说明 $E_n$ 被一列开矩形的并所覆盖,这一列矩形中的每一个都含有 $D_{1/n}$ 中的点.任取 $\boldsymbol{a} \in D_{1/n} \cap I_i$,则必能取到充分小的 $r$,使得 $B_r(\boldsymbol{a}) \subset I_i$.用 $\omega_i$ 和 $\omega_f(\boldsymbol{a}, r)$ 分别记 $f$ 在 $I_i$ 和 $B_r(\boldsymbol{a})$ 上的振幅,那么

$$\omega_i \geqslant \omega_f(\boldsymbol{a}, r) \geqslant \omega_f(\boldsymbol{a}) \geqslant \frac{1}{n}. \tag{2}$$

如果用 $\sum{}'$ 表示对那些满足 $D_{1/n} \cap I_i \neq \varnothing$ 的 $i$ 求和,那么由式(1) 和式(2),可得

$$\frac{\varepsilon}{n} > \sum_{i=1}^{m} \omega_i \sigma(I_i) \geqslant \sum{}' \omega_i \sigma(I_i) \geqslant \frac{1}{n} \sum{}' \sigma(\boldsymbol{I}_i),$$

即

$$\sum{}' \sigma(I_i) < \varepsilon. \tag{3}$$

这正好说明覆盖 $E_n$ 的那列开矩形的面积之和小于 $\varepsilon$,因而 $E_n$ 是一个零面积集,所以 $D(f)$ 是零测集.

充分性.设 $D(f)$ 是一个零测集,从而对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一列开矩形 $J_i (i=1,2,\cdots)$,使得

$$D(f) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(J_i) < \frac{\varepsilon}{2\omega}, \tag{4}$$

这里 $\omega$ 是 $f$ 在 $I$ 上的振幅.令

$$K = I \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i.$$

根据引理 10.2.3,对上述的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $\boldsymbol{x} \in K$, $\boldsymbol{y} \in I$,且 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| < \delta$ 时,有

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \frac{\varepsilon}{4\sigma(I)}. \tag{5}$$

现取分割 $\pi = \{I_1, I_2, \cdots, I_m\}$,使得 $\|\pi\| < \delta$.令

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i \sigma(\boldsymbol{I}_i) = \sum{}_1 \omega_i \sigma(I_i) + \sum{}_2 \omega_i \sigma(I_i), \tag{6}$$

这里 $\sum_1$ 表示对 $K$ 和 $I_i$ 相交的那些 $i$ 求和,$\sum_2$ 表示对 $K$ 和 $I_i$ 不相交的那些 $i$ 求和.对 $\sum_1$ 中的项,因为 $K \cap I_i \neq \varnothing$,任取 $\boldsymbol{y}_i \in K \cap I_i$,故由式(5),得

$$\begin{aligned}
\omega_i &= \sup\{|f(\boldsymbol{z}_1) - f(\boldsymbol{z}_2)| : \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in I_i\} \\
&\leqslant \sup\{|f(\boldsymbol{z}_1) - f(\boldsymbol{y}_i)| + |f(\boldsymbol{y}_i) - f(\boldsymbol{z}_2)| : \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in I_i, \boldsymbol{y}_i \in K \cap I_i\} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2\sigma(I)}.
\end{aligned}$$

因此

$$\sum\nolimits_1 \omega_i \sigma(I_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{2\sigma(I)} \sigma(I) = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

对 $\sum_2$ 中的项，由于 $K \cap I_i = \varnothing$，故当 $\boldsymbol{x} \in I_i$ 时，$\boldsymbol{x} \notin K$，从而 $\boldsymbol{x} \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} J_i$，即 $I_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} J_j$. 所以由式(4)，得

$$\sum\nolimits_2 \sigma(I_i) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(J_j) < \frac{\varepsilon}{2\omega}.$$

于是

$$\sum\nolimits_2 \omega_i \sigma(I_i) \leqslant \omega \sum\nolimits_2 \sigma(I_i) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

综合式(6)～(8)，即得

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i \sigma(I_i) < \varepsilon.$$

由定理 10.1.8，即知 $f$ 在 $I$ 上可积. □

由 Lebesgue 定理，可以推得下面有用的结论：

**定理 10.2.3** 设函数 $f: I \to \mathbf{R}$ 有界. 如果集合 $B = \{\boldsymbol{x} \in I: f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ 为一零面积集，那么 $f$ 在 $I$ 上可积，并且

$$\int_I f \mathrm{d}\sigma = 0.$$

**证明** 显然，开集 $I^\circ \setminus \bar{B} = I^\circ \cap (\mathbf{R}^2 \setminus \bar{B})$ 中的点都是 $f$ 的连续点，可见 $D(f) \subset \partial I \cup \bar{B}$. 由于 $\partial I$ 是一零面积集，$\bar{B}$ 也是零面积集，故 $\partial I \cup \bar{B}$ 是一零面积集. 由 Lebesgue 定理，可知函数 $f$ 在 $I$ 上可积. 余下的只需证明：$f$ 在 $I$ 上的积分等于零.

对 $I$ 的任一分割 $\pi = \{I_1, I_2, \cdots, I_k\}$，由于 $\bar{B}$ 是零面积集，故在任何子矩形 $I_i$ 中总有一点 $\boldsymbol{\xi}_i$，使得 $f(\boldsymbol{\xi}_i) = 0 (i = 1, 2, \cdots, k)$. 这时的 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{\xi}_i) \sigma(I_i) = 0.$$

由积分的存在性，可知

$$\int_I f \mathrm{d}\sigma = 0.$$ □

必须指出，如果定理 10.2.3 中的 $B$ 是一零测集，定理 10.2.3 的结论就不再成立. 例如，$f$ 是定义在 $I$ 上的 Dirichlet 函数(见 10.1 节中的例 2)，那么 $B$ 是 $I$ 中的有理点的全体，因而是一零测集，而这时 $f$ 在 $I$ 上不可积. 这个例子说明引入零面积集是非常必要的.

**定理 10.2.4** 设函数 $f,g$ 在 $I$ 上有界,且集合 $B=\{\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{I}:f(\boldsymbol{x})\neq g(\boldsymbol{x})\}$ 为一零面积集,那么若 $f$ 与 $g$ 中有一个在 $I$ 上可积,则另一个也在 $I$ 上可积,并且

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma = \int_I g\mathrm{d}\sigma.$$

**证明** 不妨设 $g$ 在 $I$ 上可积,那么使得有界函数 $f-g$ 不等于零的点集是 $B$,它是零面积集,故由定理 10.2.3 知 $f-g$ 在 $I$ 上可积,且

$$\int_I (f-g)\mathrm{d}\sigma = 0.$$

由此得出

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma = \int_I (f-g)\mathrm{d}\sigma + \int_I g\mathrm{d}\sigma = \int_I g\mathrm{d}\sigma.$$ □

由定理 10.2.4 可知,若函数 $f$ 在区间 $I$ 上有界,且只在一个零面积集上改变 $f$ 的值,但仍使之保持有界,那么这既不会改变函数的可积性,也不会改变积分值.

**例 4** 设

$$f(x,y) = \sin\frac{1}{(1-x^2)^2+(1-y^2)^2}.$$

证明:$f$ 在矩形 $I=[-2,2]\times[-2,2]$ 上可积.

**证明** 函数 $f$ 在 $I$ 中的四个点 $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ 上没有定义,但这四个点组成的集是零面积集.补充定义 $f$ 在这四个点上的值为 1(也可以为其他任何常数),则 $f$ 在 $I$ 上是有界的且其间断点集为零面积集,因此 $f$ 在 $I$ 上是可积的. □

**例 5** 设

$$f(x,y) = \arctan\frac{1}{y-x^2}.$$

证明:$f$ 在 $I=[0,1]\times[0,1]$ 上可积.

**证明** 函数在抛物线上的一段 $B=\{(x,x^2):0\leqslant x\leqslant 1\}$ 上没有定义.由例 2 知 $B$ 是零面积集.我们可在 $B$ 上为 $f$ 赋值,使 $f$ 在 $I$ 上保持有界,可见 $f$ 是可积的. □

## 练 习 题 10.2

1. 设点列 $\{\boldsymbol{p}_n\}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中有极限.求证:点集 $B=\{\boldsymbol{p}_n\}$ 是一零面积集.
2. 设有界集 $B\subset\mathbf{R}^2$ 且 $B'$ 是零面积集.求证:$\bar{B}$ 也是零面积集.
3. 证明:$[0,1]^2$ 中的全体有理点所成的集不是零面积集,但是零测集.
4. 设闭矩形 $J\subset I$,且 $f$ 在 $I$ 上可积.求证:$f$ 在 $J$ 上也可积.

5. 设在 $I$ 上可积函数 $f>0$. 求证：$\int_I f\mathrm{d}\sigma>0$.

6. 研究定义在区间 $[0,1]^2$ 上的函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{xy}, & x\neq 0 \text{ 且 } y\neq 0,\\ 0, & x=0 \text{ 或 } y=0\end{cases}$$

的可积性.

7. 设 $I$ 是一个有界的矩形，$B=\{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n,\cdots\}\subset I$，定义函数

$$f(\boldsymbol{p})=\begin{cases}0, & \boldsymbol{p}\notin B,\\ \dfrac{1}{n}, & \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_n(n\in\mathbf{N}^*),\end{cases}$$

研究函数 $f$ 在 $I$ 上的可积性.

8. 设函数 $f$ 和 $g$ 在 $I$ 上可积. 求证：$fg$ 在 $I$ 上也可积；当 $g$ 在 $I$ 上不取零值且 $f/g$ 在 $I$ 上有界时，$f/g$ 在 $I$ 上也可积.

9. 设 $f$ 在 $I$ 上可积. 证明：$|f|$ 在 $I$ 上也可积，并且

$$\left|\int_I f\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\int_I |f|\mathrm{d}\sigma.$$

## 问 题 10.2

1. 设 $\int_I f\mathrm{d}\sigma>0$. 求证：存在闭矩形 $J\subset I$，使得 $f>0$ 在 $J$ 上成立.

2. 对 $(x,y)\in[0,1]^2$，定义

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{n}{m},y=\dfrac{p}{q},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明：$f$ 在 $[0,1]^2$ 上可积，这里 $m,n,q,p\in\mathbf{N}^*$.

# 10.3 矩形区域上二重积分的计算

学习过本节之后，大家将会看到，计算矩形区域上的二重积分并不需要全新的算法. 比较具体地说，二重积分可以先后化为两个单变量函数的积分来计算.

设 $I=[a,b]\times[c,d]$，$f:I\to\mathbf{R}$. 记号 $f(x,\cdot)$ 表示把 $x$ 固定在 $[a,b]$ 中，是第

二个变量的函数.如果对每一个 $x\in[a,b]$,函数 $f(x,\cdot)$在$[c,d]$上可积,通过积分得出定义在$[a,b]$上的函数

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

如果函数 $\varphi$ 又在$[a,b]$上可积,则又得积分

$$\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x.$$

这个积分叫做**累次积分**,也可记为

$$\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

类似地,可以解释另一个累次积分

$$\int_c^d\Big(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

我们自然要问:等式

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

是不是正确的? 如果上述等式是正确的,那么二重积分的计算问题就解决了,也就是说,二重积分可以化为累次积分来计算,即先后计算两个单变量函数的积分.

现在设函数 $f$ 在闭矩形 $I$ 上有界.令

$$\varphi(x)=\underline{\int_c^d} f(x,y)\mathrm{d}y,\quad\psi(x)=\overline{\int_c^d} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

只要 $f$ 在 $I$ 上有界,函数 $\varphi$ 和 $\psi$ 在$[a,b]$上就都有定义.

下面的定理是本节中的主要定理:

**定理 10.3.1** 如果 $f$ 在 $I=[a,b]\times[c,d]$上可积,那么单变量函数 $\varphi$ 与 $\psi$ 在区间$[a,b]$上可积,并且

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\psi(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** 分别对$[a,b]$和$[c,d]$的分割

$$\pi_x:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$
$$\pi_y:c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d,$$

令

$$I_i=[x_{i-1},x_i]\quad(i=1,2,\cdots,n),$$
$$J_j=[y_{j-1},y_j]\quad(j=1,2,\cdots,m),$$

则子矩形

$$I_i\times J_j\quad(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$$

形成了矩形 $I$ 的分割 $\pi=\pi_x\times\pi_y$. 令 $A=\int_I f\mathrm{d}\sigma$,依定义 10.1.1,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $I$ 的分割 $\pi$ 满足 $\|\pi\|<\delta$ 时,必有

$$A-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j<A+\varepsilon, \tag{1}$$

其中 $\xi_i\in I_i$ 和 $\eta_j\in J_j(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$. 现在,取分割 $\pi_x$ 与 $\pi_y$ 满足 $\|\pi_x\|<\delta/\sqrt{2}$, $\|\pi_y\|<\delta/\sqrt{2}$,那么 $\|\pi\|<\delta$ 足以使式(1)成立. 由式(1),得

$$\begin{aligned}A-\varepsilon&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\inf f(\xi_i,J_j)\Delta x_i\Delta y_j\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sup f(\xi_i,J_j)\Delta x_i\Delta y_j\\&\leqslant A+\varepsilon.\end{aligned} \tag{2}$$

注意到 $\sum_{j=1}^{m}\inf f(\xi_i,J_j)\Delta y_j$ 是函数 $f(\xi_i,\cdot)$ 在 $[c,d]$ 上的下和,因此

$$\sum_{j=1}^{m}\inf f(\xi_i,J_j)\Delta y_j\leqslant\underline{\int_c^d}f(\xi_i,y)\mathrm{d}y=\varphi(\xi_i).$$

同理,可得

$$\sum_{j=1}^{m}\sup f(\xi_i,J_j)\Delta y_j\geqslant\psi(\xi_i).$$

从而由式(2),得

$$A-\varepsilon\leqslant\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\psi(\xi_i)\Delta x_i\leqslant A+\varepsilon,$$

这就是说,

$$\lim_{\|\pi_x\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\|\pi_x\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\psi(\xi_i)\Delta x_i=A,$$

即定理中的等式成立. □

我们立刻推出:

**定理 10.3.2** 设 $f$ 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上可积. 如果对每一个 $x\in[a,b]$,函数 $f(x,\cdot)$ 在 $[c,d]$ 上可积,则

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{3}$$

同样,如果对每一个 $y\in[c,d]$,函数 $f(\cdot,y)$ 在 $[a,b]$ 上可积,那么又有

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

**证明** 我们只需证式(3). 由定理 10.3.1,有

$$\varphi(x) = \psi(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y,$$

因此

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y. \qquad \square$$

顺便指出,这个定理实际上也提出了累次积分可以交换顺序的一个充分条件. 这就是说,如果 $f$ 在 $I$ 上可积,并且对任意的 $x\in[a,b]$,$f(x,\cdot)$在$[c,d]$上可积,而且对任意的 $y\in[c,d]$,$f(\cdot,y)$在$[a,b]$上可积,那么式(3)的右边便等于式(4)的右边. 作为一个特例,当 $f$ 在 $I$ 上连续时,我们有如下的定理:

**定理 10.3.3** 设 $f$ 是$[a,b]\times[c,d]$上的连续函数,则有

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

**例 1** 设 $I=[0,\pi]\times[0,1]$. 计算二重积分

$$\iint_I y\sin xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

**解** 记所求的积分值为 $A$,于是

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^\pi y\sin xy\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x}(-\cos xy)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (\cos xy)\Big|_{x=\pi}^{x=0}\mathrm{d}y = \int_0^1 (1-\cos\pi y)\mathrm{d}y \\ &= 1-\frac{1}{\pi}\sin\pi y\Big|_0^1 = 1.\end{aligned} \qquad \square$$

**例 2** 令 $I=[0,1]^2$. 计算二重积分

$$A = \iint_I xy^3\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

**解** 我们有

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}y^3\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\int_0^1 y^3\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \frac{1}{4}(\mathrm{e}-1)\int_0^1 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}(\mathrm{e}-1)(t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(\mathrm{e}-1).\end{aligned}$$

计算过程中作了换元 $t=y^2$. $\square$

**例 3** 设

$$f(x,y)=\begin{cases}1-x-y, & x+y\leqslant 1,\\ 0, & x+y>1.\end{cases}$$

计算$\int_I f\mathrm{d}\sigma$,其中 $I=[0,1]^2$.

**解** 根据定理 10.3.2,可得(图 10.4)

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y.$$

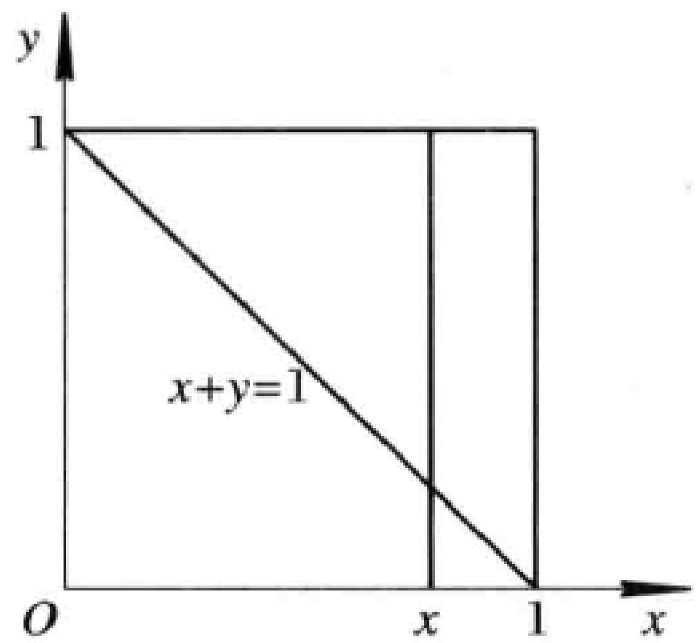



**图 10.4**

由于

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y&=\int_0^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{1-x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y+\int_{1-x}^1 0\mathrm{d}y\\&=(1-x)\int_0^{1-x}\mathrm{d}y-\int_0^{1-x}y\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}(1-x)^2,\end{aligned}$$

所以

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.$$ □

一个自然的问题是,如果 $f$ 在$I=[a,b]\times[c,d]$上可积,能否推出单变量积分$\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 对每个 $x\in[a,b]$ 都存在?或者单变量积分$\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 对每个 $y\in[c,d]$都存在?反之,如果对每个 $x\in[a,b]$ 单变量积分$\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 都存在,对每个 $y\in[c,d]$ 单变量积分$\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 都存在,而且两者相等,能否推出二元函数 $f(x,y)$ 在$[a,b]\times[c,d]$上可积?答案都是否定的.问题 10.3 中的两个题目就给出了这样的例子.

作为定理 10.3.3 的一个应用,我们证明:

**定理 10.3.4**(Minkowski 不等式) 设 $f$ 在$[a,b]\times[c,d]$上非负、连续,$p\geqslant 1$,那么

$$\left(\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}y.\tag{5}$$

当 $p>1$ 时,等式成立的充分必要条件是

$$f(x,y)=u(x)v(y).$$

**证明** 当 $p=1$ 时等式成立.现设 $p>1$.记

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y,$$

那么易知 $g$ 在$[a,b]$上连续,而且

$$\int_a^b g^p(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g^{p-1}(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g^{p-1}(x)\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)g^{p-1}(x)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

先用定理 10.3.3,再用 Hölder 不等式,得

$$\int_a^b g^p(x)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)g^{p-1}(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$
$$\leqslant \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_a^b g^{(p-1)q}(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q}\mathrm{d}y$$
$$= \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}y\left(\int_a^b g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q}, \tag{6}$$

这里 $p,q$ 满足 $1/p + 1/q = 1$,因而$(p-1)q = p$.不等式的两边同除以 $\left(\int_a^b g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q}$,即得

$$\left(\int_a^b g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}y.$$

这就是不等式(5).不等式(6)中之所以出现不等号,是因为用了 Hölder 不等式,已知 Hölder 不等式

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b \varphi^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_a^b \psi^q(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

中等号成立的充分必要条件是

$$\frac{\varphi^p(x)}{\psi^q(x)} = c,$$

其中 $c$ 是相对于 $x$ 而言的常数.而在式(6)中等号成立的充分必要条件应是

$$\frac{f^p(x,y)}{g^{(p-1)q}(x)} = h(y),$$

这里 $h(y)$是相对于 $x$ 而言的常数.由此即得

$$f(x,y) = u(x)v(y). \qquad \square$$

在练习题 7.3 中证明过如下的 Minkowski 不等式:

设 $h,g$ 在$[a,b]$上非负、连续,$p\geqslant 1$,那么

$$\left(\int_a^b (h(x)+g(x))^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b h^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_a^b g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}. \tag{7}$$

它和定理 10.3.4 中的 Minkowski 不等式有什么关系?从表面上看,两者似乎没

有什么关系，实际上，式(7)只是式(5)的一个特例．在式(5)中取$[c,d]=[0,2]$，

$$f(x,y)=\begin{cases}h(x), & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ g(x), & 1<y\leqslant 2.\end{cases}$$

这时，

$$\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2 f(x,y)\mathrm{d}y=h(x)+g(x).$$

于是不等式(5)的左边变成

$$\left(\int_a^b (h(x)+g(x))^p\mathrm{d}x\right)^{1/p};$$

右边变成

$$\begin{aligned}\int_0^2\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}y&=\int_0^1\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}y+\int_1^2\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}y\\&=\left(\int_a^b h^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_a^b g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

从式(5)即得式(7)．这是用重积分知识解决单积分问题的一个例子．

## 练 习 题 10.3

1. 计算下列积分：

(1) $\iint\limits_I \frac{x^2}{1+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I=[0,1]^2$；

(2) $\iint\limits_I x\cos xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I=[0,\pi/2]\times[0,1]$；

(3) $\iint\limits_I \sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I=[0,\pi]^2$．

2. 设函数 $f$ 在矩形 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上有连续的二阶偏导数．计算积分

$$\iint\limits_I \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. 计算积分$\int_I f\mathrm{d}\sigma\ (I=[0,1]^2)$：

(1) $f(x,y)=\begin{cases}1, & y\leqslant x^2,\\ 0, & y>x^2;\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & x^2\leqslant y\leqslant 2x^2,\\ 0, & y<x^2 \text{ 或 } y>2x^2.\end{cases}$

4. 利用定理 10.3.4 中的 Minkowski 不等式，证明：对 $a_k\geqslant 0, b_k\geqslant 0(k=1,2,\cdots,n), p\geqslant 1$，有不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{1/p}.$$

5. 设 $f,g$ 都在 $[a,b]$ 上可积. 利用二重积分不等式

$$\iint\limits_{[a,b]^2}(f(x)g(y)-f(y)g(x))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 0,$$

证明 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

## 问题 10.3

1. 设 $f$ 是问题 10.2 的第 2 题中定义的函数. 证明：
   (1) $f(x,p/q)$ 对 $x$ 在 $[0,1]$ 上不可积；
   (2) $f(n/m,y)$ 对 $y$ 在 $[0,1]$ 上不可积.
2. 对 $(x,y)\in[0,1]^2$，定义

$$g(x,y)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{n}{m}, y=\dfrac{p}{m},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 g(x,y)\mathrm{d}y$ 和 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 g(x,y)\mathrm{d}x$ 都存在，但 $g$ 在 $[0,1]^2$ 上不可积.

# 10.4 有界集合上的二重积分

在前三节中，我们相当充分地讨论了矩形区域上的二重积分，以此作为基础，再过渡到任意有界集合上的二重积分，就变成了轻而易举的事情.

**定义 10.4.1** 设 $B\subset\mathbf{R}^2$，函数 $f:B\to\mathbf{R}$. 令

$$f_B(\boldsymbol{p})=\begin{cases}f(\boldsymbol{p}), & \boldsymbol{p}\in B,\\ 0, & \boldsymbol{p}\in B^c,\end{cases}$$

则函数 $f_B$ 在全平面 $\mathbf{R}^2$ 上有定义；如果限制在集合 $B$ 上，$f_B$ 与 $f$ 相等.

**定义 10.4.2** 任取有界的闭矩形 $I\supset B$. 如果函数 $f_B$ 在 $I$ 上可积，则称函数 $f$ 在 $B$ 上可积，并称数值 $\int_I f_B\mathrm{d}\sigma$ 为函数 $f$ 在 $B$ 上的（二重）积分，记作

$$\iint_B f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad 或 \quad \int_B f\mathrm{d}\sigma.$$

可以证明,这个定义不依赖于矩形 $I$ 的选择.事实上,设 $I_i$ 是使得 $I_i \supset B(i=1,2)$ 的闭矩形.作一个更大些的闭矩形 $I$,使得 $I \supset I_i(i=1,2)$.这时,显然有

$$\int_I f_B \mathrm{d}\sigma = \int_{I_i} f_B \mathrm{d}\sigma \quad (i=1,2),$$

从而有

$$\int_{I_1} f_B \mathrm{d}\sigma = \int_{I_2} f_B \mathrm{d}\sigma.$$

正因为如此,为了方便,今后我们选择 $I$ 的时候,不妨让闭矩形 $I$ 满足 $I^\circ \supset \overline{B}$.

利用 Lebesgue 定理,可知函数 $f$ 在有界集 $B$ 上可积的充分必要条件是 $D(f_B)$ 为零测集.

下面给出的是 $f$ 可积的一个用起来较为方便的充分条件.

**定理 10.4.1** 设有界集 $B \subset \mathbf{R}^2$,函数 $f: B \to \mathbf{R}$ 有界.如果集合 $B$ 的边界 $\partial B$ 和 $f$ 在 $B$ 上的间断点集都是零测集,那么 $f$ 在 $B$ 上可积.

**证明** 取闭矩形 $I$ 满足 $I^\circ \supset \overline{B}$.由于 $f_B$ 在开集 $\overline{B}^c$ 上处处为零,所以 $\overline{B}^c$ 中的每一点都是 $f_B$ 的连续点.在 $B^\circ$ 上,$f_B = f$,所以在 $B^\circ$ 上,$f_B$ 的不连续点即为 $f$ 的不连续点.因此,我们有

$$D(f_B) \subset D(f) \cup \partial B.$$

由于 $D(f)$ 与 $\partial B$ 都是零测集,故 $D(f_B)$ 也是零测集.这表明 $f_B$ 在 $I$ 上是可积的,也就是 $f$ 在 $B$ 上可积. □

请注意,定理 10.4.1 中给出的条件仅仅是一个充分条件,并不是必要的.例如,$B$ 是 $[0,1]^2$ 中有理点的全体,$f$ 在 $B$ 上取零值.这时 $f_B$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上恒等于 0,当然在任何矩形上可积,因而 $f$ 在 $B$ 上可积,但这时 $B$ 的边界是整个闭正方形 $[0,1]^2$,它当然不是零测集.

**定理 10.4.2** 设有界集 $B \subset \mathbf{R}^2$,$f: B \to \mathbf{R}$ 在 $B$ 上可积,那么对任何常数 $c$,函数 $cf$ 在 $B$ 上也可积,并且

$$\int_B cf\mathrm{d}\sigma = c\int_B f\mathrm{d}\sigma.$$

又若 $g: B \to \mathbf{R}$ 在 $B$ 上可积,那么 $f \pm g$ 在 $B$ 上也可积,并且

$$\int_B (f \pm g)\mathrm{d}\sigma = \int_B f\mathrm{d}\sigma \pm \int_B g\mathrm{d}\sigma.$$

**证明** 第一个等式的证明留给读者,我们在这里只证明第二个等式.设闭矩形 $I \supset B$,于是

$$\int_B (f \pm g)\mathrm{d}\sigma = \int_I (f_B \pm g_B)\mathrm{d}\sigma = \int_I f_B \mathrm{d}\sigma \pm \int_I g_B \mathrm{d}\sigma$$
$$= \int_B f\mathrm{d}\sigma \pm \int_B g\mathrm{d}\sigma. \qquad \square$$

**定理 10.4.3**(积分的集合可加性) 设 $B_1, B_2 \subset \mathbf{R}^2$ 有界,并且 $B_1 \cap B_2$ 是一零面积集.若函数 $f$ 在 $B_1$ 和 $B_2$ 上都可积,那么 $f$ 在 $B_1 \cup B_2$ 上可积,并且

$$\int_{B_1 \cup B_2} f\mathrm{d}\sigma = \int_{B_1} f\mathrm{d}\sigma + \int_{B_2} f\mathrm{d}\sigma.$$

**证明** 这时,除一个零面积集之外,等式 $f_{B_1 \cup B_2} = f_{B_1} + f_{B_2}$ 成立.设矩形 $I \supset B_1 \cup B_2$,则有

$$\int_{B_1} f\mathrm{d}\sigma + \int_{B_2} f\mathrm{d}\sigma = \int_I f_{B_1}\mathrm{d}\sigma + \int_I f_{B_2}\mathrm{d}\sigma = \int_I (f_{B_1} + f_{B_2})\mathrm{d}\sigma.$$

依定理 10.2.4,又有

$$\int_I (f_{B_1} + f_{B_2})\mathrm{d}\sigma = \int_I f_{B_1 \cup B_2}\mathrm{d}\sigma = \int_{B_1 \cup B_2} f\mathrm{d}\sigma. \qquad \square$$

现在,通过积分可以来定义一个平面有界集合的面积.

**定义 10.4.3** 设 $B \subset \mathbf{R}^2$ 为一有界点集.若常值函数1在 $B$ 上可积,那么称积分 $\int_B 1\mathrm{d}\sigma$ 为点集 $B$ 的**面积**,记为 $\sigma(B)$.这时称 $B$ 是**有面积**的.

对 $\mathbf{R}^2$ 中的任意点集 $B$,称函数

$$\chi_B(\boldsymbol{p}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{p} \in B, \\ 0, & \boldsymbol{p} \notin B \end{cases}$$

为 $B$ 的特征函数.

利用这个记号,有界集 $B$ 的面积可以写为

$$\sigma(B) = \int_B 1\mathrm{d}\sigma = \int_I \chi_B \mathrm{d}\sigma,$$

这里 $I$ 是任何一个包含 $B$ 的闭矩形.

大家自然会问:在定义 10.2.2 中定义的零面积集是不是与面积等于零的集合是一回事?答案是肯定的.我们有:

**定理 10.4.4** 设 $B \subset \mathbf{R}^2$ 是一个有界集,则点集 $B$ 为零面积集的充分必要条件是

$$\sigma(B) = \int_B 1\mathrm{d}\sigma = 0.$$

**证明** 必要性.设 $B$ 为零面积集,作闭矩形 $I$ 使得 $I^\circ \supset \overline{B}$.考察 $B$ 上的特征函数 $\chi_B$,这时函数 $\chi_B$ 在 $I$ 上取非零值的点集正好是 $B$.由于 $B$ 是零面积集,依定理

10.2.3,知 $\chi_B$ 在 $I$ 上可积,并且

$$\sigma(B)=\int_B 1\mathrm{d}\sigma=\int_I \chi_B\mathrm{d}\sigma=0.$$

这正表明点集 $B$ 的面积为零.

在证明充分性之前,先证明 $B$ 的特征函数 $\chi_B$ 的一条简单的性质:

$$D(\chi_B)=\partial B, \tag{1}$$

即 $\chi_B$ 的不连续点的全体是 $B$ 的边界 $\partial B$.事实上,因为

$$\mathbf{R}^2=B^\circ\cup\partial B\cup(B^c)^\circ, \tag{2}$$

在开集 $B^\circ$ 和 $(B^c)^\circ$ 上,$\chi_B$ 分别为 1 和 0,所以 $\chi_B$ 在 $B^\circ$ 和 $(B^c)^\circ$ 上都连续,因而 $D(\chi_B)\subset\partial B$.任取 $\boldsymbol{p}\in\partial B$,则在 $\boldsymbol{p}$ 的任何小邻域中既有 $B$ 中的点 $\boldsymbol{p}'$,也有 $B^c$ 中的点 $\boldsymbol{p}''$,而 $\chi_B(\boldsymbol{p}')=1$,$\chi_B(\boldsymbol{p}'')=0$,因此 $\chi_B$ 在 $\boldsymbol{p}$ 处不连续,从而 $\partial B\subset D(\chi_B)$,所以式(1)成立.

充分性.因为 $\sigma(B)=0$,所以 $B$ 必定没有内点,否则将有 $\sigma(B)>0$.又因 $\chi_B$ 可积,所以 $D(\chi_B)$ 是一零测集,由式(1)知 $\partial B$ 是零测集,而 $\partial B$ 是有界闭集,所以 $\partial B$ 是一零面积集.由于 $B^\circ=\varnothing$,再由式(2)知 $B\subset\partial B$,所以 $B$ 是零面积集. □

下一定理提供的判别一个集合有面积的法则更加便于应用.从定理 10.4.4 的证明中可以看出下面定理的正确性.

**定理 10.4.5** 设有界集 $B\subset\mathbf{R}^2$,则 $B$ 有面积当且仅当 $B$ 的边界 $\partial B$ 是一零面积集.

根据定理 10.4.5 和 10.2 节中的例 1 和例 2 可知,如果 $B$ 是由有限个连续曲线段围成的集合,或是由有限段光滑参数曲线围成的集合,那么 $B$ 是有面积的.这些是数学分析中常见的集合.但是,并非一切有界点集都是有面积的.例如,用 $B$ 来记正方形 $[0,1]^2$ 中的有理点的全体,这时 $\partial B$ 就是这个边长为 1 的正方形,从而 $\sigma(\partial B)=1$,所以 $B$ 虽然有界,但没有面积.

作积分必须在有面积的集合上进行.

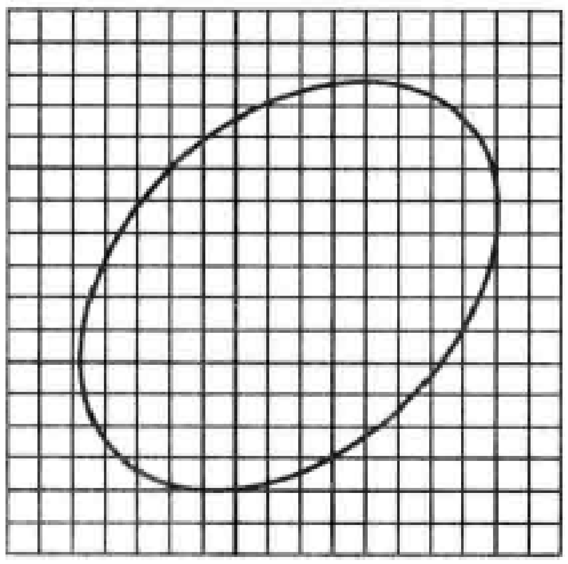


图 10.5

设 $B$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界集,$f$ 在 $B$ 上可积,我们有

$$\int_B f\mathrm{d}\sigma=\int_I f_B\mathrm{d}\sigma=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k}f_B(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(I_i), \tag{3}$$

这里 $I$ 是包含 $B$ 的一个矩形.从图 10.5 可以看出,小矩形 $\{I_i\}$ 可分为三种类型:① $I_i\cap B=\varnothing$;② $I_i\subset B$;③ $I_i\cap B\neq\varnothing$,但 $I_i\not\subset B$.对①和③两类 $I_i$,总可取到 $\boldsymbol{\xi}_i\in I_i$,但 $\boldsymbol{\xi}_i\notin B$,因而 $f_B(\boldsymbol{\xi}_i)=0$.所以式(2)中的和式只需对那些完全包含在 $B$ 中的 $I_i$ 求和,而这时 $f_B(\boldsymbol{\xi}_i)=$

$f(\boldsymbol{\xi}_i)$，因而式(3)可写为

$$\int_B f\mathrm{d}\sigma = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^m f(\boldsymbol{\xi}_i)\mathrm{d}\sigma(I_i),$$

其中 $I_i \subset B(i=1,2,\cdots,m)$.

现在有了面积的概念，我们可以考虑这样的问题：设 $B$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中有面积的点集，$f$ 在 $B$ 上可积. 考察把 $B$ 分成任意有限多个两两不相交的有面积的小块 $D_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的分割 $T$，$T$ 的宽度 $\|T\|$ 定义为

$$\|T\| = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\mathrm{diam}(D_i).$$

对两个不同的分割 $T$ 和 $T'$，我们称 $T'$ 比 $T$ 细，记为 $T\leqslant T'$，是指 $T$ 中每个小块在 $T'$ 中又被分成了有限多个小块. 固定分割 $T$，在每个小块 $D_i$ 中任取点 $\boldsymbol{\xi}_i$，作 Riemann 和

$$S(f,T) = \sum_{i=1}^m f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(D_i).$$

我们问，是否有

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^m f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(D_i) = \int_B f\mathrm{d}\sigma?$$

结论是肯定的. 我们有：

**定理 10.4.6** 设 $B$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中有面积的点集，$f$ 在 $B$ 上可积. 对 $B$ 的任意分割 $T$ 作 Riemann 和，那么对任意的 $\boldsymbol{\xi}_i \in D_i(i=1,2,\cdots,m)$，有

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^m f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(D_i) = \int_B f\mathrm{d}\sigma,$$

也就是说，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要分割 $T=\{D_1,D_2,\cdots,D_m\}$ 满足 $\|T\|<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^m f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(D_i) - \int_B f\mathrm{d}\sigma\right| < \varepsilon.$$

**证明** 因 $f$ 在 $B$ 上可积，故对任意的 $\varepsilon>0$，存在矩形网的分割 $\pi_\varepsilon=\{J_1, J_2,\cdots,J_l\}$，使得

$$\overline{S}(f,\pi_\varepsilon) - \underline{S}(f,\pi_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$\sum_{i=1}^{l}(\sup f(J_i) - \inf f(J_i))\sigma(J_i) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4}$$

这里 $J_i < B(i=1,2,\cdots,m)$. 现在把子矩形 $J_i$ 的每一边平行地向矩形内部收缩同

一距离$\delta>0$,作成一个开矩形$\widetilde{J}_i\subset J_i\,(i=1,2,\cdots,t)$(图 10.3).记

$$K = I \cap \left(\bigcup_{i=1}^{t} \widetilde{J}_i\right)^{\mathrm{c}},$$

这里$I$是所有包含在$B$中的闭子矩形$J_i$的并.显然$K$是闭集.现取$\delta>0$充分小,使得$\sigma(K)<\varepsilon/(2\omega)$,这里$\omega$是$f$在$B$上的振幅.对这个选定的$\delta>0$,任取分割$T=\{D_1,D_2,\cdots,D_m\}$,使得$\|T\|<\delta$,记$A=\int_B f\mathrm{d}\sigma$,那么

$$A = \sum_{i=1}^{m}\int_{D_i} f\mathrm{d}\sigma. \tag{5}$$

设$f$在$D_i$上的上、下确界分别为$M_i$和$m_i$,那么

$$m_i\sigma(D_i) \leqslant \int_{D_i} f\mathrm{d}\sigma \leqslant M_i\sigma(D_i).$$

记$\mu_i = \dfrac{1}{\sigma(D_i)}\int_{D_i} f\mathrm{d}\sigma$,那么$m_i\leqslant\mu_i\leqslant M_i$,且$\int_{D_i} f\mathrm{d}\sigma=\mu_i\sigma(D_i)$.由式(3),得

$$A = \sum_{i=1}^{m}\mu_i\sigma(D_i).$$

于是

$$\begin{aligned}
\left|A-\sum_{i=1}^{m} f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(D_i)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{m}(\mu_i - f(\boldsymbol{\xi}_i))\sigma(D_i)\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m}|\mu_i - f(\boldsymbol{\xi}_i)|\sigma(D_i) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m}(M_i - m_i)\sigma(D_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\omega_i\sigma(D_i) \\
&= \Sigma_1 + \Sigma_2,
\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$\Sigma_1 = \sum_{D_i\subset K}\omega_i\sigma(D_i), \quad \Sigma_2 = \sum_{D_i\not\subset K}\omega_i\sigma(D_i).$$

若记$\omega$为$f$在$B$上的振幅,那么

$$\Sigma_1 \leqslant \omega\sum_{D_i\subset K}\sigma(D_i) < \omega\sigma(K) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

对$\Sigma_2$,由于$D_i\not\subset K$,这样的$D_i$必与某个$\widetilde{J}_j$相交,因而必有$D_i\subset J_j$.因此有

$$\Sigma_2 = \sum_{j=1}^{t}\sum_{D_i\subset J_j}\omega_i\sigma(D_i)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{t}(\sup f(J_j) - \inf f(J_j)) \sum_{D_i \subset J_j} \sigma(D_i)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{t}(\sup f(J_j) - \inf f(J_j))\sigma(J_j) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{8}$$

这里已经用了不等式(4). 把式(7)和式(8)代入式(6),即得所要证明的结论. □

**定理 10.4.7**(积分平均值定理)　设 $K$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中由有限条光滑曲线围成的有界闭区域,函数 $f, g: K \to \mathbf{R}$ 连续且 $g$ 在 $K$ 上不变号. 于是存在一点 $\boldsymbol{\xi} \in K$,满足

$$\int_K fg\mathrm{d}\sigma = f(\boldsymbol{\xi})\int_K g\mathrm{d}\sigma.$$

**证明**　连续函数 $g$ 与 $fg$ 在 $K$ 上都是可积的. 因为 $K$ 是紧致集,所以连续函数 $f$ 在 $K$ 上取得最小值 $f(\boldsymbol{a})$,也取得最大值 $f(\boldsymbol{b})$. 设在 $K$ 上 $g \geqslant 0$,于是

$$f(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{p}) \leqslant f(\boldsymbol{p})g(\boldsymbol{p}) \leqslant f(\boldsymbol{b})g(\boldsymbol{p})$$

对一切 $p \in K$ 成立. 作积分后,得

$$f(\boldsymbol{a})\int_K g\mathrm{d}\sigma \leqslant \int_K fg\mathrm{d}\sigma \leqslant f(\boldsymbol{b})\int_K g\mathrm{d}\sigma.$$

如果 $\int_K g\mathrm{d}\sigma = 0$,那么 $g(\boldsymbol{p}) = 0$ 对一切 $\boldsymbol{p} \in K$ 必成立,这时定理自然正确. 现设 $\int_K g\mathrm{d}\sigma > 0$,于是

$$f(\boldsymbol{a}) \leqslant \left(\int_K g\mathrm{d}\sigma\right)^{-1}\int_K fg\mathrm{d}\sigma \leqslant f(\boldsymbol{b}).$$

由于 $K$ 是连通集,而 $f$ 在 $K$ 上连续,故介值定理保证了存在一点 $\boldsymbol{\xi} \in K$,使得

$$f(\boldsymbol{\xi}) = \left(\int_K g\mathrm{d}\sigma\right)^{-1}\int_K fg\mathrm{d}\sigma.$$

这就是需要证明的. □

如果取 $g = 1$,那么得到:

**推论 10.4.1**　设 $K$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界闭区域,函数 $f$ 在 $K$ 上连续,那么存在一点 $\boldsymbol{\xi} \in K$,使得

$$\int_K f\mathrm{d}\sigma = f(\boldsymbol{\xi})\sigma(K).$$

## 练 习 题 10.4

1. 证明定理 10.4.5.
2. 证明:

$$1.96<\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}<2.$$

3. 设 $B\subset\mathbf{R}^2$ 是一有界集，那么 $B$ 有面积的充分必要条件是，对 $I^\circ\supset B$ 的矩形 $I$ 的任何矩形网分割 $\pi$，均有

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{I_j\cap B\neq\varnothing}\sigma(I_j)=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{I_j\subset B}\sigma(I_j).$$

# 10.5 有界集合上积分的计算

对有界集合上积分的计算，我们有：

**定理 10.5.1** 设点集

$$B=\{(x,y):y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\},$$

其中函数 $y_1$ 和 $y_2$ 在 $[a,b]$ 上连续(图 10.6)，函数 $f$ 在 $B$ 上可积. 如果对任意的 $x\in[a,b]$，单变量积分

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$$

存在，那么

$$\int_B f\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

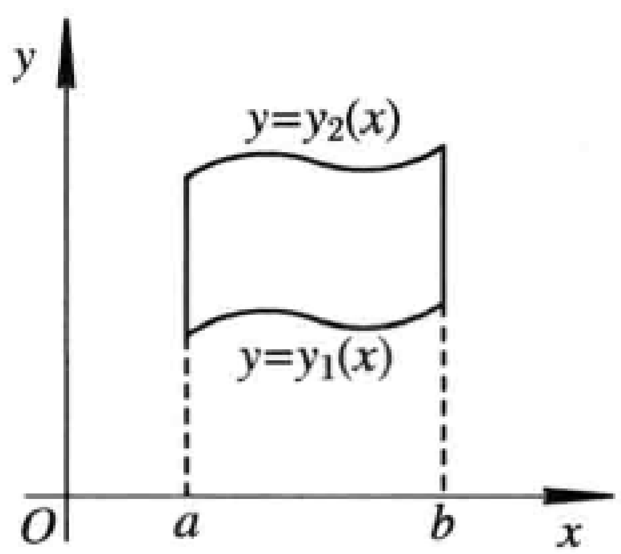



**图 10.6**

**证明** 令

$$c=\inf y_1([a,b]),\quad d=\sup y_2([a,b]),$$

于是 $I=[a,b]\times[c,d]\supset B$. 由于 $f$ 在 $B$ 上可积，所以 $f_B$ 在 $I$ 上可积，并且

$$\int_B f\mathrm{d}\sigma=\int_I f_B\mathrm{d}\sigma.$$

由所给条件知，对每一个 $x\in[a,b]$，函数 $f_B(x,\cdot)$ 在 $[c,d]$ 上可积(这是因为这个函数在 $(c,y_1(x))$ 与 $(y_2(x),d)$ 上都等于零，所以它在 $[c,y_1(x)]$ 与 $[y_2(x),d]$ 上可积，而它在 $[y_1(x),y_2(x)]$ 上的可积性是定理的一个条件). 依定理 10.3.2，有

$$\int_I f_B\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f_B(x,y)\mathrm{d}y,$$

但是

$$\int_c^d f_B(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^{y_1(x)} f_B(x,y)\mathrm{d}y + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f_B(x,y)\mathrm{d}y + \int_{y_2(x)}^{d} f_B(x,y)\mathrm{d}y.$$

由于上式右边的第一个和最后一个积分的被积函数是零，所以

$$\int_c^d f_B(x,y)\mathrm{d}y = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f_B\mathrm{d}y = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

最后得到

$$\int_B f\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$ □

类似地，如果 $B$ 是这样的集合：

$$B = \{(x,y): x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y), c \leqslant y \leqslant d\},$$

其中函数 $x_1$ 与 $x_2$ 在 $[c,d]$ 上连续，$f$ 在 $B$ 上可积，且对每一个 $y\in[c,d]$，积分 $\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$ 存在，则有

$$\int_B f\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x, \tag{2}$$

见图 10.7.

**例 1** 计算积分

$$A = \iint_B x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $B$ 是图 10.8 中所围成的三角形.

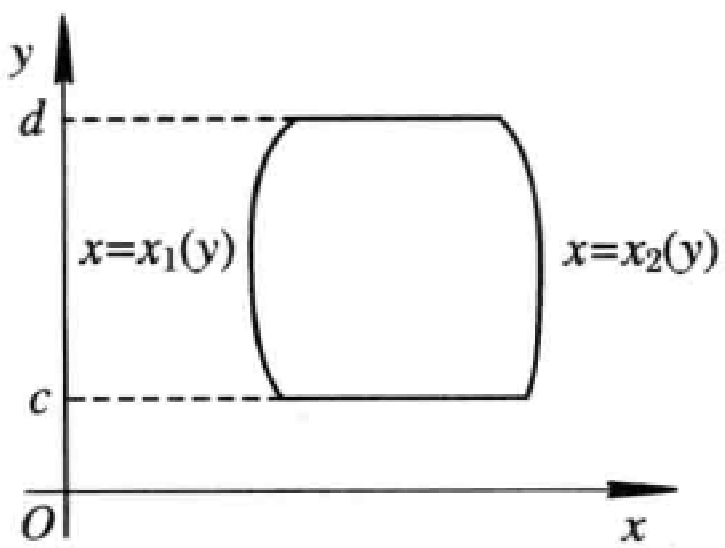



**图 10.7**

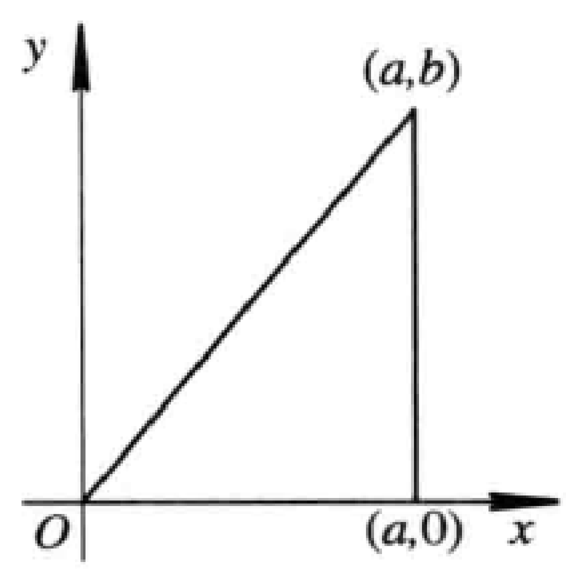



**图 10.8**

**解** 这时 $B$ 的上、下边界的方程分别为

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{和} \quad y = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant a).$$

依公式(1)，可得

$$A = \int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}x} x^2y^2\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_0^a x^2\left(y^3\Big|_{y=0}^{y=\frac{b}{a}x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3\int_0^a x^5\mathrm{d}x = \frac{1}{18}(ab)^3.$$ □

**例 2** 计算积分

$$A = \iint_B (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

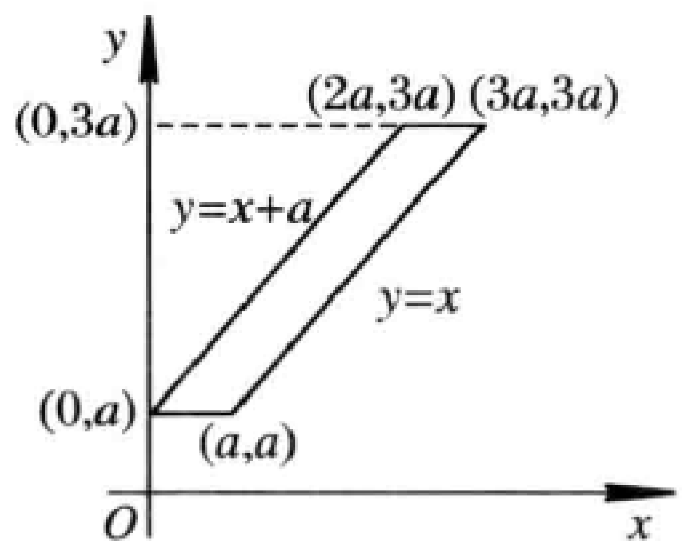


图 10.9

其中 $B$ 是由两组平行直线

$$y = a, y = 3a; \quad y = x, y = x + a$$

所围成的平行四边形.

图 10.9 中,对 $a>0$ 的情形画出了这个图形.

**解** 这时,如果利用公式(1)就不合算了,因为刻画集合 $B$ 所需要的下、上边界 $y_1$ 与 $y_2$ 要用分段函数才能表示.采用公式(2)对我们有利.事实上,这时左、右边界的方程分别是 $x = y - a$ 和 $x = y$,这里 $y\in[a,3a]$.

计算积分:

$$A = \int_a^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(x^2 + y^2)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int_a^{3a}x^3\Big|_{y-a}^{y}\mathrm{d}y + a\int_a^{3a}y^2\mathrm{d}y = 14a^4.$$ □

**例 3** 计算积分

$$A = \iint_B xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $B = \{(x,y):|x| + |y|\leqslant 1\}$.

**解** 这时 $B$ 是以 $(1,0)$,$(0,1)$,$(-1,0)$,$(0,-1)$ 四点为顶点的正方形(图 10.10).无论采用公式(1)还是公式(2),都不得不将 $B$ 分块处理.当前,有两种分块的方式:第一种是把横轴的下边和上边的两个三角形分别记为 $B_1$ 和 $B_2$;第二种是把纵轴的左边和右边的两个三角形分别记为 $C_1$ 和 $C_2$.对这个具体的问题,由于被积函数的性质,这两种分块方式带来的计算过程的繁简程度是不一样的.我们采取第一种分块的方式.在定积分中,我

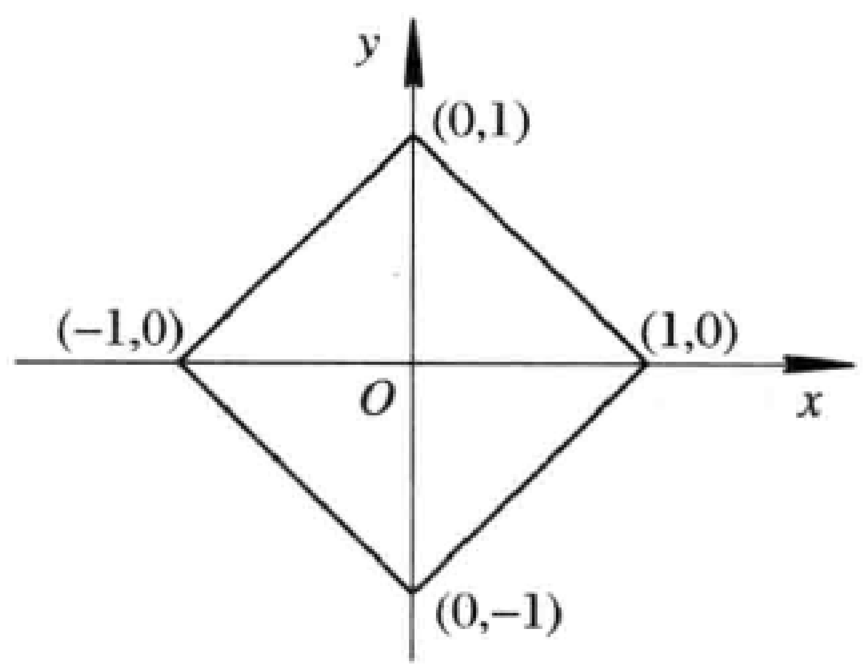


图 10.10

们学过奇函数在一个关于原点对称的区间上积分为零,所以可以立刻得出

$$\iint\limits_{B_1} xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0} y^2\mathrm{d}y\int_{-1-y}^{1+y} x\mathrm{d}x = 0,$$

$$\iint\limits_{B_2} xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{1} y^2\mathrm{d}y\int_{y-1}^{1-y} x\mathrm{d}x = 0.$$

由此可见

$$\iint\limits_{B} xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{B_1} xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{B_2} xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

如果采用第二种分块的方式,计算将复杂许多. □

如果我们对积分有比较深刻的认识,并且注意到积分域的几何对称性和被积函数的奇偶性,那么求这个积分完全不需要任何计算.

事实上,我们的积分域 $B$ 是关于纵轴对称的,并且被积函数 $xy^2$ 对固定的 $y$ 而言是 $x$ 的奇函数.在作 Riemann 和的时候,如果我们对 $B$ 作分割时照顾到这种左右对称的特征,就是说在纵轴的左边取一小块,其面积为 $\mathrm{d}\sigma$,那么就在纵轴的右边取一个与之对称的小块;如果在左边的小块上取$(\xi,\eta)$作为值点,那么就在右边的小块上取对称的点$(-\xi,\eta)$作为值点.这两部分在积分和中的贡献就是 $\xi\eta^2\mathrm{d}\sigma+(-\xi)\eta^2\mathrm{d}\sigma=0$,因此积分和也等于零,从而积分值 $A$ 也必须是零.

这虽然是一种特殊的分割和对值点的特殊选取,但是在确认了函数 $f$ 是可积的情况下,这种做法是合理的.

**例 4** 计算累次积分

$$A = \int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

**解** 在 5.4 节中,我们曾经指出$(\sin x)/x$ 的原函数是不能用初等函数表达的.因此,按照题中指定的顺序来计算 $A$ 是不可能的.我们必须先交换累次积分的顺序,再进行下一步.因此,应先将这个累次积分"还原"为二重积分.为此,应当确定积分域 $B$.由本题看出,$B$ 是由曲线 $x=y$,$x=\sqrt{y}$和 $y=0$,$y=1$ 所围成的图形(图 10.11).

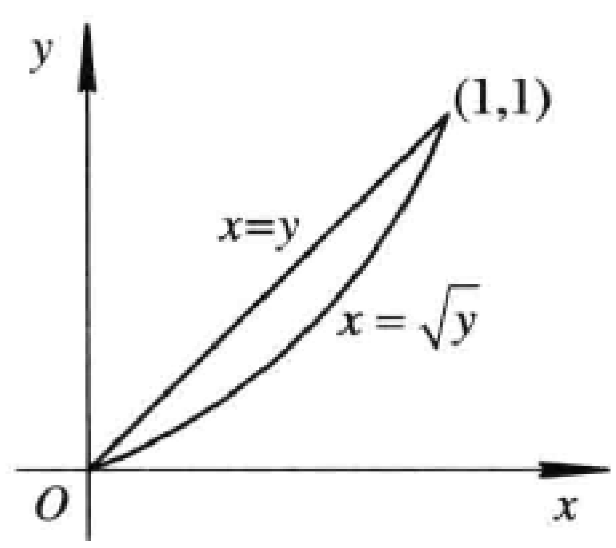



图 10.11

对照这个图形,便很容易把累次积分改变成如下的顺序计算出:

$$A = \int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y = \int_0^1(x - x^2)\,\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (1-x)\sin x\,\mathrm{d}x = 1 - \sin 1. \qquad \square$$

**例 5** 计算由两个圆柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 和 $x^2+z^2\leqslant a^2$ 交成的体积.

**解** 在图 10.12 中画出了这个立体在第一卦限中的那一部分,整个体积 $A$ 就是这一部分体积的 8 倍.因此

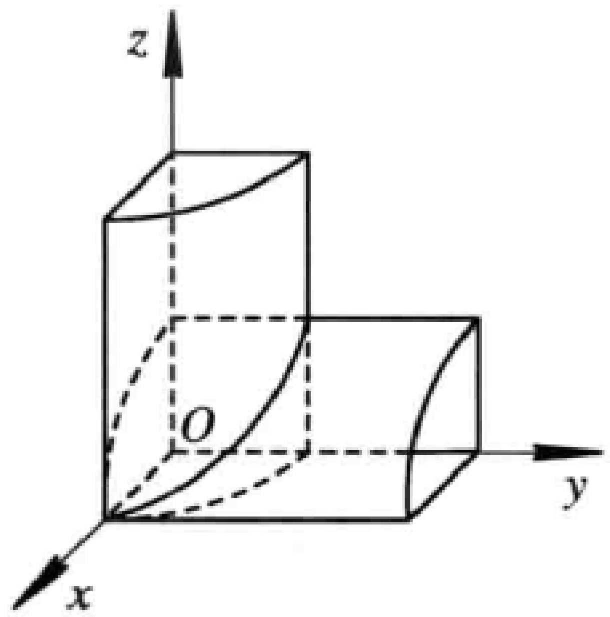



图 10.12

$$A = 8\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0,\, y\geqslant 0}} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 8\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$= 8\int_0^a (a^2-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{16}{3}a^3.$$

这与 7.1 节中的例 6 计算的结果是一致的. $\square$

## 练 习 题 10.5

1. 计算下列积分:

(1) $\iint\limits_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D$ 由 $x=0, y=x, y=\pi$ 围成;

(2) $\iint\limits_D xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D$ 由 $y^2=4x$ 和 $x=1$ 围成;

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y): |x|+|y|\leqslant 1\}$;

(4) $\iint\limits_D |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant a^2\}$;

(5) $\iint\limits_D x\cos xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant a^2\}$;

(6) $\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=[0,1]^2$;

(7) $\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D$ 由旋轮线

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

与 $y=0$ 围成;

(8) $\iint\limits_D [x+y]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=[0,2]^2$.

2. 改变下列累次积分的次序：

(1) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$；　　(2) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$；

(3) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$；　　(4) $\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy$；

(5) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$；　　(6) $\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy$；

(7) $\int_0^{\pi} dx\int_0^{\cos x} f(x,y)dy$.

3. 设 $f$ 为一元连续函数.求证：

$$\int_0^a dx\int_0^x f(x)f(y)dy = \frac{1}{2}\left(\int_0^a f(t)dt\right)^2.$$

4. 设 $f$ 为连续函数.证明：

$$\int_0^a dx\int_0^x f(y)dy = \int_0^a (a-t)f(t)dt.$$

5. 设函数 $f$ 连续.证明：

$$\int_a^b dx\int_a^x dy\int_a^y f(x,y,z)dz = \int_a^b dz\int_z^b dy\int_y^b f(x,y,z)dx.$$

6. 设函数 $f$ 连续.证明：

$$\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y f(x)f(y)f(z)dz = \frac{1}{3!}\left(\int_0^a f(t)dt\right)^3.$$

7. 设函数 $f$ 连续.证明：

$$\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y f(z)dz = \frac{1}{2}\int_0^a (a-t)^2 f(t)dt.$$

8. 设 $f$ 为连续函数.求极限

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)dxdy.$$

## 10.6 二重积分换元

在本教材上册的6.4节中，已经看到定积分换元（或称变量代换）在计算积分时发挥过多么重要的作用.在那里，换元的唯一目的是把被积函数变得比较简单，或是变得便于求出原函数.在换元之下，一个积分区间被变成另一个区间，这里没有任何便宜可讨.

二重积分也有换元的技巧,但是,换元有两个目的:第一是把被积函数简化;第二是把积分域简化.相比之下,在很多场合下,第二个目的远比第一个目的重要.可以想到,如果通过换元能够把一个由曲线围成的积分域变成由四条直线围成的域,甚至变成一个矩形,那将带来多大的方便.在积分域得到简化的条件下,这时哪怕把被积函数弄得更复杂一些,我们也认为是值得的.

除了上面谈到的这一点区别之外,二重积分的换元公式与定积分的换元公式倒是没有什么差别,甚至可以说是完全相似的.为了看清这一事实,我们回顾一下定积分换元公式(上册定理 6.4.2).这里,我们不是完全照抄定理 6.4.2,而是把它按照现在的需要加以改写.

设函数 $F$ 在闭区间 $I=[a,b]$ 上连续,函数 $\varphi$ 在区间 $J=[\alpha,\beta]$ 上连续可导,并且 $\varphi'(t)\neq 0$ 对一切 $t\in J$ 成立,$I=\varphi(J)$,那么

$$\int_I F(x)\mathrm{d}x=\int_J F\circ\varphi(t)\,|\,\varphi'(t)\,|\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

在这里,我们规定

$$\int_I=\int_a^b \quad 且 \quad \int_J=\int_\alpha^\beta. \tag{2}$$

公式(1)看上去与定理 6.4.2 中写出的公式有些不同,实际上它们是一样的.这是因为,当 $\varphi'>0$ 时,变换 $x=\varphi(t)$ 把区间 $J$ 递增地变为 $I$,这时式(1)就是

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta F\circ\varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t; \tag{3}$$

如果 $\varphi'<0$,那么当 $t$ 从左到右地扫过区间 $J$ 时,函数 $\varphi(t)$ 从右到左地扫过区间 $I$.也就是说,此时 $\varphi(\alpha)=b,\varphi(\beta)=a$.因此公式(1)变为

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=-\int_\alpha^\beta F\circ\varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

总之,有

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta F\circ\varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

这正是定理 6.4.2 中的公式.

现在对上面的讨论作一点几何解释.如果 $\varphi'(t)>0$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上成立,自然就保证 $\varphi$ 是严格递增的.我们把 $x=\varphi(t)$ 看成是把 $[\alpha,\beta]$ 中的点变成 $[a,b]$ 中的点的一个映射,这个映射是可逆的.$[\alpha,\beta]$ 的一个有代表性的子区间 $[t_{i-1},t_i]$ 被一对一地映成了 $[a,b]$ 的子区间 $[x_{i-1},x_i]=[\varphi(t_{i-1}),\varphi(t_i)]$ $(i=1,2,\cdots,n)$.由等式 $\Delta x_i=\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$,可得

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}=\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}=\varphi'(\tau_i),$$

其中 $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$. 这个式子表明,变换后的子区间与变换前的子区间的"长度比"等于 $\varphi'$ 在子区间 $(t_{i-1}, t_i)$ 内某一点上的值. 在无穷小的意义上, $\varphi'$ 可以被说成是映射 $x=\varphi(t)$ 对线段的"伸缩比".

现在来讨论二重积分的换元公式. 设有界闭域 $D \subset \mathbf{R}^2$, 连续函数 $F: D \to \mathbf{R}$. 映射 $\boldsymbol{\varphi}$ 由公式

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v) \quad ((u,v) \in \Delta) \tag{4}$$

定义,其中 $\Delta$ 是 $uv$ 平面上的有界闭区域. 设映射 $\boldsymbol{\varphi}$ 是**正则**的,即 $\boldsymbol{\varphi}$ 是从 $\Delta$ 到 $D$ 上的一对一的映射, $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $\Delta$ 上连续可导,并且

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5}$$

在 $\Delta$ 上成立.

我们一再提及, Jacobi 矩阵 $J\boldsymbol{\varphi}$ 相当于一元函数的导数,由此不难联想到 Jacobi 行列式 $\det J\boldsymbol{\varphi}$ 的绝对值 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ 就相当于映射(4)对面积的伸缩比. 有了这一观念,就可以从公式(1)联想到二重积分的换元公式应是:

**定理 10.6.1** 设 $\mathbf{R}^2$ 中的有界闭区域 $D$ 有面积,函数 $F: D \to \mathbf{R}$ 连续,映射

$$\boldsymbol{\varphi}: \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad ((u,v) \in \Delta)$$

是从 $\Delta$ 到 $D$ 上的正则映射,即 $\boldsymbol{\varphi}$ 将 $\Delta$ 一对一地映射成 $D$, $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(\Delta)$, 并且在 $\Delta$ 上,

$$\det J\boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么

$$\iint\limits_D F(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta F \circ \boldsymbol{\varphi}(u,v) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{6}$$

也可以写成

$$\iint\limits_{\varphi(\Delta)} F(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta F(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{7}$$

为证明此定理,先证明下面的引理.

**引理 10.6.1** 设正则映射 $\boldsymbol{\varphi}$ 把 $\mathbf{R}^2$ 中以

$$(u_0,v_0),\quad (u_0+h,v_0),\quad (u_0+h,v_0+k),\quad (u_0,v_0+k)$$

为顶点的矩形 $A_{hk}$ 一对一地映射为 $\boldsymbol{\varphi}(A_{hk})$，那么

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{\sigma(\boldsymbol{\varphi}(A_{hk}))}{\sigma(A_{hk})}=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}. \tag{8}$$

**证明**　从图 10.13，可以看出

$$\sigma(\boldsymbol{\varphi}(A_{hk}))\approx\|(\boldsymbol{\varphi}(u_0+h,v_0)-\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0))\times(\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0+k)-\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0))\|.$$

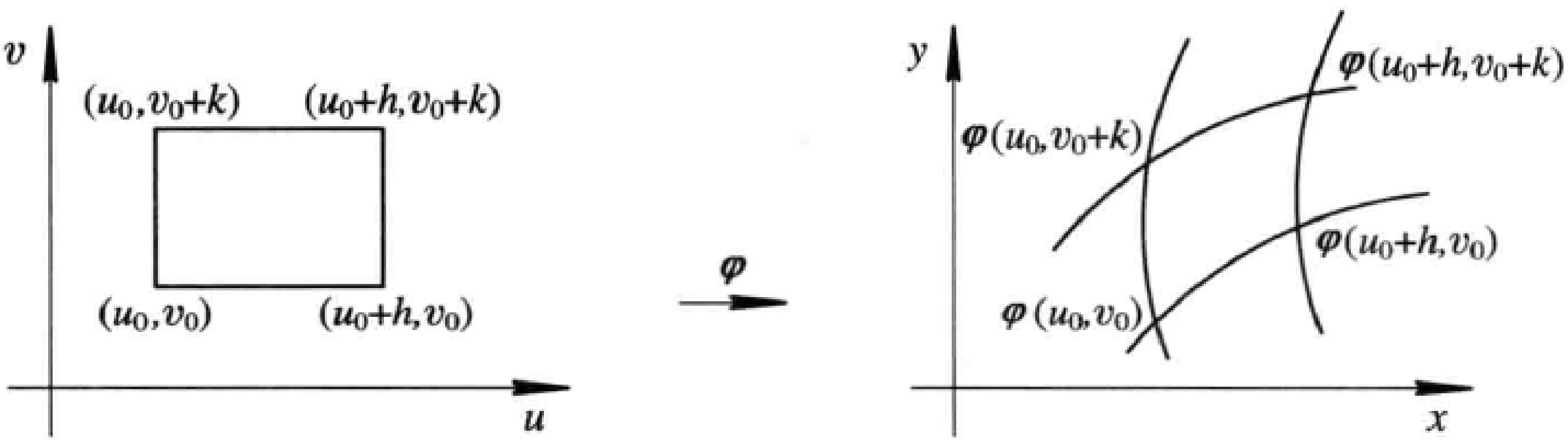



**图 10.13**

由于

$$\boldsymbol{\varphi}(u_0+h,v_0)-\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0)=\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u_0,v_0)h+\boldsymbol{\xi},$$

$$\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0+k)-\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0)=\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u_0,v_0)k+\boldsymbol{\eta},$$

其中

$$\|\boldsymbol{\xi}\|=o(h),\quad \|\boldsymbol{\eta}\|=o(k),$$

所以

$$\sigma(\boldsymbol{\varphi}(A_{hk}))\approx\left\|\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u_0,v_0)\right\|hk+o(hk),$$

或者

$$\frac{\sigma(\boldsymbol{\varphi}(A_{hk}))}{\sigma(A_{hk})}\approx\left\|\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u_0,v_0)\right\|+o(1). \tag{9}$$

因为

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u}&\dfrac{\partial x}{\partial v}&0\\ \dfrac{\partial y}{\partial u}&\dfrac{\partial y}{\partial v}&0\end{vmatrix}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{k},$$

所以

$$\left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} \right\| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|. \tag{10}$$

把式(10)代入式(9),即得式(8). □

现在开始证明定理 10.6.1.用矩形 $I$ 把 $uv$ 平面上的闭区域 $\Delta$ 覆盖起来,用两族平行直线 $u=u_i(i=0,1,\cdots,m)$ 和 $v=v_j(j=0,1,\cdots,n)$ 分割 $I$,其中

$$u_0 < u_1 < \cdots < u_{m-1} < u_m, \quad v_0 < v_1 < \cdots < v_{n-1} < v_n.$$

令 $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}(i=1,2,\cdots,m)$,$\Delta v_j = v_j - v_{j-1}(j=1,2,\cdots,n)$.我们一共得到 $mn$ 个矩形,在映射 $\boldsymbol{\varphi}$ 的作用之下,它们变成了 $xy$ 平面上 $mn$ 个"曲边平行四边形".

在作积分和的时候,我们只需考虑那些完全被包含在 $D$ 中的"曲边平行四边形",把它们记为 $D_i(i=1,2,\cdots,k)$,即 $D_i=\varphi(\Delta_i)$,其中 $\Delta_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是完全被包含在 $\Delta$ 中的矩形.任取一点 $\boldsymbol{\eta}_i \in D_i$,并设 $\Delta_i$ 中唯一的点 $\boldsymbol{\xi}_i$ 使得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}_i)=\boldsymbol{\eta}_i(i=1,2,\cdots,k)$.作积分和

$$\sum_{i=1}^{k} F(\boldsymbol{\eta}_i)\sigma(D_i). \tag{11}$$

由引理 10.6.1,可知

$$\sigma(D_i) \sim |\det J\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}_i)|\,\sigma(\Delta_i) \quad (i=1,2,\cdots,k),$$

代入式(11),可得

$$\sum_{i=1}^{k} F(\boldsymbol{\eta}_i)\sigma(D_i) \sim \sum_{i=1}^{k} F\circ\boldsymbol{\varphi}(\xi_i)\,|\det J\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}_i)|\,\sigma(\Delta_i). \tag{12}$$

在分割无限加细的极限过程中,式(12)两边的差别将消失.由定理 10.4.6,得到

$$\int_D F\mathrm{d}\sigma = \int_\Delta F\circ\boldsymbol{\varphi}\,|\det J\boldsymbol{\varphi}|\,\mathrm{d}\sigma.$$

这就证明了二重积分的换元公式(7). □

下面看几个例子.

**例 1** 设 $D$ 是由四条抛物线 $y^2=px$, $y^2=qx$, $x^2=ay$, $x^2=by(0<p<q, 0<a<b)$ 所围成的区域(图 10.14).计算 $D$ 的面积和二重积分

$$A=\iint_D \frac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

**解** 引入参数 $u,v$,使得

$$y^2=ux, \quad x^2=vy,$$

其中 $p\leqslant u\leqslant q$, $a\leqslant v\leqslant b$.这说明,在这种变换之

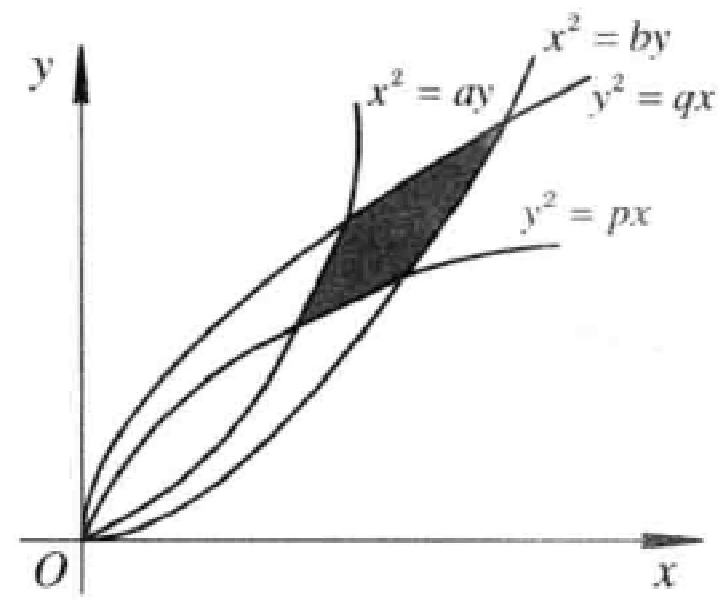


图 10.14

下,图形 $D$ 变成了 $uv$ 平面上的矩形 $[p,q]\times[a,b]$. 解出 $x$ 和 $y$,得到

$$x=(uv^2)^{1/3},\quad y=(u^2v)^{1/3}.$$

通过简单的计算,可得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{1}{3}.$$

于是

$$\sigma(D)=\int_D \mathrm{d}\sigma=\frac{1}{3}\int_p^q \mathrm{d}u\int_a^b \mathrm{d}v=\frac{1}{3}(q-p)(b-a).$$

注意到 $xy=uv$,便有

$$\begin{aligned}A&=\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{xy}=\frac{1}{3}\int_p^q \frac{\mathrm{d}u}{u}\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{v}\\&=\frac{1}{3}(\ln q-\ln p)(\ln b-\ln a)\\&=\frac{1}{3}\ln\frac{q}{p}\ln\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

□

**例 2** 设 $D$ 是由 $x=0$, $y=0$ 和 $x+y=1$ 所围成的图形. 试求积分

$$A=\iint_D \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里,记号 $\exp(t)=\mathrm{e}^t$.

**解** 集合 $D$ 是一个三角形闭区域(图 10.15),形状并不复杂,这时二重积分计算的困难是由被积函数所造成的. 此外,还要注意,这时被积函数虽然在原点处没有定义,但它在 $D\backslash\{(0,0)\}$ 上是有界的:

$$0<\exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right)=\exp\left(1-\frac{2y}{x+y}\right)\leqslant \mathrm{e},$$

因此积分存在不成问题.

令 $x-y=u$, $x+y=v$,由此解出

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{v-u}{2}.$$

这个映射把 $uv$ 平面上的闭区域 $\Delta=\{(u,v):|u|\leqslant v,0\leqslant v\leqslant 1\}$(图 10.16)映成 $xy$ 平面上的闭区域 $D$,而且显然是一一对应的. 这时,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{2}.$$

由积分换元公式,得到

$$A=\frac{1}{2}\iint_{\Delta}\mathrm{e}^{u/v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\mathrm{e}^{u/v}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^1 v\mathrm{e}^{u/v}\Big|_{u=-v}^{u=v}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 v(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})\mathrm{d}v=\frac{1}{4}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}).$$ □

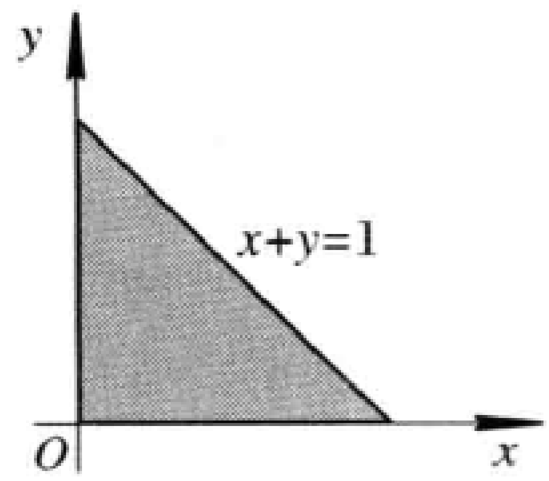



图 10.15

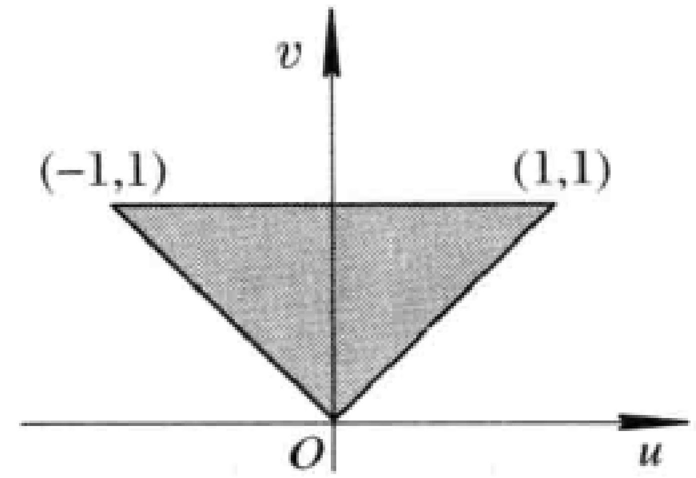



图 10.16

现在来介绍一种常用的换元——**极坐标换元**.令

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta. \tag{13}$$

这时,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r. \tag{14}$$

如果当$(r,\theta)\in\Delta$时,映射(13)将$\Delta$一对一地变为$D$,那么

$$\iint_D F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Delta}F(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta. \tag{15}$$

细心的读者不难发现,公式(15)应当只有在区域$\Delta$不包含着极点时才成立.如果$\Delta$包含着极点,显然由式(14)可见,在极点上 Jacobi 行列式等于零,不符合换元所要求的条件.事实上,即使在这样的一个点上不满足条件,换元公式仍然成立.严格的证明就不在这里给出了.

**例3** 设球体$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$被柱面$x^2+y^2=ax$所截.求截下的体积.

**解** 我们只需计算上半球体被截下的体积,然后乘以2即可.设

$$D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant ax\}.$$

先来算出

$$A=\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

用极坐标换元,得

$$A=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}r\sqrt{a^2-r^2}\mathrm{d}r=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}r\sqrt{a^2-r^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}(a^2 - r^2)^{3/2}\Big|_{r=a\cos\theta}^{r=0}\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2}{3}a^3\int_0^{\pi/2}[1-\sin\theta(1-\cos^2\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2}{3}a^3\left(\theta+\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

因此欲求的体积是$\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)a^3$. □

**例 4** 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所包围的面积.

**解** 记$D=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$,所求的面积为$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 为计算这个积分,作广义极坐标变换

$$x = ar\cos\theta,\quad y = br\sin\theta,$$

它的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr.$$

由此得

$$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{2\pi} abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pi ab.$$ □

在极坐标换元中,由 Jacobi 行列式带来的因子 $r$,可能使被积函数变成其原函数能够求出的新形式. 下面是一个有趣的例子.

**例 5** 计算积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

**解** 在上册第 5 章的结束语中,我们已经提到 $\mathrm{e}^{-x^2}$ 的原函数是不可以用初等函数来表达的. 因此,局限在一元函数之内,这个积分值是无法直接得到的.

对任意的 $R>0$,考虑矩形$[-R,R]\times[-R,R]$上的二重积分

$$I(R) = \iint\limits_{[-R,R]^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

将它化成累次积分后,有

$$I(R) = \left(\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-x^2}\right)^2 = 4\left(\int_0^R\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2.$$

另外,我们知道,圆盘 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 完全包含在$[-R,R]^2$ 内,而圆盘 $x^2+y^2$

$\leqslant 2R^2$ 完全包含了$[-R,R]^2$.由此可得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leqslant 4\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 \leqslant \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

利用极坐标换元公式(15),得出

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R re^{-r^2}dr = \pi(1-e^{-R^2}),$$

又有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi(1-e^{-2R^2}).$$

因此有

$$\pi(1-e^{-R^2}) \leqslant 4\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 \leqslant \pi(1-e^{-2R^2}).$$

令 $R\to+\infty$,得

$$4\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi.$$

最后得到所谓的"概率积分"

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$ □

## 练 习 题 10.6

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (x-y)^2\sin(x+y)dxdy$,其中 $D$ 是由四点$(\pi,0)$,$(2\pi,\pi)$,$(\pi,2\pi)$,$(0,\pi)$顺次连成的正方形;

(2) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$,其中 $D$ 是由曲线$x^2-y^2=1$,$x^2-y^2=2$,$xy=1$ 和 $xy=2$ 围成的图形在第一象限中的那部分.

2. 计算由下列曲线围成的图形的面积:

(1) $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$,其中 $a_1b_2\neq a_2b_1$;

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$,$x=0$ 和 $y=0$.

3. 求证:

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)dxdy = \int_{-1}^1 f(t)dt.$$

4. 设 $D$ 是由曲线 $xy=1$,$xy=2$,$y=x$ 和 $y=4x$ 围成的图形在第一象限中的那一部分.求证:

$$\iint_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \ln 2\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t.$$

5. 计算下列二重积分：

(1) $\displaystyle\iint_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　　(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant Rx} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(3) $\displaystyle\iint_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ x\leqslant 0,\,y\leqslant 0}} \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　　(4) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant x+y} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

6. 计算半径为 $R$ 的球的体积.

7. 设常数 $a,b>0$，

$$D=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1 \text{ 且 } x\geqslant y\geqslant 0\right\}.$$

计算二重积分

$$\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

## 问 题 10.6

1. 证明：

$$\iint_{[0,1]^2} (xy)^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 t^t\mathrm{d}t.$$

2. 设常数 $a,b$ 不全为 0.求证：

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}f(t\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}t.$$

3. 设 $f$ 是单变量函数，且连续可导.令

$$F(t)=\iint_{[0,t]^2} f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

求证：

(1) $F'(t)=\dfrac{2}{t}\left(F(t)+\displaystyle\iint_{[0,t]^2} xyf'(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$；

(2) $F'(t)=\dfrac{2}{t}\displaystyle\int_0^{t^2} f(s)\mathrm{d}s$.

4. 计算二重积分：

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{xy(\ln^2 x+\ln^2 y)},$$

其中 $D$ 是由在第一象限里的圆周 $x^2+y^2=1$ 与直线 $x+y=1$ 所围成的图形.

## 10.7 三重积分

在前六节中，我们已经详细地讨论了二重积分的基本内容，并且指出，多元函数的多重积分在概念和理论上都与二重积分一样.

我们是由计算体积来引入二重积分的定义的，那是一种几何的直观方法. 在介绍三重积分的时候，函数 $f$ 是在三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 的某一个有界点集 $V$ 上定义的，它的图像存在于四维欧氏空间中，几何直观在这里已经不存在了.

我们从一个物理问题谈起，由此来引入三重积分的概念. 读者马上会看到，这一概念的实质同二重积分是一致的.

设想在 $\mathbf{R}^3$ 中的一个有界点集 $V$ 上分布着某种质量. 一般来说，质量分布是不均匀的，所以密度是 $V$ 上点的函数. 用 $\rho$ 来记这个密度，$\rho: V\to\mathbf{R}$. 在已知密度函数 $\rho$ 之后，如何来计算 $V$ 上的总质量？考虑 $V$ 中一个很小的立体 $U_i$，它的体积记为 $\mu(U_i)$. 由于想象这个立体很小，可以认为其上的密度基本上没有变化，因此，这一小块上的质量就是 $\rho(\boldsymbol{p}_i)\mu(U_i)$，其中 $\boldsymbol{p}_i$ 是 $U_i$ 中任意的一点. 想象把 $V$ 分成了有限多个这样的小块 $U_i$，它们只有公共的边界，因此就把和式

$$\sum_i \rho(\boldsymbol{p}_i)\mu(U_i) \tag{1}$$

看成 $V$ 的质量的一个近似值. 我们应当把对 $V$ 的这种分割无限地加密，这就导致了下述的极限过程：

$$\lim \sum_i \rho(\boldsymbol{p}_i)\mu(U_i). \tag{2}$$

这个极限是对各个小块的最大直径趋于零而取的. 如果这个极限存在，并且它的值不依赖于 $\boldsymbol{p}_i$ 在 $U_i$ 上的选取，这个极限值就称为函数 $\rho$ 在 $V$ 上的**三重积分**，记作

$$\iiint_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad 或 \quad \int_V \rho\,\mathrm{d}\mu.$$

由此看出，三重积分的概念与二重积分的概念实质上没有任何差别，因此一些相应的名词也无须重新定义. 例如，和式(1)就可以说成是一个积分和或者 Riemann 和.

我们完全可以仿照二重积分的理论把三重积分的理论建立起来. 例如，我们首先讨论函数 $f$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中的一个有限长方体上的积分. $\mathbf{R}^3$ 中的一个长方体是指

$$I = I_1 \times I_2 \times I_3,$$

其中 $I_i = [a_i, b_i](i=1,2,3)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的有界闭区间.长方体 $I$ 的体积定义为

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3).$$

用平行于三个坐标平面的三组平面对 $I$ 进行划分,得到有限多个小的长方体,它们之间至多只有公共的边界,这称为 $I$ 的一个分割 $\pi$.给定了一个分割 $\pi$ 之后,可以建立积分和.那些小长方体对角线的最大者记为 $\|\pi\|$,称之为分割 $\pi$ 的宽度.我们在 $\|\pi\| \to 0$ 时对积分和取极限,如果这个极限的存在性和数值不依赖于小长方体中值点的选择,这个极限值就称为 $f$ 在 $I$ 上的积分,记作

$$\iiint_I f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad 或 \quad \int_I f\mathrm{d}\mu.$$

可以证明,若 $f$ 在 $I$ 上可积,那么 $f$ 必须在 $I$ 上有界.我们自然可以讨论 $f$ 在长方体 $I$ 上的可积性问题,这时需要有上和与下和的概念.上和与下和的所有性质同二重积分的情形无异.可积的充分必要条件也可仿照 10.2 节那样来叙述和证明.特别地,若 $f$ 在 $I$ 上连续,那么 $f$ 必在 $I$ 上可积.至于长方体上的三重积分的计算,同样可以化成累次积分来进行.所不同的是,对二重积分的情形,化为累次积分的顺序只有两种,而在三重积分的场合,这种顺序可以有六种.

我们也可以对三重积分建立 Lebesgue 定理.不过,这时我们要引进零测集和零体积集的概念.

点集 $B \subset \mathbf{R}^3$ 称为**零测集**(**零体积集**),是指对任何的 $\varepsilon > 0$,存在可数(有限)个长方体 $J_i$,使得

$$\bigcup_i J_i \supset B, \quad \sum_i \mu(J_i) < \varepsilon.$$

很显然,零体积集必定是零测集.

对长方体 $I$ 上的有界函数 $f$,积分 $\int_I f\mathrm{d}\mu$ 存在的充分必要条件是,$f$ 在 $I$ 上的间断点集是一零测集,这就是 Lebesgue 定理.它的证法本质上同定理 10.2.2 的证明没有两样.

对三重积分的情形,由长方体上的积分过渡到有界点集上的积分,完全可以按照 10.4 节的办法来做,那里的一切定理和结论都可以照搬到此,无须作任何改变.

利用三重积分,我们可以定义 $\mathbf{R}^3$ 中有界点集 $B$ 的体积:

$$\mu(B) = \int_B 1\mathrm{d}\mu.$$

可以证明:$B$ 为零体积集当且仅当 $\mu(B) = 0$.点集 $B$ 有体积的充分必要条件是 $\mu(\partial B) = 0$.很自然地,三重积分只能在有体积的点集上进行.

现在,再讲讲有界集合上的三重积分如何化成累次积分的问题.

**定理 10.7.1** 设有界集 $V\subset\mathbf{R}^3$ 有体积,有界的函数 $f:V\to\mathbf{R}$ 连续.

(1) 设 $V$ 在 $xy$ 平面上的垂直投影为 $D$(图 10.17),且当 $(x,y)\in D$ 时,过这一点且垂直于 $D$ 的直线与 $V$ 交成一个区间 $[\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)]$,那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z;\tag{3}$$

(2) 设 $V$ 在 $z$ 轴上的垂直投影为区间 $J$(图 10.18),且当 $z\in J$ 时,通过点 $(0,0,z)$ 又垂直于 $z$ 轴的平面同 $V$ 交成的图形在 $xy$ 平面上的垂直投影是一有面积的点集 $D_z$,那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu=\int_J \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{4}$$

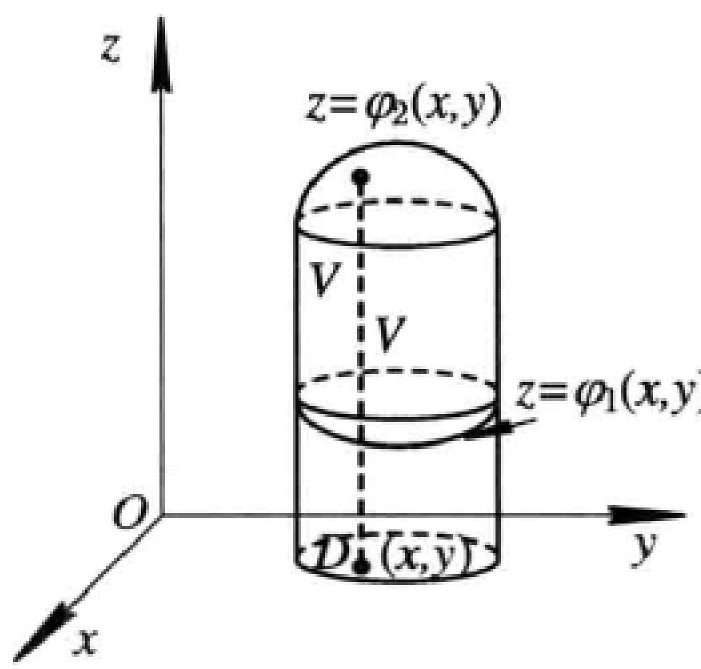



图 10.17

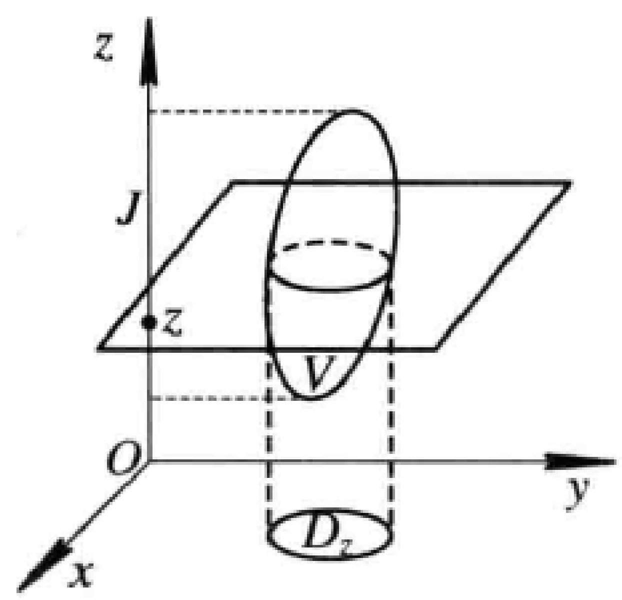



图 10.18

**证明** 由定理 10.4.1,可知 $f$ 在 $V$ 上是可积的,作 $I=I_1\times I_2\times I_3\supset V$,其中 $I_1,I_2$ 和 $I_3$ 都是 $\mathbf{R}$ 中的闭区间.令

$$f_V(\boldsymbol{p})=\begin{cases}f(\boldsymbol{p}), & \boldsymbol{p}\in V,\\ 0, & \boldsymbol{p}\notin V,\end{cases}$$

那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu=\int_I f_V\mathrm{d}\mu.$$

(1) 当 $(x,y)\in D$ 时,函数 $f(x,y,\cdot)$ 在区间 $[\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)]$ 上连续,从而是可积的.因此

$$\int_{I_3} f_V(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

而当 $(x,y)\notin D$ 时,$f_V(x,y,z)=0$,这时 $\int_{I_3} f_V(x,y,z)\mathrm{d}z=0$.因此

$$\int_V f\mathrm{d}\mu = \int_I f_V\mathrm{d}\mu = \iint\limits_{I_1\times I_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{I_3} f_V(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$= \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(2) 当 $z\in J$ 时，$D_z\subset I_1\times I_2$ 且 $\sigma(\partial D_z)=0$；而函数 $f(\cdot,\cdot,z)$ 在 $D_z$ 上有界、连续，由定理 10.4.1，可知 $f(\cdot,\cdot,z)$ 在 $D_z$ 上可积. 于是有

$$\iint\limits_{I_1\times I_2} f_V(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当 $z\notin J$ 时，$f_V(x,y,z)=0$，这时

$$\iint\limits_{I_1\times I_2} f_V(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

于是

$$\int_V f\mathrm{d}\mu = \int_I f_V\mathrm{d}\mu = \int_{I_3}\mathrm{d}z\iint\limits_{I_1\times I_2} f_V(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_J \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad \square$$

我们看一个例子.

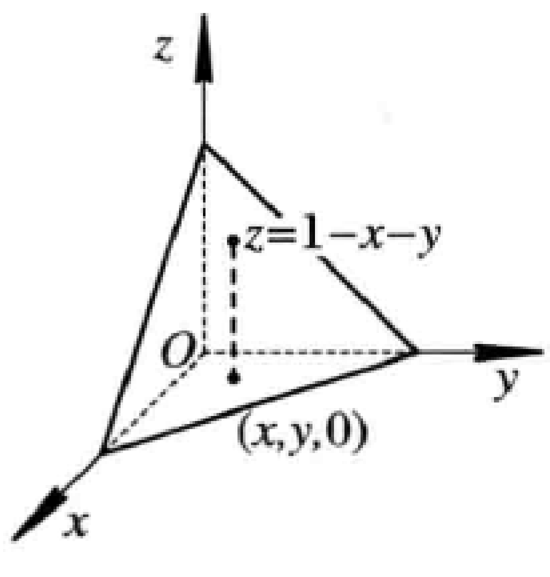



**图 10.19**

**例 1** 计算积分 $A = \iiint\limits_V \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，其中 $V=\{(x,y,z): x,y,z\geqslant 0 \text{ 且 } x+y+z\leqslant 1\}$.

**解** 这时，$V$ 是第一卦限中的一个四面体，由三个坐标平面和平面 $x+y+z=1$ 围成(图 10.19). 四面体 $V$ 在 $xy$ 平面上的垂直投影是三角形

$$D=\{(x,y): x,y\geqslant 0 \text{ 且 } x+y\leqslant 1\}.$$

当 $(x,y)\in D$ 时，$\varphi_1=0$，$\varphi_2=1-x-y$. 用公式(3)计算：

$$A = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$$
$$= \frac{1}{2}\iint\limits_D\left(\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{8}\sigma(D)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} \frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{16}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{16}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right).$$

我们也可以用公式(4)来计算这个积分. 这时区间 $J=[0,1]$,而

$$D_z = \{(x,y): x,y \geqslant 0 \text{ 且 } x+y \leqslant 1-z\},$$

所以

$$A = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x+y+z)^3}.$$

这时,如果我们将上式右边的二重积分化成累次积分来计算,那就变得同第一种算法没有两样了.

对当前这个具体的题目,还有一种富于启发性的算法. 作积分,根本的思想就是把积分域分割加细,而分割的方法则可以是各种各样的. 当前的被积函数 $f$ 有这样的性质:当表达式 $x+y+z$ 等于常数时,$f$ 也取常数值,这就是说,平面 $x+y+z=t$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$是函数 $f$ 的**等值面**,这些等值面都与 $V$ 的一个底面(即 $x+y+z=1$)平行. 注意到这一特征,我们就可以用等值面族来将 $V$ 分割. 一张等值面同 $V$ 交出一个三角形,在这个三角形上,$f$ 有相等的函数值,因此无须将这个三角形再进行分割. 这就是说,我们可以把这个三重积分直接化为单积分,实际做法如下.

平面族 $x+y+z=t$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$与 $V$ 交成一个等边三角形,它的边长为$\sqrt{2}\,t$,所以面积是$\sqrt{3}\,t^2/2$. 三角形的中心到四面体的顶点(坐标原点)的距离为 $t/\sqrt{3}$,因此这种分割的体积元是

$$\frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathrm{d}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}t^2\mathrm{d}t,$$

从而有

$$A = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t)^3}\mathrm{d}t.$$

作部分分式

$$\frac{t^2}{(1+t)^3} = \frac{1}{1+t} - \frac{2}{(1+t)^2} + \frac{1}{(1+t)^3},$$

可得

$$A=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$$ □

在已经对二重积分的换元法作过详细讨论的基础上，关于三重积分的换元公式，就无须多费笔墨了，我们直接写出下面的定理：

**定理 10.7.2** 设有界的闭区域 $D\subset\mathbf{R}^3$ 有体积，函数 $F:D\to\mathbf{R}$ 连续，映射

$$\boldsymbol{\varphi}:\begin{cases}x=x(u,v,w),\\ y=y(u,v,w),\quad((u,v,w)\in\Delta)\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$$

是从 $\Delta$ 到 $D$ 上的正则映射，即 $\boldsymbol{\varphi}$ 将 $\Delta$ 一对一地映射成 $D$，$\boldsymbol{\varphi}\in C^1(\Delta)$，并且在 $\Delta$ 上，

$$\det J\boldsymbol{\varphi}=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0,$$

则有

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}(\Delta)}F\mathrm{d}\mu=\int_{\Delta}F\circ\boldsymbol{\varphi}\,|\det J\boldsymbol{\varphi}|\,\mathrm{d}\mu,\tag{5}$$

即

$$\begin{aligned}&\iiint_D F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &\quad=\iiint_{\Delta}F(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

读者可自行证明这一定理，关键的一步是要首先证明 $|\det J\boldsymbol{\varphi}|$ 是映射 $\boldsymbol{\varphi}$ 对体积的伸缩比.

定理 10.7.2 的一个重要特例是**球坐标换元公式**. 设映射

$$\boldsymbol{\varphi}:\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad((r,\theta,\varphi)\in\Delta).\\ z=r\cos\theta\end{cases}$$

这时，

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta,$$

那么我们有

$$\int_{\varphi(\Delta)} F\mathrm{d}\mu = \iiint_{\Delta} F \circ \boldsymbol{\varphi} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi. \tag{6}$$

**例 2** 计算积分

$$A = \int_D (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}\mu,$$

其中 $D$ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的立体.

**解** 由于 $D$ 是一个旋转体(图 10.20),用极坐标换元.由图 10.20 看出 $D$ 在 $\boldsymbol{\varphi}$ 之下的原像是长方体:

$$\Delta = \left\{(r,\theta,\varphi): 0 \leqslant r \leqslant a, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right\},$$

因此

$$A = \iiint_{\Delta} r^4 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^a r^4 \mathrm{d}r\int_0^{\pi/4} \sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{5}(2 - \sqrt{2})a^5. \qquad \square$$

**例 3** 计算积分

$$A = \int_D z\mathrm{d}\mu,$$

其中 $D$ 是两个球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 = az$ 之间的点集(图 10.21).

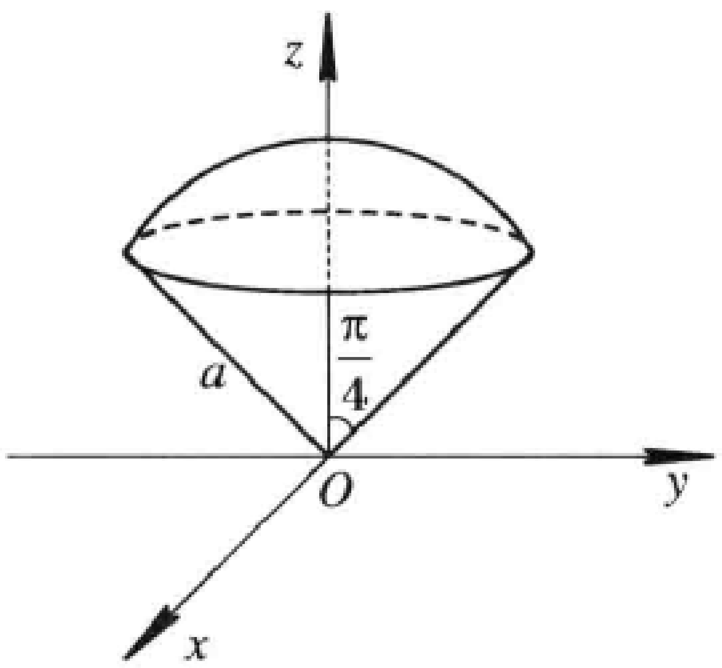



**图 10.20**

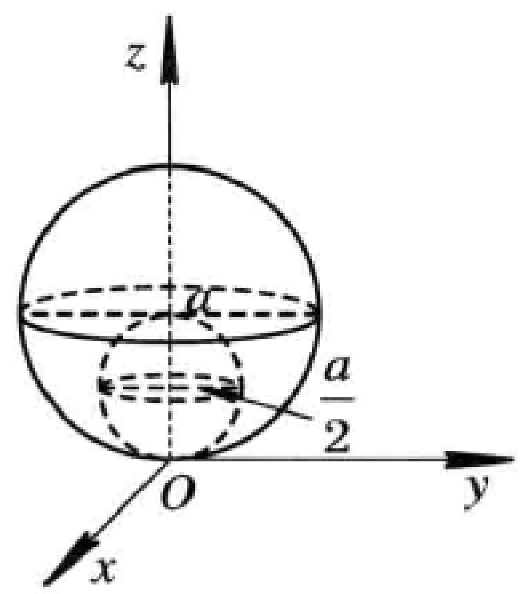



**图 10.21**

**解** 经过配方,把这两个球的方程分别改写为

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2,$$

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

由此容易得出它们的中心和半径.

用球坐标换元,易见 $\theta$ 和 $\varphi$ 的变化范围分别是 $[0,\pi/2]$ 和 $[0,2\pi]$. 过坐标原

点，在上半空间中作一条射线，这条射线将同两个球面相交，只要 $\theta\neq\pi/2$，交点就有两个，它们到原点的距离分别是 $a\cos\theta$ 和 $2a\cos\theta$. 这就是说，对任意固定的 $\theta\in[0,\pi/2]$，$r$ 的变化范围是 $[a\cos\theta,2a\cos\theta]$. 这样，我们就定出了参数变化的区域 $\Delta$. 于是

$$A=\iiint_{\Delta}r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=2\pi\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{2a\cos\theta}r^3\mathrm{d}r$$
$$=\frac{15}{2}\pi a^4\int_0^{\pi/2}\cos^5\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{5}{4}\pi a^4.$$

对本题来说，通过仔细的观察，利用灵活的技巧，不用换元就能很快地把结果得出来. 如果用 $D_1$ 和 $D_2$ 分别表示小球体和大球体，那么 $D=D_2\setminus D_1$，于是

$$\int_D z\mathrm{d}\mu=\int_{D_2}z\mathrm{d}\mu-\int_{D_1}z\mathrm{d}\mu,$$

但是

$$\int_{D_2}z\mathrm{d}\mu=\int_{D_2}(z-a)\mathrm{d}\mu+\int_{D_2}a\mathrm{d}\mu=a\mu(D_2).$$

这是因为大球关于平面 $z=a$ 是对称的，所以上式中间式子中的第一个积分等于零. 同理，可得

$$\int_{D_1}z\mathrm{d}\mu=\int_{D_1}\left(z-\frac{a}{2}\right)\mathrm{d}\mu+\frac{a}{2}\int_{D_1}\mathrm{d}\mu=\frac{a}{2}\mu(D_1).$$

这样，我们就得出

$$\int_D z\mathrm{d}\mu=a\mu(D_2)-\frac{a}{2}\mu(D_1)$$
$$=\frac{4}{3}\pi a^4\left(1-\frac{1}{16}\right)=\frac{5}{4}\pi a^4.$$

□

## 练 习 题 10.7

1. 计算下列积分：

(1) $\int_V xyz\mathrm{d}\mu$，$V$ 为球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 在第一卦限中的部分；

(2) $\int_V(x+y+z)\mathrm{d}\mu$，$V$ 为平面 $x+y+z=1$ 和三个坐标平面所围成的立体；

(3) $\int_V xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $z=xy$ 和 $z=0$ 以及两张平面 $x=1$ 和 $x=y$ 围成.

2. 计算下列曲面围成的立体的体积：

(1) $z^2=x^2+\dfrac{y^2}{4}, 2z=x^2+\dfrac{y^2}{4}$;

(2) $x^2+z^2=a^2, |x|+|y|=a$.

3. 设 $f$ 为连续函数.求极限:

$$\lim_{r\to 0}\frac{3}{4\pi r^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

4. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

(2) $\displaystyle\iiint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 $D=\{(x,y,z):z\geqslant 0, a^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant b^2\}$;

(3) $\displaystyle\iiint\limits_{D}\left(1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\right)^{1/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 $D$ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 包围的立体.

5. 计算由下列曲面围成的立体的体积:

(1) $a_ix+b_iy+c_iz=\pm h_i (i=1,2,3)$,设行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0;$$

(2) $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+z^2=b^2 (0\leqslant a<b$ 且 $z>0)$;

(3) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$(常数 $a>0$);

(4) $(x^2+y^2+z^2)^n=z^{2n-1} (n\in\mathbf{N}^*)$;

(5) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$.

## 问题 10.7

1. 令

$$F(t)=\iiint\limits_{[0,t]^3} f(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中单变量函数 $f$ 连续可导.求证:

$$F'(t)=\frac{3}{t}\Big(F(t)+\iiint\limits_{[0,t]^3} xyzf'(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Big).$$

2. 设 $f$ 为连续函数,令

$$F(t)=\iiint\limits_{[0,t]^3} f(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

求证：

$$F'(t) = \frac{3}{t}\int_0^{t^3} \frac{g(u)}{u}\mathrm{d}u,$$

其中 $g(u) = \int_0^u f(s)\mathrm{d}s$.

# 10.8 n 重积分

有了二重积分和三重积分之后，用同样的方法，可以把 $n$ 重积分建立起来.

首先讨论函数 $f$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中一个有限长方体上的积分. $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭长方体是指

$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n,$$

其中 $I_i = [a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$是数轴上的闭区间. $I$ 的 $n$ **维体积**定义为

$$\mu(I) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

在不致引起混淆的情况下，"$n$ 维"可以略去.

用平行于各坐标轴平面的 $n$ 组超平面把 $I$ 进行分割，得到有限多个子长方体，它们至多只有公共的边界，这样就得到了 $I$ 的一个分割 $\pi$. 这些子长方体"对角线"的长度的最大者，记为 $\|\pi\|$，称为分割 $\pi$ 的宽度. 对定义在 $I$ 上的($n$ 元)函数 $f$，对分割 $\pi$ 作积分和. 在条件 $\|\pi\| \to 0$ 之下对积分和取极限. 如果这个极限的存在性和数值不依赖于子长方体中值点的选择，这个极限值就称为 $f$ 在 $I$ 上的积分，记作

$$\int\cdots\int_I f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

也记为

$$\int_I f\mathrm{d}\mu.$$

这时称 $f$ 在 $I$ 上**可积**. 可以证明：若 $f$ 在 $I$ 上可积，那么 $f$ 必在 $I$ 上有界. 为了讨论函数 $f$ 在 $I$ 上的可积性，需要引进上和与下和的概念. 上和与下和的所有性质同二重积分的情形无异. 可积性的充分必要条件也可以仿照 10.2 节中的那些来叙述和证明. 特别地，若 $f$ 在 $I$ 上连续，那么 $f$ 必然在 $I$ 上可积. $I$ 上 $n$ 重积分的计算，也可

以化为累次积分来进行,这时共有 $n!$ 种不同的顺序.

怎样由 $n$ 维长方体上的积分过渡到 $\mathbf{R}^n$ 中有界集合上的积分,参看 10.4 节的讨论就一目了然,其中的许多步骤和细节在此就不赘述了.

为了对 $n$ 重积分证明 Lebesgue 定理,我们要引进零测集和零体积集的概念.取被积函数为 1,通过积分来定义一个有界点集的体积.可以证明:一个有界点集有体积的充分必要条件是,它的边界为一零体积集.

类似于定理 10.7.1,$n$ 重积分也可化为一个 $n-1$ 重积分和一个定积分来计算.

**定理 10.8.1** 设 $V\subset\mathbf{R}^n$ 是有体积的有界闭集,有界函数 $f:V\to\mathbf{R}$ 连续.

(1) 如果

$$V=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n:\text{当}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\in D\subset\mathbf{R}^{n-1}\text{时},$$
$$\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\leqslant x_n\leqslant\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\},$$

其中 $\varphi_1,\varphi_2$ 是 $D$ 上的连续函数,那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu=\int\cdots\int_D\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\int_{\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})}f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)\mathrm{d}x_n.$$

(2) 如果

$$V=\{x=(\boldsymbol{x}_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n:\text{当 }x_n\in[a,b]\text{时},$$
$$(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\in D_{x_n}\subset\mathbf{R}^{n-1}\},$$

那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu=\int_a^b\mathrm{d}x_n\int\cdots\int_{D_{x_n}}f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

(3) 当然,也可把 $n$ 重积分化成一个 $k(1\leqslant k<n)$ 重积分和一个 $n-k$ 重积分来计算.这就是说,

$$V=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n:(x_{k+1},\cdots,x_n)\in D_1\subset\mathbf{R}^{n-k},$$
$$(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in D_2\subset\mathbf{R}^k\},$$

那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu=\overbrace{\int\cdots\int_{D_1}}^{n-k\text{个}}\mathrm{d}x_{k+1}\cdots\mathrm{d}x_n\overbrace{\int\cdots\int_{D_2}}^{k\text{个}}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k.$$

$n$ 重积分也有换元公式,从形式上看,它与二重积分和三重积分的换元公式没有区别.

**定理 10.8.2** 设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集,$\Delta\subset\Omega$ 有体积,映射 $\boldsymbol{\varphi}:x_i=x_i(u_1,u_2,\cdots,u_n)(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $\Delta$ 上是正则的,那么对 $\boldsymbol{\varphi}(\Delta)$ 上的连续函数 $F$,有

$$\int\cdots\int_{\varphi(\Delta)} F(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$= \int\cdots\int_{\Delta} F(x_1(u_1,\cdots,u_n),\cdots,x_n(u_1,\cdots,u_n))\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots,u_n)}\right|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n.$$

下面我们举两个例子,用以说明 $n$ 重积分的几何应用.

在 $n$ 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中,点集

$$S_n(a)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0 \text{ 且 } x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant a\}$$

称为一个 $n$ **维单形**,这里 $a>0$. 例如,$S_1(a)$是数轴上的闭区间$[0,a]$,二维单形 $S_2(a)$就是 $xy$ 平面上的一个三角形,它的三个顶点是$(0,0)$,$(a,0)$,$(0,a)$. 三维单形 $S_3(a)$则是三维欧氏空间中位于第一卦限的一个四面体,它的四个顶点是$(0,0,0)$,$(a,0,0)$,$(0,a,0)$,$(0,0,a)$.

**例 1**($n$ 维单形的体积) 用 $\mu(S_n(a))$来表示单形 $S_n(a)$的体积. 根据我们的经验,应当如此定义:

$$\mu(S_n(a))=\int_{S_n(a)}\mathrm{d}\mu, \tag{1}$$

上式的右边就是常数 1 在单形 $S_n(a)$上的 $n$ 重积分. 作换元

$$x_i=at_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

这个换元的几何意义是,在每个坐标轴的方向上伸缩同一个常数 $a$,由此知 $n$ 维体积的伸缩比是

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,t_2,\cdots,t_n)}=a^n.$$

在式(1)的右边作这种换元,得到

$$\mu(S_n(a))=a^n\int_{S_n(1)}\mathrm{d}\mu,$$

这也就是

$$\mu(S_n(a))=a^n\mu(S_n(1)). \tag{2}$$

另外,将 $n$ 重积分化为累次积分,得到

$$\mu(S_n(1))=\int_{S_n(1)}\mathrm{d}\mu=\int_0^1\mathrm{d}t\int\cdots\int_{K_{n-1}}\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{n-1}, \tag{3}$$

其中 $K_{n-1}=S_{n-1}(1-t)$,因此

$$\int\cdots\int_{K_{n-1}}\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{n-1}=\mu(K_{n-1})=\mu(S_{n-1}(1-t))$$

$$=(1-t)^{n-1}\mu(S_{n-1}(1)),$$

代入式(3),便得出

$$\mu(S_n(1)) = \mu(S_{n-1}(1))\int_0^1 (1-t)^{n-1}\mathrm{d}t,$$

即

$$\mu(S_n(1)) = \frac{1}{n}\mu(S_{n-1}(1)).$$

这是一个关于 $S_n(1)$的体积的递推公式.由于

$$\mu(S_1(1)) = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1,$$

可以求得

$$\mu(S_n(1)) = \frac{1}{n!} \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

一般地,对 $a>0$,由式(2),得

$$\mu(S_n(a)) = \frac{a^n}{n!} \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$ □

再设

$$B_n(a) = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant a^2\},$$

称之为以原点为中心、以 $a$ 为半径的$n$ **维球体**.当 $n=1$ 时,$B_1(a)$是数轴上的闭区间$[-a,a]$;当 $n=2$ 时,$B_2(a)$是平面上以原点为中心、以 $a$ 为半径的闭圆盘;而当 $n=3$ 时,$B_3(a)$正是以原点为中心、以 $a$ 为半径的闭球体.

**例 2**($n$ 维球的体积) 通过 $n$ 重积分,我们定义 $B_n(a)$的体积是

$$\mu(B_n(a)) = \int_{B_n(a)} \mathrm{d}\mu. \tag{4}$$

与前面的例子一样,通过同样的换元,可得

$$\mu(B_n(a)) = a^n\mu(B_n(1)). \tag{5}$$

为了得到计算 $\mu(B_n(1))$的递推公式,我们把这个 $n$ 重积分化成一个 $n-2$ 重积分和一个二重积分来计算:

$$\mu(B_n(1)) = \int_{B_n(1)} \mathrm{d}\mu = \iint\limits_{t_{n-1}^2+t_n^2\leqslant 1} \mathrm{d}t_{n-1}\mathrm{d}t_n \int\cdots\int_{K_{n-2}} \mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{n-2}, \tag{6}$$

这里 $K_{n-2}=B_{n-2}(\sqrt{1-t_{n-1}^2-t_n^2})$.由公式

$$\begin{aligned}\mu(K_{n-2}) &= \mu(B_{n-2}(\sqrt{1-t_{n-1}^2-t_n^2}))\\ &= (1-t_{n-1}^2-t_{n-2}^2)^{(n-2)/2}\mu(B_{n-2}(1)),\end{aligned}$$

式(6)可写为

$$\mu(B_n(1)) = \mu(B_{n-1}(1)) \iint\limits_{t_{n-1}^2+t_n^2\leqslant 1} (1 - t_{n-1}^2 - t_{n-2}^2)^{(n-1)/2}\mathrm{d}t_{n-1}\mathrm{d}t_n. \tag{7}$$

记 $t_{n-1}=u, t_n=v$,并用极坐标,即得

$$\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} (1-u^2-v^2)^{(n-1)/2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 (1-r^2)^{(n-1)/2} r\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{n}.$$

代入式(7),即得递推公式

$$\mu(B_n(1)) = \frac{2\pi}{n}\mu(B_{n-2}(1)).$$

已知

$$\mu(B_2(1)) = \pi,\quad \mu(B_1(1)) = 2,$$

因此

$$\mu(B_{2k}(1)) = \frac{\pi^k}{k!},\quad \mu(B_{2k-1}(1)) = \frac{2^k\pi^{k-1}}{(2k-1)!!}.$$

再由式(5),即知对任意的正整数 $k=1,2,\cdots$,有

$$\mu(B_{2k}(a)) = \frac{\pi^k}{k!}a^{2k},\quad \mu(B_{2k-1}(a)) = \frac{2^k\pi^{k-1}}{(2k-1)!!}a^{2k-1}. \qquad \square$$

在第 18 章中将用 Γ 函数给出球体积的统一表达式.

最后,我们来介绍 $n$ 维球坐标变换.

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1, \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ \cdots, \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}, \end{cases} \tag{8}$$

称为 $n$ **维球坐标变换**,它把闭 $n$ 维长方体

$$0\leqslant r\leqslant a,\quad 0\leqslant \theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-2}\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\theta_{n-1}\leqslant 2\pi$$

映射为闭球 $\overline{B}_n(a)$:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant a^2,$$

且在长方体的内部,这个变换是一对一的.在用球坐标计算 $n$ 重积分时,我们需要知道这个变换的 Jacobi 行列式$\dfrac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1})}$.直接通过变换(8)来计算这个 $n$ 阶行列式是非常困难的.下面我们用隐映射定理(定理 9.7.1)来计算这个行列式.让我们回忆一下,如果函数组

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \cdots, u_n) \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

满足方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_n) = 0, \\ \cdots, \\ F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_n) = 0, \end{cases}$$

那么

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} = -(\boldsymbol{J}_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}))^{-1}\boldsymbol{J}_u\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),$$

两边取行列式,即得

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)} = (-1)^n \frac{\det \boldsymbol{J}_u\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\det \boldsymbol{J}_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}. \tag{9}$$

现在令

$$\begin{cases} F_1 = r^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2) = 0, \\ F_2 = r^2\sin^2\theta_1 - (x_2^2 + \cdots + x_n^2) = 0, \\ F_3 = r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 - (x_3^2 + \cdots + x_n^2) = 0, \\ \cdots, \\ F_n = r^2\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1} - x_n^2 = 0, \end{cases} \tag{10}$$

这里 $r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1}$ 相当于上面提到的 $u_1, u_2, \cdots, u_n$. 容易看出,方程组(8)所确定的函数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足方程组(10),因而所需的行列式可以通过公式(9)来计算. 由于

$$\boldsymbol{J}_u\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 2r & & & \\ 2r\sin^2\theta_1 & 2r^2\sin\theta_1\cos\theta_1 & & \\ * & * & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & 2r^2\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1} \end{pmatrix},$$

所以

$$\det \boldsymbol{J}_u\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = 2^n r^{2n-1}\sin^{2n-3}\theta_1\cos\theta_1\sin^{2n-5}\theta_2\cos\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1}.$$

因为

$$J_xF(x,u)=\begin{pmatrix}-2x_1 & * & * & \cdots & * \\ & -2x_2 & * & \cdots & * \\ & & -2x_3 & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & -2x_n\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}\det J_xF(x,u)&=(-1)^n2^nx_1x_2\cdots x_n\\&=(-1)^n2^nr^n\sin^{n-1}\theta_1\cos\theta_1\sin^{n-2}\theta_2\cos\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1},\end{aligned}$$

代入式(9),即得

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})}=r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}.\tag{11}$$

**例 3** 设 $f$ 是一个单变量函数.计算积分

$$A_n=\int\cdots\int_{B_n(a)}f(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

**解** 用球坐标变换,可得

$$A_n=\int_0^a r^{n-1}f(r)\mathrm{d}r\int_{E_n}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1},$$

这里

$$E_n=\{(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}):0\leqslant\theta_1,\cdots,\theta_{n-2}\leqslant\pi,0\leqslant\theta_{n-1}\leqslant2\pi\}.$$

为了计算积分

$$I_n=\int_{E_n}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1},$$

把等式 $1=n\int_0^1 r^{n-1}\mathrm{d}r$ 乘以上式的两边,并注意到(见公式(11))

$$r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}$$

是 $n$ 维球的体积元,即得

$$\begin{aligned}I_n&=n\int_0^1 r^{n-1}\mathrm{d}r\int_{E_n}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}\\&=n\mu(B_n(1)).\end{aligned}$$

因而

$$A_n=n\mu(B_n(1))\int_0^a r^{n-1}f(r)\mathrm{d}r.$$

这样计算 $A_n$ 就归结为计算关于 $r$ 的单积分. □

# 练习题 10.8

1. 计算下列 $n$ 重积分：

(1) $\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}(x_1^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$；

(2) $\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}(x_1+\cdots+x_n)^2\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$.

2. 计算累次积分：

$$\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}x_1\cdots x_{n-1}x_n\mathrm{d}x_n.$$

3. 计算下列 $\mathbf{R}^n$ 中区域的体积($a_1,a_2,\cdots,a_n>0$)：

(1) $V_n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n}\leqslant 1,x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\right\}$；

(2) $V_n(a)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\leqslant a\}$.

4. 设 $K$ 为二元连续函数，对 $n\in\mathbf{N}^*$，令

$$K_n(x,y)=\underset{[a,b]^n}{\int\cdots\int}K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_n,y)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n.$$

求证：对任何 $m,n\in\mathbf{N}^*$，有

$$K_{m+n+1}(x,y)=\int_a^b K_m(x,t)K_n(t,y)\mathrm{d}t.$$

5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，

$$V_n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\frac{|x_i|}{a_i}+\frac{|x_n|}{a_n}\leqslant 1(i=1,2,\cdots,n-1)\right\}.$$

求 $V_n$ 的体积.

# 问题 10.8

1. 设 $f$ 是单变量连续函数. 证明：

$$\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\mathrm{d}x_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^a f(t)(a-t)^{n-1}\mathrm{d}t.$$

2. 设 $f$ 是单变量连续函数. 证明：

$$\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_n=\frac{1}{n!}\left(\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\right)^n.$$

3. 设 $f$ 为 $n$ 元连续函数. 证明：

$$\int_a^b\mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_a^{x_{n-1}}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n=\int_a^b\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^b\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^b f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1.$$

# 10.9 重积分物理应用举例

通过以下几个例题，来说明重积分在物理学中的应用.

**例 1** 设有一条横截面为半圆形的水渠.求水满时水闸门承受的压力.

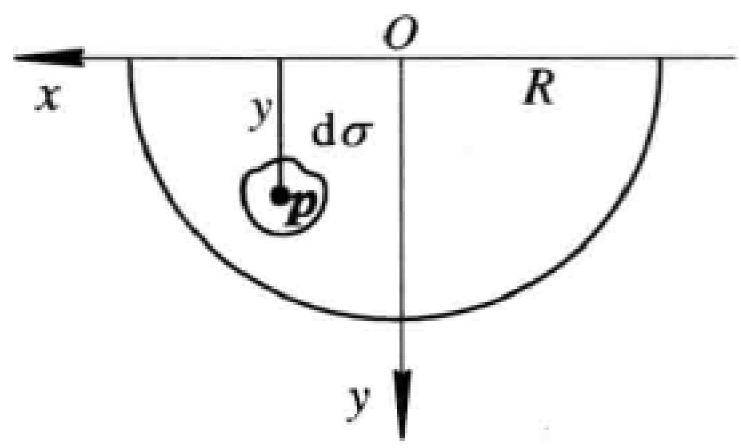



图 10.22

**解** 设水闸门是半径为 $R$(m)的半圆盘，按图 10.22 建立平面直角坐标系，使得原点与圆心重合，纵轴指向水底.因为在一点 $\boldsymbol{p}$ 处水的压强(用质量表示)等于该点水的深度 $y(\mathrm{t/m^2})$，当我们围绕点 $\boldsymbol{p}$ 取一面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 时，这一小块上的水的压力是 $y\mathrm{d}\sigma$，“相加之后”——严格地说应是作积分之后，得到水闸门所承受的总压力

$$\int_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ y\geqslant 0}} y\mathrm{d}\sigma = \int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}R^3(\mathrm{t}).$$ □

**例 2** 设在半径为 $R$ 的球上分布着某种物质，其密度函数 $\rho(\boldsymbol{p}) = a\|\boldsymbol{p}\|$ ($a>0$为常数).计算球的质量.

**解** 在球上任取一点 $\boldsymbol{p}$，环绕 $\boldsymbol{p}$ 取一个微小的体积元素 $\mathrm{d}\mu$，从而这一小块的质量就是 $\rho(\boldsymbol{p})\mathrm{d}\mu = a\|\boldsymbol{p}\|\mathrm{d}\mu$，相加便得总质量

$$\begin{aligned} m &= \int_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} a\|\boldsymbol{p}\|\mathrm{d}\mu = a\int_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}\mu \\ &= a\int_0^R r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta = a\pi R^4. \end{aligned}$$ □

现在，我们来介绍质心的计算公式.设想在位置 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 处，分别安放着质量 $m_1,m_2,\cdots,m_n$，形成一个由 $n$ 个质点构成的**质点组**.这个质点组的**质心**定义为

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i\boldsymbol{p}_i, \tag{1}$$

其中 $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$，表示质点组的总质量.公式(1)也可以写成

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i}{M}\right)\boldsymbol{p}_i. \tag{2}$$

这说明质心正是各质点的位置关于质量的加权平均，点 $\boldsymbol{p}_i$ 处的权是 $m_i/M(i=1,$

$2,\cdots,n$).

现在,我们来考虑质量连续地分布于一个体 $V$ 上.设密度函数为 $\rho(\boldsymbol{p})$($\boldsymbol{p}\in V$).在 $V$ 中的点 $\boldsymbol{p}$ 处,取一小块体积元素 $\mathrm{d}\mu$,它的质量便是 $\rho(\boldsymbol{p})\mathrm{d}\mu$.仿照式(1),定义物体的质心为

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{M}\int_V \boldsymbol{p}\rho(\boldsymbol{p})\mathrm{d}\mu, \tag{3}$$

其中

$$M = \int_V \rho \mathrm{d}\mu \tag{4}$$

表示分布在 $V$ 上的总质量.如果设 $\boldsymbol{P}=(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,将式(3)的右边用分量写出来,便有

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_V x\rho(x,y,z)\mathrm{d}\mu, \\ \bar{y} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_V y\rho(x,y,z)\mathrm{d}\mu, \\ \bar{z} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_V z\rho(x,y,z)\mathrm{d}\mu, \end{cases} \tag{5}$$

式中的 $M$ 由式(4)给出.

**例 3** 设有半径为 $a$ 的球,球心是$(0,0,a)$,密度函数是 $\rho(\boldsymbol{p})=k/r^2$,其中 $k$ 为常数,$r=\|\boldsymbol{p}\|$.试计算球的质心.

**解** 由对称性可知质心在 $z$ 轴上,因此可设质心 $\boldsymbol{P}=(0,0,\bar{z})$.利用公式(5)中的最后一个等式,知

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\int_V \frac{k}{r^2} z\mathrm{d}\mu.$$

利用球坐标换元,得出

$$\begin{aligned} M &= k\int_V \frac{1}{r^2}\mathrm{d}\mu = k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\mathrm{d}r \\ &= 4ak\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = 2ak\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_V \frac{k}{r^2}z\mathrm{d}\mu &= 2k\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} r\mathrm{d}r \\ &= 4a^2k\pi\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = ka^2\pi. \end{aligned}$$

因此 $\bar{z}=a/2$,从而质心是$(0,0,a/2)$. □

下面给出最后一个例子.

**例 4** 设有半径为 $R$ 的球,密度为常数——不妨设 $\rho=1$.试求出其引力场.

**解** 为求引力场,在空间中任取一点 $\boldsymbol{p}$,我们要计算在点 $\boldsymbol{p}$ 处单位质量所受到的引力.这里所说的引力,应当是一个向量.取球心为原点,建立坐标系.由于球的对称性,不妨设 $\boldsymbol{p}$ 在 $z$ 轴上,即设 $\boldsymbol{p}=(0,0,l)(l>0)$,它正是点 $\boldsymbol{p}$ 到球心的距离.

在球中任取一点$(x,y,z)$,环绕着它取一块体积元素 $\mathrm{d}\mu$,则这一小块对点 $\boldsymbol{p}$ 的引力的数值为

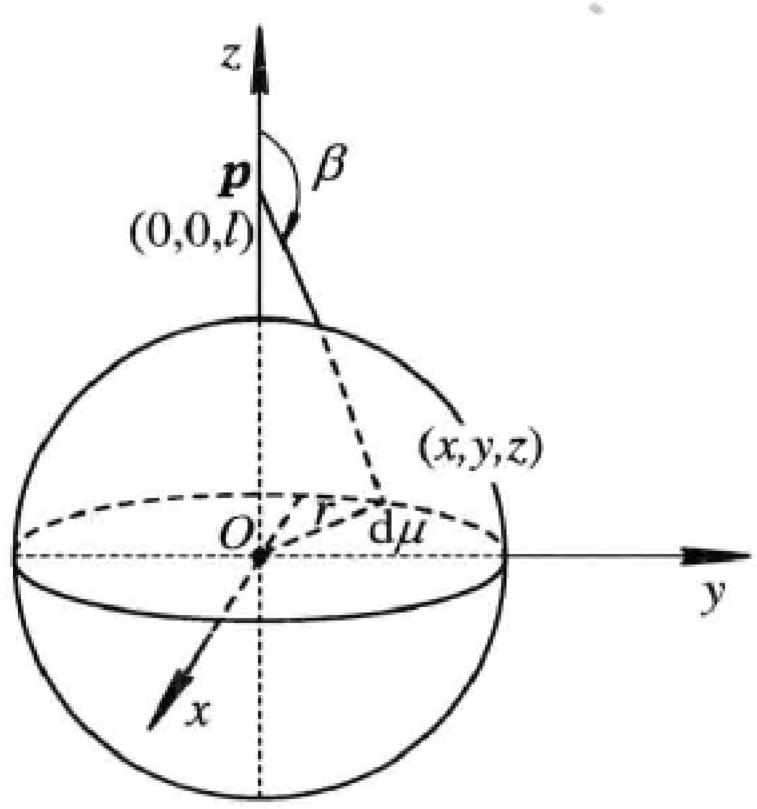



图 10.23

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{x^2+y^2+(z-l)^2},$$

方向是从点 $\boldsymbol{p}$ 指向点$(x,y,z)$,这个方向同 $z$ 轴正向的夹角用 $\beta$ 来记(图 10.23),因此引力在 $z$ 轴上的分量为

$$\frac{\cos\beta\mathrm{d}\mu}{x^2+y^2+(z-l)^2}.$$

我们有

$$\cos\beta=\frac{z-l}{\sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}}.$$

若用 $\boldsymbol{F}_z$ 表示引力 $\boldsymbol{F}$ 在 $z$ 轴上的分量,则

$$F_z=\int_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{z-l}{(x^2+y^2+(z-l)^2)^{3/2}}\mathrm{d}\mu.$$

作球坐标换元,得出

$$F_z=2\pi\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi\frac{(r\cos\theta-l)\sin\theta}{(r^2+l^2-2lr\cos\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta.$$

现在,应当算出定积分

$$G(r)=\int_0^\pi\frac{(r\cos\theta-l)\sin\theta}{(r^2+l^2-2lr\cos\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta.$$

对上述积分作换元 $t=(r^2+l^2-2lr\cos\theta)^{1/2}$,得到

$$G(r)=\frac{1}{2l^2r}\int_{|r-l|}^{r+l}\left(\frac{r^2-l^2}{t^2}-1\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{l^2}\left(\frac{r-l}{|r-l|}-1\right),$$

可见

$$G(r)=\begin{cases}0, & r>l,\\ -\dfrac{2}{l^2}, & r<l.\end{cases}$$

因此，当 $l>R$ 时，必有 $r<l$，所以

$$F_z = 2\pi\int_0^R r^2 G(r)\mathrm{d}r = -\frac{4\pi}{l^2}\int_0^R r^2\mathrm{d}r = -\frac{4\pi R^3}{3l^2};$$

当 $l\leqslant R$ 时，

$$F_z = 2\pi\int_0^l r^2 G(r)\mathrm{d}r = -\frac{4\pi}{l^2}\int_0^l r^2\mathrm{d}r = -\frac{4}{3}\pi l.$$

由球的对称性和质量分布的均匀性，可知对点 $\boldsymbol{p}$ 的引力在 $x$ 轴和 $y$ 轴方向的分量等于零，即 $F_z = F_y = 0$，而

$$F_z = \begin{cases} -\dfrac{4\pi R^3}{3l^2}, & l>R, \\ -\dfrac{4}{3}\pi l, & l\leqslant R. \end{cases}$$

综合以上结果，可以得出以下结论：

(1) 对任何一点所产生的引力指向球心；

(2) 对球外一点所产生的引力，等于在球心上放置一个质量为 $4\pi R^3/3$ 的质点对该点所产生的引力，犹如球的质量全部集中在球心上；

(3) 对球内一点 $\boldsymbol{p}$ 所产生的引力，等于半径为 $l$（点 $\boldsymbol{p}$ 到球心的距离）的球体对点 $\boldsymbol{p}$ 所产生的引力，犹如球面上一切点，当它们到球心的距离大于点 $\boldsymbol{p}$ 到球心的距离时，对 $\boldsymbol{p}$ 点的引力不作贡献. □

通过以上四个例子，读者应当学会物理学家心目中产生积分的方法——“微元法”，即先取一个很小的面积元素或体积元素，再乘以相应的数或量，然后求和便得到积分. 在这里，并不是像数学家那样来思考，对一个分割，作成 Riemann 和，然后考虑 $\|\pi\|\to 0$ 时积分和的极限，还要论证这个极限的存在和数值不依赖于值点的选取. 这是因为许多物理问题中所涉及的函数和映射，都具有连续的性质，积分的存在就是确定无疑的，因此微元法的合理性是有保证的.

## 练 习 题 10.9

1. 设有半径为 $R$ 的均匀圆盘，其密度为 $\mu$. 过圆心且与圆垂直的直线上有一密度为 $\rho$ 的均匀细棒，棒长为 $l$，其近圆盘的一端与圆心相距 $a$. 求圆盘对细棒的引力.
2. 一圆锥与半球相接构成密度为 $\rho$ 的均匀球锥，球半径为 $R$，圆锥的顶角为 $2\alpha$. 试计算球锥对其顶点的引力.

# 第 11 章 曲 线 积 分

设 $\Gamma$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一条可求长曲线，$\Gamma$ 上分布着某种物质，其质量分布的(线)密度是 $\rho(\boldsymbol{r})=\rho(x,y,z)$. 如何求曲线 $\Gamma$ 上的总质量?

如果在 $\Gamma$ 上密度 $\rho$ 是一个常数 $c$，这就是说，$\Gamma$ 上的质量是均匀分布的，因此 $\Gamma$ 上的总质量就是 $s(\Gamma)c$，这里 $s(\Gamma)$ 表示 $\Gamma$ 的弧长. 如果在 $\Gamma$ 上质量不是均匀分布的，那就要按照下述办法来处理. 设 $\Gamma$ 的两个端点为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$(当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 时，$\Gamma$ 是一条封闭曲线)，在 $\Gamma$ 上顺次插入一些分点 $\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n$，使得 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{A},\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{B}$. 令 $\Delta s_i=s(\widehat{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i})$，它表示 $\Gamma$ 的第 $i$ 段弧的弧长($i=1,2,\cdots,n$). 在弧 $\widehat{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i}$ 上任取一点 $\boldsymbol{\xi}_i$，那么 $\rho(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta s_i$ 就可以看成是第 $i$ 段弧上质量的一个近似值，而和式

$$\sum_{i=1}^{n}\rho(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta s_i$$

就是 $\Gamma$ 上总质量的一个近似值. 把这种分割无限加细，即考虑极限

$$\lim_{\max\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta s_i.$$

如果这个极限是有限的数，并且不依赖于点 $\boldsymbol{\xi}_i$ 在 $\Gamma$ 的第 $i$ 段弧上的选择，那么理所当然地把这一极限当作 $\Gamma$ 上的总质量. 这就导致了第一型曲线积分的定义，我们加上了“第一型”这一定语，乃是为了区别在 11.2 节中将定义的另一类曲线积分.

## 11.1 第一型曲线积分

首先，我们给出:

**定义 11.1.1** 设 $\Gamma$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一条可求长曲线,$f:\Gamma\to\mathbf{R}$,$\Gamma$ 的两个端点分别记为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$. 在 $\Gamma$ 上依次取一列点 $\{\boldsymbol{r}_i: i=0,1,\cdots,n\}$,使得 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{B}$. 我们称 $\overset{\frown}{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i}$ 为 $\Gamma$ 的第 $i$ 段曲线. 令 $\Delta s_i=s(\overset{\frown}{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i})$,即 $\Gamma$ 的第 $i$ 段曲线的弧长. 在 $\overset{\frown}{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i}$ 上任取一点 $\boldsymbol{\xi}_i(i=1,2,\cdots,n)$. 如果极限

$$\lim_{\max\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta s_i \tag{1}$$

是一个有限数,并且其值不依赖于点 $\boldsymbol{\xi}_i$ 在 $\overset{\frown}{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i}$ 上的选择,那就把这个极限值记为

$$\int_{\Gamma}f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}s \quad \text{或} \quad \int_{\Gamma}f(x,y,z)\mathrm{d}s,$$

称之为函数 $f$ 在 $\Gamma$ 上的**第一型曲线积分**.

有了这一定义之后,那么当可求长曲线 $\Gamma$ 上有密度函数 $\rho$ 时,曲线 $\Gamma$ 上的质量就是曲线积分 $\int_{\Gamma}\rho\mathrm{d}s$ .

如果 $f(\boldsymbol{r})=1$ 对 $\boldsymbol{r}\in\Gamma$ 成立,则有

$$\int_{\Gamma}\mathrm{d}s = s(\Gamma),$$

即曲线 $\Gamma$ 的弧长. 如何计算曲线的弧长,在本教材上册 7.1 节中有过详细的讨论.

从根本上说,第一型曲线积分的定义并不包含新奇的意义,它体现的只不过是在建立定积分、二重积分和三重积分时使用过的同样的方法.

现在来看看如何计算第一型曲线积分. 设 $\Gamma$ 是一条光滑曲线,也就是说,$\Gamma$ 有向量参数表示 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$,并且有连续的、非零的导向量. 设 $\Gamma$ 上的那些分点 $\boldsymbol{r}_i$ 对应于参数 $t_i$,即 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}(t_i)(i=0,1,\cdots,n)$,且 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta$;又设 $\boldsymbol{\xi}_i\in\overset{\frown}{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i}$ 所对应的参数为 $\eta_i\in[t_{i-1},t_i]$,即 $\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{r}(\eta_i)(i=1,2,\cdots,n)$. 已知曲线 $\Gamma$ 上变点的弧长是

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t}\|\boldsymbol{r}'(\tau)\|\mathrm{d}\tau.$$

由此可知

$$\Delta s_i = s(t_i)-s(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\boldsymbol{r}'(\tau)\|\mathrm{d}\tau.$$

对上式的右边应用积分中值定理,得

$$\Delta s_i = \|\boldsymbol{r}'(\zeta_i)\|(t_i-t_{i-1}) = \|\boldsymbol{r}'(\zeta_i)\|\Delta t_i,$$

式中 $\zeta_i\in[t_{i-1},t_i](i=1,2,\cdots,n)$. 这样,式(1)变为

$$\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f \circ \boldsymbol{r}(\eta_i) \| \boldsymbol{r}'(\zeta_i) \| \Delta t_i .$$

在 $\Gamma$ 为光滑曲线的假设下,$\max \Delta s_i \to 0$ 等价于 $\max \Delta t_i \to 0$,因此上式相当于

$$\lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f \circ \boldsymbol{r}(\eta_i) \| \boldsymbol{r}'(\zeta_i) \| \Delta t_i . \tag{2}$$

一般地,$\eta_i \neq \zeta_i$,因此式(2)右边的和式不是某个函数的积分和,但是 $\eta_i$ 与 $\zeta_i$ 是在同一个区间$[t_{i-1}, t_i]$之内的.在定理的条件下,把它们统一起来写成

$$\lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f \circ \boldsymbol{r}(\eta_i) \| \boldsymbol{r}'(\eta_i) \| \Delta t_i , \tag{3}$$

这对极限值并无影响,这中间的理由我们已在定理 7.1.1 的证明中严格说明过,若再重复就显得多余了.在那个证明中,我们把三个这样的点"统一起来"了,这种方法将在下一节的定理 11.2.1 的证明中再次运用,在那里,我们更不提这种多余的话了.

这时,式(3)右边的和式已是一个 Riemann 和,因此式(3)就等于

$$\int_{\alpha}^{\beta} f \circ \boldsymbol{r}(t) \| \boldsymbol{r}'(t) \| \mathrm{d}t . \tag{4}$$

现在,把前面推导的结果写成定理的形式.

**定理 11.1.1** 设 $\Gamma$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一段光滑曲线,有向量参数表示 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$,函数 $f: \Gamma \to \mathbf{R}$ 连续,那么

$$\int_{\Gamma} f \mathrm{d}s = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \boldsymbol{r}(t) \| \boldsymbol{r}'(t) \| \mathrm{d}t . \tag{5}$$

也就是说,第一型曲线积分可以化成定积分来计算.

**推论 11.1.1** 设平面曲线 $\Gamma$ 有显式表达 $y = \varphi(x)(a \leqslant x \leqslant b)$,其中 $\varphi$ 在 $[a, b]$上连续,那么

$$\int_{\Gamma} f \mathrm{d}s = \int_{a}^{b} f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} \mathrm{d}x . \tag{6}$$

为了方便读者,我们把这个计算过程总结如下.

(1) 求出 $\Gamma$ 的一个向量参数方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$;

(2) 计算弧元 $\mathrm{d}s = \| \boldsymbol{r}'(t) \| \mathrm{d}t$;

(3) 计算定积分 $\int_{\alpha}^{\beta} f \circ \boldsymbol{r}(t) \| \boldsymbol{r}'(t) \| \mathrm{d}t$.

**例 1** 计算第一型曲线积分 $\int_{\Gamma} \frac{z^2}{x^2 + y^2} \mathrm{d}s$,其中 $\Gamma$ 为圆柱螺线:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

**解** 这时参数方程已经给出,只需进行直接的计算,我们有 $\mathrm{d}s = \sqrt{a^2 + b^2} \mathrm{d}t$,

因此

$$\int_{\Gamma}\frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\left(\frac{b}{a}\right)^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}t^2\mathrm{d}t=\frac{8}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2\sqrt{a^2+b^2}\pi^3.\qquad\square$$

**例 2**　计算$\int_{\Gamma}xy\mathrm{d}s$，其中 $\Gamma$ 为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$与平面 $x+y+z=0$ 交成的圆周

**解**　我们首先应为 $\Gamma$ 选取一个向量参数方程．由于 $\Gamma$ 所在平面的法向量为$(1,1,1)$，我们取

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1),\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\quad \boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),$$

这是三个互相垂直的单位向量，$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 张成 $\Gamma$ 所在的平面．因此，$\Gamma$ 的向量方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\theta)=\alpha(\boldsymbol{e}_1\cos\theta+\boldsymbol{e}_2\sin\theta)\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

这时弧元 $\mathrm{d}s=a\mathrm{d}\theta$，而

$$x=a\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right),$$

$$y=a\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\cos\theta\right),$$

$$z=a\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right).$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma}xy\mathrm{d}s&=a^3\int_0^{2\pi}\left[-\frac{2}{\sqrt{6}}\cos^2\theta-\sqrt{\frac{2}{6}}\sin\theta\cos\theta\right]\mathrm{d}\theta\\&=-\frac{1}{3}a^3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{3}\pi a^3.\end{aligned}$$

以上表述的是常规的算法．对本题而言，还有一种特殊的解法．结合代数与几何的对称性，可知

$$\int_{\Gamma}xy\mathrm{d}s=\int_{\Gamma}yz\mathrm{d}s=\int_{\Gamma}zx\mathrm{d}s,$$

从而有

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma}xy\mathrm{d}s&=\frac{1}{3}\int_{\Gamma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{6}\int_{\Gamma}((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2))\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{6}\int_{\Gamma} a^2 \mathrm{d}s = -\frac{1}{6}a^2 s(\Gamma) = -\frac{1}{6}a^2 2\pi a = -\frac{1}{3}\pi a^3.$$ □

下面我们将从另一个物理问题，即在力场中运动着的质点做功的问题，来引入另一类曲线积分，即第二型曲线积分.

## 练 习 题 11.1

计算下列曲线积分：

(1) $\int_{\Gamma}(x^2+y^2)^n \mathrm{d}s$, $\Gamma$: $x = a\cos t, y = a\sin t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$;

(2) $\int_{\Gamma}(x+y)\mathrm{d}s$, $\Gamma$: 顶点为 $(0,0),(1,0),(0,1)$ 的三角形的边界;

(3) $\int_{\Gamma} z\mathrm{d}s$, $\Gamma$: 圆锥螺线 $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t\,(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;

(4) $\int_{\Gamma} x^2\mathrm{d}s$, $\Gamma$: 圆周 $x^2+y^2+z^2 = a^2, x+y+z = 0$;

(5) $\int_{\Gamma} y^2\mathrm{d}s$, $\Gamma$: 旋轮线的一拱, $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

# 11.2 第二型曲线积分

设区域 $D \subset \mathbf{R}^3$，在 $D$ 上定义了一个向量值函数 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r} \in D)$. 这时我们说 $\boldsymbol{F}$ 是在 $D$ 上定义的一个**向量场**. 在实际中，它可以是力场、电场、磁场、速度场等等.

同时，在 $D$ 中还有一条**有向曲线** $\Gamma$. 所谓有向曲线是指，它是通常的一条曲线但还带有前进的方向. 例如，端点 $\boldsymbol{A}$ 是它的起点，而另一端点 $\boldsymbol{B}$ 是它的终点，一旦指明了起点和终点，就等于给这一曲线**定了方向**. 为了进行讨论，应当设 $\Gamma$ 是可求长的.

设想一个质点在力场 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，自 $\Gamma$ 的起点 $\boldsymbol{A}$ 运动到终点 $\boldsymbol{B}$，我们要来计算力场所做的功，称之为**力场 $\boldsymbol{F}$ 在有向曲线 $\Gamma$ 上所做的功**. 从 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 在 $\Gamma$ 上插入若干分点 $\{\boldsymbol{r}_i : i = 0,1,\cdots,n\}$，使得 $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{B}$. 如果这些分点足够细密，那么质点沿着由 $\boldsymbol{r}_{i-1}$ 到 $\boldsymbol{r}_i$ 这一段弧 $\widehat{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i}$ 上的运动，可以看成是在直线段 $\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i$ 上的

运动，并且在这一段弧上，力场 $\boldsymbol{F}$ 基本上是一常力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_i)$，其中点 $\boldsymbol{\xi}_i$ 可以在这一段弧上任取．这一段有方向的弧段 $\overparen{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i}$ 称为 $\Gamma$ 的第 $i$ 段，在这一段上力场 $\boldsymbol{F}$ 所做的功

$$W_i \approx \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_i) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_i) \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}),$$

因此力场 $\boldsymbol{F}$ 在 $\Gamma$ 上所做的功

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i,$$

这里 $\Delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$．如果我们要得到 $W$ 的精确值，那就应当把这种分割"无限细分"下去．

沿着我们走过多次的"熟路"，到此就会明确地知道应当朝哪个方向走下去．我们给出：

**定义 11.2.1**　设 $\Gamma$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中一段可求长的有向曲线，映射 $\boldsymbol{F}:\Gamma \to \mathbf{R}^3$．$\Gamma$ 的起点记为 $\boldsymbol{A}$，终点记为 $\boldsymbol{B}$．在 $\Gamma$ 上按从 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的方向顺次取一列点 $\{\boldsymbol{r}_i : i=0,1,\cdots,n\}$，使得 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{B}$．令 $\Delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$．如果对在 $\Gamma$ 的弧段 $\overparen{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i}$ 上任取的点 $\boldsymbol{\xi}_i$，极限

$$\lim_{\max\|\Delta \boldsymbol{r}_i\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i \tag{1}$$

为一确定的有限数，则将这个数记为

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{2}$$

称它是向量值函数 $\boldsymbol{F}$ 沿有向曲线 $\Gamma$ 上的**第二型曲线积分**．

从定义 11.1.1 和定义 11.2.1 来看，无论是第一型还是第二型曲线积分，其运算性质（例如，常数因子可以提到积分号的外面，积分的可加性等等）同定积分和重积分的相应性质没有两样．但是，对第二型曲线积分来说，有一条很特殊的性质需要指明，那就是它的方向性．设 $\Gamma$ 是一条有向曲线，如果我们把它的走向颠倒过来，得出的另一条定向曲线记为 $-\Gamma$．由定义 11.2.1，可以看到

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = -\int_{-\Gamma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p}.$$

由此可见，如果我们没有把定向弄正确，那么计算的结果就差一个负号．

关于第二型曲线积分的计算，我们有：

**定理 11.2.1**　设 $\Gamma$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中一段可求长的有向曲线，连续映射 $\boldsymbol{F}:\Gamma \to \mathbf{R}^3$．又设 $\Gamma$ 具有参数向量方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$，并且**参数 $t$ 的增加对应着 $\Gamma$ 的定向**，那么有

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t. \tag{3}$$

**证明** 对在定义 11.2.1 中谈到的那一列分点$\{\boldsymbol{r}_i\}$,可设 $\boldsymbol{r}(t_i)=\boldsymbol{r}_i(i=0,1,\cdots,n)$,其中 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta$.在 $\Gamma$ 的弧段 $\widehat{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i}$ 上的那个点 $\boldsymbol{\xi}_i$,可设 $\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{r}(\tau_i)$,其中 $\tau_i\in[t_{i-1},t_i](i=1,2,\cdots,n)$.由于

$$\Delta\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1} = \boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1}) \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_i) \cdot \Delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{r}(\tau_i) \cdot (\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})).$$

令 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$,$\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$,那么上式的右边便可写成

$$\sum_{i=1}^{n} P \circ \boldsymbol{r}(\tau_i)(x(t_i) - x(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^{n} Q \circ \boldsymbol{r}(\tau_i)(y(t_i) - y(t_{i-1}))$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} R \circ \boldsymbol{r}(\tau_i)(z(t_i) - z(t_{i-1})). \tag{4}$$

由微分中值定理,可得

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\lambda_i)\Delta t_i,$$
$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\mu_i)\Delta t_i,$$
$$z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(\nu_i)\Delta t_i,$$

这里 $\lambda_i,\mu_i,\nu_i\in[t_{i-1},t_i](i=1,2,\cdots,n)$.从而式(4)可以写成

$$\sum_{i=1}^{n} P \circ \boldsymbol{r}(\tau_i)x'(\lambda_i)\Delta t_i + \sum_{i=1}^{n} Q \circ \boldsymbol{r}(\tau_i)y'(\mu_i)\Delta t_i + \sum_{i=1}^{n} R \circ \boldsymbol{r}(\tau_i)z'(\nu_i)\Delta t_i. \tag{5}$$

注意到在定理的条件下,$\max\|\Delta\boldsymbol{r}_i\|\to 0$ 等价于 $\max\Delta t_i\to 0$.由式(3)及式(5),得

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\alpha}^{\beta} (P \circ \boldsymbol{r}(t)x'(t) + Q \circ \boldsymbol{r}(t)y'(t)$$
$$+ R \circ \boldsymbol{r}(t)z'(t))\mathrm{d}t. \tag{6}$$

采用向量内积的记号,上式的右边便是

$$\int_{\alpha}^{\beta} \boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t,$$

这样就证明了公式(3)的正确性. □

令 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$表示曲线 $\Gamma$ 上的径向量,那么 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$.设 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$,于是

$$\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

因此,第二型曲线积分(2)又有一种记法:

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

这时，式(6)可以写成

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\\ &\quad = \int_\alpha^\beta (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)\\ &\qquad + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{7}$$

**例 1** 计算第二型曲线积分：

$$\int_K xy\mathrm{d}x,\quad \int_L xy\mathrm{d}x,\quad \int_M xy\mathrm{d}x,$$

其中 $K$ 是从(0,0)到(1,1)的直线段，$L$ 是从(0,0)到(1,1)的抛物线 $y=x^2$ 的一段，$M$ 是由从(0,0)到(1,0)的一段直线 $M_1$ 和从(1,0)到(1,1)的直线段 $M_2$ 连成的有向折线.

**解** $K$ 和 $L$ 的方程分别是 $y=x$ 和 $y=x^2$，$x$ 从 0 变到 1，因此

$$\int_K xy\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3},$$

$$\int_L xy\mathrm{d}x = \int_0^1 x\cdot x^2\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

最后

$$\int_M xy\mathrm{d}x = \int_{M_1} xy\mathrm{d}x + \int_{M_2} xy\mathrm{d}x.$$

在 $M_1$ 上 $y=0$，而在 $M_2$ 上 $x=1$，所以 $\mathrm{d}x=0$，总起来有

$$\int_M xy\mathrm{d}x = 0.$$ □

**例 2** 设 $\Gamma$ 是由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 交成的圆周，从第一卦限内看 $\Gamma$，它的方向是逆时针方向. 计算第二型曲线积分

$$\int_\Gamma x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z.$$

**解** 利用 11.1 节中的例 2 已得的结果，写出 $\Gamma$ 的参数方程

$$x = a\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right),$$

$$y = -a\frac{2}{\sqrt{6}}\cos\theta,$$

$$z = a\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right).$$

为了与 $\Gamma$ 的定向相匹配，参数 $\theta$ 的变化范围应是从 0 变成 $2\pi$，这是因为我们很容易证明 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 组成相互正交的右手系（它们的坐标组成的三阶行列式为 1）.

由于

$$\int_\Gamma y\mathrm{d}y = -\frac{2}{3}a^2\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = 0,$$

由对称性

$$\int_\Gamma x\mathrm{d}x = \int_\Gamma z\mathrm{d}z = 0,$$

所以 $\int_\Gamma x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = 0$.

事实上，不通过具体计算也能看出这一结果. 设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 是 $\Gamma$ 上点的径向量，于是，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}=a^2$，所以 $\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$ 在 $\Gamma$ 上成立，因而 $\int_\Gamma \boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$. □

既然第一型和第二型曲线积分都可化成定积分来计算，我们就应当看看它们之间有什么联系.

设 $s$ 为 $\Gamma$ 的弧长参数，弧长的增长正好对应着 $\Gamma$ 的正方向. 在 9.5 节中我们已经知道 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{t}(s)$ 是曲线 $\Gamma$ 的单位切向量，由此可得 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{t}(s)\mathrm{d}s$，那么

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s,$$

即

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_\Gamma (P\cos(\boldsymbol{t},\boldsymbol{i}) + Q\cos(\boldsymbol{t},\boldsymbol{j}) + R\cos(\boldsymbol{t},\boldsymbol{k}))\mathrm{d}s. \tag{8}$$

上式的右边就是一个第一型曲线积分. 在使用公式(8)时，一定要注意让单位切向量指着 $\Gamma$ 的正方向.

## 练 习 题 11.2

1. 计算下列第二型曲线积分：

(1) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，$\Gamma$ 表示逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=a^2$；

(2) $\displaystyle\int_\Gamma (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$，$\Gamma$ 表示逆时针方向的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$；

(3) $\displaystyle\int_\Gamma (x^2-2xy)\mathrm{d}x + (y^2-2xy)\mathrm{d}y$，$\Gamma$：$x=y^2(-1\leqslant y\leqslant 1)$，沿 $y$ 增加的方向；

(4) $\displaystyle\int_\Gamma x\mathrm{d}y$，$\Gamma$：直线 $2x+y=1$ 与两坐标轴组成的三角形，沿逆时针方向；

(5) $\int_{\Gamma}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$，$\Gamma$ 是直线 $x=1,x=3$ 和 $y=1,y=4$ 构成的矩形，沿逆时针方向.

2. 设常数 $a,b,c$ 满足 $ac-b^2>0$. 计算积分

$$\int_{\Gamma}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{ax^2+2bxy+cy^2},$$

其中 $\Gamma$ 为逆时针方向的单位圆周.

3. 计算下列第二型曲线积分，曲线的正向是参数增加的方向：

(1) $\int_{\Gamma}xz^2\mathrm{d}x+yx^2\mathrm{d}y+zy^2\mathrm{d}z$，$\Gamma$：$x=t,y=t^2,z=t^3(0\leqslant t\leqslant 1)$；

(2) $\int_{\Gamma}(y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$，$\Gamma$：$x=a\sin^2 t$，$y=2a\sin t\cos t$，$z=a\cos^2 t$ $(0\leqslant t\leqslant \pi)$.

4. 计算 $\int_{\Gamma}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为球面片 $x^2+y^2+z^2=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$ 的边界，方向是 $(1,0,0)\to(0,1,0)\to(0,0,1)\to(1,0,0)$.

5. 证明：$\left|\int_{\Gamma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}\right|\leqslant\int_{\Gamma}\|\boldsymbol{F}\|\mathrm{d}s$.

## 11.3 Green 公式

在一定的条件下，沿着平面区域的边界的第二型曲线积分，可以转化成在这个区域上的二重积分，我们首先来讨论两种比较特殊的平面区域.

考察 $\mathbf{R}^2$ 中的闭区域

$D=\{(x,y):\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x),a\leqslant x\leqslant b\}$，

这里 $\varphi,\psi:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是连续函数，并且 $\varphi\leqslant\psi$. 为了行文方便，我们把像 $D$ 这样的区域称为甲类区域. 按照下列法则给 $D$ 的边界 $\partial D$ 定向：当一个人沿着 $\partial D$ 行进的时候，区域 $D$ 总在这个人的左手边(图 11.1).

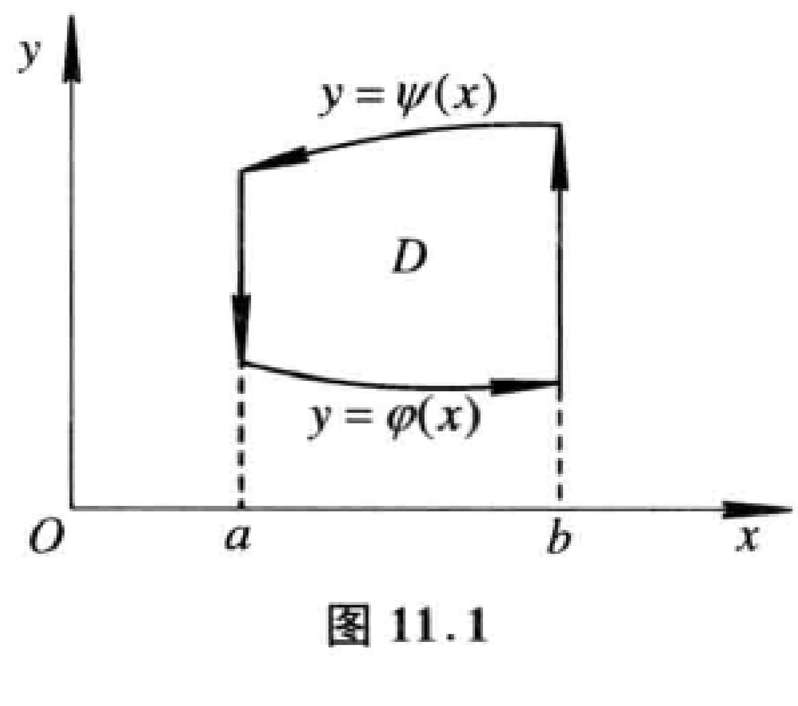


图 11.1

设函数 $P:D\to\mathbf{R}$ 连续且有连续的偏导数. 我们来计算第二型曲线积分 $\int_{\partial D}P\mathrm{d}x$. 把 $\partial D$ 分成四段 $K,L,M$ 和 $N$：

$$\begin{aligned}
&K: y = \varphi(x), \quad a \leqslant x \leqslant b;\\
&L: x = b, \quad \varphi(b) \leqslant y \leqslant \psi(b);\\
&M: y = \psi(x), \quad b \geqslant x \geqslant a;\\
&N: x = a, \quad \psi(a) \geqslant y \geqslant \varphi(a).
\end{aligned}$$

它们都是定向的曲线,满足

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x = \int_K P\mathrm{d}x + \int_L P\mathrm{d}x + \int_M P\mathrm{d}x + \int_N P\mathrm{d}x.$$

在直接段 $L$ 和 $N$ 上,$x$ 都是常数,应有 $\mathrm{d}x=0$,所以

$$\int_L P\mathrm{d}x = \int_N P\mathrm{d}x = 0.$$

从而有

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} P\mathrm{d}x &= \int_K P\mathrm{d}x + \int_M P\mathrm{d}x\\
&= \int_a^b P(x,\varphi(x))\mathrm{d}x + \int_b^a P(x,\psi(x))\mathrm{d}x\\
&= \int_a^b (P(x,\varphi(x)) - P(x,\psi(x)))\mathrm{d}x\\
&= -\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&= -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

这样,我们把沿 $\partial D$ 的第二型曲线积分,转化为展布在 $D$ 上的二重积分:

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x = \iint\limits_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1}$$

设 $\mathbf{R}^2$ 中的闭区域 $\Omega$ 可以分拆为有限个甲类区域 $D_1, D_2, \cdots, D_m$ 的并集,这些区域中的任意两个没有公共的内点:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^m D_i.$$

如果函数 $P$ 在 $\Omega$ 上连续且有连续的偏导数,那么有

$$\iint\limits_\Omega \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^m \iint\limits_{D_i} \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^m \int_{\partial D_i} P\mathrm{d}x.$$

设 $D_i$ 与 $D_j$ 是相邻的两个区域,它们有一段公共的边界,把它看成 $\partial D_i$ 的边界和 $\partial D_j$ 的边界时,定向正好相反,这将使得沿这一段公共边界的两个积分互相抵消(图 11.2).这就是说,

$$\sum_{i=1}^m \int_{\partial D_i} P\mathrm{d}x = \int_{\partial \Omega} P\mathrm{d}x.$$

于是，我们得到

$$\int_{\partial\Omega} P\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m}\int_{\partial D_i} P\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m}\iint_{D_i}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

即

$$\int_{\partial\Omega} P\mathrm{d}x = \iint_{\Omega}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所谓“乙类区域”，是指这样的区域：

$$D = \{(x,y): \lambda(y) \leqslant x \leqslant \mu(y), c \leqslant y \leqslant d\},$$

见图 11.3.

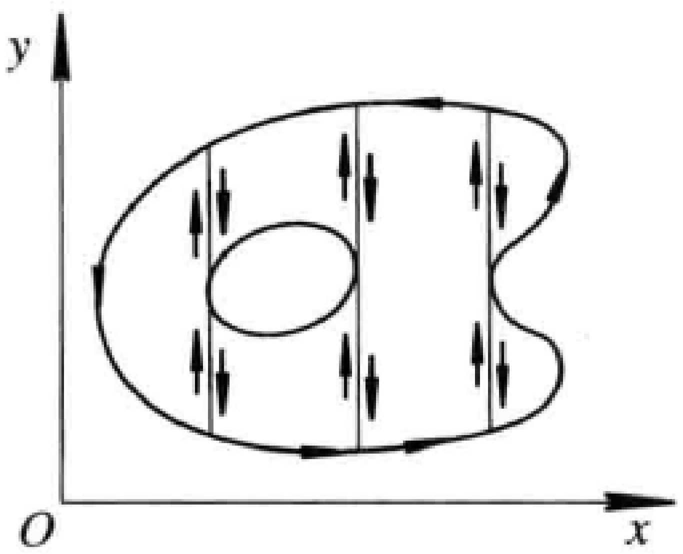



图 11.2

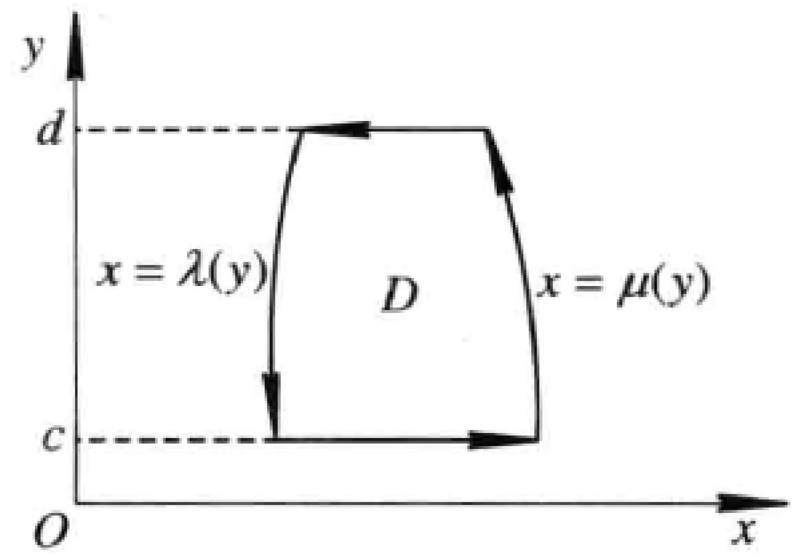



图 11.3

如果函数 $Q: D\to\mathbf{R}$ 连续并有连续的**偏导数**，与对甲类区域的讨论相似，可以得到

$$\int_{\partial D} Q\mathrm{d}y = \iint_{D}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

综合以上两种情形，就可以得到这样的结论：设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭区域，它既可以分拆为有限个甲类区域，又可以分拆为有限个乙类区域（在许多具体问题中，所涉及的闭区域都能满足这种条件）. 如果函数 $P$ 和 $Q$ 在 $\Omega$ 上连续且有连续的偏导数，那么有

$$\int_{\partial\Omega} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 $\partial D$ 是定向曲线，我们已对它的正向作过规定.

其实，上述公式对更一般的区域也能成立，我们把结论写成下面的定理.

**定理 11.3.1**（Green（格林，1793～1841）） 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是由有限条分段光滑的曲线围成的闭区域. 如果函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 $\Omega$ 上连续，并有连续的偏导数 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$，那么有

$$\int_{\partial\Omega} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (\text{Green 公式}),$$

其中$\partial\Omega$是区域$\Omega$的边界.它的定向是这样被确定的:一个人沿着$\partial\Omega$的正方向行进时,区域$\Omega$总在这个人的左边.

平面图形的面积,在一定的条件下,也可以用第二型曲线积分计算.

**例 1** 设$D$是适合 Green 公式的平面闭区域,则有

$$\sigma(D) = \int_{\partial D} x\mathrm{d}y = -\int_{\partial D} y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

**证明** 利用 Green 公式,可得

$$\int_{\partial D} x\mathrm{d}y = \iint_{D} \frac{\partial x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D}\mathrm{d}\sigma.$$

这就是

$$\sigma(D) = \int_{\partial D} x\mathrm{d}y.$$

同理,可得

$$\sigma(D) = -\int_{\partial D} y\mathrm{d}x.$$

将以上两式相加,得

$$\sigma(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$ □

**例 2** 计算椭圆的面积.

**解** 椭圆的参数方程是

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

由例 1 的结果,知

$$\sigma(D) = \int_{\partial D} x\mathrm{d}y = ab\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t = \pi ab.$$ □

**例 3** 计算积分

$$\int_{\Gamma} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2},$$

其中$\Gamma$是单位圆周:$x^2 + y^2 = 1$,正向是逆时针方向.

**解** 注意到$x^2 + y^2 = 1$,所以

$$\int_{\Gamma} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \int_{\Gamma} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \text{单位圆面积的 2 倍} = 2\pi.$$

如果令

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2},$$

直接计算,易知

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (x^2+y^2>0).$$

可见这时不能应用 Green 公式,原因是在原点处 $P, Q$ 和它们的偏导数不连续. □

**例 4** 计算积分

$$A = \int_\Gamma \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

其中 $\Gamma$ 是任意一条包含原点(不通过原点)的分段光滑的封闭曲线.

**解** 由于 $\Gamma$ 是有界闭集,所以它到原点的最近距离为正数.作一个以原点为中心、以充分小的 $\varepsilon>0$ 为半径的圆周 $C_\varepsilon$,它的正向仍定义为逆时针方向,使得 $\Gamma$ 与 $C_\varepsilon$ 夹成一个区域 $D$(图 11.4). 这时,

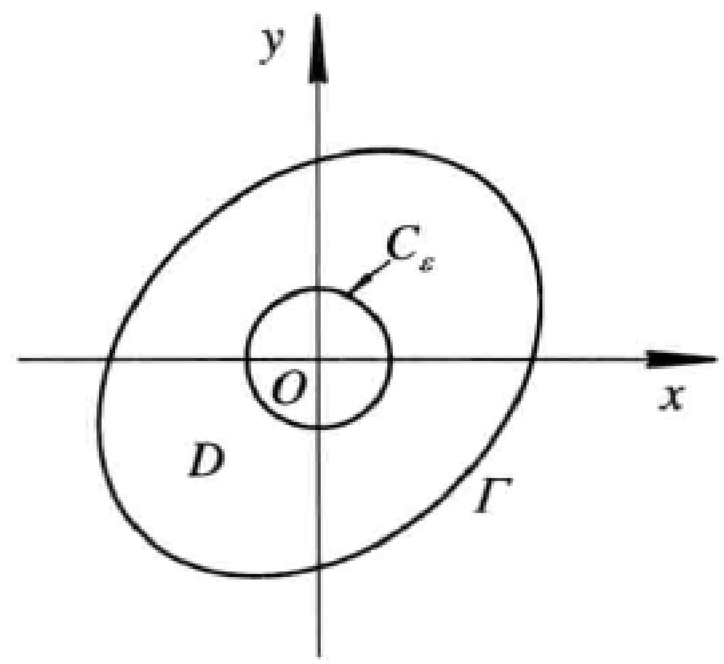



图 11.4

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2}$$

满足 Green 公式的一切条件,并且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

利用 Green 公式,可得

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

由于$\partial D$ 由 $\Gamma$ 与 $-C_\varepsilon$ 组成,由此可知

$$\begin{aligned} A &= \int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_{-C_\varepsilon} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ &= \int_{C_\varepsilon} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C_\varepsilon} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} 2\pi\varepsilon^2 = 2\pi. \end{aligned}$$

□

这个结果令人有点吃惊.其实,当我们注意到被积表达式

$$\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \mathrm{d}\theta,$$

这里 $\theta$ 是径向量$(x, y)$的辐角,就能看出,当点$(x, y)$在无论怎样一条原点在其内

部的闭曲线上绕行一周之后，辐角的增量总是 $2\pi$.

利用 11.2 节的式(8)，容易得到下面用第一型曲线积分表达的 Green 公式：

$$\int_{\Gamma}(P\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})+Q\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}))\mathrm{d}s=\iint_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲线 $\Gamma$ 上点的单位外法向量.

事实上，由图 11.5，容易看出

$$(\boldsymbol{t},\boldsymbol{i})=\pi-(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}),\quad (\boldsymbol{t},\boldsymbol{j})=(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}).$$

于是由 11.2 节的式(8)，立刻得到

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma}(P\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})+Q\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}))\mathrm{d}s&=\int_{\Gamma}((-Q)\cos(\boldsymbol{t},\boldsymbol{i})+P\cos(\boldsymbol{t},\boldsymbol{j}))\mathrm{d}s\\&=\iint_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial(-Q)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

这就是式(2).

作为 Green 公式的一个应用，我们给出平面区域中曲线积分与路径无关的条件.

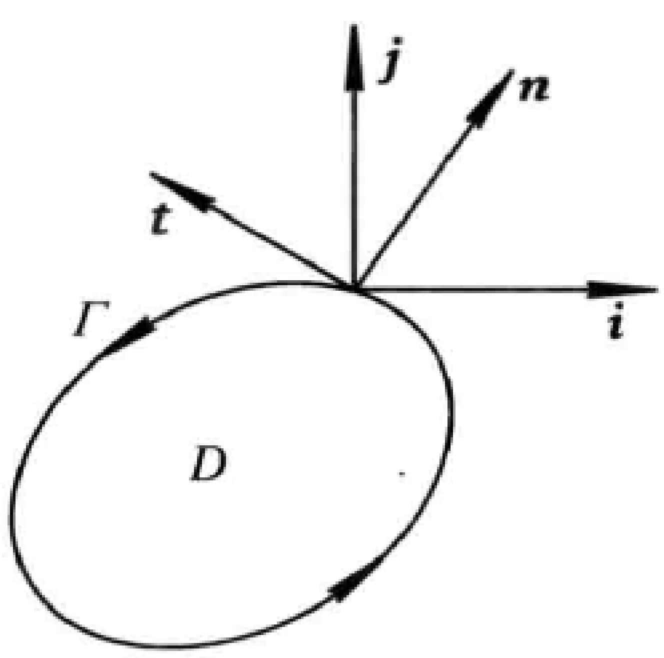



图 11.5

设 $D$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个区域，$A,B$ 是 $D$ 中任意的两点，在 $D$ 中连接 $A,B$ 两点的路径有很多条. 设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 是 $D$ 上的两个连续函数，任取连接 $A,B$ 两点的分段光滑曲线 $\Gamma$，那么曲线积分

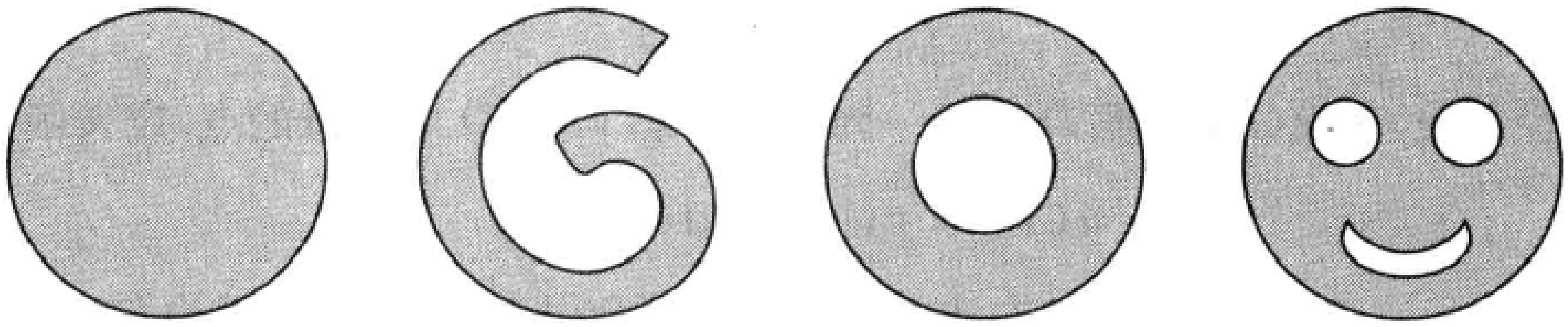
$$\int_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \tag{3}$$

除了与 $A,B$ 两点有关，当然也与路径 $\Gamma$ 有关. 如果对任意连接 $A,B$ 两点的分段光滑曲线 $\Gamma$，积分(3)都取相同的数值，我们就说曲线积分(3)与路径无关. 下面就要给出曲线积分(3)与路径无关的条件. 为此，我们先给出下面的定义.

**定义 11.3.1** 设 $D$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个区域. 如果 $D$ 中由任何简单曲线(即自身不相交的曲线)围成的有界区域全部包含在 $D$ 中，就称 $D$ 是**单连通**的，否则就说 $D$ 是**多连通**的.

例如，图 11.6(a)和(b)是单连通区域，(c)和(d)则是多连通区域.

我们有下面的定理.



(a) (b) (c) (d)

图 11.6

**定理 11.3.2** 设 $D$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的单连通区域,函数 $P,Q,\dfrac{\partial Q}{\partial x}$和$\dfrac{\partial P}{\partial y}$都在$D$上连续,那么以下四个条件等价:

(1) 对 $D$ 中任意的分段光滑的闭曲线$\Gamma$,有

$$\int_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0;$$

(2) 对 $D$ 中任意的两条连接$A$ 和$B$ 的分段光滑曲线$\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$,有

$$\int_{\Gamma_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

即曲线积分(3)与路径无关;

(3) 存在 $D$ 上连续可微的函数$u(x,y)$,使得

$$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y;$$

(4) 在 $D$ 上,有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

**证明** 我们按(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(1)的顺序给出定理的证明.

(1)⇒(2) 设 $A,B$ 是$D$ 中任意的两点,$\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$ 是$D$ 中任意两条从$A$ 到$B$ 的分段光滑曲线.记 $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2^-$(图 11.7),它是一条封闭曲线.由(1),知

$$\int_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0,$$

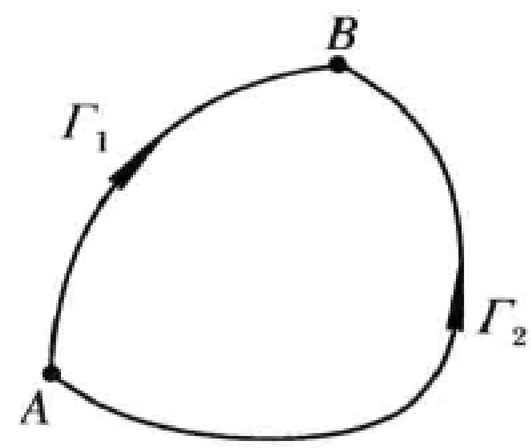



图 11.7

即

$$\int_{\Gamma_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_{\Gamma_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

这就是(2).

(2)⇒(3) 由(2),知曲线积分

$$\int_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

和路径无关.现设$(a,b)$是 $D$ 中的一固定点,$(x,y)$是 $D$ 中任意的点.定义函数

$$u(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y. \tag{4}$$

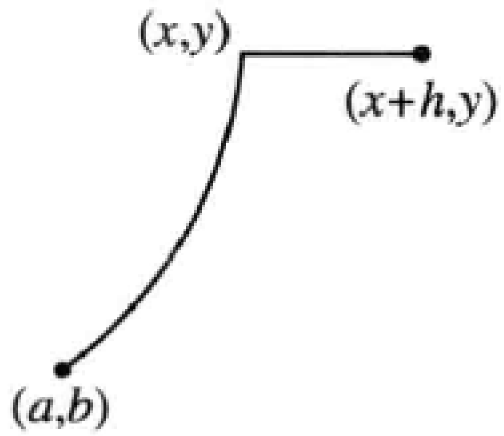



图 11.8

式(4)右边的表示方法不会引起混乱,这是因为右边那个曲线积分与路径无关,仅由终点唯一确定.取$|h|$充分小,使得$(x+h,y)$仍在 $D$ 中.考察

$$u(x+h,y) = \int_{(a,b)}^{(x+h,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y. \tag{5}$$

式(5)中积分的路径选为:点$(a,b)$到点$(x,y)$的路径(即式(4)右边积分的那段路径),以及点$(x,y)$到点$(x+h,y)$连成的直线段(图 11.8).于是有

$$\begin{aligned} u(x+h,y) - u(x,y) &= \int_{(a,b)}^{(x+h,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ &= \int_{x}^{x+h} P(t,y)\mathrm{d}t = P(\xi,y)h, \end{aligned}$$

其中 $\xi$ 介于$x$ 与$x+h$ 之间,这是利用了连续函数的积分平均值定理.由此得

$$\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} = P(\xi,y).$$

在上式中令 $h\to 0$,由 $P$ 的连续性,即得

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = P(x,y).$$

同理,可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

因而有

$$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

这就是(3).

(3)⇒(4) 由(3)知,存在 $u$,使得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q,$$

因而

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

因为$\frac{\partial P}{\partial y}$和$\frac{\partial Q}{\partial x}$都在$D$上连续，即$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$和$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$在$D$上连续，所以有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

(4)⇒(1) 分两种情形来讨论. 先设$\Gamma$是$D$中一条分段光滑的简单闭曲线，把$\Gamma$围成的闭区域记为$G$. 于是由 Green 公式，得

$$\int_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

再设$\Gamma$是$D$中有$n$个自交点的分段光滑闭曲线，可以把它分成$n$个简单闭曲线

$$\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_n.$$

于是

$$\int_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_i}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0.$$ □

简而言之，对单连通区域来说，式(1)与路径无关的充分必要条件是

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

但对多连通区域来说，这个结论不再成立. 例 4 便是一个例子. 对这个例子而言，(4)成立，但(1)不成立.

一般来说，如果$D$是$\mathbf{R}^2$中的多连通区域，定理 11.3.2(1)～(3)仍然相互等价，但(4)与前三项不再等价. (1)与(2)等价十分明显. 为了证明(2)与(3)等价，由于在定理 11.3.2(2)⇒(3)的证明中并未用到$D$是单连通的条件，现在只需证明对一般的区域$D$而言，由(3)可以推得(2)成立. 由(3)知，存在$D$上的连续可微函数$u$，使得

$$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

现在$D$中任取一条从点$\boldsymbol{A}$到点$\boldsymbol{B}$的分段光滑曲线$\Gamma$：

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta).$$

那么$u(x(t),y(t))$也是分段连续可微的，于是

$$\mathrm{d}u(x(t),y(t))=P(x(t),y(t))\mathrm{d}x(t)+Q(x(t),y(t))\mathrm{d}y(t),$$

因而

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y&=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}u(x(t),y(t))\\&=u(x(\beta),y(\beta))-u(x(\alpha),y(\alpha))\\&=u(\boldsymbol{B})-u(\boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

这说明曲线积分$\int_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$与所选路径无关，这就是(2).

**例 5** 计算曲线积分

$$I = \int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x-y)^2},$$

其中 $L$ 是连接 $A=(0,-1)$，$B=(1,0)$，但不通过直线 $y=x$ 的任意路径.

**解** 记 $P=-\dfrac{y}{(x-y)^2}$，$Q=\dfrac{x}{(x-y)^2}$，那么

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x+y}{(x-y)^3} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

因此积分与路径无关. 记点 $C$ 为 $(1,-1)$，选取 $L$ 为线段 $\overline{AC}\cup\overline{CB}$（图 11.9），于是

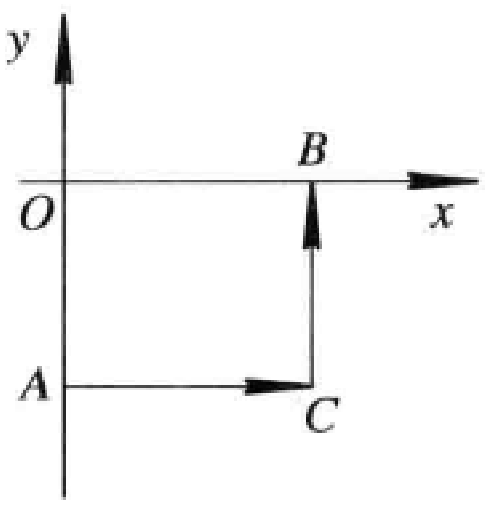


**图 11.9**

$$\int_{\overline{AC}} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x-y)^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \frac{1}{2},$$

$$\int_{\overline{CB}} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x-y)^2} = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}y}{(1-y)^2} = \frac{1}{2},$$

所以

$$I = \int_{\overline{AC}} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x-y)^2} + \int_{\overline{CB}} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x-y)^2} = 1.$$ □

## 练 习 题 11.3

1. 利用 Green 公式，计算下列积分：

(1) $\int_\Gamma xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x$，$\Gamma$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，按逆时针方向；

(2) $\int_\Gamma (x+y)\mathrm{d}x - (x-y)\mathrm{d}y$，$\Gamma$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，按逆时针方向；

(3) $\int_\Gamma \mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x + \mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}y$，$\Gamma$ 为上半圆周 $x^2+y^2=ax$，沿 $x$ 增加的方向.

2. 利用 Green 公式，计算下列曲线围成的面积：

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t\,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(2) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$（提示：令 $y=x\tan\theta$）；

(3) Descartes（笛卡儿，1596～1650）叶形线 $x^3+y^3=3axy\,(a>0)$（提示：令 $y=xt$）.

3. 设封闭曲线 $\Gamma$ 有参数方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

参数增加时指示 $\Gamma$ 的正向. 证明：$\Gamma$ 围成的面积

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\begin{vmatrix}\varphi(t) & \psi(t)\\ \varphi'(t) & \psi'(t)\end{vmatrix}\mathrm{d}t.$$

4. 单变量函数 $f$ 连续可微,$\Gamma$ 是任意一条分段光滑的封闭曲线.证明:

(1) $\int_{\Gamma} f(xy)(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) = 0$;

(2) $\int_{\Gamma} f(x^2 + y^2)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) = 0$;

(3) $\int_{\Gamma} f(x^n + y^n)(x^{n-1}\mathrm{d}x + y^{n-1}\mathrm{d}y) = 0\ (n \in \mathbf{N}^*)$.

5. 设 $\Gamma$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的光滑封闭曲线,用 $\boldsymbol{n}$ 表示 $\Gamma$ 上各点处的单位外法向量.设 $\boldsymbol{a}$ 是一个固定的单位向量,求证:

$$\int_{\Gamma}\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\mathrm{d}s = 0,$$

这里$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})$表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 之间夹成的角.

6. 设 $\Gamma$ 为一条光滑的封闭曲线,$\boldsymbol{n}$ 表示单位外法向量,用$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})$表示 $\boldsymbol{n}$ 与 $x$ 轴正向的夹角,$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})$表示 $\boldsymbol{n}$ 与 $y$ 轴正向的夹角.计算曲线积分

$$\int_{\Gamma}(x\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}) + y\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}))\mathrm{d}s.$$

7. 计算下列曲线积分:

(1) $\int_{L}(x^2 + 2xy - y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - 2xy - y^2)\mathrm{d}y$,其中 $L$ 是连接 $A = (0,0)$,$B = (2,1)$ 的任意光滑线段;

(2) $\int_{L}\frac{(x + y)\mathrm{d}x - (x - y)\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$,其中 $L$ 是位于上半平面从点$(-1,0)$到$(1,0)$的任意光滑线段.

8. 计算曲线积分

$$\int_{\Gamma}\frac{\mathrm{e}^x}{x^2 + y^2}((x\sin y - y\cos y)\mathrm{d}x + (x\cos y + y\sin y)\mathrm{d}y),$$

其中 $\Gamma$ 是原点在其内部的分段光滑的闭曲线.

## 问 题 11.3

1. 设 $P,Q$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数,用 $\Gamma$ 表示以任意点$(x_0,y_0)$为中心、以任意正数 $r$ 为半径的上半圆周.如果

$$\int_{\Gamma}P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0,$$

证明:在 $\mathbf{R}^2$ 上,有 $P = 0,\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$.

2. 证明平面上的 Green 第二公式：

$$\iint_G \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Gamma \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}s,$$

这里 $\Gamma$ 是光滑的封闭曲线，$G$ 是由 $\Gamma$ 所围成的区域，$\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$ 是 $u$，$v$ 沿 $\Gamma$ 的外法线方向的方向导数，$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

3. 设 $\Gamma$ 和 $G$ 如第 2 题所示. 如果 $u$ 是 $G$ 上的调和函数，即 $\Delta u = 0$ 在 $G$ 上成立，证明：对任意的 $(x_0, y_0) \in G$，有等式

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left( u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}s,$$

其中 $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ 是 $(x_0, y_0)$ 与 $\Gamma$ 上动点 $(x, y)$ 的距离.

4. 设 $G$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的区域，$u$ 是 $G$ 中的调和函数，$\Gamma$ 是以 $(x_0, y_0)$ 为中心、以 $R$ 为半径位于 $G$ 中的任意一个圆周，证明：

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_\Gamma u(x, y)\mathrm{d}s.$$

# 11.4 等周问题

在这一节里，我们用第二型曲线积分来解决一个古老的几何问题.

在周长相等的一切封闭曲线中，什么样的曲线包围的图形有最大的面积？这就是著名的**等周问题**. 早在古代，人们就已经意识到这样的曲线应该是圆周，但这一事实的严格数学证明是在近代才出现的.

在 19 世纪，著名的几何学家 Steiner（施泰纳，1796～1863）曾经用非常朴素的几何方法证明了：除圆周外任何封闭曲线都不可能是等周问题的解. Steiner 的论据包括以下三个方面：

(1) 如果某封闭曲线 $\Gamma$ 是等周问题的解，那么 $\Gamma$ 所围成的图形必须是凸的点集.

这是因为该图形如果不是凸集，设想它是图 11.10 中所画的那样，过 $A$ 和 $B$ 两点连成线段，然后把线段 $AB$ 同曲线 $\Gamma$ 所围成的那一部分朝直线对折过去，组成一个新的图形，那么我们就得到一个周长没有变化，但是面积增大了的图形.

(2) 设封闭曲线 $\Gamma$ 是等周问题的解，那么，如果 $\Gamma$ 上的两点 $A$ 和 $B$ 连成的直线段 $AB$ 平分 $\Gamma$ 的周长，那么 $AB$ 必平分 $\Gamma$ 所围成的图形的面积.

如果不是这样，设 $AB$ 平分 $\Gamma$ 的周长，但未平分 $\Gamma$ 所围成的图形的面积，那么被 $AB$ 分成的两部分图形中，必有一个面积较大，另一个面积较小. 这时，如果我们把面积较大的那部分沿着 $AB$ 对折过去，我们将得到一个面积更大的图形，但是它的周长仍没有改变，见图 11.11.

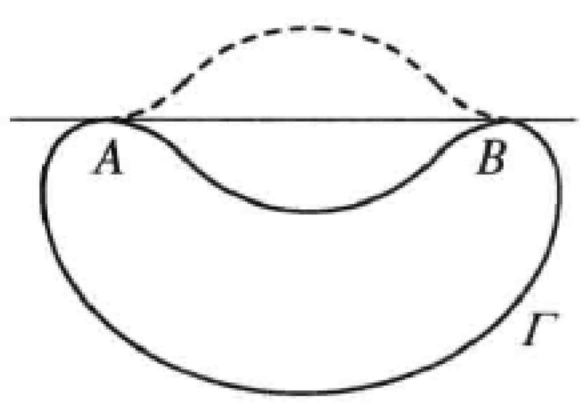



**图 11.10**

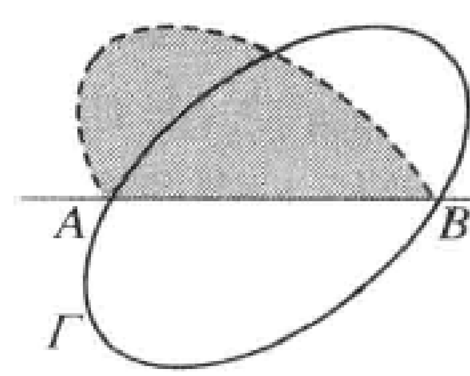



**图 11.11**

(3) 如果 $\Gamma$ 是等周问题的解，在它的上面取任一条既平分 $\Gamma$ 的周长又平分 $\Gamma$ 所围成的图形的面积的弦 $AB$，那么 $\Gamma$ 上任何异于 $A$ 和 $B$ 的点对弦 $AB$ 的张角必须为一直角.

假如不是这样，设在图 11.12 的上半部分中 $\angle APB$ 不是直角，那么只需把其中的两块阴影部分绕着点 $P$ 转动成图 11.13 的形状，使 $\angle A'PB' = \pi/2$，然后把此图形关于 $A'B'$ 对折过去，最后形成的图形保持着原来的周长，但具有更大的面积.

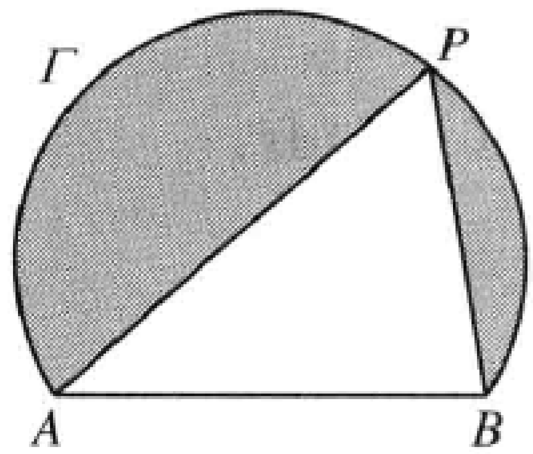



**图 11.12**

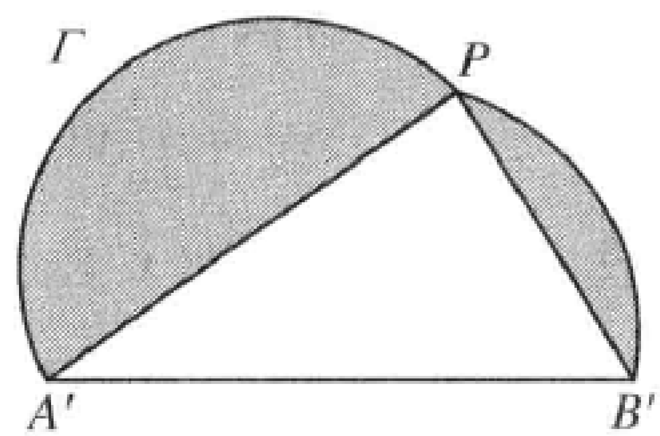



**图 11.13**

显然，具备性质(1)～(3)的图形必须是圆.

Steiner 的证明非常简单，非常美妙，可惜的是，他并没有完整地解决等周问题. 他只是证明了：除圆周之外的任何其他封闭曲线，都不可能是等周问题的解. 换句话说，如果等周问题的解存在，那么非“圆”莫属.

Weierstrass 指出了 Steiner 的“证明”中的漏洞，并举了一些例子来说明，忽视了存在性问题，可能会产生重大的谬误. 我们在这里举出一个简单的例子：对大于 1 的任何正整数 $n$，有 $n^2 > n$，因此 $n$ 不可能是最大的正整数. 但由此决不能断言 1

就是全体正整数集中的最大者，因为在这个集合中，最大者根本不存在！这个例子非常粗浅，人人都可以看出其中的症结．但是，对那些复杂的问题，这种漏洞非常隐蔽，一不小心便会落入陷阱．

现在，我们仅限于在分段连续可微的封闭曲线类中，来寻求等周问题的解答．以下的证明来自当代美国著名数学家 Peter Lax．

不失一般性，设封闭曲线 $\Gamma$ 的周长为 $2\pi$．在曲线 $\Gamma$ 上任取一点作为度量弧长的起点，沿逆时针方向量出弧长为 $\pi$ 的那一点．以这两点决定的直线作为横轴，以它们的中点作为原点，并让起点在横轴的正方向上，这样建立起平面直角坐标系．用 $\Gamma$ 自身的弧长 $s$ 作参数，$\Gamma$ 上的点可以写成 $(x(s),y(s))(0\leqslant s\leqslant 2\pi)$，于是 $y(0)=y(\pi)=0$，并且 $x(0)+x(\pi)=0$．因此，曲线 $\Gamma$ 所围成的图形的面积是（见 11.3 节中的例 1）

$$A=-\int_\Gamma y\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}yx'\mathrm{d}s,$$

这里 $x'$ 表示 $x$ 对弧长 $s$ 求导．令

$$A_1=-\int_0^\pi yx'\mathrm{d}s,\quad A_2=-\int_\pi^{2\pi}yx'\mathrm{d}s.$$

下面要证明：

(a) $A_1\leqslant\pi/2$；

(b) $A_1=\pi/2$ 当且仅当 $\Gamma$ 的上半部分是圆周．

利用平均值不等式，有

$$A_1=\int_0^\pi y(-x')\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{2}\int_0^\pi(y^2+(x')^2)\mathrm{d}s. \tag{1}$$

由于参数 $s$ 是弧长，所以 $(x')^2+(y')^2=1$，从而式(1)变为

$$A_1\leqslant\frac{1}{2}\int_0^\pi(y^2+1-(y')^2)\mathrm{d}s. \tag{2}$$

令

$$u(s)=\frac{y(s)}{\sin s}\quad(0<s<\pi).$$

由条件 $y(0)=y(\pi)=0$，可以补充定义

$$u(0)=\lim_{s\to0^+}u(s)=\lim_{s\to0^+}\frac{y(s)}{\sin s}=y'(0),$$

$$u(\pi)=\lim_{s\to\pi^-}u(s)=\lim_{s\to\pi^-}\frac{y(s)}{\sin s}=-y'(\pi),$$

因此 $u$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内连续可导．

由 $y' = u'\sin s + u\cos s$,可以算出

$$\begin{aligned} y^2+1-(y')^2 &= u^2(\sin^2 s-\cos^2 s)-2uu'\sin s\cos s-(u')^2\sin^2 s+1 \\ &= -(u^2\cos 2s+uu'\sin 2s)+1-(u')^2\sin^2 s \\ &= -\frac{1}{2}(u^2\sin 2s)'+1-(u')^2\sin^2 s. \end{aligned}$$

代入式(2),得

$$A_1 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-(u')^2\sin^2 s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

这就证明了(a).为了证明(b),注意式(3)中等号成立的充分必要条件是 $(u')^2\sin^2 s=0$,即 $u'=0$,这表明 $u$ 只能是常数,记为 $\lambda$,从而 $y(s)=\lambda\sin s$.而且由式(1)可以看出,必须且只需 $y=-x'$.将 $y=\lambda\sin s$ 代入等式

$$y^2+(y')^2=(x')^2+(y')^2=1,$$

得出 $\lambda^2(\sin^2 s+\cos^2 s)=1$,所以 $\lambda^2=1$.由 $y>0$,得 $\lambda=1$,从而得到 $y=\sin s$.由 $x'=-y=-\sin s$,得

$$x=\cos s+\mu,$$

其中 $\mu$ 为常数.根据 $x(0)+x(\pi)=0$,得 $1+\mu+(-1)+\mu=0$,所以 $\mu=0$.最后得

$$x=\cos s,\quad y=\sin s\quad (0\leqslant s\leqslant \pi).$$

这正是上半圆的方程.用同样的方法处理 $A_2$,得出 $\Gamma$ 的下半部分也必须是一个半圆.这就证明了:为了取得最大的面积,必须且只需是单位圆. □

## 练 习 题 11.4

1. 设周长为 $L$ 的任意封闭曲线 $\Gamma$ 围成的区域的面积为 $A$.证明:

$$A\leqslant \frac{L^2}{4\pi},$$

式中等号当且仅当 $\Gamma$ 为圆周时成立.

2. 证明:周长为 $L$ 的四边形中以正方形面积最大.

# 第 12 章　曲面积分

在第 11 章中，我们详细地介绍了曲线积分．曲线积分有两种类型：第一型和第二型曲线积分．我们即将看到，本章内容的脉络与前一章完全相似．曲面积分也有第一型和第二型之分，第一型不涉及曲面的定向，而第二型曲面积分则与曲面的定向有关．

读者应当记得，第一型曲线积分与曲线的弧长关系密切，而曲线弧长在上册 7.1 节中就已经讨论过了．第一型曲面积分与曲面面积的关联也很密切，因此，我们必须从曲面的面积讲起．

## 12.1　曲面的面积

许多平面图形的面积的计算公式，早在 Euclid 的《几何原本》出现之前就已经建立起来了，特别是平面多边形的面积的计算，也许是更早一些的事．对一般平面上有界点集的面积，在本书的 10.4 节中，已经通过二重积分给予了定义．

多面体的表面是由一些平面多边形组成的，其表面积就是这些平面多边形的面积之和，因此多面体的表面积的计算就被认为解决了．对弯曲的曲面，人们想到用内接于该曲面的多面体的表面积来逼近，这是很自然的事．曲线的弧长正是用内接于该曲线的连续折线的长度来逼近的，对多面体抱有类似的希望又有什么不合理的呢？但是，19 世纪末，H. A. Schwarz（施瓦茨，1843～1921）给出的一个著名的例子说明，即使是对非常简单的曲面，这种想法也是行不通的．

考虑一个底半径为 1、高为 1 的直圆柱面 $\Sigma$．若将 $\Sigma$ 沿一条母线剪开，然后把它平铺在平面上，就变成一个边长为 1 和 $2\pi$ 的矩形，这个矩形的面积等于 $2\pi$，因

此 $\Sigma$ 的表面积就应当等于 $2\pi$. Schwarz 考虑用多面体的边界来逼近这个直圆柱面:用与母线垂直的、间隔均匀的 $m+1$ 张平面去分割这个直圆柱,截出 $m+1$ 个圆周.然后在每一个这样的圆周上,用 $n$ 个分点把它等分.这些分点是这样分布的:上一个圆周上的分点对最靠近它的下一圆周的垂直投影与下一圆周上的相邻两个分点有相等的距离.图 12.1 中的分点 $A$ 和 $B,C$ 就代表这种关系.

再把 $A,B,C$ 三点连成一个三角形,并且设想所有的有这种关系的三个分点都被这样地连成了三角形,从而作成了图 12.2 所示的模型,它是一个内接于直圆柱面的一个多面体.这个多面体由 $2mn$ 个全等的三角形组成.为了计算这个多面体的面积,只需计算一个这样的小三角形的面积就好了.

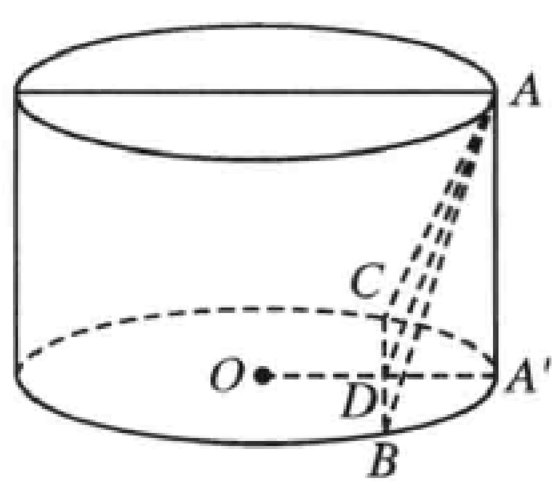



图 12.1

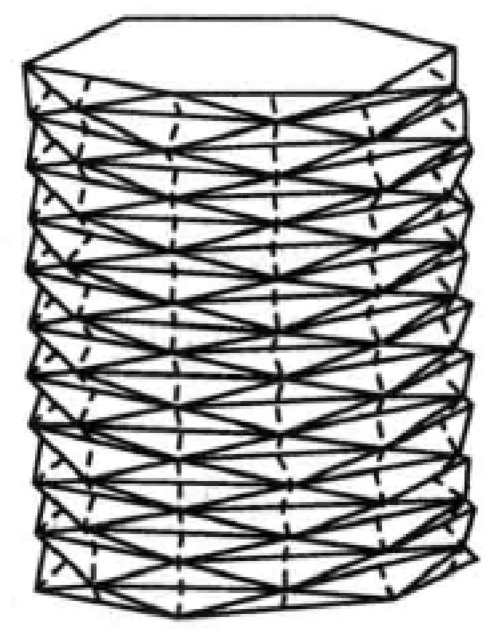


图 12.2

在图 12.1 中,我们看出$\angle BOA'=\pi/n$,从而$|A'D|=1-\cos(\pi/n)$,所以

$$|AD|=\sqrt{|A'A|^2+|A'D|^2}=\sqrt{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{m}\right)^2}.$$

因此$\triangle ABC$ 的面积等于

$$\frac{1}{2}|BC|\cdot|AD|=|BD|\cdot|AD|=\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{m}\right)^2}.$$

从而多面体的表面积等于

$$\begin{aligned}\sigma_{m,n}&=2mn\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{m}\right)^2}\\&=2n\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+1}.\end{aligned}$$

当 $m$ 和 $n$ 同时无限增加时,所有那些小三角形的直径趋向于零,但 $\sigma_{m,n}$ 没有极限!实际上,若令 $m$ 与 $n$ 这样地增长,使得比值 $m/n^2$ 趋向于一个确定的数 $q$,即

$$\lim\frac{m}{n^2}=q.$$

一方面，我们有

$$\lim n\sin\frac{\pi}{n} = \pi.$$

另一方面，有

$$\lim m\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) = \lim m\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 = \frac{q}{2}\pi^2.$$

这里，我们已经使用了等价无穷小代换：

$$1-\cos\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi^2}{2n^2}\quad(n\to\infty).$$

这样一来，有

$$\lim\sigma_{m,n} = 2\pi\sqrt{\frac{q^2}{4}\pi^4+1}. \tag{1}$$

由此可见，这个极限依赖于比值 $q$ 的大小，即依赖于 $m$ 与 $n$ 同时增加的方式. 当 $q=0$ 时，也只在这个时候，所说的极限等于 $2\pi$，这正是中学立体几何教程中已求出的面积.

深入地考察一下等式(1)，便能发现错误之所在. 当 $q=0$ 时，$m$ 与 $n$ 虽然同时趋向于无穷大，但是 $m$ 趋于无穷大的速度远比 $n^2$ 趋于无穷大的速度要慢，这时那些小三角形的正投影的面积可以变得要多小就有多小，或者说这些小三角形可以任意地贴近直圆柱面，这时 $\sigma_{m,n}$ 的极限的确能表示直圆柱面的表面积. 当 $q=+\infty$ 时，正好相反，这时这些小三角形几乎变得与直圆柱面的轴线垂直，也就是说几乎与直圆柱面的切平面垂直.

因此，我们只能放弃用内接于曲面的多面体面积的极限来定义该曲面面积的想法. 在此，我们也不去讨论最一般的曲面面积的定义，而是假定曲面已经有了连续可微的参数表示.

现在，设所讨论的曲面 $\Sigma$ 有向量方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，其中 $(u,v)\in\Delta$，$\Delta$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个区域. 也就是说，曲面 $\Sigma$ 有参数方程

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad ((u,v)\in\Delta), \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

并且设 $\Delta$ 与曲面 $\Sigma$ 上的点有一对一的关系. 我们还设 $\boldsymbol{r}\in C^1(\Delta)$，并且在 $\Delta$ 上，$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq\boldsymbol{0}$. 简而言之，设 $\Sigma$ 是正则曲面.

在上面所有的条件下，我们来定义曲面 $\Sigma$ 的面积. 用 $u$ 曲线和 $v$ 曲线把曲面 $\Sigma$ 分成小块. 每一小块在曲面的切平面上的投影的面积可以近似地表示为

$$\| \boldsymbol{r}_u \Delta u \times \boldsymbol{r}_v \Delta v \| = \| \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \| \Delta u \Delta v.$$

这样,和式

$$\sum \| \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \| \Delta u \Delta v$$

就可以当作 $\Sigma$ 的面积的近似值.加密 $u$ 曲线和 $v$ 曲线,通过极限过程,我们对曲面的面积给出如下的定义.

**定义 12.1.1**　设正则曲面 $\Sigma$ 有参数向量方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)((u,v)\in\Delta)$.称

$$\sigma(\Sigma)=\iint_{\Delta} \| \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{2}$$

为曲面 $\Sigma$ 的**面积**,并且记

$$\mathrm{d}\sigma = \| \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \| \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{3}$$

称 $\mathrm{d}\sigma$ 为曲面的**面积元素**,简称**面元**.

必须作出以下三点说明:

(a) 只有证明了这个定义不依赖于参数方程的选择,这个定义才是合理的.设参数$(u,v)$经过正则映射

$$u = u(s,t),\quad v = v(s,t) \tag{4}$$

变换成了参数$(s,t)\in\Delta'$,映射(4)在 $\Delta$ 与$\Delta'$之间建立了一个一一对应.由 9.5 节的公式(22),推知

$$\| \boldsymbol{r}_s \times \boldsymbol{r}_t \| = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \right| \| \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \|.$$

再对式(2)的右边作换元(4),得到

$$\sigma(\Sigma)=\iint_{\Delta'} \| \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \| \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \right| \mathrm{d}s\mathrm{d}t = \iint_{\Delta'} \| \boldsymbol{r}_s \times \boldsymbol{r}_t \| \mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

这就证明了曲面面积的定义式(2)确实与参数的选择无关.

(b) 关于 $\boldsymbol{r}$ 是单射的假设,是为了防止曲面上出现重点.但是,如果在曲面 $\Sigma$ 上只有孤立的重点,或者重点的集合对应于 $\Delta$ 中的零面积集,公式(2)仍可适用.

(c) 平面图形也可以看成是一张曲面.如果 $D$ 是 $xy$ 平面上的区域,则有参数方程 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,0)((x,y)\in D)$.这时,$\boldsymbol{r}_x=(1,0,0)$,$\boldsymbol{r}_y=(0,1,0)$,从而有

$$\mathrm{d}\sigma = \| \boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y \| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

公式(2)就退化成

$$\sigma(D) = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D \mathrm{d}\sigma.$$

这正是 10.4 节中平面图形面积的定义.这说明,一般曲面面积的定义和过去已经给出的平面图形的面积定义没有冲突.

曲面面积有下列几种表示方法.由 9.5 节中的式(19),可知

$$\sigma(\Sigma)=\iint_{\Delta}\left(\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2\right)^{1/2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{5}$$

此外,由 9.5 节的式(21),得到

$$\sigma(\Sigma)=\iint_{\Delta}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{6}$$

其中 $E,F,G$ 是曲面的第一基本量:

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x\partial x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial y\partial y}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z\partial z}{\partial u\partial v},$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

当曲面 $\Sigma$ 是由显式

$$z=f(x,y)\quad((x,y)\in D)$$

表达时,我们可以将它写为参数形式

$$x=x,\quad y=y,\quad z=f(x,y)\quad((x,y)\in D).$$

这时,

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}=1.$$

由式(5),得到

$$\sigma(\Sigma)=\iint_{\Delta}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7}$$

**例 1** 计算半径为 $a$ 的球面的面积.

**解** 用球面参数方程来计算,即令

$$x=a\sin\theta\cos\varphi,\quad y=a\sin\theta\sin\varphi,\quad z=a\cos\theta.$$

这时,

$$E=a^2,\quad F=0,\quad G=a^2\sin^2\theta,$$

所以面元的表示是

$$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi. \tag{8}$$

因此所求的面积为

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=2\pi a^2\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=4\pi a^2.$$ □

**例 2** 计算球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被柱面 $x^2+y^2=ax$ 所截下的面积.

**解** 从上题已知球面的面积元素如式(8)所示.

当求积分的时候,须知参数的变化区域 $\Delta$. 将球面的参数方程代入柱面的方程,得出 $\sin\theta=\cos\varphi=\sin(\pi/2-\varphi)$. 当点在第一卦限中变化时,$\theta,\varphi\in[0,\pi/2]$,从而得出 $\theta+\varphi=\pi/2$,因此 $\Delta$ 是三角形区域:

$$\Delta=\left\{(\theta,\varphi):\theta,\varphi\geqslant 0,\theta+\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

因而所求曲面的面积为

$$\begin{aligned}4\iint_{\Delta}\mathrm{d}\sigma&=4\iint_{\Delta}a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=4a^2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2-\varphi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=4a^2\int_0^{\pi/2}(1-\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi=2a^2(\pi-2).\end{aligned}$$ □

**例 3** 求曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0,a\leqslant x\leqslant b)$绕 $x$ 轴旋转所得旋转曲面的面积.

**解** 在旋转曲面上任取一点 $P(x,y,z)$. 从图 12.3,可以看出

$$y^2+z^2=|OA|^2=|QP|^2=|QR|^2=f^2(x).$$

由此得旋转曲面在 $z$ 轴正方向的方程为

$$z=\sqrt{f^2(x)-y^2}.$$

由此得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-y^2}},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{f^2(x)-y^2}},$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=f^2(x)\frac{1+(f'(x))^2}{f^2(x)-y^2}.$$

由式(7),即得所求的旋转曲面的面积为

$$S=2\iint_D f(x)\frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D$ 是旋转曲面在 $xy$ 平面上的投影区域(图 12.4). 于是得

$$\begin{aligned}S&=2\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x\int_{-f(x)}^{f(x)}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\\&=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$ □

我们曾经在 7.1 节中用其他方法得到过这个公式.

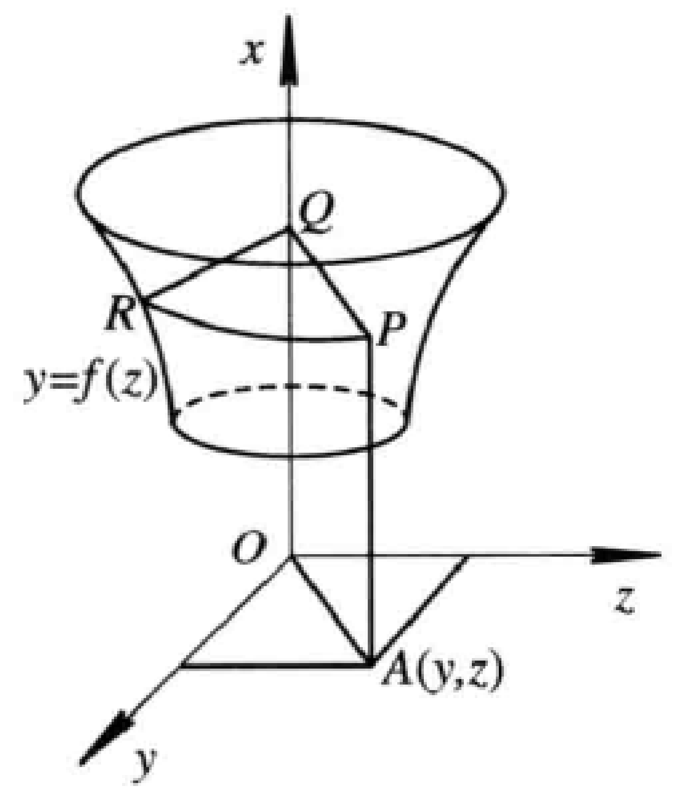



图 12.3

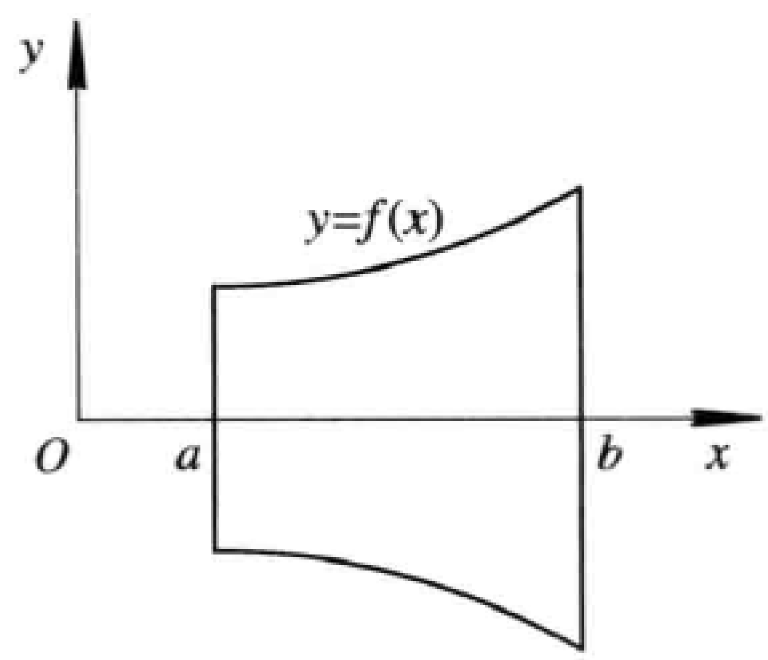



图 12.4

## 练 习 题 12.1

计算下列曲面的面积：

(1) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 截下的部分.

(2) 圆柱面 $x^2+z^2=a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 截下的部分.

(3) 圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 介于平面 $x+z=0$ 和 $x-z=0$ 之间的部分.

(4) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(0<b\leqslant a)$$

所截下的部分.

(5) 马鞍面 $az=xy$ 被圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 截下的部分.

(6) 抛物面 $x^2+y^2=2az$ 被柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 截下的部分.

(7) 螺旋面

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\quad(0<r<a,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).\\ z=h\theta\end{cases}$$

# 12.2 第一型曲面积分

设 $\Sigma$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中一张有面积的曲面，$\Sigma$ 上按（面）密度 $\rho$ 分布着某种物质，问如何

求出分布在 $\Sigma$ 上物质的总质量？

沿用前面用过的做法，将 $\Sigma$ 分成若干小块 $S_1, S_2, \cdots, S_n$，并在每一小块 $S_i$ 上任意取定一点 $\boldsymbol{p}_i$，这时小块 $S_i$ 上的质量近似地等于 $\rho(\boldsymbol{p}_i)\sigma(S_i)$，于是曲面片 $\Sigma$ 上的质量就近似地等于

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(\boldsymbol{p}_i)\sigma(S_i).$$

当我们把曲面片 $\Sigma$ 无限细分时，上面和式的极限就可以定义为展布在曲面片 $\Sigma$ 上物质的质量 $M$，即

$$M = \lim \sum_{i=1}^{n} \rho(\boldsymbol{p}_i)\sigma(S_i).$$

以上的实例引导出下面的第一型曲面积分的定义.

**定义 12.2.1** 设 $\Sigma$ 是一张可求面积的曲面片，$f$ 是定义在 $\Sigma$ 上的函数，分割 $\pi$ 把 $\Sigma$ 分成若干更小的曲面片 $S_1, S_2, \cdots, S_n$. 定义分割 $\pi$ 的宽度为 $\|\pi\| = \max\{\operatorname{diam}(S_i): i = 1, 2, \cdots, n\}$. 在每一小片 $S_i$ 上任取一点 $\boldsymbol{p}_i$，如果和数

$$\sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{p}_i)\sigma(S_i)$$

当 $\|\pi\| \to 0$ 时有有限的极限，并且其极限值不依赖于点 $\boldsymbol{p}_i$ 在 $S_i$ 上的选择，那么称这个极限值为函数 $f$ 沿曲面 $\Sigma$ 的**第一型曲面积分**，记作 $\int_{\Sigma} f \mathrm{d}\sigma$.

如果 $\Sigma$ 是正则曲面，它的参数方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)\ ((u, v) \in \Delta)$；函数 $f$ 在 $\Sigma$ 上连续，那么利用 12.1 节中关于曲面面积元素的表达式(3)，便可得出第一型曲面积分的计算公式：

$$\int_{\Sigma} f \mathrm{d}\sigma = \iint_{\Delta} f \circ \boldsymbol{r} \, \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v. \tag{1}$$

请注意，定义 12.1.1 之后的前两点说明(即(a)和(b))，对定义 12.2.1 显然仍起作用.

若常值函数 $f = 1$，则它在 $\Sigma$ 上的第一型曲面积分正是曲面 $\Sigma$ 的面积 $\sigma(\Sigma)$.

如果曲面 $\Sigma$ 可以由显式

$$z = \varphi(x, y) \quad ((x, y) \in D)$$

表示，其中 $D$ 是有面积的平面闭区域，$\varphi \in C^1(D)$，则公式(1)变成

$$\int_{\Sigma} f \mathrm{d}\sigma = \iint_{D} f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \tag{2}$$

为了方便读者，我们把计算第一型曲面积分的步骤程式化.

(1) 为曲面 $\Sigma$ 求得一个符合要求的参数表示 $\boldsymbol{r}$ 或显式表示 $\varphi$，定出它们的定义域 $\Delta$ 或 $D$；

(2) 计算面元 $\mathrm{d}\sigma = \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 或

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y; \tag{3}$$

(3) 计算二重积分(1)或(2).

**例 1** 计算积分

$$A = \int_\Sigma (x + y + z)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\Sigma$ 表示上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geqslant 0)$.

**解** 由于

$$A = \int_\Sigma x\mathrm{d}\sigma + \int_\Sigma y\mathrm{d}\sigma + \int_\Sigma z\mathrm{d}\sigma,$$

考虑到曲面的几何对称性和被积函数的奇偶性，可知上式右边的第一、第二个积分等于零，因此

$$A = \int_\Sigma z\mathrm{d}\sigma.$$

由公式(3)，可知

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此

$$A = a \iint\limits_{x^2 + y^2 \leqslant a^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi a^3.$$ □

**例 2** 计算积分

$$A = \int_\Sigma x^2 \mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\Sigma$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

**解** 引入球面的参数表示当然可以算出 $A$(读者可自行练习)，但是利用对称性可以几乎不必计算而得出结果. 事实上，我们有

$$\int_\Sigma x^2 \mathrm{d}\sigma = \int_\Sigma y^2 \mathrm{d}\sigma = \int_\Sigma z^2 \mathrm{d}\sigma,$$

从而可得

$$A = \frac{1}{3}\int_\Sigma (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}\sigma = \frac{a^2}{3}\int_\Sigma \mathrm{d}\sigma = \frac{a^2}{3}\sigma(\Sigma) = \frac{4}{3}\pi a^4.$$ □

**例 3** 设半径为 $R$ 的球面上均匀分布着某种质量. 求其产生的引力场.

**解** 同10.9节的例4一样，在空间中任取一点 $\boldsymbol{p}$，我们要计算在点 $\boldsymbol{p}$ 处单位质量所受到的引力．取球心为原点，建立坐标系．不妨设 $\boldsymbol{p}=(0,0,l)$．在球面上任取一点$(x,y,z)$，环绕着它在球面上取一块面积元素 $\mathrm{d}\sigma$，则这一小块对点 $\boldsymbol{p}$ 的引力在 $z$ 轴上的分量为

$$\frac{(z-l)\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+(z-l)^2)^{3/2}}.$$

因此整个球面对 $\boldsymbol{p}$ 的引力在 $z$ 轴上的分量为

$$F_z=\int_\Sigma \frac{z-l}{(x^2+y^2+(z-l)^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma,$$

这里 $\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$．利用球坐标

$$x=R\sin\theta\cos\varphi,\quad y=R\sin\theta\sin\varphi,\quad z=R\cos\theta,$$

这时 $E=R^2, F=0, G=R^2\sin^2\theta$，从而可得

$$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

这样有

$$\begin{aligned}F_z&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{R\cos\theta-l}{(R^2-2Rl\cos\theta+l^2)^{3/2}}R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=2\pi R^2\int_0^{\pi}\frac{(R\cos\theta-l)\sin\theta}{(R^2-2Rl\cos\theta+l^2)^{3/2}}\mathrm{d}\theta\\&=2\pi R^2G(R),\end{aligned}$$

这里

$$G(R)=\int_0^{\pi}\frac{(R\cos\theta-l)\sin\theta}{(R^2-2Rl\cos\theta+l^2)^{3/2}}\mathrm{d}\theta.$$

10.9节的例4中已经算出

$$G(R)=\begin{cases}0, & R>l,\\ -\dfrac{2}{l^2}, & R<l.\end{cases}$$

由此可知，如果 $\boldsymbol{p}$ 点在球外，即 $l>R$，则有

$$F_z=-\frac{4\pi R^2}{l^2}.$$

这相当于把球面上的全部质量集中在球心所产生的引力．如果 $\boldsymbol{p}$ 点在球内，即 $l<R$，则有

$$F_z=0,$$

即球面对其不产生引力． □

## 练 习 题 12.2

计算下列曲面积分：

(1) $\int_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(1+x+y)^2}$，$\Sigma$ 是四面体 $x+y+z\leqslant 1\ (x,y,z\geqslant 0)$ 的边界；

(2) $\int_{\Sigma}|xyz|\,\mathrm{d}\sigma$，$\Sigma: z = x^2+y^2, z\leqslant 1$；

(3) $\int_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}\sigma$，$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 截下的部分.

## 问 题 12.2

1. 设 $\Sigma$ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$. 证明 Poisson（泊松，1781～1840）公式：
$$\int_{\Sigma}f(ax+by+cz)\mathrm{d}\sigma = 2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)\mathrm{d}t.$$
2. 设 $\Sigma(t)$ 是平面 $x+y+z=t$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 截下的部分，且
$$F(x,y,z) = 1-(x^2+y^2+z^2).$$
求证：当 $|t|\leqslant\sqrt{3}$ 时，有
$$\int_{\Sigma(t)}F(x,y,z)\mathrm{d}\sigma = \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.$$
3. 设 $f(t)$ 在 $|t|<\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 上连续. 证明：
$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)\mathrm{d}t.$$

# 12.3 第二型曲面积分

第二型曲面积分与曲面的定向有关，因此，我们必须首先讲述**定向曲面**的概念.

我们指出，任何正则曲面片都是**可定向**的. 设
$$\Sigma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)\quad ((u,v)\in\Delta)$$
是一块正则曲面片. 因为 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq\boldsymbol{0}$ 在 $\Delta$ 上处处成立，所以在曲面 $\Sigma$ 上的各点处

有确定的法向量.向量

$$\pm \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\| \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \|}$$

都是单位法向量.我们可以指定其中的任何一个作为 $\Sigma$ 的**正方向**,例如,指定带正号的那一个为 $\Sigma$ 的正方向.当参数$(u,v)$在 $\Delta$ 上连续变化时,这指定的单位法向量在 $\Sigma$ 上也连续变化,不会突然转到相反的方向上去.我们约定把曲面 $\Sigma$ 的正法线指向的一侧叫做$\Sigma$ 的**正侧**,相反的那一侧叫做**负侧**.凡是能明确地区分正、负两侧的曲面,叫做**双侧曲面**.所以正则曲面一定是双侧曲面,我们说它是**可定向**的.例如,平面(或它的一部分)、椭球面(或它的一部分)等等,都是可定向的,也就是双侧曲面.

不可定向的曲面的一个著名例子叫做 Möbius(默比乌斯,1790～1868)带.设想有一张矩形纸带,见图 12.5,记作 $ABB_1A_1$,用两手捏着它的两端,然后像拧麻花一样地把它扭转过来,再把线段 $AB$ 与线段 $A_1B_1$ 粘贴起来,但要使得 $A$ 与 $B_1$ 黏合而 $B$ 与 $A_1$ 黏合,这样得到的曲面就叫做 **Möbius 带**,见图 12.6,把这张曲面记作 $M$.

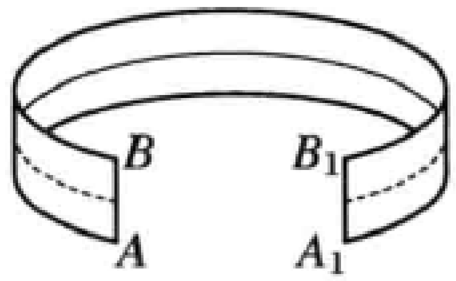



**图 12.5**

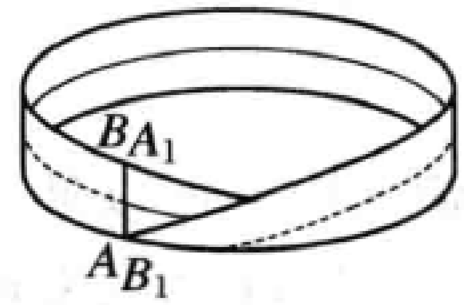



**图 12.6**

在 $M$ 上任取一点$P$,在 $P$ 上指定一个单位法向量,当点 $P$ 在$M$ 上连续变化时,这个单位法向量也连续地改变,当点 $P$ 在$M$ 上扫过一圈仍回到原来的出发点时,这时的单位法向量的方向正好与最初的单位法向量的方向相反!换一个更加通俗的说法,也就是,有一个人提着油漆桶来刷 Möbius 带,那么他可以把 $M$ 的所有部分全都刷上油漆,而无须通过曲面的边界!这就说明 Möbius 带是不可定向的.

第二型曲面积分只能在双侧曲面上定义.

我们常常会遇到由若干块连续可微的曲面片拼接而成的曲面.例如,立方体的表面就是这样的曲面.如何给"拼接曲面"定向,需要作进一步的说明.

首先,拼接曲面由有限多块曲面片拼成,其中任何两块至多只相交于边界上的一段曲线,任意三块(或更多的块)至多只能相交于边界上的一个点.其次,为了给整块曲面定向,每一块小曲面片应是可定向的.一旦其中的一块曲面片的正向确定

之后，它的边界曲线也随之定了方向，规则是：当一个人站在正侧沿边界正向绕行时，曲面片的内部应在人的左手边，只有在曲面的定向与它的边界曲线的定向符合这一规则时，称它们的定向是**协调的**. 如果两个有一段公共边界的曲面片，它们各自的定向使得在它们的一段公共边界上的定向正好相反，那么这两块曲面片的定向也称为是**协调的**. 设 $\Sigma$ 是一张拼接曲面，如果它的任何两块有一段公共边界的曲面片都有协调的定向，我们说拼接曲面 $\Sigma$ 是可定向的. 我们还约定：把协调选择的各块曲面片上的正向，当作 $\Sigma$ 的正向.

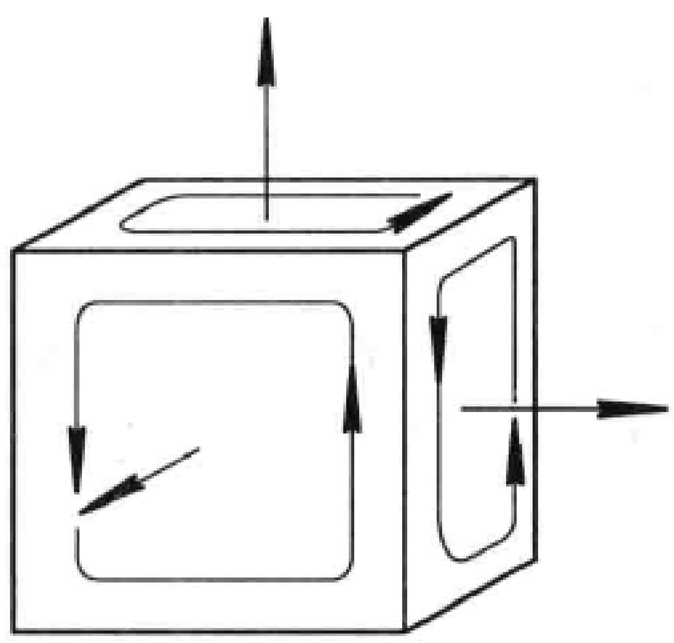


图 12.7

**例 1** 考察一个立方体的表面. 这是一个封闭的拼接曲面，由六个正方形组成. 在每一个正方形上，我们规定朝外的法线方向为其正向，那么每一个正方形的边界的方向也就随之确定了，即我们从外部看上去，它是按逆时针方向绕行的(图 12.7).

由图 12.7 看出，这张拼接曲面是可定向的. □

**例 2** 设 $ABB_1A_1$ 是一个矩形，线段 $CD$ 将它分成两个小矩形. 按照图 12.8 将每一个小矩形定向，再把 $AB$ 和 $A_1B_1$ 黏合起来，形成一张拼接曲面. 如果将 $A$ 和 $A_1$ 黏合、$B$ 和 $B_1$ 黏合，则得到一张柱面，它有协调的定向，所以是双侧曲面. 但是，如果将 $A$ 和 $B_1$ 黏合、$B$ 和 $A_1$ 黏合，就成了 Möbius 带，它不是双侧曲面，事实上，它有不协调的定向. □

现在开始讨论第二型曲面积分.

设区域 $D\subset\mathbf{R}^3$，$\boldsymbol{F}: D\to\mathbf{R}^3$，即在区域 $D$ 上定义了一个向量场，姑且设想 $\boldsymbol{F}$ 是流速场. 又设 $\Sigma\subset D$ 是一张有面积且可定向的曲面片，我们希望计算流速场 $\boldsymbol{F}$ 在单位时间内从曲面 $\Sigma$ 的一侧流向另一侧的流量. 由于流速无论大小还是方向都随着点在 $\Sigma$ 上的变化而变化，$\Sigma$ 又是弯曲的，所以只有用曲面微元的方法才能解决这个问题.

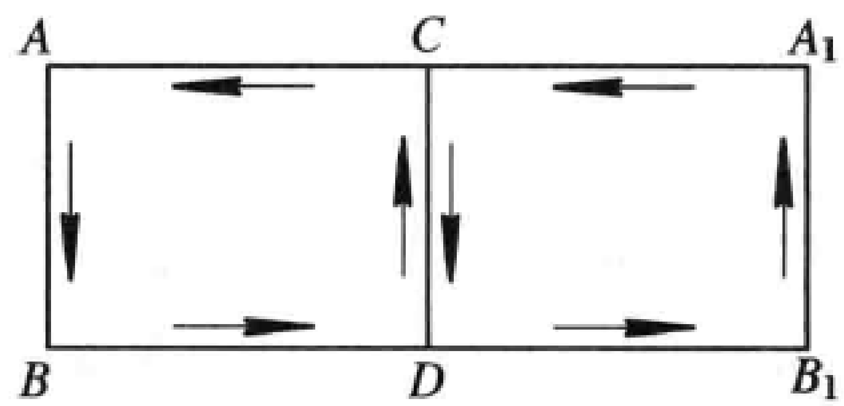



图 12.8

为了计算流量，应当给 $\Sigma$ 定向. 我们任意选定 $\Sigma$ 的正侧，最后算出的流量的正负号与指定曲面 $\Sigma$ 的哪一侧为正侧有关. 如果改变 $\Sigma$ 的定向，最后的结果将相差一个符号. 从负侧流向正侧的流量算作正的，而从正侧流向负侧的流量算作负的.

我们从曲面 $\Sigma$ 上任取一块微小的面元 $\mathrm{d}\sigma$，并把此面元的指向正侧的单位法向

量记作 $\boldsymbol{n}$. 于是,在单位时间内,通过此曲面微元的流体的总量为 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$. 在图 12.9 中,这正好是那个斜放着的柱体的体积. 由此可见,在单位时间内,通过曲面 $\Sigma$ 的流体的总量为

$$\int_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma.$$

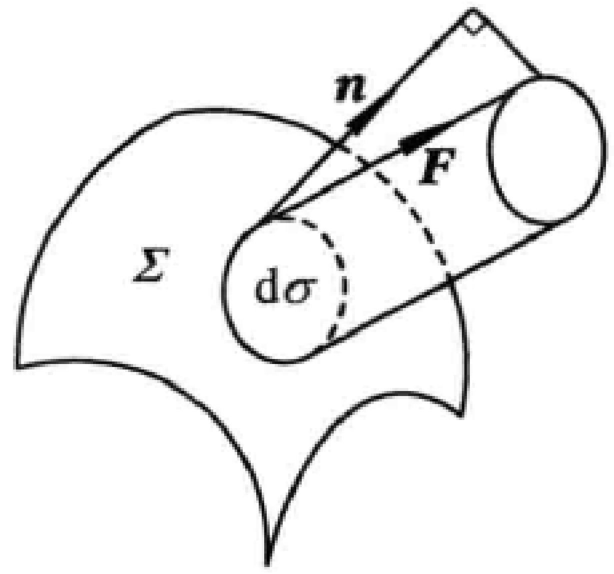


图 12.9

下面我们给出:

**定义 12.3.1** 设 $\Sigma$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中定向的光滑曲面,$\Sigma$ 上确定其方向的单位向量记为 $\boldsymbol{n}$,$\boldsymbol{F}$ 是定义在 $\Sigma$ 上的向量值函数. 记 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$,$\mathrm{d}\sigma$ 是 $\Sigma$ 上的面积元素. 称

$$\int_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

为 $\boldsymbol{F}$ 在有向曲面 $\Sigma$ 上的**第二型曲面积分**.

如果记 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$,$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,其中 $\alpha,\beta,\gamma$ 是 $\boldsymbol{n}$ 的方向角,即分别是 $\boldsymbol{n}$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴和 $z$ 轴正向的夹角,那么式(1)也可表示为

$$\int_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma. \tag{2}$$

再令

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\mathrm{d}\sigma,\quad \mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\mathrm{d}\sigma,\quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\mathrm{d}\sigma, \tag{3}$$

那么式(2)可以改写为

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4}$$

式(4)是人们普遍使用的第二型曲面积分的记法.

我们来看式(3)中的最后那个等式,即 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\mathrm{d}\sigma$,它表明:$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 代表面元 $\mathrm{d}\sigma$ 在 $xy$ 平面上的投影,这个投影的面积是可正可负的,全由 $\mathrm{d}\sigma$ 上的法向量与 $z$ 轴正向的夹角是小于 $\pi/2$ 还是大于 $\pi/2$ 而定. 对式(3)中其他两个等式,也可以作出类似的解释.

现在来谈谈第二型曲面积分的计算. 请注意,式(1)与式(2)已经是第一型曲面积分,如何计算这种积分,在 12.2 节中已经学习过. 我们把这些公式写得更具体一点,即把它们归结为二重积分来计算.

考察正则曲面 $\Sigma$:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)\quad((u,v)\in\Delta),$$

并设 $\boldsymbol{r}$ 实现了 $\Sigma$ 与 $\Delta$ 之间的一一对应. 这时,曲面 $\Sigma$ 的单位法向量是

$$\boldsymbol{n} = \pm \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\| \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \|}. \tag{5}$$

选择正、负号,应使得式(5)的右边与已经指定的 $\Sigma$ 的定向一致.在 12.1 节中,我们已有

$$\mathrm{d}\sigma = \| \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \| \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

所以

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \pm (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{6}$$

从而式(1)就变成了

$$\pm \iint_{\Delta} \boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{7}$$

更进一步,若把式(7)中的向量三重积(即混合积)展开,则得到

$$\pm \iint_{\Delta} \left( P \circ \boldsymbol{r} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q \circ \boldsymbol{r} \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R \circ \boldsymbol{r} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{8}$$

利用行列式,可把式(8)写为

$$\pm \iint_{\Delta} \begin{vmatrix} P \circ \boldsymbol{r} & Q \circ \boldsymbol{r} & R \circ \boldsymbol{r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{9}$$

如果曲面 $\Sigma$ 是由显式表达的,即

$$\Sigma: z = f(x,y) \quad ((x,y) \in D),$$

那么

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint_{D} \left( -P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R \right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{10}$$

上式的右边是展布在 $D$ 上的二重积分,右边的正、负号要根据曲面的定向来决定.例如,如果把曲面 $\Sigma$ 的上侧定为正侧,即要求正法向量与 $z$ 轴正向的夹角为锐角,则 $\cos\gamma > 0$,这时应在式(9)的右边取正号.

在式(10)中,如果 $P = Q = 0$,公式将变得特别简单:

$$\iint_{\Sigma} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint_{D} R(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{11}$$

下面看几个例子.

**例 3** 计算积分

$$A = \iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\Sigma$ 是三角形 $\{(x,y,z):x,y,z\geqslant 0,x+y+z=1\}$,法向量与 $(1,1,1)$ 同方向.

**解** 这里我们给出三种解法.

(a) 先计算

$$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

按照公式(11),这个积分等于二重积分

$$\begin{aligned}\iint_{\substack{x\geqslant 0,\,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}}(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{6}(1-x)^3\Big|_1^0 = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

对称地,有

$$\int_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{1}{6},$$

所以 $A=1/2$.

(b) 曲面 $\Sigma$ 的单位法向量是 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)/\sqrt{3}$. 令 $\boldsymbol{F}=(x,y,z)$,那么

$$A = \int_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\Sigma}\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma(\Sigma).$$

由于 $\Sigma$ 是一个边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形,所以 $\sigma(\Sigma)=\sqrt{3}/2$,因此 $A=1/2$.

(c) 利用公式(10). 这时,$P=x,Q=y,R=z,z=f(x,y)=1-x-y$,所以 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-1,\dfrac{\partial f}{\partial y}=-1$,式(10)右边的积分取正号,于是有

$$A = \iint_D(x+y+1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$$ □

**例4** 曲面 $\Sigma$ 是中心在原点、半径为 $a$ 的球面,正向是外法线方向. 计算积分

$$A = \iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

**解** 这时 $\boldsymbol{F}=(x,y,z)$,$\Sigma$ 的单位法向量是

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right),$$

因此

$$A=\int_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{a}\int_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}\sigma$$
$$=a\int_{\Sigma}\mathrm{d}\sigma=a\sigma(\Sigma)=4\pi a^3.$$
□

**例 5** 设有流速场 $\boldsymbol{F}=(yz,zx,xy)$，曲面 $\Sigma$ 是圆柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2, 0\leqslant z\leqslant h$ 的表面.求流速场流出 $\Sigma$ 的流量.

**解** 由于题目要求的是"流出"的流量，所以可设 $\Sigma$ 的外法线方向为正向.我们的曲面是一拼接曲面，由三块曲面组成：记圆柱面的那部分为 $\Sigma_1$，下底和上底分别记为 $\Sigma_2$ 和 $\Sigma_3$.

在 $\Sigma_1$ 上，单位法向量是 $(x/a, y/a, 0)$.我们有
$$\int_{\Sigma_1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\frac{2}{a}\int_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}\sigma=0.$$
这是因为，对固定的 $y$ 和 $z$，表达式 $xyz$ 是 $x$ 的奇函数，而 $\Sigma_1$ 关于 $yz$ 平面对称.

同理，在 $\Sigma_2$ 上，$\boldsymbol{n}=(0,0,-1)$，$\boldsymbol{F}=(0,0,xy)$，有
$$\int_{\Sigma_2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=-\int_{\Sigma_2}xy\mathrm{d}\sigma=0.$$
在 $\Sigma_3$ 上，$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，$\boldsymbol{F}=(hy,hx,xy)$，有
$$\int_{\Sigma_3}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\int_{\Sigma_3}xy\mathrm{d}\sigma=0.$$

综上，通过 $\Sigma$ 的总流量等于零. □

**例 6** 计算积分
$$\iint_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
这里 $\Sigma$ 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

**解** 我们首先计算
$$\iint_{\Sigma}z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
引入椭球面的参数表示
$$x=a\sin\theta\cos\varphi,\quad y=b\sin\theta\sin\varphi,\quad z=c\cos\theta,$$
这里 $0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.这时，我们有
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi\\ b\cos\theta\sin\varphi & b\sin\theta\cos\varphi\end{vmatrix}=ab\cos\theta\sin\theta.$$
按照公式(8)，得出

$$\iint_{\Sigma} z^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = abc^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\cos^4\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi abc^3\int_0^{\pi}\cos^4\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{4}{5}\pi abc^3.$$

对称地,有

$$\iint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{4}{5}\pi a^3 bc, \quad \iint_{\Sigma} y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{4}{5}\pi ab^3 c.$$

最后得出

$$A = \frac{4}{5}\pi abc(a^2+b^2+c^2).$$

□

**例 7** 计算积分

$$A = \iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\Sigma$ 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

**解** 先计算积分

$$\iint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

用平面 $z=c$ 把 $\Sigma$ 分成上、下两个半球面 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$,曲面 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 都是定向曲面:$\Sigma_1$ 的正法线与 $z$ 轴正向的夹角为锐角,而 $\Sigma_2$ 的正法线与 $z$ 轴正向的夹角为钝角.设在 $\Sigma_i$ 上,球面的方程为 $z=z_i(x,y)(i=1,2)$,并设 $D$ 为 $xy$ 平面上的圆盘 $(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$.依公式(11),得出

$$\iint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D}(z_1^2 - z_2^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D}(z_1+z_2)(z_1-z_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意到 $z_1+z_2=2c$,因而上式等于

$$2c\iint_{D}(z_1-z_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2c\times\text{球的体积}.$$

由对称性,知

$$
\begin{aligned}
A &= 2(a+b+c)\times\text{球的体积} \\
&= 2(a+b+c)\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8}{3}(a+b+c)\pi R^3.
\end{aligned}
$$
□

## 练 习 题 12.3

1. 计算下列第二型曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma} x^4\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^4\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$：$x^2+y^2+z^2=a^2$，内侧；

(2) $\iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$：$x^2+y^2+z^2=a^2$，外侧；

(3) $\iint\limits_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$：$[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 的边界，外侧；

(4) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，外侧；

(5) $\iint\limits_{\Sigma}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$：$z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z\leqslant h$，外侧.

2. 给定流速场 $\boldsymbol{F}=(y,z,x)$，封闭曲面 $x^2+y^2=R^2$，$z=0$，$z=h$. 计算 $\boldsymbol{F}$ 流向曲面之外的流量.

3. 设 $\Sigma$：$z=f(x,y)$（$(x,y)\in D$），法向量向上. 求证：

(1) $\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\iint\limits_{D} P(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(2) $\iint\limits_{\Sigma} Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x = -\iint\limits_{D} Q(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

# 12.4 Gauss 公式和 Stokes 公式

利用 Gauss（高斯，1777～1855）公式，可以把沿三维区域边界的第二型曲面积分转换成为展布在此区域上的三重积分. 像在 11.3 节中对 Green 公式所做的处理一样，我们先对几种较简单的情形进行分析，再对一般的情形作出结论.

考察 $\mathbf{R}^3$ 中的闭区域

$$\Omega=\{(x,y,z):\varphi(x,y)\leqslant z\leqslant\psi(x,y),(x,y)\in D\},$$

其中 $D$ 是 $xy$ 平面上的闭区域(图 12.10). 为了行文的简短,我们称这样的区域为**丙类区域**.

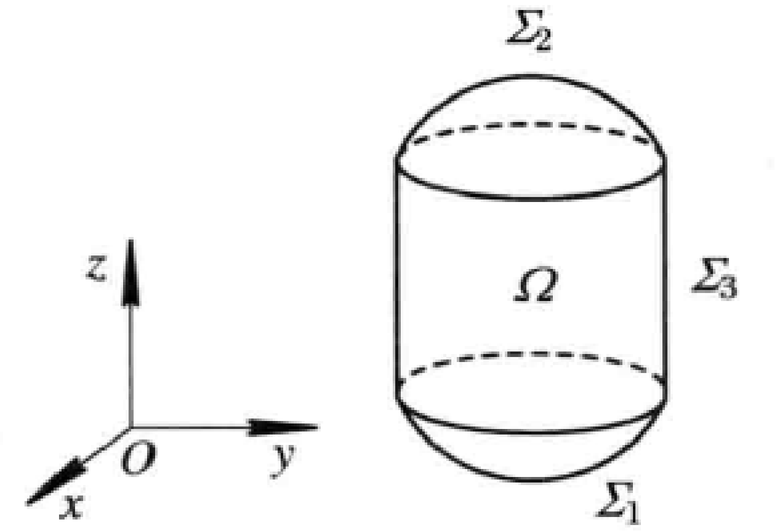



**图 12.10**

设函数 $R:\Omega\to\mathbf{R}$ 连续且有连续的一阶偏导数. 取 $\partial\Omega$ 的外侧为曲面 $\partial\Omega$ 的定向,计算第二型曲面积分

$$\iint_{\partial\Omega} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1}$$

这时 $\partial\Omega$ 可以看成是一个拼接曲面. 下底 $\Sigma_1$ 由方程 $z=\varphi(x,y)((x,y)\in D)$ 表示,法线向下;上底 $\Sigma_2$ 由方程 $z=\psi(x,y)((x,y)\in D)$ 表示,法线向上;还有一个是母线平行于 $z$ 轴的柱面,记作 $\Sigma_3$,法线平行于 $xy$ 平面,方向向着体外. 这样便有

$$\iint_{\partial\Omega} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_3} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为在 $\Sigma_3$ 上,面元 $\mathrm{d}\sigma$ 在 $xy$ 平面上的投影等于零,因此,最后一个积分等于零. 于是

$$\iint_{\partial\Omega} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2}$$

根据 12.3 节中的公式(11),我们有

$$\iint_{\Sigma_1} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D} R(x,y,\varphi(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{\Sigma_2} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D} R(x,y,\psi(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由式(2),得

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D}(R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y)))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

如果把最后的表达式看成是从一个三重积分化归的累次积分,我们便得出

$$\iint_{\partial\Omega} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{3}$$

类似地,我们可以定义甲类区域. 如果闭区域 $\Omega$ 能够表示为

$$\Omega = \{(x,y,z):\varphi(y,z)\leqslant x\leqslant\psi(y,z),(y,z)\in D\},$$

其中 $D$ 为 $yz$ 平面上的闭区域,那么称 $\Omega$ 是**甲类区域**. 这时,我们有

$$\iint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{4}$$

而对乙类区域

$$\Omega = \{(x,y,z): \varphi(x,z) \leqslant y \leqslant \psi(x,z), (x,z) \in D\},$$

这里 $D$ 是 $zx$ 平面上的一个闭区域，则有

$$\iint_{\partial\Omega} Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{5}$$

设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中由逐片光滑曲面围成的一个有界闭区域，它可以同时分拆为有限个甲类区域、乙类区域和丙类区域的并，同一类中的任何两个区域至多有公共的边界，那么像我们在讨论 Green 公式时所作过的推理一样，这时公式(3)～(5)都能成立. 把这三个等式相加，我们得出

$$\iint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

这样，我们已经证明了下面的定理.

**定理 12.4.1**（Gauss 公式） 设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中由逐片光滑曲面围成的有界闭区域，它可同时分拆为有限个甲类区域、乙类区域和丙类区域的并，同一类中任何两个区域至多有公共的边界. 如果函数 $P$，$Q$ 和 $R$ 都在 $\Omega$ 上连续可微，那么有

$$\iint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{6}$$

这里 $\partial\Omega$ 表示 $\Omega$ 的边界，$\partial\Omega$ 按外法线方向来定向.

如果式(6)的左边用第一型曲面积分来表达，那么 Gauss 公式也可写成

$$\iint_{\partial\Omega}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

这和用第一型曲线积分表达的 Green 公式（11.3 节中的式(9)）是一致的.

我们通过若干例子来说明 Gauss 公式的应用.

**例 1** 计算积分

$$A = \iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\Sigma$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧（见 12.3 节中的例 4）.

**解** 用 $\Omega$ 来记 $\Sigma$ 所包围的球体. 由式(6)，得

$$A = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3\int_{\Omega}\mathrm{d}\mu = 3\mu(\Omega) = 4\pi a^3. \qquad \square$$

**例 2** 计算积分

$$A=\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\Sigma=\{(x,y,z):x,y,z\geqslant0,x+y+z=1\}$,其法向量与(1,1,1)同向(见12.3节中的例3).

**解** 这不是一张封闭的曲面.我们补上它同三个坐标轴截下的三块三角形,作成一个四面体 $\Omega$.由于在每一个坐标平面上,被积表达式 $x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,所以,三块补上去的曲面对曲面积分没有贡献,因此

$$A=\iint_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

利用 Gauss 公式,得出

$$A=3\int_{\Omega}\mathrm{d}\mu=3\mu(\Omega).$$

由于这个四面体体积 $\mu(\Omega)=1/6$,我们得到 $A=1/2$. □

**例 3** 证明 Archimedes(阿基米德,公元前287~前212)原理:物体全部浸入液体中所受的浮力等于与物体同体积液体的重量.

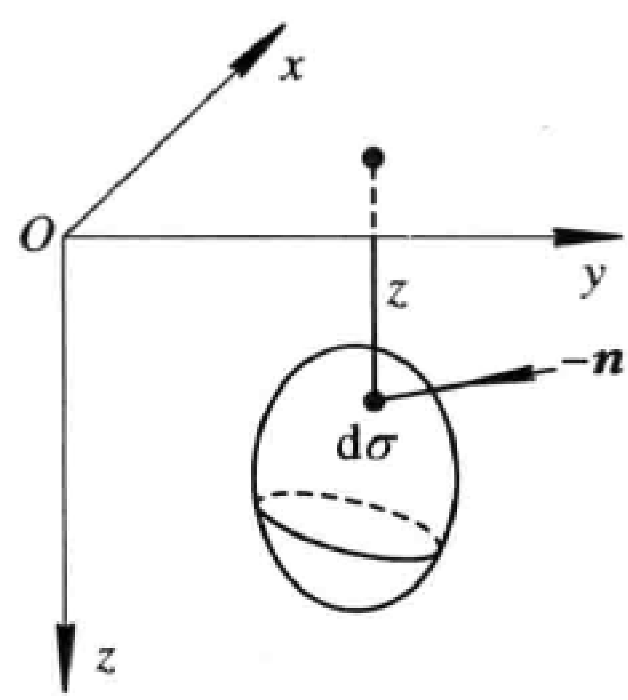


图 12.11

**证明** 取坐标系如图12.11所示.设液体的密度为 $\rho$,那么物体表面一小块面积 $\mathrm{d}\sigma$ 所受到的压力大小是 $\rho gz\mathrm{d}\sigma$,方向是 $-\boldsymbol{n}$,这里 $\boldsymbol{n}$ 是物体表面的单位外法向量.设 $\boldsymbol{n}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}$,作为物体 $V$ 的表面的曲面记为 $\Sigma$,那么整个物体受到的压力 $\boldsymbol{F}$ 是

$$-\int_{\Sigma}\rho gz\cos\alpha\mathrm{d}\sigma\boldsymbol{i}-\int_{\Sigma}\rho gz\cos\beta\mathrm{d}\sigma\boldsymbol{j}-\int_{\Sigma}\rho gz\cos\gamma\mathrm{d}\sigma\boldsymbol{k}.$$

由 Gauss 定理,可得

$$\int_{\Sigma}\rho gz\cos\alpha\mathrm{d}\sigma=\iiint_{V}\frac{\partial(\rho gz)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

$$\int_{\Sigma}\rho gz\cos\beta\mathrm{d}\sigma=\iiint_{V}\frac{\partial(\rho gz)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma}\rho gz\cos\gamma\mathrm{d}\sigma&=\iiint_{V}\frac{\partial(\rho gz)}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\rho g\iiint_{V}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho g\mu(V).\end{aligned}$$

由此即得

$$\boldsymbol{F} = -\rho g\mu(V)\boldsymbol{k}.$$

这就是要证明的. □

利用 Green 公式,可以通过第二型曲线积分来表示闭曲线围成的图形的面积.同样,利用 Gauss 公式,可以通过第二型曲面积分来表示闭曲面所围成的立体的体积.因为

$$\iint_{\partial\Omega} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\int_{\Omega}\mathrm{d}\mu = 3\mu(\Omega),$$

所以

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7}$$

特别地,如果 $\partial\Omega$ 有正则的参数方程

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \quad ((u,v)\in\Delta),$$

那么,由公式(7)和 12.3 节中的公式(9),可得

$$\mu(\Omega) = \pm\frac{1}{3}\iint_{\Delta}\begin{vmatrix} x & y & z \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{8}$$

在利用公式(8)计算体积的时候,不必费心去选择曲面的定向,这是因为体积总是正数.如果算出式(8)右边的积分为负数,把负号去掉就可以了.

现在,我们来转向 Stokes(斯托克斯,1819～1903)公式.

Stokes 公式把沿一块曲面的边界的第二型曲线积分同展布在这块曲面上的第二型曲面积分联系起来.在某种意义下,可以认为 Stokes 公式是 Green 公式的推广.证明 Stokes 公式的时候,要用到 Green 公式.

设 $\Sigma$ 是一块正则参数曲面片:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) \quad ((u,v)\in\Delta).$$

并设 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 二阶连续可导,函数 $P(x,y,z)$ 在包含 $\Sigma$ 的某个三维区域上连续可导,我们来计算第二型曲线积分

$$\int_{\partial\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}x.$$

设 $\partial\Delta$ 的参数方程是 $\boldsymbol{f}(t)=(u(t),v(t))(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$,并且参数 $t$ 的增长方向对应着 $\partial\Delta$ 的正向.这样,$\partial\Sigma$ 的参数方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\circ\boldsymbol{f}(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$,因此

$$\int_{\partial\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta P\circ \boldsymbol{r}\circ f(t)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$
$$= \int_\alpha^\beta P\circ \boldsymbol{r}\circ f(t)\left(\frac{\partial x}{\partial u}u'(t)+\frac{\partial x}{\partial v}v'(t)\right)\mathrm{d}t$$
$$= \int_{\partial\Delta} P\circ \boldsymbol{r}\,\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + P\circ \boldsymbol{r}\,\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

对最后的那个平面第二型曲线积分应用 Green 公式，得到

$$\int_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x = \iint_\Delta \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P\circ \boldsymbol{r}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(P\circ \boldsymbol{r}\,\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{9}$$

计算得

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(P\circ \boldsymbol{r}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}+P\circ \boldsymbol{r}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v},$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\left(P\circ \boldsymbol{r}\,\frac{\partial x}{\partial u}\right)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}+P\circ \boldsymbol{r}\,\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}.$$

将以上两式相减，得

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(P\circ \boldsymbol{r}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(P\circ \boldsymbol{r}\,\frac{\partial x}{\partial u}\right)=\frac{\partial P}{\partial z}\circ \boldsymbol{r}\,\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}-\frac{\partial P}{\partial y}\circ \boldsymbol{r}\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

代入式(9)，得

$$\int_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x = \iint_\Delta\left(\frac{\partial P}{\partial z}\circ \boldsymbol{r}\,\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}-\frac{\partial P}{\partial y}\circ \boldsymbol{r}\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\iint_\Sigma \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint_\Sigma \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

即

$$\int_{\partial\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}x = \iint_\Sigma \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

类似地，还有其他两个公式：

$$\int_{\partial\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}y = \iint_\Sigma \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$
$$\int_{\partial\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

条件是 $Q$ 和 $R$ 在包含曲面 $\Sigma$ 的某一个三维区域上连续可导.

把以上三个等式的两边相加，就得到：

**定理 12.4.2**（Stokes 公式）　设 $\Sigma$ 是由有限块二阶连续可微的正则曲面拼接而成的定向曲面. 如果 $P$，$Q$ 和 $R$ 是定义在 $\Sigma$ 上的连续可微函数，那么

$$\int_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{10}$$

这里$\partial\Sigma$ 表示曲面$\Sigma$ 的边界,曲面 $\Sigma$ 的定向与其边界曲线$\partial\Sigma$ 的定向应当是协调的.

用行列式的记法,Stokes 公式可以表示为

$$\int_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \tag{11}$$

也可表示为

$$\int_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}\sigma, \tag{12}$$

其中$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$表示曲面$\Sigma$ 的单位正法向量.公式(11)和公式(12)可方便人们记忆.

**例 4** 设有向曲面$\Sigma$ 为

$$x + y + z = 1 \quad (x,y,z \geqslant 0),$$

其法线与(1,1,1)同向.求力场 $\boldsymbol{F} = (y^2, z^2, x^2)$绕$\Sigma$ 的正向边界$\partial\Sigma$ 一周所做的功.

**解** 这时,$\Sigma$ 的正法向量是

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

按公式(12),我们有

$$\int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}\sigma = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x + y + z)\mathrm{d}\sigma$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma(\Sigma) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} = -1. \qquad \square$$

**例 5** 计算曲线积分

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 + z^2)\mathrm{d}x + (z^2 + x^2)\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\mathrm{d}z,$$

其中 $\Gamma$ 为曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2ax, \\ x^2 + y^2 = 2bx \end{cases}$ $(z \geqslant 0, 0 < b < a)$. 从点 $(b,0,0)$ 看去, $\Gamma$ 是逆时针方向绕行的.

**解** 用 $\Sigma$ 记曲线 $\Gamma$ 在球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax \quad (z \geqslant 0)$$

上围出的那块曲面. 由公式(12), 即得

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma} (y^2 + z^2)\mathrm{d}x + (z^2 + x^2)\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{a}\int_{\Sigma} \begin{vmatrix} x - a & y & z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & z^2 + x^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}\sigma \\ &= \frac{2}{a}\int_{\Sigma} ((y - z)(x - a) + (z - x)y + (x - y)z)\mathrm{d}\sigma \\ &= 2\int_{\Sigma} (z - y)\mathrm{d}\sigma \\ &= 2\int_{\Sigma} z\mathrm{d}\sigma. \end{aligned}$$

由于 $\Sigma$ 关于坐标平面 $xOz$ 对称, 我们已经使用了 $\int_{\Sigma} y\mathrm{d}\sigma = 0$ 这一事实, $\Sigma$ 的方程可以写成

$$z = \sqrt{a^2 - (x - a)^2 - y^2},$$

所以

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x - a)^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{a}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

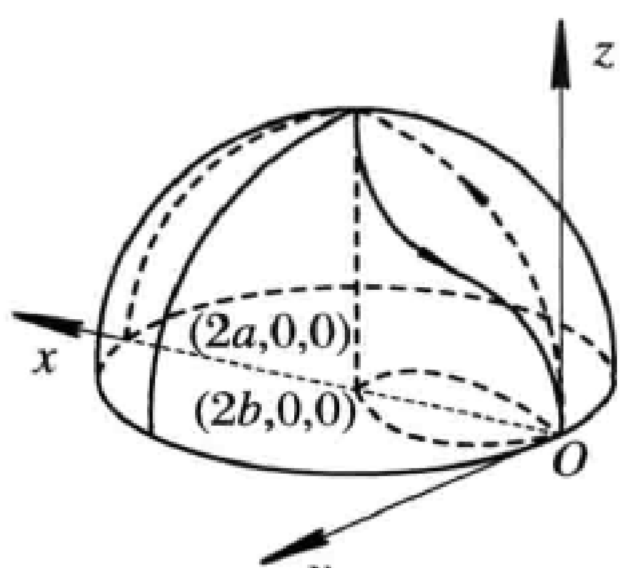


图 12.12

注意到 $\Sigma$ 在 $xOy$ 平面上的投影区域 $D$ 就是圆盘 $(x - b)^2 + y^2 = b^2$, 它的面积为 $\pi b^2$, 从而得

$$I = 2\iint_{D} z \cdot \frac{a}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2a\sigma(D) = 2\pi ab^2.$$

□

# 练习题 12.4

1. 利用 Gauss 公式,计算下列积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$,方向朝外;

(2) $\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$\Sigma$ 是由四张平面 $x=0,y=0,z=0$ 和 $x+y+z=1$ 围成的封闭曲面,方向朝外;

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$\Sigma$ 是曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$,方向朝下;

(4) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$\Sigma$ 是曲面 $z^2=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$,方向朝下.

2. 设 $\Omega$ 是一闭域,向量 $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量,$\boldsymbol{e}$ 是一个固定的向量.求证:

$$\int_{\partial\Omega}\cos(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma = 0.$$

3. 设 $\Omega$ 为一闭区域,向量 $\boldsymbol{n}$ 是 $\Omega$ 的边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量,点 $(a,b,c)\notin\partial\Omega$.令 $\boldsymbol{p}=(x-a,y-b,z-c)$ 且 $p=\|\boldsymbol{p}\|$.求证:

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{p} = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma.$$

4. 利用 Stokes 公式,计算下列积分:

(1) $\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$,$\Gamma$ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$,从第一卦限看去,$\Gamma$ 是逆时针方向绕行的;

(2) $\int_{\Gamma}(y+z)\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z$,$\Gamma$ 为椭圆 $x^2+y^2=2y, y=z$,从点 $(0,1,0)$ 向 $\Gamma$ 看去,$\Gamma$ 是逆时针方向绕行的;

(3) $\int_{\Gamma} y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$,$\Gamma$ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=a$,从原点看去,$\Gamma$ 是逆时针方向绕行的.

5. 设曲面 $\Sigma$ 有单位法向量 $\boldsymbol{n}$,$\boldsymbol{a}$ 是一个常向量.求证:

$$\int_{\partial\Sigma}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} = 2\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma.$$

6. 计算 $\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$,$\Gamma$ 是平面 $x+y=2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$ 交成的圆周,从原点看去,顺时针方向是 $\Gamma$ 的正向.

7. 计算上题中的积分,但 $\Gamma$ 是曲面 $z=xy$ 和 $x^2+y^2=1$ 的交线,沿 $\Gamma$ 的正向行进时,$z$ 轴在左手边.

8. 设定向曲线 $\Gamma: x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2=ax, z\geqslant 0$，从点 $(a/2,0,0)$ 看去，沿逆时针方向行进. 试计算力场 $\boldsymbol{F}=(y^2,z^2,x^2)$ 沿 $\Gamma$ 所做的功.
9. 质量为 $m$ 的质点在力场 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿曲线 $\Gamma$ 运动，$\Gamma$ 的起点为 $\boldsymbol{a}$，终点为 $\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{v}$ 记质点移动的速度向量. 求证：力场 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(\boldsymbol{p})\Big|_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}.$$

## 12.5 微分形式和外微分运算

在前面几节中，我们已经证明过 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式. 具体地说，Green 公式表达了平面区域上的二重积分同它的边界上的曲线积分之间的联系，Gauss 公式展示了三维区域上的三重积分同它的边界上的曲面积分之间的联系，而 Stokes 公式叙述的是空间中的一块曲面上的曲面积分同沿它的边界的曲线积分之间的关联. 这三种表示式在讨论各种积分之间的转换时，起着重要的作用. 人们自然会想到，$n$ 维空间的 $p(p\leqslant n)$ 维曲面上的积分与其边界上的积分之间有没有联系？能不能用类似的公式表达？要说清楚这个问题，必须引进新的数学工具——**微分形式**和**外微分运算**.

我们从简单的情况说起，先在 $\mathbf{R}^3$ 中讨论这些概念，然后把它们向 $\mathbf{R}^n$ 中推广.

在微分 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 之间引进**外积**运算，用符号 $\wedge$ 表示，运算规则如下：

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x=0,\quad \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}y=0,\quad \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z=0,$$
$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=-\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y,$$
$$\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z.$$

对三个微分作外积，允许使用结合律. 例如：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z&=(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}z\\&=-(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x)\wedge\mathrm{d}z\\&=-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z,\\\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x&=\mathrm{d}x\wedge(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x)\\&=-\mathrm{d}x\wedge(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\\&=-(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x)\wedge\mathrm{d}y\\&=0,\end{aligned}$$

等等.由此可见,在 $\mathbf{R}^3$ 中,多于三个的微分作外积,其结果必然是0.

设 $P,Q,R$ 是定义在 $\mathbf{R}^3$ 中的函数,表达式

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,$$
$$P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$
$$R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

分别称为1次、2次和3次**微分形式**或简称为1次、2次和3次形式.

$\mathbf{R}^3$ 中的函数 $f$ 称为0次微分形式,也简称0次形式.

通过下面的例子,可以熟悉微分形式之间的运算.

**例1** 设有微分形式

$$\omega=f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y+h\mathrm{d}z,\quad \theta=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

计算 $\omega\wedge\theta$.

**解** 按定义展开 $\omega\wedge\theta$ 之后,本应有九个加项,但显然有三项等于零,所以

$$\begin{aligned}\omega\wedge\theta&=fQ\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+fR\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z+gP\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x+gR\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\&\quad+hP\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+hQ\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\\&=(gR-hQ)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(hP-fR)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(fQ-gP)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x&\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\f&g&h\\P&Q&R\end{vmatrix}.\end{aligned}$$
□

**例2** 设有微分形式

$$\omega=f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y+h\mathrm{d}z,$$
$$\theta=P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

计算 $\omega\wedge\theta$.

**解** 我们有

$$\omega\wedge\theta=(f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y+h\mathrm{d}z)\wedge(P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y),$$

展开之后,应当共有九项,不过其中有六项应等于零,因此

$$\begin{aligned}\omega\wedge\theta&=fP\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+gQ\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+hR\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=(fP+gQ+hR)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.\end{aligned}$$
□

现在引进**外微分运算** d.设 $f$ 是0次形式,定义 d 对 $f$ 的运算结果是

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

这是一个1次微分形式.

设1次微分形式 $\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$,我们规定

$$\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}Q\wedge\mathrm{d}y+\mathrm{d}R\wedge\mathrm{d}z,$$

即

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}x \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}y \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}z,\end{aligned}$$

化简后得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{1}$$

这是一个 2 次形式.

如果 $\omega$ 是 2 次形式，$\omega = P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，我们规定

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

化简后得到

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z. \tag{2}$$

这是一个 3 次形式.

下面即将看到，利用刚才引进的微分形式和外微分运算，我们可以把 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式写成一种和谐统一的形式.

先看 Green 公式. 设 $P, Q$ 是 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的连续可微函数. 如果令 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$，那么它的外微分

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge \mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

于是 Green 公式可以写成

$$\int_{\partial D}\omega = \int_D \mathrm{d}\omega,$$

这里 $D$ 是满足一定条件的平面区域，而 $\partial D$ 表示 $D$ 的边界曲线.

再看 Gauss 公式. 根据公式(2)，Gauss 公式可以表示为

$$\int_{\partial D}\omega = \int_D \mathrm{d}\omega,$$

这里 $\omega$ 是一个 2 次形式.

根据公式(1),Stokes 公式也可以表示成同样的形式,只不过其中 $\omega$ 是一个 1 次形式.

三个看上去完全不同的公式,在引进微分形式和外微分运算之后,居然得到了外形一模一样的表达式.这个表达式非常简洁,非常优美,非常和谐,十分便于记忆.这不是偶然的巧合,而恰恰反映了事物的本质,这使得我们有可能把这个公式向高维推广.

现在来定义 $\mathbf{R}^n$ 中的微分形式.

在空间 $\mathbf{R}^n$ 中,仍将向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 记为 $\boldsymbol{x}$,我们称表达式

$$\sum_{i_1,\cdots,i_p} a_{i_1,\cdots,i_p}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \tag{3}$$

为一个 $p$ **次微分形式**,简称 $p$ 形式,这里标号 $i_1, \cdots, i_p$ 中的每一个都独立地取遍 $1, 2, \cdots, n$.我们常常把式(3)简记为

$$\sum_I a_I(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_I,$$

此处 $I$ 表示一个 $p$ 重指标,即 $I = (i_1, \cdots, i_p)$,它的每一个分量都从 1 到 $n$ 独立地变化.我们也把数值函数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \cdots, x_n)$ 叫做 $\mathbf{R}^n$ 中的 0 次微分形式.

对一个 $p$ 次微分形式和一个数量函数 $f$,定义运算

$$f(\boldsymbol{x})\sum_I a_I(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_I = \sum_I (f(\boldsymbol{x})a_I(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x_I,$$

称之为这个 $p$ 次微分形式乘以函数 $f$.对两个 $p$ 次微分形式,按下面的等式定义加法运算:

$$\sum_I a_I(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_I + \sum_I b_I(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_I = \sum_I (a_I(\boldsymbol{x}) + b_I(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x_I.$$

关于符号"$\wedge$",我们约定

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i, \quad \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0. \tag{4}$$

根据约定(4),可见在表达式

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

中,如果下标 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 中有重复出现的,那么这个表达式就等于零.因此,和式(3)中,有许多项将等于零,还有另外一些项可以合并.于是,式(3)可以写为

$$\omega = \sum a_{i_1,\cdots,i_p}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}. \tag{5}$$

这里的求和是对一切满足条件

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n$$

的指标进行的,人们常设 $p$ 形式 $\omega$ 已具有式(5)的形式.

对这样的 $p$ 次微分形式,定义它的外微分

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i_1,\cdots,i_p} \mathrm{d}a_{i_1,\cdots,i_p}(\boldsymbol{x}) \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p},$$

它是一个 $p+1$ 次微分形式.

现在的问题是,如何定义 $p$ 次微分形式在 $p$ 维曲面上的积分.设 $\mathbf{R}^n$ 中的 $p$ 维曲面 $\boldsymbol{\Phi}$ 有参数表示

$$\boldsymbol{\Phi}:\begin{cases} x_1 = x_1(u_1,\cdots,u_p), \\ \cdots, \\ x_n = x_n(u_1,\cdots,u_p), \end{cases}$$

其中 $(u_1,\cdots,u_p)\in E\subset\mathbf{R}^p$,$E$ 称为这张曲面的参数域,我们假定函数 $x_i(u_1,\cdots,u_p)(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $E$ 上有一阶连续的偏导数.因此,$\mathbf{R}^n$ 中的 $p$ 维曲面 $\boldsymbol{\Phi}:E\to\mathbf{R}^n$ 实际上就是从 $E$ 到 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 $C^1$ 映射.设

$$\omega = \sum_{i_1,\cdots,i_p} a_{i_1,\cdots,i_p}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

是定义在 $\boldsymbol{\Phi}$ 上的一个 $p$ 次微分形式,定义 $\omega$ 在 $\boldsymbol{\Phi}$ 上的积分为

$$\int_{\boldsymbol{\Phi}}\omega = \int_E \sum_{i_1,\cdots,i_p} a_{i_1,\cdots,i_p}(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}))\frac{\partial(x_{i_1},\cdots,x_{i_p})}{\partial(u_1,\cdots,u_p)}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_p.$$

这是一个 $E\subset\mathbf{R}^p$ 上的 $p$ 重积分.

其实,对这个计算公式我们并不陌生,12.3 节中的第二型曲面积分正是通过化成二重积分来计算的.对这样定义的积分,我们仍然有公式

$$\int_{\partial\Omega}\omega = \int_{\Omega}\mathrm{d}\omega.$$

这就是一般形式的 Stokes 公式,但它的证明已经超出本书的知识范围.

## 练习题 12.5

1. 计算:

   (1) $(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)\wedge(z\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x)$;

   (2) $(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)\wedge(x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y - z\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)$.

2. 计算 $\mathrm{d}\omega$,设:

   (1) $\omega = xy + yz + zx$;　　(2) $\omega = xy\mathrm{d}x$;

   (3) $\omega = (xy + yz)\mathrm{d}x$;　　(4) $\omega = xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$;

   (5) $\omega = x^2y\mathrm{d}x - yz\mathrm{e}^x\mathrm{d}y$;　　(6) $\omega = xy^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - xz^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$;

   (7) $\omega = xy\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + zx\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

3. 设微分形式 $\omega\in C^2$. 证明：

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0.$$

## 问 题 12.5

1. 考察 $\mathbf{R}^n$ 中的 $n$ 个 1 形式

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_i \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

求证：

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n = \det(a_i^j(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

2. 设 $f_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 $n$ 个数量函数，$\mathrm{d}f_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是它们的微分. 求证：

$$\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_n = \frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

# 第 13 章　场 的 数 学

第 11 章和第 12 章的内容，即曲线积分和曲面积分以及相关的定理，对物理学有着特别重要的意义. 具体来说，它们在电磁学、流体力学、理论力学和理论物理等分支中，有着广泛的应用. 物理学家在使用这些数学理论的时候，往往采用一些特殊的术语和记号，这些我们过去都不曾谈到过.

场是最重要的物理概念之一. 由于地心引力的作用，在地球表面和外层空间的每一点，都有一个确定的引力存在，物理上常说这是一个引力场. 如果在某一范围内存在着温度分布，也就是说，在这个范围内的每一点处，都有一个确定的温度，我们说，这样就给出了一个温度场.

如果撇开具体的物理内容，单单从数学立场上来看，场的概念就很简单了. 设点集 $D\subset\mathbf{R}^3$，如果有函数 $f:D\to\mathbf{R}$，则称 $f$ 是 $D$ 上的一个**数量场**；如果有 $\boldsymbol{F}:D\to\mathbf{R}^3$，则称 $\boldsymbol{F}$ 是 $D$ 上的一个**向量场**. 这就是说，$D$ 上的数量场，是定义在 $D$ 上的数量函数；$D$ 上的向量场，是定义在 $D$ 上的向量值函数.

## 13.1　数量场的梯度

在本章的所有讨论中，假定所涉及的数量函数 $f$ 和向量值函数 $\boldsymbol{F}$ 都有我们所需要的各阶连续的偏导数.

设 $D\subset\mathbf{R}^3$ 为一开集，函数 $f:D\to\mathbf{R}$ 连续可微. 又设 $\boldsymbol{u}$ 是一个方向，$\boldsymbol{u}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，那么由定理 9.2.4，可知在 $\boldsymbol{p}_0\in D$ 处，$f$ 沿方向 $\boldsymbol{u}$ 的方向导数是

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}_0)\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{p}_0)\cos\gamma.$$

现在问:在各个不同的方向上,沿哪一个方向的方向导数取到最大值?这个最大值等于多少?

由 Cauchy-Schwarz 不等式,可知

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}_0)\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{p}_0)\cos\gamma\right)^2$$
$$\leqslant\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right)\bigg|_{\boldsymbol{p}_0}.$$

上式中等号成立的条件是方向 $\boldsymbol{u}$ 与向量

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\bigg|_{\boldsymbol{p}_0}$$

有相同的指向.这个向量,我们曾用记号 $Jf(\boldsymbol{p}_0)$来表示,在 9.2 节中,也使用过记号 $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{p}_0)$,并称之为 $f$ 在 $\boldsymbol{p}_0$ 处的**梯度**.

这就是说,对定义在 $D$ 上的数量函数 $f$,$f$ 的梯度是一个向量:

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{p})=\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{p})}{\partial x},\frac{\partial f(\boldsymbol{p})}{\partial y},\frac{\partial f(\boldsymbol{p})}{\partial z}\right).$$

沿着这一方向,方向导数有最大的数值,也就是说,在梯度的方向上,函数 $f$ 的变化最为强烈;而这个最大值正好是 $\|\operatorname{grad} f(\boldsymbol{p})\|$.

为了说明梯度的几何意义,我们引入数量场 $f$ 的**等值面**的概念.称点集

$$\{\boldsymbol{p}\in D: f(\boldsymbol{p})=c, c\text{ 为常数}\}$$

为数量场 $f$ 的 $c$ **等值面**.注意,对某些 $c$,$f$ 的 $c$ 等值面可能是空集.

回顾 9.5 节的内容,我们知道隐式曲面 $f(x,y,z)-c=0$ 的法向量是 $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$,这正是 $\operatorname{grad} f$.所以,数量场 $f$ 的梯度正是 $f$ 的等值面的法向量.

物理学家们常常喜欢用“算子”来作运算,这样做确实有其简便之处.我们令

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

称之为 Nabla(那勃拉)算子.孤立的一个算子并没有意义,只有将它作用到某个对象上才能产生数或向量.规定

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

好比是将 $f$ 从右边去乘“向量”$\nabla$,也就是把 $f$ 放到它的每一个分量上,所以$\nabla f$ 是梯度的另一种表示.

Nabla 算子满足下列规则:

(a) $\nabla(cf)=c\nabla f$ ($c$ 为常数);

(b) $\nabla(f \pm g)=\nabla f \pm \nabla g$;

(c) $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$;

(d) 设 $\varphi$ 是单变量函数,则 $\nabla(\varphi\circ f)=\varphi'\circ f\nabla f$.

直截了当地计算,便可验证以上四条规则.

**例 1** 设径向量 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$,令 $p=\|\boldsymbol{p}\|$.求梯度 $\nabla p$.

**解** 由于 $\boldsymbol{p}^2=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}=x^2+y^2+z^2$,依性质(d),得到

$$2p\nabla p=\nabla p^2=\nabla(x^2+y^2+z^2)=2(x,y,z)=2\boldsymbol{p}.$$

因此当 $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$ 时,有

$$\nabla p=\frac{\boldsymbol{p}}{\|\boldsymbol{p}\|}=\frac{\boldsymbol{p}}{p}.$$ □

## 练 习 题 13.1

1. 设 $f,g$ 为数量场.证明:

$$\nabla\frac{f}{g}=\frac{1}{g^2}(g\nabla f-f\nabla g).$$

2. 设 $u$ 为一数量场,$f$ 为一向量场.计算 $\nabla(u\circ f)$.

3. 设 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$,$p=\|\boldsymbol{p}\|$,$f$ 为单变量函数.计算:

(1) $\nabla\ln p$; (2) $\nabla f(p)$;

(3) $\nabla f(p^2)$; (4) $\nabla(f(p)\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})$($\boldsymbol{a}$ 为常向量).

4. 求数量场 $f$ 沿数量场 $g$ 的梯度方向的变化率,问何时这个变化率等于零?

5. 设 $\Omega$ 是 Gauss 公式中的闭区间,$\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量场,数量场 $u\in C^1(\Omega)$,点 $\boldsymbol{p}\in\Omega^\circ$.求证:

$$\nabla u(\boldsymbol{p})=\lim_{\Omega\to\boldsymbol{p}}\frac{1}{\mu(\Omega)}\iint_{\partial\Omega}u\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

# 13.2 向量场的散度

设 $D$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个区域,$\Sigma$ 是 $D$ 中一张有面积且可定向的曲面,指向 $\Sigma$ 上侧的单位法向量记为 $\boldsymbol{n}$.在 12.3 节中我们已经看到,如果 $\boldsymbol{F}$ 是 $D$ 上的一个流速场(或电场),那么在单位时间内,$\boldsymbol{F}$ 沿着 $\boldsymbol{n}$ 方向流过曲面 $\Sigma$ 的流量(或电通量)为

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma.$$

尽管从物理上看，流体通过一张曲面的流量和电场通过一张曲面的电通量是完全不同的两码事，但从数学上来看，它们却有完全相同的表达方式，这是它们的共性.我们就从此共性中抽象出向量场的通量这一概念.

**定义 13.2.1** 设 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中区域 $D$ 上的一个向量场，$\Sigma$ 是 $D$ 中一张有面积且可定向的曲面，$\boldsymbol{n}$ 是指向 $\Sigma$ 正侧的单位法向量.称积分

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

为向量场 $\boldsymbol{F}$ 通过 $\Sigma$ 正侧的**通量**.

同通量概念紧密地联系在一起的另外一个重要概念是向量场的散度.

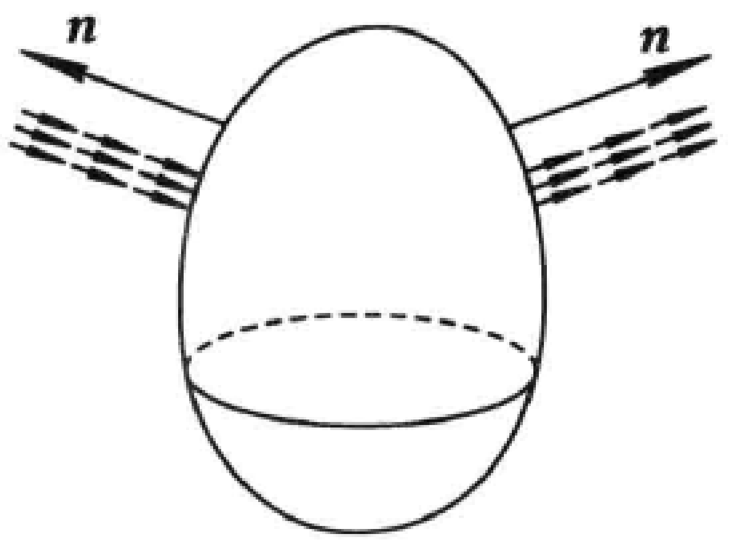



图 13.1

设 $\boldsymbol{F}$ 是区域 $D\subset\mathbf{R}^3$ 上一个给定的流速场，$\Sigma$ 是 $D$ 中一张光滑的封闭曲面.当流体从 $\Sigma$ 外流进 $\Sigma$ 内时，由于 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 成钝角(图 13.1)，$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}<0$，故流量取负值；当流体从 $\Sigma$ 内流出 $\Sigma$ 外时，由于 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 成锐角，$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}>0$，故流量取正值.如果流进 $\Sigma$ 和流出 $\Sigma$ 的流量相等(指绝对值相等)，那么通过整个 $\Sigma$ 的流量为 0.现在设想在 $\Sigma$ 所围的区域内，地下有一裂缝或小洞，流体要往下渗，这时流出 $\Sigma$ 的要比流入的少，故通过整个封闭曲面 $\Sigma$ 的流量取负值；反过来，假定地下有一处流体往外冒，这时流出 $\Sigma$ 的就比流进的多，因而通过整个封闭曲面的流量取正值.在这两种情况下，我们都认为场中有**源**存在，前者称为负源，后者称为正源.

现在的问题是，对给定的场 $\boldsymbol{F}$，如何判断场中有没有源存在？如果有源存在，如何刻画这个源的强度？

设 $M$ 是 $D$ 中的任意点，在 $M$ 周围作一封闭曲面 $S$.这时，曲面积分

$$\iint_{S} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma \quad (\boldsymbol{n} \text{ 是 } S \text{ 的外侧单位法向量})$$

表示向量场 $\boldsymbol{F}$ 在单位时间内从 $S$ 的内部发出的通过 $S$ 的通量.设 $V$ 是 $S$ 所包围的空间区域，用 $\mu(V)$ 记 $V$ 的体积，那么

$$\frac{1}{\mu(V)}\iint_{S} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma \tag{2}$$

就是单位时间内从单位体积发出的通量，它反映了区域 $V$ 的一种平均性质.为了

刻画点 $M$ 处的发散强度,必须让 $V$ 无限接近 $M$. 如果在这种情况下,式(2)的极限存在,那么这个极限就能刻画 $\boldsymbol{F}$ 在 $M$ 处发散的强度. 我们有下面的定义.

**定义 13.2.2** 设 $S$ 是包围点 $M$ 的一个封闭曲面, $V$ 是 $S$ 所包围的空间区域,用 $\mu(V)$ 记它的体积. 如果

$$\lim_{V \to M} \frac{1}{\mu(V)} \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma$$

存在,就称此极限为向量场 $\boldsymbol{F}$ 在 $M$ 处的散度,记为 $(\operatorname{div} \boldsymbol{F})_M$(div 是 divergence 的缩写),即

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{F})_M = \lim_{V \to M} \frac{1}{\mu(V)} \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma.$$

那么如何计算 $\boldsymbol{F}$ 的散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ 呢? 下面的定理给出了在直角坐标系下计算 $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ 的简单公式.

**定理 13.2.1** 设向量场

$$\boldsymbol{F} = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

其中 $P,Q,R$ 在区域 $D$ 上有连续偏导数. 那么

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{3}$$

在 $D$ 上成立.

**证明** 记 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$,于是

$$\begin{aligned} \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma &= \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) \mathrm{d}\sigma \\ &= \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{4}$$

这里第二个等号用了 Gauss 公式. 根据三重积分的中值公式, $V$ 中存在一点 $\boldsymbol{\xi}$,使得

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \bigg|_{\xi} \mu(V). \tag{5}$$

从式(4)和式(5),即得

$$\frac{1}{\mu(V)} \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \bigg|_{\xi}$$

在上式中令 $V \to M$,则 $\boldsymbol{\xi} \to M$. 由 $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ 在 $D$ 上的连续性,得

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{F})_M = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \bigg|_M.$$

由于 $M$ 是 $D$ 中的任意点，故式(3)在 $D$ 上成立. □

利用 Nabla 算子，散度可以写成"数量积"的形式：

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F}.$$

容易验证以下规则：

(a) $\nabla \cdot (c\boldsymbol{F}) = c\nabla \cdot \boldsymbol{F}$，这里 $c$ 为常数；

(b) $\nabla \cdot (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) = \nabla \cdot \boldsymbol{F}_1 + \nabla \cdot \boldsymbol{F}_2$；

(c) 设 $\varphi$ 是数量场，那么

$$\nabla \cdot \varphi\boldsymbol{F} = \varphi\nabla \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \cdot \nabla\varphi.$$

我们只证最后一式. 由于 $\varphi\boldsymbol{F} = (\varphi P, \varphi Q, \varphi R)$，所以

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \varphi\boldsymbol{F} &= \frac{\partial(\varphi P)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi R)}{\partial z} \\ &= \varphi\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + P\frac{\partial\varphi}{\partial x} + Q\frac{\partial\varphi}{\partial y} + R\frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ &= \varphi\nabla \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \cdot \nabla\varphi.\end{aligned}$$

**例 1** 设 $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$，$p = \|\boldsymbol{p}\|$. 计算 $\operatorname{div}(p^\alpha \boldsymbol{p})$.

**解** 易知

$$\nabla \cdot \boldsymbol{p} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

又由 13.1 节中的例 1，可得

$$\nabla p^\alpha = \alpha p^{\alpha-1}\nabla p = \alpha p^{\alpha-1}\frac{\boldsymbol{p}}{p} = \alpha p^{\alpha-2}\boldsymbol{p}.$$

根据性质(c)，我们有

$$\nabla \cdot p^\alpha\boldsymbol{p} = p^\alpha\nabla \cdot \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} \cdot \nabla p^\alpha = 3p^\alpha + \boldsymbol{p} \cdot \alpha p^{\alpha-2}\boldsymbol{p} = (3+\alpha)p^\alpha.$$

特别地，当 $\alpha = -3$ 时，有

$$\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{p}}{p^3} = 0.$$ □

现在，引入记号 $\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$，即

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

称之为 **Laplace 算子**. 设 $\Omega$ 为一区域，如果 $\Omega$ 上的数量场 $u$ 满足 **Laplace 方程**

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

那么称 $u$ 是 $\Omega$ 上的**调和函数**.

**例 2** 在 $\mathbf{R}^3$ 中，设 $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$，$p = \|\boldsymbol{p}\|$. 证明：$1/p\,(p>0)$ 是调和函数.

**证明** 利用例 1,我们有

$$\Delta \frac{1}{p} = \nabla^2 \frac{1}{p} = \nabla \cdot \nabla \frac{1}{p} = - \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{p}}{p^3} = 0. \qquad \square$$

**例 3**(静电场的 Gauss 定理) 在静电场中,通过任一封闭曲面的电通量,等于此曲面所包含的电荷总量的 $4\pi$ 倍.

**证明** 设 $\Sigma$ 是一封闭曲面,取它的外法线的方向为其定向. 为了便于读者接受,我们分三步证.

(a) 设在坐标原点上放置电量为 $q$ 的点电荷,这个点电荷产生的电场强度(简称场强)是向量

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = \frac{q}{p^3}\boldsymbol{p} \quad (\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}),$$

其中 $p = \|\boldsymbol{p}\|$. 由例 1,可知当 $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ 时,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0.$$

如果原点 $O$ 在 $\Sigma$ 所围成的体的外部,由 Gauss 公式,知

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = 0.$$

就是说,这时 $\boldsymbol{E}$ 过封闭曲面 $\Sigma$ 的通量等于零.

再设 $O$ 被曲面 $\Sigma$ 包围在内部. 这时,以 $O$ 为中心、以充分小的 $\varepsilon$ 为半径作一小球,记为 $\Sigma_\varepsilon$,使得这个球完全在曲面 $\Sigma$ 的包围之内. 对由 $\Sigma$ 与 $\Sigma_\varepsilon$ 所围成的区域,其形象宛如一只被挖去了核的桃子,在此区域上,有 $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$. 如果 $\Sigma_\varepsilon$ 也由外法线定向,这时由 Gauss 公式导出

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma + \int_{-\Sigma_\varepsilon} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = 0.$$

这就是

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \int_{\Sigma_\varepsilon} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma.$$

在球面 $\Sigma_\varepsilon$ 上,取法向量 $n = \boldsymbol{p}/p$,于是

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{q}{p^2} = \frac{q}{\varepsilon^2},$$

因此

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \frac{q}{\varepsilon^2}\sigma(\Sigma_\varepsilon) = 4\pi q,$$

即

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = 4\pi q.$$

这时电荷被包含在曲面 $\Sigma$ 之内.

(b) 设想有有限个点电荷,带电量分别为 $q_1,q_2,\cdots,q_k$. 并设点电荷 $q_i$ 产生的场强为$\boldsymbol{E}_i(i=1,2,\cdots,k)$. 因此,它们产生的总场强 $\boldsymbol{E}$ 是诸$\boldsymbol{E}_i$ 的叠加,即

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \boldsymbol{E}_k.$$

设 $\Sigma$ 是一封闭曲面,法线指向外侧. 如果设电荷 $q_1,q_2,\cdots,q_t$ 被包含在$\Sigma$ 的内部,其余的点电荷 $q_{t+1},\cdots,q_k$ 在$\Sigma$ 的外面,由(a),可知

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 4\pi q_i, & i = 1,2,\cdots,t, \\ 0, & i = t+1,t+2,\cdots,k. \end{cases}$$

因此

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Sigma} \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = 4\pi(q_1 + q_2 + \cdots + q_t).$$

(c) 最后,设区域 $D$ 内的场强$\boldsymbol{E}$ 是由连续分布的电荷所产生的,电荷密度是 $\rho(\boldsymbol{p})$,它是点的函数. 设 $\Omega \subset D$,其中包含的总电荷正是三重积分$\int_{\Omega} \rho \mathrm{d}\mu$. 因此有

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = 4\pi \int_{\Omega} \rho \mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

如果在等式的左边应用 Gauss 公式,我们得出

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{E} \mathrm{d}\mu = 4\pi \int_{\Omega} \rho \mathrm{d}\mu,$$

即

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{E} - 4\pi\rho) \mathrm{d}\mu = 0.$$

因为 $\Omega$ 可以是$D$ 中的任何立体,所以由上式可知

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$$

在该 $D$ 上处处成立. 这是 Gauss 定理的微分形式,也是静电场的基本公式之一.

**例 4**(不可压缩流体的连续性方程) 设 $\boldsymbol{F}$ 是流速场,数量场 $\rho$ 是流体在各点处的密度. 场 $\boldsymbol{F}$ 和$\rho$ 既依赖于空间点的位置,也依赖于时间 $t$. 设 $\Omega$ 是空间中任意固定的区域,那么流体的质量关于时间 $t$ 的变化率应是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} \rho(\boldsymbol{p},t) \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\boldsymbol{p},t) \mathrm{d}t.$$

由于该流体是不可压缩的,上述变化率必须等于流体进入 $\Omega$ 的速率,即

$$-\int_{\partial\Omega} \rho \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma,$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 表示$\partial\Omega$ 的单位外法向量场. 由 Gauss 公式

$$\int_{\partial\Omega}\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=\int_{\Omega}\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}\mu,$$

得

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{F})\right)\mathrm{d}\mu=0.$$

由于被积函数连续且 $\Omega$ 是任意的区域，所以

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{F})=0$$

必须在空间中处处成立．最后这一个表达式称为**流体的连续性方程**．　□

## 练 习 题 13.2

1．在 $\mathbf{R}^2$ 中，令 $\boldsymbol{p}=(x,y)$ 且 $p=\|\boldsymbol{p}\|$．求证：当 $p>0$ 时，$\ln p$ 是调和函数．

2．求证：

$$\Delta(fg)=f\Delta g+g\Delta f+2\nabla f\cdot\nabla g.$$

3．设 $\Omega$ 是 Gauss 公式中的闭区域，$u,v\in C^1(\Omega)$，$\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量场．求证：

(1) $\displaystyle\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma=\int_{\Omega}\Delta u\,\mathrm{d}\mu$；

(2) $\displaystyle\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma=\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}\mu+\int_{\Omega}v\Delta u\,\mathrm{d}\mu$；

(3)（第二 Green 公式）

$$\int_{\partial\Omega}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}\sigma=\int_{\Omega}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}\mu.$$

4．设 $u$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的闭区域 $\Omega$ 上的调和函数，$\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量．求证：

(1) $\displaystyle\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma=0$；

(2) $\displaystyle\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma=\int_{\Omega}\|\nabla u\|^2\mathrm{d}\mu$.

## 问 题 13.2

1．设 $u$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中闭区域 $\Omega$ 上的调和函数．求证：

$$u(\boldsymbol{p}_0)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\boldsymbol{p}_0$ 是 $\Omega$ 内的任意一点，$\boldsymbol{p}$ 为从 $\boldsymbol{p}_0$ 到 $\partial\Omega$ 上的点的向量，$p=\|\boldsymbol{p}\|$．

这一事实表明,调和函数由其边界上的值完全确定.

2. (调和函数的平均值定理)若 $u$ 在 $\Omega$ 内是调和函数,$\boldsymbol{p}_0$ 是 $\Omega$ 内的任意一点,$\Sigma$ 是 $\Omega$ 内以 $\boldsymbol{p}_0$ 为球心、以 $R$ 为半径的球面.求证:

$$u(\boldsymbol{p}_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_\Sigma u\,\mathrm{d}\sigma.$$

3. 若 $u$ 在闭区域 $\Omega$ 内是调和函数,在 $\Omega$ 上连续且不是常数.求证:$u$ 只在 $\partial\Omega$ 上取到它在 $\Omega$ 上的最大值和最小值.

## 13.3 向量场的旋度

大家知道,在流动的河面上,水在各点处的流速是不同的,靠近河岸的地方流速较慢,河中央流速较快.因此,河面上的一片落叶除了向下游漂去外,自身还会打旋,这表示河面上到处都有漩涡,有的地方漩涡较强,有的地方漩涡较弱,它推动树叶旋转.如何刻画漩涡的强弱程度呢?

在 11.2 节讨论第二型曲线积分时,我们曾用第二型曲线积分

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z \tag{1}$$

表示力场 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$ 沿着曲线 $\Gamma$ 所做的功,现在还可以用它来刻画漩涡的强度.为方便起见,我们把式(1)写成第一型曲线积分

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s=\int_\Gamma(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})\mathrm{d}s,$$

其中,$\boldsymbol{t}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 $\Gamma$ 的沿着正方向的单位切向量.

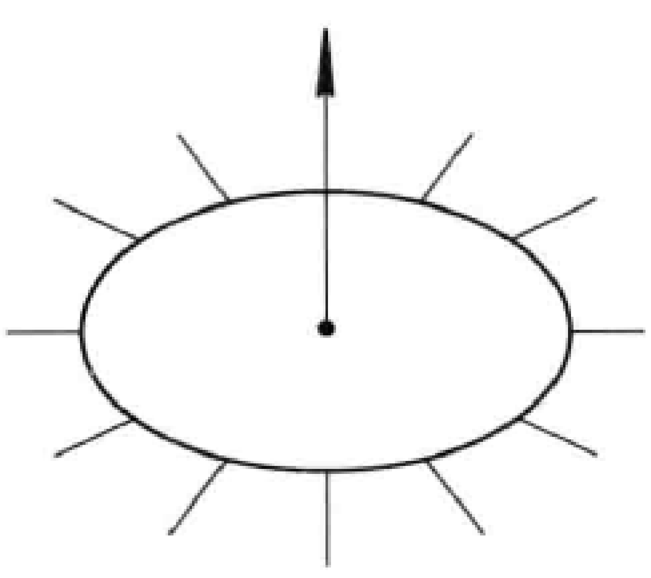


图 13.2

我们考虑一种简单的情形,即点涡的情形.所谓点涡 $O$,是指 $O$ 点是旋转中心,其余各点都围绕 $O$ 点旋转.设想有一桶水,用棍子在水的中心 $O$ 搅动一下,水在桶里就产生一个以 $O$ 点为中心的点涡.我们要设法来度量这个点涡的强度.为此,把图 13.2 所示的那个带有翼片的小圆片放到桶中,小圆片的圆心放在 $O$ 点上.由于水流的冲击,这个小圆片会旋转,小圆片旋转的快慢可以用来度量漩涡的强度:转得快,说明漩涡强;转得慢,说明漩涡弱.我们把由于水旋转

产生的流速场记作 $\boldsymbol{v}$，设小圆片的半径为 $r$，它转动的角速度为 $\omega$，圆片边上每一点的速度的模是 $\omega r$，方向就是圆周的切线方向. 记圆周 $\Gamma$ 上每一点的单位切向量为 $\boldsymbol{t}$，那么圆周 $\Gamma$ 上每一点的速度 $\boldsymbol{v}=\omega r\boldsymbol{t}$. 现在来计算曲线积分

$$\int_{\Gamma}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s.$$

在圆周上，$\mathrm{d}s=r\mathrm{d}\theta$，所以

$$\int_{\Gamma}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s=\int_{0}^{2\pi}\omega r^{2}\mathrm{d}\theta=2\omega\pi r^{2},$$

或者

$$\frac{1}{\pi r^{2}}\int_{\Gamma}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s=2\omega. \tag{2}$$

我们把曲线积分 $\int_{\Gamma}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s$ 叫做向量场 $\boldsymbol{v}$ 沿闭曲线 $\Gamma$ 的环量. 式(2) 的左边表示小圆片单位面积上的环量，或叫做平均环量. 式(2) 告诉我们小圆片上的平均环量等于小圆片旋转角速度的 2 倍. 这说明小圆片上的平均环量可以用来刻画漩涡的强度.

这个例子告诉我们，环量在刻画旋转的强度方面起着重要的作用. 下面我们引进一般向量场沿着封闭曲线的环量的概念.

**定义 13.3.1** 设 $\boldsymbol{F}$ 是区域 $D\subset\mathbf{R}^{3}$ 上的一个向量场，$\Gamma$ 是 $D$ 中的一条封闭曲线，称积分

$$\int_{\Gamma}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})\mathrm{d}s$$

为向量场 $\boldsymbol{F}$ 沿闭曲线 $\Gamma$ 的**环量**，其中 $\boldsymbol{t}$ 是 $\Gamma$ 的指向正向的单位切向量.

上面讨论的点涡有这样一个特点：围绕 $O$ 点旋转的点都在垂直 $z$ 轴的平面上，即以平行于 $z$ 轴的直线为旋转轴. 在实际情况中，漩涡的旋转轴并不一定与 $z$ 轴平行，大气中的漩涡就是如此. 我们仿照上面的例子来处理这种旋转轴不与 $z$ 轴平行的情形.

设 $\boldsymbol{F}$ 是给定的向量场，$M$ 是场中的一点. 过 $M$ 任作一单位向量 $\boldsymbol{n}$，在过 $M$ 且与 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面上任取一包围 $M$ 的闭曲线 $\Gamma$，记 $\Gamma$ 所包围区域的面积为 $A$，$\Gamma$ 上指向 $\Gamma$ 正向的单位切向量为 $\boldsymbol{t}$，那么 $\Gamma$ 上的平均环量

$$\frac{1}{A}\int_{\Gamma}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})\mathrm{d}s$$

就可以刻画 $M$ 处以 $\boldsymbol{n}$ 为旋转轴的漩涡的强度. 但是 $\Gamma$ 所围的区域中除 $M$ 外，还有许多其他的点，为了能真正刻画 $M$ 点的情况，必须让 $\Gamma$ 收缩到 $M$ 点. 为此，我们给出下面的定义.

**定义 13.3.2** 如果平均环量的极限

$$\lim_{\Gamma\to M}\frac{1}{A}\int_{\Gamma}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})\mathrm{d}s$$

存在,就称此极限为向量场 $\boldsymbol{F}$ 在点 $M$ 处以 $\boldsymbol{n}$ 为旋转轴的漩涡的强度.

对不同的方向 $\boldsymbol{n}$,向量 $\boldsymbol{F}$ 在点 $M$ 处漩涡的强度是不同的,正如对不同的方向,数量场有不同的方向导数一样. 自然产生这样的问题:对给定的向量场 $\boldsymbol{F}$ 及场中的一点 $M$,向量场 $\boldsymbol{F}$ 在 $M$ 处沿哪个方向的漩涡的强度最大? 我们用 Stokes 公式来回答这个问题.

设 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$. 由 Stokes 公式,知

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})\mathrm{d}s&=\int_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\&=\iint_{G}\Big[\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\cos\alpha+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\cos\beta\\&\qquad+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big]\mathrm{d}\sigma,\end{aligned}\tag{3}$$

这里 $G$ 是 $\Gamma$ 所围的区域,$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

记

$$\boldsymbol{a}=\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\boldsymbol{i}+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\boldsymbol{j}+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\boldsymbol{k},$$

那么式(3)可写为

$$\int_{\Gamma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s=\iint_{G}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma.$$

由积分中值定理知,存在 $\boldsymbol{\xi}\in G$,使得

$$\int_{\Gamma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})\big|_{\xi}\cdot A,$$

这里 $A$ 是 $G$ 的面积. 于是

$$\lim_{\Gamma\to M}\frac{1}{A}\int_{\Gamma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})\big|_{M}=\boldsymbol{a}\big|_{M}\cdot\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{a}(M)|\cos\theta,\tag{4}$$

这里 $\theta$ 是向量 $\boldsymbol{a}(M)$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角. 式(4)说明向量场 $\boldsymbol{F}$ 在 $M$ 处以 $\boldsymbol{n}$ 为旋转轴的漩涡强度是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向上的投影. 因而当 $\theta=0$,即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的方向一致时,旋转强度取最大值,而且这个最大值就是 $\|\boldsymbol{a}\|$.

现在给出向量场 $\boldsymbol{F}$ 在点 $M$ 处旋度的定义.

**定义 13.3.3** 向量场 $\boldsymbol{F}$ 在点 $M$ 的**旋度**是这样一个向量:以这个向量的方向为旋转轴的漩涡强度的值最大,而且最大值就是这个向量的模. 向量场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度

记为 rot $\boldsymbol{F}$(rot 是 rotation 的缩写).

根据上面的讨论,向量 $\boldsymbol{a}$ 就是满足定义中所要求的那个向量. 这样,我们得到了向量场

$$\boldsymbol{F} = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{R}(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

的旋度 rot $\boldsymbol{F}$ 在直角坐标系中的表达式:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

或用行列式表达为

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

利用 Nabla 算子,旋度能写成"向量积"的形式:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F}.$$

旋度运算适合下列法则:

(a) $\nabla \times (c\boldsymbol{F}) = c\nabla \times \boldsymbol{F}$,其中 $c$ 为常数;

(b) $\nabla \times (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) = \nabla \times \boldsymbol{F}_1 + \nabla \times \boldsymbol{F}_2$;

(c) 设 $\varphi$ 是数量函数,则有

$$\nabla \times (\varphi\boldsymbol{F}) = \varphi\nabla \times \boldsymbol{F} + \nabla\varphi \times \boldsymbol{F};$$

(d) $\nabla \cdot (\boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{F}_2) = (\nabla \times \boldsymbol{F}_1) \cdot \boldsymbol{F}_2 - (\nabla \times \boldsymbol{F}_2) \cdot \boldsymbol{F}_1$.

**(c)的证明** 设 $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$,于是

$$\nabla \times (\varphi\boldsymbol{F}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \varphi P & \varphi Q & \varphi R \end{vmatrix}.$$

它的第一个分量是

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varphi R) - \frac{\partial}{\partial z}(\varphi Q) = \varphi\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + R\frac{\partial \varphi}{\partial y} - Q\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

由此可见

$$\begin{aligned}\nabla \times (\varphi\boldsymbol{F}) &= \varphi\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \varphi\nabla \times F + \nabla\varphi \times F.\end{aligned}$$

**(d)的证明** 设 $\boldsymbol{F}_i=(P_i,Q_i,R_i)(i=1,2)$，于是

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{F}_1\times\boldsymbol{F}_2)&=\frac{\partial}{\partial x}(Q_1R_2-Q_2R_1)+\frac{\partial}{\partial y}(R_1P_2-R_2P_1)\\&\quad+\frac{\partial}{\partial z}(P_1Q_2-P_2Q_1)\\&=\left(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)P_2+\left(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)Q_2+\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)R_2\\&\quad-\left(\left(\frac{\partial R_2}{\partial y}-\frac{\partial Q_2}{\partial z}\right)P_1+\left(\frac{\partial P_2}{\partial z}-\frac{\partial R_2}{\partial x}\right)Q_1+\left(\frac{\partial Q_2}{\partial x}-\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)R_1\right)\\&=(\nabla\times\boldsymbol{F}_1)\cdot\boldsymbol{F}_2-(\nabla\times\boldsymbol{F}_2)\cdot\boldsymbol{F}_1.\end{aligned}$$

**例 1** 设 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$，$p=\|\boldsymbol{p}\|$. 向量场

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})=f(p)\boldsymbol{p}$$

称为**有心场**，其中 $f$ 是单变量函数. 求证：rot $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$，其中 $p>0$.

**证明** 因为 $\nabla\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$，所以

$$\begin{aligned}\nabla\times(f\boldsymbol{p})&=f\nabla\times\boldsymbol{p}+\nabla f\times\boldsymbol{p}=\nabla f\times\boldsymbol{p}\\&=f'(p)\nabla p\times\boldsymbol{p}=f'(p)\frac{1}{p}\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

□

在 13.2 节的例 3 中，我们讨论过静电场

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{p^3}\boldsymbol{p},$$

这是一个有心场. 由例 1，知

$$\text{rot}\,\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}.$$

这也是静电场中的一个重要定理.

## 练 习 题 13.3

1. 证明：

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-\nabla^2\boldsymbol{F}.$$

2. 设 $\Omega$ 是 Gauss 公式中的闭区域，$\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，向量场 $\boldsymbol{F}\in C^1(\Omega)$. 求证：

$$\text{rot}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})=\lim_{\Omega\to\boldsymbol{p}}\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{F}\mathrm{d}\sigma.$$

3. 设 $\Omega$ 是 Gauss 公式中的闭区域，数量场 $f\in C^2(\Omega)$，在 $\Omega$ 中处处不为零，且满足条件

$$\text{div}(f\,\text{grad}\,f)=af,\quad \|\nabla f\|^2=bf,$$

其中 $a$ 与 $b$ 为常数. 试计算 $\displaystyle\int_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma$.

## 13.4　有势场和势函数

**定义 13.4.1**　设向量场 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$定义在区域 $D\subset\mathbf{R}^3$ 上.如果存在 $D$ 上的一个数量场 $\varphi$,满足

$$\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})\tag{1}$$

对一切 $\boldsymbol{p}\in D$ 成立,则称向量场 $\boldsymbol{F}$ 为**有势场**,数量场 $\varphi$ 叫做向量场 $\boldsymbol{F}$ 的一个**势函数**.

等式(1)也可以写成

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P,\quad\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q,\quad\frac{\partial\varphi}{\partial z}=R.\tag{2}$$

同有势场的概念紧密相关的还有两种场.

**定义 13.4.2**　设 $\boldsymbol{F}$ 是定义在区域 $D\subset\mathbf{R}^3$ 上的向量场.如果对含于 $D$ 中的任何一条封闭曲线 $\Gamma$,都有 $\int_\Gamma\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=0$,则称 $\boldsymbol{F}$ 是 $D$ 上的一个**保守场**.

这就是说,如果 $\boldsymbol{F}$ 是一保守场,$\Gamma_1,\Gamma_2$ 是两条有向曲线,它们都以 $A$ 为起点,以 $B$ 为终点,那么

$$\int_{\Gamma_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p},$$

即 $\boldsymbol{F}$ 的曲线积分与路径无关.

**定义 13.4.3**　设 $\boldsymbol{F}$ 是定义在区域 $D\subset\mathbf{R}^3$ 上的向量场.如果

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}=\mathbf{0}$$

在 $D$ 上处处成立,则称 $\boldsymbol{F}$ 为 $D$ 上的一个**无旋场**.

对平面区域而言,定理 11.3.2 告诉我们,这三种场是等价的.但有一个前提条件:这个平面区域必须是**单连通**的.对空间区域,单连通的概念比平面区域要复杂一些.我们有:

**定义 13.4.4**　设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的区域.如果 $\Omega$ 中任意封闭曲面的内部完全在 $\Omega$ 中,则称 $\Omega$ 为**空间单连通区域**;否则称为**空间多连通区域**.

例如:

$$\Omega_1=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3:x^2+y^2+z^2<1\},$$

$$\Omega_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1\}$$

都是空间单连通区域,但

$$\Omega_3 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1\},$$
$$\Omega_4 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$$

都是空间多连通区域.

**定义 13.4.5** 设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的区域.如果对 $\Omega$ 中任意逐段光滑的曲线 $\Gamma$,总能在 $\Omega$ 中找到一张逐片光滑的曲面 $\Sigma$,以 $\Gamma$ 为其边界,即 $\partial\Sigma = \Gamma$,则称 $\Omega$ 为曲面单连通区域.

例如,上面的 $\Omega_3$ 和 $\Omega_4$ 都不是空间单连通区域,而是曲面单连通区域.但也有空间单连通区域不是曲面单连通的,例如

$$\Omega_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x^2 + y^2 > \frac{1}{2}\right\}.$$

因此,空间单连通和曲面单连通是两个不相关的概念,无强弱之分.

现在可以来叙述本节的主要结果:

**定理 13.4.1** 设 $D$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面单连通区域,$\boldsymbol{F}$ 是定义在 $D$ 上的一个向量场.如果 $\boldsymbol{F} \in C^2(D)$,那么以下三个命题等价:

(1) $\boldsymbol{F}$ 是有势场;

(2) $\boldsymbol{F}$ 是无旋场;

(3) $\boldsymbol{F}$ 是保守场.

**证明** 我们按(1)⇒(2)⇒(3)⇒(1)的顺序给出定理的证明.

(1)⇒(2) 设 $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ 是有势场,因而存在势函数 $\varphi$,使得式(2)成立.于是有

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

由此即知

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}.$$

(2)⇒(3) 设 $\boldsymbol{F}$ 是无旋场.在 $D$ 中任取一条封闭曲线 $\Gamma$,并在 $D$ 内作一以 $\Gamma$ 为边界的曲面 $\Sigma$.这时,由 Stokes 公式,得到

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = 0,$$

即 $\boldsymbol{F}$ 是$D$ 上的保守场.

(3)⇒(1) 设 $\boldsymbol{F}$ 是一保守场,那么 $\boldsymbol{F}$ 的曲线积分与路径无关,即若 $\Gamma_1,\Gamma_2$ 是两条有向曲线,它们都以 $A$ 为起点,以 $B$ 为终点,则必有

$$\int_{\Gamma_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}.$$

现设$(a,b,c)$是 $D$ 中的一个固定点,$(x,y,z)$是 $D$ 中的任一点.定义函数

$$\varphi(x,y,z)=\int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p},\tag{3}$$

公式(3)右边的表示方法不会引起混乱,这是因为右边的那个曲线积分与路径无关,仅由终点唯一地确定.取$|h|$充分地小,使得$(x+h,y,z)$仍在 $\boldsymbol{D}$ 中.考察

$$\varphi(x+h,y,z)=\int_{(a,b,c)}^{(x+h,y,z)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}.\tag{4}$$

式(4)中的曲线积分的路径可以这样理解:从点$(a,b,c)$到点$(x,y,z)$的路径还是式(3)右边的那一段路径,而从点$(x,y,z)$到点$(x+h,y,z)$就取这两点连成的直线段.由式(4)和式(3),可知

$$\begin{aligned}\varphi(x+h,y,z)-\varphi(x,y,z)&=\int_{(x,y,z)}^{(x+h,y,z)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}\\&=\int_{x}^{x+h}P(t,y,z)\mathrm{d}t=hP(x^*,y,z),\end{aligned}$$

其中 $x^*$ 在 $x$ 和$x+h$ 之间,这里利用了连续函数的积分平均值定理.由此得到

$$\frac{\varphi(x+h,y,z)-\varphi(x,y,z)}{h}=P(x^*,y,z).$$

在上式的两边令 $h\to0$,再由 $P$ 的连续性,可得

$$\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}=P(x,y,z).$$

类似地,可以证明

$$\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}=Q(x,y,z),\quad\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}=R(x,y,z).$$

这就是说,由式(3)定义的函数 $\varphi$ 是场$\boldsymbol{F}$ 的一个势函数.因此,$\boldsymbol{F}$ 是有势场. □

上面的证明给出了如何求保守场的势函数的具体方法.

下面是三个具体的例子.

**例 1** 求有心场 $\boldsymbol{F}$ 的势函数.

**解** 设 $D=\{\boldsymbol{p}:p>0\}$.由 13.3 节中的例 1,知$\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{F}$ 在$D$ 上是无旋场.由定理 13.4.1 知 $\boldsymbol{F}$ 是$D$ 上的有势场.

任意固定一点 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$,则当 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$ 时,依公式(3)得出 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数

$$\varphi(\boldsymbol{B}) = \int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p}.$$

以原点为中心，以 $\|\boldsymbol{B}\|$ 为半径作球面 $S$. 设经过点 $\boldsymbol{A}$ 的球的半径与 $S$ 相交于点 $\boldsymbol{C}$. 又设 $S$ 上从 $\boldsymbol{C}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的大圆弧为 $\Gamma$，于是

$$\varphi(\boldsymbol{B}) = \int_{\overline{AC}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} + \int_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p}.$$

由于在 $\Gamma$ 上，有 $\boldsymbol{p}^2 = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p} = p^2 = \|\boldsymbol{B}\|^2$，所以 $\boldsymbol{p} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = 0$，即 $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = 0$. 由此得到势函数

$$\varphi(\boldsymbol{B}) = \int_{\overline{AC}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_{\|\boldsymbol{A}\|}^{\|\boldsymbol{C}\|} pf(p)\mathrm{d}p = \int_{\|\boldsymbol{A}\|}^{\|\boldsymbol{B}\|} pf(p)\mathrm{d}p.$$

特别地，对地球的引力场

$$\boldsymbol{F} = -\frac{M}{p^3}\boldsymbol{p},$$

这里 $M$ 是地球的质量，这时有 $f(p) = -M/p^3$，于是，势函数为

$$\varphi(\boldsymbol{B}) = M\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{B}\|} - \frac{1}{\|\boldsymbol{A}\|}\right).$$

由于 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ 是任意固定的点，若令 $\|\boldsymbol{A}\| \to +\infty$，显然仍得出一个函数 $M/\|\boldsymbol{B}\|$，这是将一单位质量的质点从无穷远处移至点 $\boldsymbol{B}$ 处引力场做的功. □

**例 2** 设向量场

$$\boldsymbol{F} = (x^2 - 2yz, y^2 - 2xz, z^2 - 2xy).$$

证明：$\boldsymbol{F}$ 是有势场，并求出 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数.

**解** 令 $P = x^2 - 2yz, Q = y^2 - 2xz, R = z^2 - 2xy$. 直接验算有

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \tag{5}$$

从而可知 $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{F}$ 是无旋场，也就是有势场. 现在来求出 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数.

取定原点 $O = (0,0,0)$. 设 $(x,y,z)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的任一点. 为了计算的方便，选取从 $O$ 到 $(0,0,z)$ 的线段、从 $(0,0,z)$ 到 $(0,y,z)$ 的线段和从 $(0,y,z)$ 到 $(x,y,z)$ 的线段，这三段直线组成一条从 $O$ 到 $(x,y,z)$ 的折线. 这时，

$$\varphi(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p}$$

便是 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数. 易知

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= \int_{(0,0,0)}^{(0,0,z)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} + \int_{(0,0,z)}^{(0,y,z)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} + \int_{(0,y,z)}^{(x,y,z)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} \\ &= \int_0^z t^2 \mathrm{d}t + \int_0^y t^2 \mathrm{d}t + \int_0^x (t^2 - 2yz)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

从而就得出了向量场 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数

$$\varphi(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz.$$

对这个问题,还有另外一种算法.从 $O$ 到 $(x,y,z)$ 用直线段相连,引入参数方程

$$\xi = xt, \quad \eta = yt, \quad \zeta = zt \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

这时,

$$\mathrm{d}\xi = x\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}\eta = y\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}\zeta = z\mathrm{d}t,$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} &= P\mathrm{d}\xi + Q\mathrm{d}\eta + R\mathrm{d}\xi \\ &= t^2(x(x^2 - 2yz) + y(y^2 - 2xz) + z(z^2 - 2xy))\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= (x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz)\int_0^1 t^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz.\end{aligned}$$

这与第一种算法的结果一致. □

如果向量场 $\boldsymbol{F}$ 在区域 $\Omega$ 上有势函数 $\varphi$,那么称 $-\varphi$ 为 $\boldsymbol{F}$ 的**势能**.

现在设力场 $\boldsymbol{F}$ 是一有势场,质点在这个力场的作用下运动,运动的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,时间 $t\in[a,b]$;如果运动满足 Newton 第二定律,那么一定满足**能量守恒定律**.

**例 3** 在上述条件之下,质点运动时的势能与动能之和等于常数.

**证明** 设质点的质量为 $m$,那么动能便是 $m(\boldsymbol{r}'(t))^2/2$,我们只需要证明

$$\frac{1}{2}m(\boldsymbol{r}'(t))^2 - f \circ \boldsymbol{r}(t) \tag{6}$$

为一常数.将式(6)对 $t$ 求导,得出

$$m\boldsymbol{r}'(t) \cdot \boldsymbol{r}''(t) - \nabla f \circ \boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t). \tag{7}$$

Newton 第二定律说的是 $m\boldsymbol{r}''(t) = \boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{r}(t)$,也就是 $m\boldsymbol{r}''(t) = \nabla f\circ\boldsymbol{r}(t)$,代入式(7)后,得

$$\boldsymbol{r}'(t) \cdot \nabla f \circ \boldsymbol{r}(t) - \nabla f \circ \boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t) = 0.$$

这正是说,式(6)中的表达式等于常数. □

现在,我们来讨论势函数的唯一性问题.

设 $\boldsymbol{F}$ 是区域 $\Omega$ 上的有势场,$f$ 和 $g$ 都是 $\boldsymbol{F}$ 的势函数,这也就是说,

$$\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} g = \boldsymbol{F}$$

在 $\Omega$ 上处处成立，即

$$\frac{\partial}{\partial x}(f-g) = \frac{\partial}{\partial y}(f-g) = \frac{\partial}{\partial z}(f-g) = 0.$$

由定理 9.10.2，即知 $f-g$ 在 $\Omega$ 上是一常数. 由此得：

**定理 13.4.2** 设 $\boldsymbol{F}$ 是区域 $\Omega$ 上的有势场，如果不计常数加项，那么势函数是唯一的.

与向量场的势函数密切相关的是所谓恰当微分形式的概念. 设

$$P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

是定义在开集 $D\subset\mathbf{R}^3$ 上的微分形式，如果 $D$ 上存在一个 0 形式 $\varphi$，使得

$$\mathrm{d}\varphi = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \tag{8}$$

在 $D$ 上处处成立，那么这个 1 形式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 称为 $D$ 上的一个**恰当微分形式**，或简称**恰当微分**.

很明显，公式组(5)是判断这个微分形式是恰当微分的充分必要条件. 一旦确信它是一个恰当微分之后，也可以用刚刚已指明的办法求出 $\varphi$ 来，使之满足等式(8).

在开集 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上，方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{9}$$

称为**恰当微分方程**. 如果它的左边是一个恰当微分，设 $\varphi$ 是向量场 $\boldsymbol{F}=(P,Q)$ 的任一势函数，那么对任意的常数 $c$，隐函数

$$\varphi(x,y) = c$$

是微分方程(9)的**通解**.

**例 4** 求微分方程

$$(x+y+1)\mathrm{d}x + (x-y^2+3)\mathrm{d}y = 0 \tag{10}$$

的通解.

**解** 设

$$P = x+y+1,\quad Q = x-y^2+3.$$

由于成立着等式

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

所以式(10)是一个恰当微分方程. 现在来求向量场 $\boldsymbol{F}=(P,Q)$ 的一个势函数：

$$\varphi(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_{(0,0)}^{(0,y)} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} + \int_{(0,y)}^{(x,y)} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}$$

$$= \int_0^y (3 - t^2)\mathrm{d}t + \int_0^x (t + y + 1)\mathrm{d}t$$

$$= 3y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2 + xy + x.$$

因此,方程(10)的通解是

$$\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}x^2 - xy - x - 3y = c,$$

这里 $c$ 为任意常数. □

## 练 习 题 13.4

1. 求下面 $\boldsymbol{F}$ 的势函数:

(1) $\boldsymbol{F} = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}, \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}, -\frac{xy}{z^2}\right)$;

(2) $\boldsymbol{F} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}(x + y, x + y, z)$.

2. 计算下列恰当微分的曲线积分:

(1) $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y - z^2\mathrm{d}z$;

(2) $\int_{(1,2,3)}^{(0,1,1)} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$;

(3) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,其中$(x_1, y_1, z_1)$是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上的点,$(x_2, y_2, z_2)$是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ 上的一点,并设 $a > 0, b > 0$.

3. 设 $f, g, h$ 为单变量的连续函数.计算

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x)\mathrm{d}x + g(y)\mathrm{d}y + h(z)\mathrm{d}z.$$

4. 设 $f$ 为单变量的连续函数.计算:

(1) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x + y + z)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$;

(2) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z)$.

5. 设弹性力的方向指向坐标原点,力的大小与质点到坐标原点的距离成比例,并设此点依逆时针方向描绘椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在第一象限的那一段.求弹性力所做的功.

6. 求解下列恰当微分方程:

(1) $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$;　　(2) $x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0$;

(3) $(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y=0$； (4) $(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y=0$；

(5) $\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y=0$； (6) $\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}$；

(7) $\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$.

## 13.5 旋度场和向量势

**定义 13.5.1** 设 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的区域 $D$ 上的一个向量场. 如果存在向量场 $\boldsymbol{G}$，使得

$$\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{G},$$

就称 $\boldsymbol{F}$ 是一个旋度场，$\boldsymbol{G}$ 称为 $\boldsymbol{F}$ 的向量势.

如何判断 $\boldsymbol{F}$ 是不是旋度场？容易看出，如果 $\boldsymbol{F}$ 是旋度场，即 $\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{G}$，那么

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{G})=0, \tag{1}$$

即 $\boldsymbol{F}$ 是一个无源场. 这是因为：若记 $\boldsymbol{G}=(G_1,G_2,G_3)$，那么

$$\nabla\times\boldsymbol{G}=\left(\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z},\frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x},\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}\right).$$

因而

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{G})&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}\right)\\&=0,\end{aligned}$$

即式(1)成立. 但反过来，从式(1)不一定能推出 $\boldsymbol{F}$ 是旋度场. 下面便是一个这样的例子.

设 $D=\mathbf{R}^3-\{\mathbf{0}\}$，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{p}/p^3$，$\boldsymbol{p}=(x,y,z)$，则由 13.2 节中的例 1，知 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$. 如果存在 $\boldsymbol{G}$，使得

$$\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{G}, \tag{2}$$

考虑以原点为中心、以 $r$ 为半径的上半球面 $\Sigma_1$ 和下半球面 $\Sigma_2$，$\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 的边界都是

$$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: x^2+y^2=r^2, z=0\},$$

但方向恰好相反，即 $\partial\Sigma_1=\partial\Sigma_2^-$. 由 Stokes 公式，得

$$\iint_{\Sigma_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \iint_{\Sigma_1} (\nabla \times \boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial \Sigma_1} \boldsymbol{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p},$$

$$\iint_{\Sigma_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \iint_{\Sigma_2} (\nabla \times \boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \int_{(\partial \Sigma_1)^-} \boldsymbol{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = -\int_{\partial \Sigma_1} \boldsymbol{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p},$$

因此

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \iint_{\Sigma_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma + \iint_{\Sigma_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = 0,$$

但

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \iint_{\Sigma} \frac{\boldsymbol{p}}{p^3} \cdot \frac{\boldsymbol{p}}{p} \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi \neq 0.$$

此矛盾说明式(2)不成立.但是对很广泛的一类域,即所谓的星形域,从式(1)能推出式(2).

**定义 13.5.2** 设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的区域,$\boldsymbol{P}_0 \in \Omega$.如果对任意的 $\boldsymbol{P} \in \Omega$,线段 $\overline{\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}_0}$ 完全落在 $\Omega$ 中,就称 $\Omega$ 关于 $\boldsymbol{P}_0$ 是星形区域.

例如,凸域关于其中任意的点都是星形的,而空心球$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 + z^2 < r\}$关于其中任意的点都不是星形的.我们有:

**定理 13.5.1** 设 $D$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中关于 $\boldsymbol{P}_0$ 的星形区域,$\boldsymbol{F} \in C^1(D)$.那么 $\boldsymbol{F}$ 是旋度场的充分必要条件是 $\boldsymbol{F}$ 为无源场,即 $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$.

**证明** 条件的必要性已在前面证明过,下面证明条件的充分性.即若 $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$,我们要证明存在 $\boldsymbol{G}$,使得

$$\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{G}. \tag{2}$$

先设 $\boldsymbol{P}_0 = (0,0,0)$.由于 $D$ 关于 $\boldsymbol{P}_0$ 是星形的,所以对任意的$(x,y,z) \in D$,$t \in (0,1)$,有$(tx,ty,tz) \in D$.设 $\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$,令

$$\boldsymbol{G} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \int_0^1 tP(tx,ty,tz)\mathrm{d}t & \int_0^1 tQ(tx,ty,tz)\mathrm{d}t & \int_0^1 tR(tx,ty,tz)\mathrm{d}t \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

那么 $\boldsymbol{G}$ 的三个分量 $G_1, G_2, G_3$ 分别为

$$G_1 = z\int_0^1 tQ(tx,ty,tz)\mathrm{d}t - y\int_0^1 tR(tx,ty,tz)\mathrm{d}t,$$

$$G_2 = x\int_0^1 tR(tx,ty,tz)\mathrm{d}t - z\int_0^1 tP(tx,ty,tz)\mathrm{d}t,$$

$$G_3 = y\int_0^1 tP(tx,ty,tz)\mathrm{d}t - x\int_0^1 tQ(tx,ty,tz)\mathrm{d}t.$$

我们来证明：

$$\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z}=P,\quad \frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x}=Q,\quad \frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}=R. \tag{3}$$

经过直接计算，得

$$\frac{\partial G_3}{\partial y}=\int_0^1 tP(tx,ty,tz)\mathrm{d}t+y\int_0^1 t^2\frac{\partial P}{\partial y}(tx,ty,tz)\mathrm{d}t-x\int_0^1 t^2\frac{\partial Q}{\partial y}(tx,ty,tz)\mathrm{d}t,$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial z}=x\int_0^1 t^2\frac{\partial R}{\partial z}(tx,ty,tz)\mathrm{d}t-\int_0^1 tP(tx,ty,tz)\mathrm{d}t-z\int_0^1 t^2\frac{\partial P}{\partial z}(tx,ty,tz)\mathrm{d}t.$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z}&=2\int_0^1 tP(tx,ty,tz)\mathrm{d}t-\int_0^1 xt^2\Big(\frac{\partial Q}{\partial y}(tx,ty,tz)+\frac{\partial R}{\partial z}(tx,ty,tz)\Big)\mathrm{d}t\\&\quad+\int_0^1 yt^2\frac{\partial P}{\partial y}(tx,ty,tz)\mathrm{d}t+\int_0^1 zt^2\frac{\partial P}{\partial z}(tx,ty,tz)\mathrm{d}t.\\&=2\int_0^1 tP(tx,ty,tz)\mathrm{d}t+\int_0^1 xt^2\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty,tz)\mathrm{d}t\\&\quad+\int_0^1 yt^2\frac{\partial P}{\partial y}(tx,ty,tz)\mathrm{d}t+\int_0^1 zt^2\frac{\partial P}{\partial z}(tx,ty,tz)\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{4}$$

这里我们已经用了等式

$$\nabla F=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

另外，

$$\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}(t^2P(tx,ty,tz))\mathrm{d}t=t^2P(tx,ty,tz)\Big|_0^1=P(x,y,z), \tag{5}$$

而

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\big(t^2P(tx,ty,tz)\big)\\&=2tP(tx,ty,tz)+t^2\Big(x\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty,tz)+y\frac{\partial P}{\partial y}(tx,ty,tz)+z\frac{\partial P}{\partial z}(tx,ty,tz)\Big).\end{aligned} \tag{6}$$

把式(6)代入式(5)，即得

$$\begin{aligned}P(x,y,z)&=2\int_0^1 tP(tx,ty,tz)\mathrm{d}t\\&\quad+\int_0^1 t^2\Big(x\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty,tz)+y\frac{\partial P}{\partial y}(tx,ty,tz)+z\frac{\partial P}{\partial z}(tx,ty,tz)\Big)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{7}$$

由式(4)和式(7)，即得

$$\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = P.$$

同理,可证式(3)的其余两式.

$\boldsymbol{G}$ 也可以写成下面的形式:

$$\boldsymbol{G}(x,y,z) = \int_0^1 t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz) \times \boldsymbol{P}\mathrm{d}t,$$

其中 $\boldsymbol{P}=(x,y,z)$.

如果 $\boldsymbol{P}_0=(x_0,y_0,z_0)\neq\boldsymbol{0}$,那么可取

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{G}(x,y,z)\\&= \int_0^1 t\boldsymbol{F}(x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0),z_0+t(z-z_0)) \times (\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

证明和前面是一样的. □

必须注意,旋度场的向量势不是唯一的.

**定理 13.5.2** 设 $\boldsymbol{G}$ 是旋度场 $\boldsymbol{F}$ 的向量势,那么对 $D$ 中任意连续可微的函数 $\varphi$,$\boldsymbol{G}+\nabla\varphi$ 也是 $\boldsymbol{F}$ 的向量势.

**证明** 这是因为

$$\nabla \times (\boldsymbol{G}+\nabla\varphi) = \nabla\times\boldsymbol{G} + \nabla\times(\nabla\varphi) = \nabla\times\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}.$$ □

**例 1** 证明:$\boldsymbol{F}=(xy+1)\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}-yz\boldsymbol{k}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的旋度场,并求其向量势.

**证明** 现在

$$P = xy+1,\quad Q = z,\quad R = -yz,$$

因此

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = y+(-y) = 0.$$

由定理 13.5.1 知它是一个旋度场.设它的向量势

$$\boldsymbol{G} = G_1\boldsymbol{i} + G_2\boldsymbol{j} + G_3\boldsymbol{k},$$

那么有

$$\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = xy+1,\quad \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = z,\quad \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = -yz. \tag{8}$$

令 $G_3=0$,则 $\dfrac{\partial G_2}{\partial z} = -xy-1$,所以

$$G_2 = -xyz - z + f(x,y).$$

又因 $\dfrac{\partial G_1}{\partial z} = z$,故 $G_1=\dfrac{z^2}{2}$,于是由式(8)的第三个方程,得

$$-yz + \frac{\partial f}{\partial x} = -yz.$$

取 $f=0$,就可得一向量势

$$G = \frac{z^2}{2}\boldsymbol{i} - (xy+1)z\boldsymbol{j}.$$

一般的向量势可写成

$$G = \frac{z^2}{2}\boldsymbol{i} - (xy+1)z\boldsymbol{j} + \nabla\varphi,$$

其中 $\varphi$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上任一连续可微的函数. □.

## 练 习 题 13.5

1. 证明下列向量场都是 $\mathbf{R}^3$ 中的旋度场,并求其向量势:
   (1) $\boldsymbol{F}=z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$;
   (2) $\boldsymbol{F}=xy\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k}$;
   (3) $\boldsymbol{F}=(z-y)\boldsymbol{i}+(x-z)\boldsymbol{j}+(y-x)\boldsymbol{k}$.
2. 设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中关于 $\boldsymbol{A}=(x_0,y_0,z_0)\neq\mathbf{0}$ 的星形域.如果 $\boldsymbol{F}$ 是 $\Omega$ 中的无源场,即 $\operatorname{div}\boldsymbol{F}=0$,证明:$\boldsymbol{F}$ 必为 $\Omega$ 中的旋度场.

# 13.6 正交曲线坐标系中梯度、散度和旋度的表达式

为了表达式的对称性,我们暂时放弃过去一些常用的记号.直角坐标系中的点过去常记为$(x,y,z)$,目前改记为$(x_1,x_2,x_3)$;过去我们用$(u,v,w)$表示参数空间的点,现在则用$(u_1,u_2,u_3)$来表示.

首先,应当介绍什么叫做"**正交曲线坐标**".记 $\boldsymbol{p}=(x_1,x_2,x_3)$.设

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}(u_1,u_2,u_3) \tag{1}$$

是从参数空间中的区域 $D$ 到 $\mathbf{R}^3$ 中的一个映射,也可以把映射(1)写成分量的形式

$$x_i = x_i(u_1,u_2,u_3) \quad (i=1,2,3), \tag{2}$$

其中$(u_1,u_2,u_3)\in D$.再设映射 $\boldsymbol{f}$ 满足下列条件:

(a) $\boldsymbol{f}\in C^1(D)$;

(b) $\boldsymbol{f}$ 是单射;

(c) $\frac{\partial f}{\partial u_1},\frac{\partial f}{\partial u_2},\frac{\partial f}{\partial u_3}$互相正交；

(d) def $Jf>0$.

于是，通过 $f$ 建立了区域$D$ 与$f(D)$之间的一对一的、连续可微的可逆映射，$f(D)\subset\mathbf{R}^3$ 也是一个区域，其中的任一点 $\boldsymbol{p}$ 与三数组$(u_1,u_2,u_3)\in D$ 之间可建立一一对应，这个三数组就称为点 $\boldsymbol{p}$ 的**曲线坐标**. 由于性质(c)成立，可以更精确地称之为点 $\boldsymbol{p}$ 的**正交曲线坐标**. 让我们对这一名词多作一些解说.

任意固定一点 $\boldsymbol{u}_0=(u_1^0,u_2^0,u_3^0)\in D$，那么

$$\boldsymbol{p}_0 = (x_1^0,x_2^0,x_3^0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_0) \in \boldsymbol{f}(D).$$

单参数的向量函数 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{f}(u_1,u_2^0,u_3^0)$是经过点 $\boldsymbol{p}_0$ 的一条曲线，称为 $u_1$ 曲线，它在点 $\boldsymbol{p}_0$ 处的切向量便是

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}_0).$$

类似地，可以定义 $u_2$ 曲线和 $u_3$ 曲线，它们在点 $\boldsymbol{p}_0$ 处的切向量分别是

$$\frac{\partial f}{\partial u_2}(\boldsymbol{u}_0),\quad \frac{\partial f}{\partial u_3}(\boldsymbol{u}_0).$$

由条件(c)和(d)，这三个切向量组成正交的右手系，这就是称$(u_1,u_2,u_3)$为点的正交曲线坐标的原因. 记

$$h_i = \left\|\frac{\partial f}{\partial u_i}\right\| \quad (i = 1,2,3),$$

可见 $h_1,h_2,h_3$ 都是正数，它们都是点的函数. 令

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = h_i\boldsymbol{e}_i \quad (i = 1,2,3),$$

可见 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是正交的单位向量，它们组成随着点变化的规范的正交右手系.

## 13.6.1 梯度的表示

设 $\Phi$ 是定义在$f(D)$上的一个数量函数. 在直角坐标系 $\mathbf{R}^3$ 中，$\Phi$ 的梯度 $\nabla\Phi$ 是向量

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1},\frac{\partial\Phi}{\partial x_2},\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right).$$

现在的问题是：若采用正交坐标$(u_1,u_2,u_3)$，将如何来表示这一向量？我们设

$$\nabla\Phi = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i\boldsymbol{e}_i, \tag{3}$$

这里 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 待定. 首先，我们有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial u_i}\mathrm{d}u_i = \sum_{i=1}^{3} h_i \mathrm{d}u_i \boldsymbol{e}_i. \tag{4}$$

一方面,由式(3)和式(4),可得

$$\nabla \Phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i h_i \mathrm{d}u_i; \tag{5}$$

另一方面,有

$$\nabla \Phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}\Phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\mathrm{d}u_i, \tag{6}$$

这里我们已经应用了一阶微分形式的不变性.将式(5)和式(6)等同起来,注意到 $\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}u_2,\mathrm{d}u_3$ 是任意的,得到

$$\lambda_i h_i = \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \quad (i = 1,2,3).$$

由此得到

$$\lambda_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \quad (i = 1,2,3),$$

代入式(3),可得

$$\nabla \Phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\boldsymbol{e}_i. \tag{7}$$

式(7)是下面讨论散度和旋度表示的出发点.为此,先证明下面的引理.

**引理 13.6.1** 以下三个等式成立:

(1) $\nabla u_i = \dfrac{\boldsymbol{e}_i}{h_i}(i=1,2,3)$;

(2) $\nabla \times \dfrac{\boldsymbol{e}_i}{h_i} = \boldsymbol{0}(i=1,2,3)$;

(3) $\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3} = \nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{e}_2}{h_1 h_3} = \nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{e}_3}{h_1 h_2} = 0$.

**证明** (1) 在式(7)中取 $\Phi = u_1$,即得 $\nabla u_1 = \boldsymbol{e}_1/h_1$.再取 $\Phi = u_2, \Phi = u_3$,即得其余两式.

(2) 由(1),即得

$$\nabla \times \frac{\boldsymbol{e}_i}{h_i} = \nabla \times (\nabla u_i) = 0.$$

(3) 计算得

$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3} = \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{h_2 h_3} = \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2} \times \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\right)$$

$$= \left(\nabla \times \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\right) \cdot \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3} - \left(\nabla \times \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\right) \cdot \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2} = 0.$$

在推导过程中,我们用到了公式

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\nabla \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} - (\nabla \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}.$$

这个公式我们已在13.3节的旋度运算法则(d)中作过证明,不过在那里是在直角坐标系下证明的.事实上,算子$\nabla$这一性质是不依赖于坐标系的,在此不作详细的说明.

类似地,有

$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3 h_1} = \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1 h_2} = 0.$$

□

## 13.6.2　散度的表示

设 $\boldsymbol{F}$ 为一向量函数,并且

$$\boldsymbol{F} = F_1 \boldsymbol{e}_1 + F_2 \boldsymbol{e}_2 + F_3 \boldsymbol{e}_3,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \nabla (F_1 \boldsymbol{e}_1) + \nabla (F_2 \boldsymbol{e}_2) + \nabla (F_3 \boldsymbol{e}_3).$$

利用引理13.6.1(3)和式(7),可得

$$\begin{aligned}
\nabla (F_1 \boldsymbol{e}_1) &= \nabla \left(F_1 h_2 h_3 \cdot \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3}\right) \\
&= \nabla (F_1 h_2 h_3) \cdot \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3} + F_1 h_2 h_3 \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3} \\
&= \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial (F_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} \boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial (F_1 h_2 h_3)}{\partial u_2} \boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial (F_1 h_2 h_3)}{\partial u_3} \boldsymbol{e}_3\right) \cdot \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3} \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (F_1 h_2 h_3)}{\partial u_1}.
\end{aligned}$$

同理,可得

$$\nabla (F_2 \boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (F_2 h_1 h_3)}{\partial u_2}, \quad \nabla (F_3 \boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (F_3 h_1 h_2)}{\partial u_3},$$

于是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial (F_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial (F_2 h_1 h_3)}{\partial u_2} + \frac{\partial (F_3 h_1 h_2)}{\partial u_3}\right). \tag{8}$$

## 13.6.3　旋度的表示

设 $\boldsymbol{F} = F_1 \boldsymbol{e}_1 + F_2 \boldsymbol{e}_2 + F_3 \boldsymbol{e}_3$,则

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla \times (F_1 \boldsymbol{e}_1) + \nabla \times (F_2 \boldsymbol{e}_2) + \nabla \times (F_3 \boldsymbol{e}_3).$$

利用引理 13.6.1(2)和式(7),可得

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{e}_1)&=\nabla\times\left(F_1h_1\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\right)\\&=\nabla(F_1h_1)\times\frac{\boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{h}_1}+\boldsymbol{F}_1h_1\nabla\times\frac{\boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{h}_1}\\&=\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial(\boldsymbol{F}_1h_1)}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial(\boldsymbol{F}_1h_1)}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial(\boldsymbol{F}_1h_1)}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3\right)\times\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\\&=\frac{1}{h_1h_3}\frac{\partial(F_1h_1)}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{h_2h_1}\frac{\partial(F_1h_1)}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_3\\&=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial(F_1h_1)}{\partial u_3}(h_2\boldsymbol{e}_2)-\frac{\partial(F_1h_1)}{\partial u_2}(h_3\boldsymbol{e}_3)\right).\end{aligned}$$

同理,可得

$$\nabla\times(\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{e}_2)=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial(F_2h_2)}{\partial u_1}(h_3\boldsymbol{e}_3)-\frac{\partial(F_2h_2)}{\partial u_3}(h_1\boldsymbol{e}_1)\right),$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{e}_3)=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial(F_3h_3)}{\partial u_2}(h_1\boldsymbol{e}_1)-\frac{\partial(F_3h_3)}{\partial u_1}(h_2\boldsymbol{e}_2)\right).$$

由此即得

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{F}=&\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\left(\frac{\partial(F_3h_3)}{\partial u_2}-\frac{\partial(F_2h_2)}{\partial u_3}\right)(h_1\boldsymbol{e}_1)+\left(\frac{\partial(F_1h_1)}{\partial u_3}-\frac{\partial(F_3h_3)}{\partial u_1}\right)(h_2\boldsymbol{e}_2)\right.\\&\left.+\left(\frac{\partial(F_2h_2)}{\partial u_1}-\frac{\partial(F_1h_1)}{\partial u_2}\right)(h_3\boldsymbol{e}_3)\right)\\=&\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\boldsymbol{e}_1&h_2\boldsymbol{e}_2&h_3\boldsymbol{e}_3\\\frac{\partial}{\partial u_1}&\frac{\partial}{\partial u_2}&\frac{\partial}{\partial u_3}\\F_1h_1&F_2h_2&F_3h_3\end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{9}$$

最后,我们计算在正交曲线坐标系中 Laplace 算子的表达式.设 $\Phi$ 是一数量函数,定义算子 $\Delta$:

$$\Delta\Phi=\nabla\cdot(\nabla\Phi),$$

$\Delta$ 叫做 Laplace 算子,这个算子在数学理论的自身和数学诸多的应用中,有着极其重要的作用.在 $\mathbf{R}^3$ 的直角坐标系中,Laplace 算子的表示为

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

在正交曲线坐标中,我们已经有了公式(7)和公式(8),因此可以立即得到

$$\Delta\Phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i^2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\right).\tag{10}$$

下面讨论三个特殊的正交曲线坐标系.

**例 1** 求在极坐标系下 Laplace 算子的表达式.

**解** 我们有

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

由

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta), \quad \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta),$$

得

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta} = 0.$$

因此极坐标是正交曲线坐标.这时,

$$h_1 = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r} \right\| = 1, \quad h_2 = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta} \right\| = r.$$

仿照公式(10),得到

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}.$$ □

**例 2** 试写出 ∇ 和 Δ 在柱坐标系下的表达式.

**解** 柱坐标的公式是

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z.$$

容易算出

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0),$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0),$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z} = (0, 0, 1).$$

由此可见柱坐标是正交曲线坐标,并且

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1.$$

设 $\Phi$ 为一数量函数.由公式(7),可知

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_3.$$

按照公式(10),便可得出

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$ □

**例 3** 求 Laplace 算子在球坐标系下的表达式.

**解** 由于

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial r} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$

$$\frac{\partial f}{\partial\theta} = (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta),$$

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi} = (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0).$$

可见球坐标是正交曲线坐标,并且

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin\theta.$$

代入公式(10),得出

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right),$$

或者

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right). \qquad \square$$

## 练 习 题 13.6

在柱坐标中,设流体的速度 $\boldsymbol{v}$ 在正交曲线坐标系下的分量为 $v_r, v_\theta, v_z$. 求证:这时的连续性方程是

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

(提示:见 13.2 节中的例 4.)

# 第14章　数项级数

前面我们接触到的函数主要是初等函数，有相当多的自然现象和工程技术中的问题需要用这些函数来描述.但是，随着科学技术的发展，人们对自然界的认识逐步深化，发现有许多自然现象不能用初等函数来描述，特别有很多**微分方程**的解不能用初等函数来表达，这就要人们去构造一些新的函数.4.3节的例2中曾经得到 $e^x$ 的一个表达式：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},$$

其中 $0<\theta<1$，$-\infty<x<+\infty$.对确定的 $x$，显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} = 0,$$

所以

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

这样，我们就把 $e^x$ 表示为无穷多个幂函数

$$1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^n}{n!}, \cdots$$

的和.换句话说，上面无穷多个幂函数的叠加产生了指数函数 $e^x$.这启发我们，把无穷多个函数

$$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$$

叠加起来，可能产生新的函数.

19世纪上半叶，数学家普遍认为，连续函数除了一些特殊的点外都是可微的，他们不能想象有处处连续、处处不可微的函数存在.1875年，Weierstrass（魏尔斯特拉斯，1815～1897）首先构造出具有上述性质的函数，使大家对连续和可微的概念在认识上进了一步.Weierstrass构造的这个函数正是用无穷级数来表达的.我们在14.8节将要给出处处连续、处处不可微的函数的例子，不过那个例子不是由

Weierstrass 构造的,而是由 van der Waerden(范德瓦尔登,1903～1996)在 1930 年构造的,在想法上更直观一些.

由此可见,无穷级数是构造新函数的一个十分有用的工具.当然,随之而来会有很多新问题:无穷多个函数如何求和?如何研究和函数的性质?要弄清这些问题,首先要知道无穷多个实数如何相加.

## 14.1 无穷级数的基本性质

**定义 14.1.1** 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

的前 $n$ 项和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

称为这个级数的第 $n$ 个**部分和**.如果这些部分和构成的数列$\{S_n\}$有有限的极限 $S$,就说级数(1)是**收敛**的,其和为 $S$,记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S;$$

如果数列$\{S_n\}$没有有限的极限,就说级数(1)是**发散**的.

**例 1** 等比级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots \tag{2}$$

的前 $n$ 项的和

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

当$|q|<1$时,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q};$$

当$|q|>1$时,数列$\{S_n\}$发散;当 $q=1$ 时,

$$S_n = n \to +\infty;$$

当 $q=-1$ 时,

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}, \\ 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}, \end{cases}$$

$\{S_n\}$也没有极限.综上所述,等比级数(2)当且仅当$|q|<1$时才是收敛的,其和为$\dfrac{1}{1-q}$.

由上册 1.5 节中的例 2 和例 3,我们还知道级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

当 $\alpha>1$ 时收敛,当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散.这一事实在下面的讨论中经常要用到.

下面来看一个计算无穷级数和的例子.

**例 2**　设 $p\geqslant 0, q>0, s=p+q$.计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(sn-p)(sn+q)}$$

的和.

**解**　按定义,有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(sn-p)(sn+q)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s}\left(\frac{1}{sn-p} - \frac{1}{sn+q}\right) \\
&= \frac{1}{s} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{sn-p} - \frac{1}{sn+q}\right) \\
&= \frac{1}{s} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{sn-p} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{s(n+1)-p}\right) \\
&= \frac{1}{s} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{sn-p} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{sn-p}\right) \\
&= \frac{1}{s} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{s-p} - \frac{1}{s(N+1)-p}\right) \\
&= \frac{1}{s(s-p)}.
\end{aligned}$$

□

研究无穷级数,一个最基本的问题是判断它的敛散性.只有在级数收敛的情况下,讨论它的求和问题才是有意义的.下面给出一个级数收敛的必要条件.

**定理 14.1.1**　如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,那么$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**证明**　用 $S_n$ 记级数的第 $n$ 个部分和,$S$ 记它的和,那么

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad\Rightarrow\quad S - S = 0\ (n\to\infty).$$

□

这个简单的事实可以用来判断一些级数的发散性.

**例 3** 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 是发散的. 这是因为

$$a_n = (-1)^n \not\to 0 \quad (n \to \infty).$$ □

**例 4** 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$ 发散.这是因为

$$a_n = n\sin\frac{1}{n} \to 1 \neq 0 \quad (n \to \infty).$$ □

必须注意,$a_n \to 0$ 仅仅是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件,但并不是充分条件,也就是说,从 $a_n \to 0$ 不能得出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的结论.调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 便是一个例子.

无穷级数的和既然是有限和的极限,在运算上当然有与通常有限和相类似的性质.这里我们首先指出的是线性性质.

**定理 14.1.2** 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 都收敛,那么级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$$

也收敛,且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{3}$$

这里 $\alpha,\beta$ 是任意两个实数.

**证明** 因为

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\sum_{k=1}^{n} a_k + \beta\sum_{k=1}^{n} b_k$$

对任意的正整数 $n$ 成立,令 $n \to \infty$ 即得式(3). □

利用收敛级数的这个性质,可以计算稍微复杂一些的级数的和.

**例 5** 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n + 2^n}{3^{n+2}}$ 的和.

**解** 已知等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n} = 3,$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{3^{n+2}}=\frac{1}{9}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}\right)=\frac{5}{12}.$$ □

与有限和类似的另一性质是收敛级数的可结合性.

**定理 14.1.3** 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 是一收敛级数.如果把级数的项任意结合而不改变其先后的次序,得新级数

$$(a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+\cdots+(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n})+\cdots,\tag{4}$$

这里正整数 $k_j(j=1,2,\cdots)$满足 $k_1<k_2<\cdots$,那么新级数也收敛,且与原级数有相同的和.

**证明** 设原级数的部分和数列为

$$S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots,\tag{5}$$

它有极限 $S$.新级数(4)的部分和数列显然是

$$S_{k_1},S_{k_2},\cdots,S_{k_n},\cdots,$$

它是数列(5)的一个子数列,因而与数列(5)有相同的极限 $S$. □

必须注意,这个命题的逆命题是不成立的.也就是说,即使级数(4)收敛,也不能断言原级数一定收敛.级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=1-1+1-1+\cdots$$

便是一个例子:如果把它的项两两结合起来,便得一个收敛级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots=0,$$

但它本身是发散的.

但若对级数(4)加上一些条件,定理 14.1.3 的逆命题也能成立.

**定理 14.1.4** 如果级数(4)在同一括号中的项都有相同的符号,那么从级数(4)收敛,便能推出原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,而且两者有相同的和.

**证明** 记级数(4)的部分和为

$$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots.$$

假定 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=S$.由于级数(4)的括号中的项都同号,故当 $k$ 由 $k_{n-1}+1$ 变到 $k_n$ 时,相应的原级数的部分和 $S_k$ 将单调地在 $A_{n-1}$和 $A_n$之间变动,即

$$A_{n-1}\leqslant S_k\leqslant A_n\quad 或\quad A_n\leqslant S_k\leqslant A_{n-1}\quad (k_{n-1}<k\leqslant k_n).$$

令 $k\to\infty$,这时 $n\to\infty$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}A_{n-1}=S$,所以

$$\lim_{k\to\infty}S_k=S.$$ □

这个定理在证明定理 14.5.3 时将用到.

一个自然的问题是：如果任意改变收敛级数中项的次序，所得的新级数是否还收敛？一般来说，结论是否定的.我们将在 14.5 节中详细讨论这个问题.

**定理 14.1.5** 在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 前面去掉有限项或加上有限项，不影响级数的敛散性.

**证明** 从上述级数去掉前 $m$ 项得到级数

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots.$$

记

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S'_{n-m} = \sum_{k=m+1}^{n} a_k,$$

那么

$$S_n - S'_{n-m} = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

是一个与 $n$ 无关的常数，故数列 $\{S_n\}$ 与 $\{S'_{n-m}\}$ 有相同的敛散性，因而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 与 $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ 有相同的敛散性.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 加上有限项后所得的级数，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也就是 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 去掉有限项所得的级数.根据上面的证明，两者有相同的敛散性. □

作为本节的结尾，我们指出，无穷级数的敛散是通过其部分和数列的敛散来定义的；反过来，任给一个数列 $\{S_n\}$，总可以构造一个级数，使其部分和数列就是 $\{S_n\}$.事实上，只要令

$$a_1 = S_1, \quad a_2 = S_2 - S_1, \quad \cdots, \quad a_n = S_n - S_{n-1}, \quad \cdots,$$

就有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n,$$

即 $\{S_n\}$ 是级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列.因此判断数列的敛散也可化为级数的敛散问题来考虑，在有些情况下，化为级数来考虑还更方便些.

## 练 习 题 14.1

1. 下面五个级数中，哪些收敛？哪些发散？

$$\sum_{n=1}^{\infty} n,\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n},\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3},\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$

2. 求下列级数的和：

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$；

(2) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$；

(3) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots$；

(4) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots$；

(5) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$.

3. 证明下列等式：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=1-\sqrt{2}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}=\ln 2$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$，其中 $m$ 为正整数.

4. 作一个无穷级数，使其部分和 $S_n=1/n\ (n=1,2,\cdots)$.

5. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是发散级数，对级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n),\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n),\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

的敛散性能得出什么结论？

6. 证明下列级数发散：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{3n^2-2}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

7. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 也收敛. 试举例说明其逆命题不成立. 但若 $a_n>0$，则逆命题也成立，试证之.

8. 设数列 $\{na_n\}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n+1})$ 都收敛. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

## 问 题 14.1

1. 求证：
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(pn+q)(pn+q+pr)}=\frac{1}{pr}\left(\frac{1}{q+p}+\frac{1}{q+2p}+\cdots+\frac{1}{q+rp}\right),$$
这里 $r$ 是正整数，$pn+q\neq 0(n=1,2,\cdots)$.

2. 求证：
$$\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{1}{m^2-n^2}=-\frac{3}{4m^2},$$
这里 $m$ 是给定的正整数.

3. 求证：
$$12<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10^6}<15.$$

4. 设 $a_n>0$，$\{a_n-a_{n+1}\}$ 为一个严格递减的数列.如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，求证：
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=+\infty.$$

5. 证明：存在正常数 $K$，使得不等式
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$$
对任何正数列 $\{a_n\}$ 成立.

# 14.2 正项级数的比较判别法

从这一节开始，我们要较为系统地讨论判断级数敛散的方法.先讨论正项级数，它与一般级数的敛散问题有密切关系.

如果对 $n=1,2,\cdots$，都有 $a_n\geqslant 0$，就称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为**正项级数**.例如，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$ 都是正项级数.由于有了定理 14.1.5，只有有限个负项的级数也可以当成正项级数看待.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数，它的部分和数列 $\{S_n\}$ 显然是一个递增数列，据此立刻可得：

**定理 14.2.1** 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

**证明** 必要性是显然的. 现假定 $\{S_n\}$ 有界，因为 $\{S_n\}$ 是递增数列，故有极限，因而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. □

由于正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是递增数列，当它有界时，有有限的极限；当它无界时，必趋于 $+\infty$. 因此正项级数只有两种可能：或者收敛于有限数，这时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$；或者发散于 $+\infty$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

定理 14.2.1 是判断正项级数敛散的最基本的方法，几乎所有其他的判别法都由它导出.

上册 1.5 节中的例 2 和例 3 就是用这个方法判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < +\infty\ (\alpha > 1)$ 的，不过那里用的是数列的语言.

**例 1** 设 $a_n > 0$，$S_n = a_1 + \cdots + a_n$. 证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2} < +\infty.$$

**证明** 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ 是正项级数，根据定理 14.2.1，只需证明它的部分和有界. 事实上，对任意的正整数 $N$，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} \frac{a_n}{S_n^2} &= \sum_{n=2}^{N} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1} S_n} \\ &= \sum_{n=2}^{N} \left( \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \right) = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_N} < \frac{1}{a_1},\end{aligned}$$

即其部分和有界，因而级数收敛. □

一般地，可以证明：对任意的 $\alpha > 1$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}} < +\infty.$$

当然证明要比这儿困难(参见问题 14.2 中的第 3 题).

定理 14.2.1 形式上固然简单，但用它直接证明某些级数的部分和有界往往不

容易.根据定理14.2.1得到的比较判别法提供了一个判别级数敛散的简单方法：只需用一个已知敛散性的级数和要判别的级数作比较便能得出结论.

**定理14.2.2**(比较判别法)　设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.如果从第 $N$ 项开始有不等式

$$a_n \leqslant b_n,$$

那么：

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛；

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

**证明**　由于去掉级数的有限项不影响其敛散性,故不妨假定不等式 $a_n \leqslant b_n$ 对所有的 $n=1,2,\cdots$ 都成立.分别用 $A_n$ 与 $B_n$ 记 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 的部分和,则显然有

$$A_n \leqslant B_n \quad (n=1,2,\cdots).$$

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$,则 $\{B_n\}$ 有界,因而 $\{A_n\}$ 也有界,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$；

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$,则由上面的不等式知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.　□

**例2**　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 收敛.因为

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}} \quad (n=1,2,\cdots),$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}} < +\infty$,故由定理14.2.2知原级数收敛.　□

**例3**　级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-\ln n}$ 收敛.因为当 $n$ 充分大时,有不等式

$$(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \ln \ln n} = n^{\ln \ln n} > n^2,$$

即当 $n > e^9$ 时,有

$$(\ln n)^{-\ln n} < \frac{1}{n^2},$$

故原级数收敛.　□

应用比较判别法,就是运用不等式,而不等式是可以通过极限方法来建立的.

下面的判别法比比较判别法用起来方便.

**定理 14.2.3**(比较判别法的极限形式)　设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l,$$

那么:

(1) 若 $0<l<+\infty$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散;

(2) 若 $l=0$,则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

(3) 若 $l=+\infty$,则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

**证明**　(1) 设 $0<l<+\infty$,则对 $\varepsilon=l/2>0$,存在 $N$,当 $n>N$ 时,有 $|a_n/b_n-l|<l/2$,即

$$\frac{1}{2}lb_n<a_n<\frac{3}{2}lb_n.$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,则从上式右边的不等式得知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散,则从上式左边的不等式得知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.因而两者同敛散.

(2) 若 $l=0$,则对 $\varepsilon=1$,可得 $N$,当 $n>N$ 时,$0<a_n/b_n<1$,即 $a_n<b_n$.故当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

同理可证(3)成立.　□

**例 4**　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3+2n-1}}$ 发散.因为

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^3+2n-1}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\quad(n\to\infty),$$

故由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散便知原级数发散.　□

**例 5**　研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ 的敛散性.

**解**　因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\dfrac{x}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}=\frac{x^2}{2},$$

所以不论 $x$ 取什么值,级数都收敛. □

最后让我们回顾 7.3 节中用面积原理建立的一个事实(7.3 节中的例 5):

**定理 14.2.4**(Cauchy 积分判别法) 设当 $x\geqslant 1$ 时,$f(x)\geqslant 0$ 且递减,那么无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

这个判别法对某些级数特别有效.

**例 6** 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 当 $\alpha>1$ 时收敛,当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散.

**证明** 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ 满足定理 14.2.4 的条件,因而原级数与无穷积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}$ 同敛散.而后者当 $\alpha>1$ 时收敛,当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散. □

**例 7** 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ 的敛散性.

**解** 根据积分判别法,原级数与积分

$$\int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{\alpha}}$$

同敛散.容易看出,这个反常积分当 $\alpha>1$ 时收敛,当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散.因而原级数也如此. □

## 练习题 14.2

1. 设 $a_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$.如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,能否断言 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛?试举例说明之.

2. 用比较判别法讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n^2+5}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2}{3n^2+1}\right)^n$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+(1/n)}}$;

(7) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\dfrac{2n+1}{2n-1}-1\right)$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/(n^2+1)}-1)$；　　(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$.

3. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛. 但反之不然，举例说明之.

4. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，试证：

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$$

也收敛.

5. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 也收敛. 举例说明其逆命题不成立. 但若 $\{a_n\}$ 是递减数列，则逆命题成立.

6. 证明：级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$ 发散.

7. 证明：级数 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$ 发散.

8. 问 $p,q$ 取何值时，级数

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$$

收敛？

9. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个收敛的正项级数. 证明：对任何 $\delta>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-(1+\delta)/2}\sqrt{a_n}<+\infty$. 当 $\delta=0$ 时情况如何？

10. 设 $\sigma>0$，$a_n>0(n=1,2,\cdots)$. 试证：

(1) 如果当 $n>N$ 时，有 $\left(\ln\frac{1}{a_n}\right)(\ln n)^{-1}\geqslant 1+\sigma$，那么 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2) 如果当 $n>N$ 时，有 $\left(\ln\frac{1}{a_n}\right)(\ln n)^{-1}\leqslant 1$，那么 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；

(3)（利用上面的结果）

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$$

收敛.

11. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个发散的正项级数. 试证：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ 收敛.

12. 设 $a_n>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$，$\alpha>0$，$\beta>0$ 且 $\alpha+\beta>1$. 证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}<+\infty.$$

（第 9 题是本题的特例.）

## 问 题 14.2

1. 试证：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ 当 $0<x<e^{-1}$ 时收敛，当 $x\geqslant e^{-1}$ 时发散.

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个发散的正项级数. 问 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ 的敛散情况如何？

3. 设 $a_n>0$，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$. 证明：

(1) 当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛；

(2) 当 $\alpha\leqslant 1$ 且 $S_n\to+\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

4. 设 $\{a_n\}$ 是递减的正数列. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同收敛. 利用这一结果，证明：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 当 $\alpha>0$ 时收敛，当 $\alpha\leqslant 0$ 时发散；

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 发散.

5. 证明：从调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 中划去所有分母中含有数字 9 的那些项$\left(例如\frac{1}{9},\frac{1}{19},\frac{1}{391}等\right)$之后，所得的新级数是收敛的，且其和不超过 80.

# 14.3 正项级数的其他判别法

应用比较判别法，将正项级数与几何级数比较，就派生出下面两个常用的判别法.

**定理 14.3.1**（Cauchy 判别法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数.

(1) 如果存在正数 $q<1$，使得对充分大的 $n$，有

$$\sqrt[n]{a_n}\leqslant q<1,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) 如果对无穷多个 $n$，有

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

**证明** (1) 由于当 $n>N$ 时，有 $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q<1$，即 $a_n \leqslant q^n$，故由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) 由于有无穷多项都不小于 1，所以 $a_n \not\to 0$，因而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

这个判别法的极限形式用起来更方便.

**定理 14.3.2**(Cauchy 判别法的极限形式) 设对所有的 $n=1,2,\cdots$，有 $a_n \geqslant 0$，且

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

那么：

(1) 当 $q<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) 当 $q>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；

(3) 当 $q=1$ 时，无法判断.

**证明** (1) 由于 $q<1$，可取 $\varepsilon>0$，使得 $q+\varepsilon<1$. 由所设的条件知，对所取的 $\varepsilon>0$，存在 $N$，当 $n>N$ 时，有 $\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon<1$. 由定理 14.3.1(1) 即知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 当 $q>1$ 时，由于存在 $\{a_n\}$ 的子数列 $\{a_{k_n}\}$，使得 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k_n]{a_{k_n}} = q>1$. 这说明有无穷多个 $n$，使得 $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$，从而由定理 14.3.1(2)知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(3) 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$，都有 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$，但前者是发散的，后者是收敛的. □

**例 1** 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

**解** 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1,$$

所以原级数发散. □

**例 2** 对级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots \tag{1}$$

而言,$a_{2n-1}=1/2^n$,$a_{2n}=1/3^n$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n-1]{a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n/(2n-1)}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

因而 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1/\sqrt{2}<1$. 从而由 Cauchy 判别法知原级数收敛. □

式(1)的收敛性也可以通过下面的方法得到. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 都收敛,所以由定理 14.1.3 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$ 也收敛,再由定理 14.1.5,去掉括号的级数即级数(1)也收敛.

在进一步应用比较判别法时,我们需要下面的引理.

**引理 14.3.1** 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 是两个正数列. 如果当 $n\geqslant n_0$ 时,有不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n},$$

那么:

(1) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛;

(2) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也发散.

**证明** 由假定知,当 $n\geqslant n_0$ 时,有

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\leqslant\frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}},\quad \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}\leqslant\frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}},\quad \cdots,\quad \frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant\frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

把上面各不等式的两边分别相乘,得到

$$\frac{a_n}{a_{n_0}}\leqslant\frac{b_n}{b_{n_0}},\qquad 或者\qquad a_n\leqslant\frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}b_n.$$

根据比较判别法,从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,这就是(1);从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,即知

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，这就是(2). □

在引理14.3.1中取 $b_n = q^n (0<q<1)$，就得到下面的D'Alembert(达朗贝尔，1717～1783)判别法.

**定理14.3.3**(D'Alembert 判别法) 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 如果存在正数 $q<1$，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant q,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) 如果当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

与Cauchy判别法一样，它的极限形式用起来更方便些.

**定理14.3.4**(D'Alembert 判别法的极限形式) 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 如果 $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n<+\infty$；

(2) 如果 $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q'>1$，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=+\infty$；

(3) 如果 $q=1$ 或 $q'=1$，那么无法判断.

**证明** (1)的证明与定理14.3.2(1)一样，现证(2). 从假定知道，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N$，当 $n>N$ 时，$a_{n+1}/a_n>q'-\varepsilon$. 现取 $\varepsilon$ 充分小，使得 $q'-\varepsilon>1$，因而级数发散. (3)的证明与定理14.3.2(3)一样. □

**例3** 设 $x\in[0,+\infty)$. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$ 的敛散性.

**解** 当 $x=0$ 时，级数显然收敛，其和为0. 现设 $x>0$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)x=+\infty,$$

所以级数对任意的 $x>0$ 都发散. □

**例4** 设 $x\in[0,+\infty)$. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ 的敛散性.

**解** 当 $x=0$ 时，原级数显然收敛. 现设 $x>0$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{(1+1/n)^n}=\frac{x}{\mathrm{e}},$$

所以原级数当 $x>\mathrm{e}$ 时发散,当 $0\leqslant x<\mathrm{e}$ 时收敛. □

能不能像 Cauchy 判别法那样,由

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q>1$$

即能断言 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散? 结论是否定的. 以例 2 中的级数为例,因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n-1}}{a_{2n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=+\infty, \tag{2}$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty>1.$$

但该级数却是收敛的.

Cauchy 判别法和 D'Alembert 判别法哪个强些? 为了回答这个问题,先证明:

**定理 14.3.5** 设$\{a_n\}$是任意的正数列,那么

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

**证明** 我们只证明最右端的不等式,其他不等式的证法是一样的. 设

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q.$$

如果 $q=+\infty$,不等式当然成立. 故不妨设 $q<+\infty$. 于是对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $N$,当 $n\geqslant N$ 时,$a_{n+1}/a_n<q+\varepsilon$. 特别有

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}<q+\varepsilon,\quad\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<q+\varepsilon,\quad\cdots,\quad\frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}}<q+\varepsilon,$$

把这些不等式的两边分别乘起来,得 $a_{N+k}<(q+\varepsilon)^k a_N$,或者

$$a_n<a_N(q+\varepsilon)^{-N}(q+\varepsilon)^n.$$

于是

$$\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{a_N(q+\varepsilon)^{-N}}(q+\varepsilon).$$

由此即得

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant q+\varepsilon.$$

再令 $\varepsilon\to 0$,即得所要证的不等式. □

从这个定理可以看出,凡是用 D'Alembert 判别法能判别的,用 Cauchy 判别法也一定能判别;但反之不然.仍以例 2 中的级数为例,因为

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1,$$

故用 Cauchy 判别法知其收敛.但由式(2),知

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0,\quad \limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty.$$

故用 D'Alembert 判别法不能判别它收敛或发散.由此可见,Cauchy 判别法比 D'Alembert 判别法适用的面要宽些,但在有些场合中,使用 D'Alembert 判别法要方便些.

但总的来说,这两个判别法的适用面都不算宽,原因是它们只能判别一些比几何级数收敛得还快的级数.我们这里说的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 比 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛得快,是指

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$$

成立.例如,当 $0<q<1,\alpha>1,\beta>1$ 时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ 比 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛得快,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 又比 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ 收敛得快.

可以证明(参见问题 14.3 中的第 2 题),如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 满足条件

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1\quad 或\quad \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q<1,$$

则对任意的 $r\ (q<r<1)$,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{r^n}=0.$$

这就是说,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 比几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}r^n$ 收敛得快.因此,如果某个级数比几何级数收敛得慢,这两个判别法就都失效了,我们必须寻找更精细的判别法.

现在把 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和收敛得较慢的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\ (\alpha>1)$ 作比较.根据引理 14.3.1,如果

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha,$$

那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.上面的不等式可以改写为

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha,$$

即

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1,$$

两边再乘以 $n$,得

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1}{\frac{1}{n}}.$$

当 $n \to \infty$ 时,右边趋于 $\alpha > 1$.由此看来,如果当 $n > n_0$ 时,有不等式

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r > 1,$$

就能断言 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.由此引导出 Raabe(拉比,1801～1859)判别法.

**定理 14.3.6**(Raabe 判别法) 设 $a_n > 0 (n=1,2,\cdots)$.

(1) 如果存在 $r > 1$,使得当 $n > n_0$ 时,有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r, \tag{3}$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 如果对充分大的 $n$,有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1, \tag{4}$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

**证明** (1) 取实数 $\sigma$,使得 $r > \sigma > 1$.由于

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\sigma - 1}{\frac{1}{n}} = \sigma < r,$$

故对充分大的 $n$,有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}<1+\frac{r}{n}.$$

由式(3),得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant 1+\frac{r}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sigma},$$

即

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{\frac{1}{(n+1)^{\sigma}}}{\frac{1}{n^{\sigma}}}.$$

由引理 14.3.1 即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 由式(4),得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n},$$

即

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{n}{n+1}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,故由引理 14.3.1 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

与前面的两个判别法一样,在实际应用时,往往用它的极限形式.

**定理 14.3.7** 设正数列$\{a_n\}$满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l,$$

或

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{l}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \quad(n \rightarrow \infty).$$

那么,当 $l>1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;当 $l<1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;当 $l=1$ 时,无法判断.

证明留作练习.

下面给出 $l=1$ 时无法判断的例子.

为此,先证明对任何实数 $\alpha$,有等式

$$\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha}=1+\frac{1}{n}+\frac{\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\quad(n\to\infty).\tag{5}$$

事实上,有

$$\begin{aligned}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}&=\frac{\ln n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\\&=1+\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=1+\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=1+\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha}&=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)\\&=1+\frac{1}{n}+\frac{\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).\end{aligned}$$

现取 $a_n=\dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$.已知当 $\alpha>1$ 时,$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n<+\infty$;当 $\alpha\leqslant1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$.但由式(5),即得

$$\begin{aligned}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)&=n\left(\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha}-1\right)\\&=n\left(\frac{1}{n}+\frac{\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)\\&=1+\frac{\alpha}{\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\to1\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

这就说明当 $l=1$ 时,Raabe 判别法无效.

**例 5** 设 $\alpha>0$.证明:级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|$ 收敛,这里

$$\binom{\alpha}{0}=1,\quad\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

**证明** 因为

$$\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|\Big/\left|\binom{\alpha}{n}\right|=\frac{|\alpha-n|}{n-\alpha}\to1\quad(n\to\infty),$$

所以由 D'Alembert 判别法不能判断它的敛散性.现在用 Raabe 判别法.因为

$$n\left[\left|\binom{\alpha}{n}\right|\Big/\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|-1\right]=n\left(\frac{n+1}{n-\alpha}-1\right)$$

$$=\frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha}\to 1+\alpha>1,$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|<+\infty$. □

14.5 节中的例 3 将要用到这一结果.

**例 6** 设 $p>0,q>0$. 当 $p,q$ 取何值时,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\frac{1}{n^q}$$

收敛?

**解** 用 Raabe 判别法. 因为

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n+p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q=\left(1+\frac{1-p}{n+p}\right)\left(1+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=1+\frac{q}{n}+\frac{1-p}{n+p}+o\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{q+1-p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

所以原级数当 $q>p$ 时收敛,当 $q<p$ 时发散,当 $q=p$ 时无法判断. □

**例 7** 研究超几何级数

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

的收敛性,这里 $\alpha,\beta,\gamma,x$ 都是正数.

**解** 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}x=x,$$

故由 D'Alembert 判别法知,当 $x<1$ 时原级数收敛;当 $x>1$ 时原级数发散. 当 $x=1$ 时,由 D'Alembert 判别法不能判断. 用 Raabe 判别法:因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\gamma-\beta-\alpha)+(\gamma-\alpha\beta)n}{(\alpha+n)(\beta+n)}$$

$$=1+\gamma-\beta-\alpha,$$

故当 $\gamma>\beta+\alpha$ 时原级数收敛,当 $\gamma<\beta+\alpha$ 时原级数发散. 当 $\gamma=\alpha+\beta$ 时,由 Raabe 判别法也无法判断,这时必须用更精细的判别法来判断. □

**定理 14.3.8**(Gauss 判别法) 设正数列$\{a_n\}$满足条件

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\quad(n\to\infty).\tag{6}$$

那么，当 $\beta>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；当 $\beta<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

**证明** 先设 $\beta>1$，取 $\alpha$ 使得 $\beta>\alpha>1$. 由式(6)和式(5)，可得

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha}&=\frac{\beta-\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\\&=\frac{1}{n\ln n}(\beta-\alpha+o(1)).\end{aligned}\tag{7}$$

因为 $\beta>\alpha$，所以当 $n>n_0$ 时，式(7)取正值，即当 $n>n_0$ 时，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha}.$$

由此即得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{\dfrac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^{\alpha}}}{\dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}},$$

因而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

现设 $\beta<1$. 在式(7)中取 $\alpha=1$，那么式(7)的右边取负值，即

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n+1}{n}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}.$$

由此即得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\dfrac{1}{n\ln n}}.$$

因为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散，故由引理 14.3.1 知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

**例 8** 现在研究例 7 中 $\gamma=\alpha+\beta$ 的情形. 容易证明，这时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

这相当于 Gauss 判别法中 $\beta=0$ 的情形，因而原级数发散. □

在 Gauss 判别法中，如果 $\beta=1$，那么级数的敛散性是不能判断的，因此必须再找更精细的判别法. 为此，我们要把级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同比 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ 收敛得更慢的级数作比较. 人们自然想到，如果把级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同某个收敛得“最慢”的级数作比较，

这样得到的判别法当然是最有效的了．但事实上，这种收敛得“最慢”的级数是不存在的（见问题 14.3 中的第 3 题）．因而，利用与一个已知的级数作比较，来建立能判断一切级数敛散性的“万能”判别法是不存在的．不过上面介绍的这些判别法，对一般的级数已经足够用了．

## 练习题 14.3

1. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}(\sqrt{3}+(-1)^n)^n$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+1/n)^n}$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+(1/n)}}{(n+1/n)^n}$；　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}(x \geqslant 0)$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-4}{3n+1}\right)^n$；　　(8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

2. 利用 Raabe 判别法，讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\cdots(a+\sqrt{n})}\ (a>0)$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}\ (p>0, q>0)$.

3. 证明定理 14.3.5 中最左端的不等式.

4. 证明定理 14.3.7.

5. 利用 Gauss 判别法，判别例 6 中的级数当 $p=q$ 时的敛散性.

## 问题 14.3

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数．如果存在正数 $\alpha$ 和 $\beta$，使得 $a_n - a_{n+1} \geqslant \beta a_n^{2-\alpha}$，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$，而且

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = O(a_N^{\alpha}) \quad (N \to \infty).$$

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数．如果

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \quad 或 \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1,$$

那么对任意的 $r\in(q,1)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{r^n}=0$.

3. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个收敛的正项级数. 试作一个收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$.

# 14.4　任意项级数

所谓**任意项级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，是指 $a_n$ 可正可负，例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin nx.$$

因为级数的收敛等价于它的部分和数列的收敛，利用数列的 Cauchy 收敛原理，立刻得到：

**定理 14.4.1**（Cauchy 收敛原理）　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是，对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N$，当 $n>N$ 时，

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

对一切正整数 $p$ 成立.

这个定理告诉我们，就收敛级数而言，对事先给定的任意正数 $\varepsilon$，在充分多项之后任意截取一段（不论这一段有多少项），它的绝对值可以小于 $\varepsilon$.

**例 1**　设 $\{a_n\}$ 是递减的正数列. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，那么必有 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

**证明**　根据 Cauchy 收敛原理，对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N$，当 $n>N$ 时，

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

对任意的正整数 $p$ 成立. 现取 $p=n$，且因 $\{a_n\}$ 是递减的正数列，故当 $n>N$ 时，由式(1)，可得

$$2na_{2n}\leqslant 2(a_n+\cdots+a_{2n})<\varepsilon. \tag{2}$$

又因为

$$(2n+1)a_{2n+1}\leqslant 2na_{2n}+a_{2n+1}\to 0\quad(n\to\infty),$$

所以由式(1)和式(2)即得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. □

**注意**　例1的逆命题并不成立.即若$\{a_n\}$是递减的正数列,且$\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$,则未必有$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n<+\infty$.最简单的例子是$a_n=\dfrac{1}{n\ln n}$,它满足递减且$\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$的条件,但$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$是发散的.

Cauchy收敛原理是一个普遍的原则,它适用于一切级数,而不考虑某些级数的特殊规律.正因为如此,用它去判别某些具体级数的敛散性并不方便.因此,我们必须针对某些级数的特殊规律给出相应的判别法.前面关于正项级数的许多判别法就是按照"正项"这个条件来设计的.

现在讨论任意项级数中较为特殊的一种——**交错级数**.它的项正负交错地出现,例如

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

我们把一般交错级数记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots,$$

其中$a_n>0(n=1,2,\cdots)$.对这种级数,有一个简单的收敛判别法.

**定理14.4.2**(Leibniz判别法)　如果$\{a_n\}$递减趋于0,那么交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛.

我们把满足上述条件的交错级数称为Leibniz级数.

**证明**　用$S_n$记交错级数的部分和.由于$\{a_n\}$递减,$a_{2n-1}-a_{2n}\geqslant 0$,所以

$$S_{2n}=S_{2n-2}+(a_{2n-1}-a_{2n})\geqslant S_{2n-2}.$$

这说明$\{S_{2n}\}$是一个递增的数列;又因为

$$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}\leqslant a_1, \tag{3}$$

即$\{S_{2n}\}$有上界,所以$\{S_{2n}\}$是一个收敛数列,记其极限为$S$.于是

$$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}\to S\quad(n\to\infty),$$

这里用到了条件$a_n\to 0(n\to\infty)$.既然$\{S_n\}$的偶数项子列$\{S_{2n}\}$和奇数项子列$\{S_{2n+1}\}$有相同的极限$S$,所以$\{S_n\}$也以$S$为极限,即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛.　□

Leibniz判别法告诉我们,Leibniz级数是收敛级数.容易知道级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\quad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln n}$$

都是 Leibniz 级数，因而都是收敛的.

设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 是一个 Leibniz 级数，其和为 $S$. 若用 $S_n$ 代替 $S$，其误差不超过第 $n+1$ 项的绝对值，即 $|S_n-S|\leqslant a_{n+1}$. 事实上，由于 $\{S_{2n}\}$ 递增趋于 $S$，而

$$S_{2n+1}=S_{2n-1}-(a_{2n}-a_{2n+1})\leqslant S_{2n-1},$$

即 $\{S_{2n+1}\}$ 递减趋于 $S$，所以不论 $n$ 是奇数还是偶数，都有

$$|S_n-S|\leqslant|S_n-S_{n+1}|=a_{n+1}.$$

这个结论在误差估计时很有用.

因为 $S_{2n}\geqslant S_2\geqslant 0$，所以 $S\geqslant 0$. 又若在式(3)的左边令 $n\to\infty$，即得 $S\leqslant a_1$. 这就是说，Leibniz 级数的和是一个不超过它首项之值的非负数.

**引理 14.4.1**（Abel（阿贝尔，1802～1829）分部求和公式） 设 $\{a_k\}$，$\{b_k\}$ 是两列实数，则对任意的正整数 $n$，有

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})+S_nb_n,\tag{4}$$

这里 $S_k=\sum_{l=1}^{k}a_l$.

**证明** 记 $S_0=0$，那么 $a_k=S_k-S_{k-1}(k=1,2,\cdots,n)$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k&=\sum_{k=1}^{n}(S_k-S_{k-1})b_k=\sum_{k=1}^{n}S_kb_k-\sum_{k=1}^{n}S_{k-1}b_k\\&=\sum_{k=1}^{n}S_kb_k-\sum_{k=0}^{n-1}S_kb_{k+1}=\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})+S_nb_n.\end{aligned}$$

□

如果记 $\Delta S_k=S_k-S_{k-1}=a_k$，$\Delta b_k=b_{k+1}-b_k$，那么式(4)可写成

$$\sum_{k=1}^{n}b_k\Delta S_k=S_kb_k\Big|_0^n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k\Delta b_k.$$

这个形式与分部积分公式很相似，所以式(4)称为**分部求和公式**.

从分部求和公式可以推出一个重要的引理.

**引理 14.4.2**（Abel 引理） 设 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$ 或 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，记 $S_k=\sum_{l=1}^{k}a_l$. 如果 $|S_k|\leqslant M(k=1,2,\cdots,n)$，那么

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant M(|b_1|+2|b_n|).$$

**证明** 由分部求和公式，得

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})+S_nb_n\right|\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n-1}|S_k||b_k-b_{k+1}|+|S_n||b_n|\\ &\leqslant M\left(\sum_{k=1}^{n-1}|b_k-b_{k+1}|+|b_n|\right)\\ &= M(|b_1-b_n|+|b_n|)\\ &\leqslant M(|b_1|+2|b_n|).\end{aligned}$$ □

利用 Abel 引理便可证明:

**定理 14.4.3**(Dirichlet 判别法) 设$\{a_k\}$,$\{b_k\}$是两个数列,$S_k=\sum_{l=1}^{k}a_l$,它们满足以下两个条件:

(a) $\{b_k\}$单调趋于 0;

(b) $\{S_k\}$有界.

那么级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ 收敛.

**证明** 我们用 Cauchy 收敛原理证明 $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ 收敛. 设$|S_k|\leqslant M(k=1,2,\cdots)$. 于是对任意的正整数 $n$ 和 $p$,以及满足条件 $n+1\leqslant m\leqslant n+p$ 的 $m$,有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{m}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\leqslant 2M.$$

由于$\{b_k\}$是单调的,故由 Abel 引理,得

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|\leqslant 2M(|b_{n+1}|+2|b_{n+p}|). \tag{5}$$

因为 $b_n\to 0(n\to\infty)$,故对 $\varepsilon>0$,存在 $N$,当 $n>N$ 时,

$$|b_{n+1}|<\frac{\varepsilon}{8M},\quad |b_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{8M}\quad (p=1,2,\cdots).$$

代入式(5),即得 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|<\varepsilon$,所以$\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ 收敛. □

如果在上面的级数中取 $a_k=(-1)^{k-1}$,那么

$$|S_k|=|a_1+a_2+\cdots+a_k|\leqslant 1,$$

故当$\{b_k\}$递减趋于 0 时,级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}b_k$ 收敛. 这就是前面已经证明过的 Leibniz 判别法. 可见 Leibniz 判别法只是 Dirichlet 判别法在 $a_k=(-1)^{k-1}$时的

特殊情形.

**定理 14.4.4**(Abel 判别法)　设$\{a_k\}$,$\{b_k\}$满足以下两个条件:

(a) $\{b_k\}$单调有界;

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛.

那么级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

**证明**　因为$\{b_k\}$单调有界,故有极限 $b$. 于是$\{b_k - b\}$单调趋于 0. 又因为$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$有界,故由 Dirichlet 判别法知级数$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - b)$收敛,因而

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - b) + b\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

收敛. □

以上两个判别法的条件互有强弱:Dirichlet 判别法中$\{b_k\}$单调趋于 0 的条件比 Abel 判别法中$\{b_k\}$单调有界强;而$\{S_k\}$有界的条件则比 Abel 判别法中 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛的条件弱. 因此,在使用时究竟哪个判别法较好,要针对具体问题作具体分析.

**例 2**　研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 的敛散性.

**解**　这个级数既不是正项级数,又不是交错级数. 若令 $b_n = 1/n$,则 $b_n$ 递减趋于 0. 因此若能证明

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \cos nx\right| \leqslant M \quad (N = 1,2,\cdots),$$

那么由 Dirichlet 判别法即知该级数收敛. 事实上,当 $x \neq 2k\pi$ 时,有

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \cos nx\right| = \left|\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}. \tag{6}$$

因此,只要 $x$ 不是 $2\pi$ 的整数倍,上面的和式便有界. 所以,原级数当 $x \neq 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \cdots)$时收敛;当 $x = 2k\pi$ 时,原级数就变成调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,所以是发散的. □

**注意**　类似于不等式(6),还有

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sin nx\right| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \quad (x\neq 2k\pi).$$

这一对不等式在有关问题的讨论中颇为有用.

**例 3** 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ 的敛散性.

**解** 由例 2 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}$ 收敛,而数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$递增趋于 e,因而有界.根据 Abel 判别法,原级数收敛. □

**例 4** 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin^2 n}{n}$ 的敛散性.

**解** 因为 $\sin^2 n=\frac{1}{2}(1-\cos 2n)$,故若能证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2n}{n}$$

都收敛,那么原级数收敛.由 Leibniz 判别法知第一个级数收敛.由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos 2n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+n\pi)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(2+\pi)}{n},$$

故由例 2 知它也是收敛级数.因而原级数收敛. □

例 4 中的级数是一个交错级数,这时 $a_n=\frac{\sin^2 n}{n}$ 非单调地趋于 0,这说明在 Leibniz 判别法中,$\{a_n\}$单调地趋于 0 的“单调”并不是必要的.

## 练 习 题 14.4

1. 利用 Cauchy 收敛原理,讨论下列级数的敛散性:

   (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$;

   (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n!}{n(n+1)}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos n+b\sin n}{n(n+\sin n!)}$.

2. 试利用 Cauchy 收敛原理,证明交错级数的 Leibniz 判别法.(提示:证明 $\left|\sum_{n=N+1}^{N+p}(-1)^{n-1}a_n\right|\leqslant a_N$.)

3. 设 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$.如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都是收敛级数,证明:$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛.如

果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散，结论如何？

4．在交错级数的 Leibniz 判别法中，如果去掉$\{a_n\}$递减这个条件，结论可能不成立．试以下例说明之：

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\left[\frac{n+1}{2}\right]+(-1)^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots.$$

5．讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{1}{n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$.

6．设$\{a_n\}$递减趋于 0．讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx,\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin nx$$

的敛散性．

7．设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个收敛级数．如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=1$，能否断言 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也是收敛级数?请研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right).$$

8．设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛．证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0.$$

（提示：用 Abel 分部求和公式．）

9．证明：如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^{\alpha}}$ 收敛，那么对任意的 $\beta>\alpha$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^{\beta}}$ 也收敛．

10．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项递减趋于 0，$p$ 是任意固定的正整数．证明：级数

$$a_1+\cdots+a_p-a_{p+1}-a_{p+2}-\cdots-a_{2p}+a_{2p+1}+\cdots+a_{3p}-\cdots$$

是收敛的．（提示：用 Leibniz 判别法．）

11．讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{\sin nx}{n}$.

12．设 $a_n>0$．证明：如果

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0,$$

那么交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛.

## 问 题 14.4

1. 设$\{a_n\}$是一个正数列.如果对$0<\alpha<1$,有

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0,$$

或极限是$+\infty$,证明:对任意的正整数$k$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^k a_n<+\infty$.

2. 设$a>0,b>0$.利用Raabe判别法,证明:当$b-1>a$时,级数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$$

收敛,其和为$\dfrac{b-1}{b-a-1}$.当$b-1\leqslant a$时,收敛情况如何?

3. 设$\{a_n\}$是一个递增的正数列.证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$收敛的充分必要条件是$\{a_n\}$有界.

4. 证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$收敛.

5. 试作一个收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$发散.

6. 设$\{b_n\}$递减趋于0,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n b_n$收敛.证明:

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n)b_n=0.$$

7. 设$\{b_n\}$是递增的趋于$+\infty$的正数列.如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,试证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_n}=0.$$

注意:若令$b_n=n$,就得到练习题14.4中第8题的结论.

8. 证明:如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,令

$$b_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)},$$

那么$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

## 14.5　绝对收敛和条件收敛

前面我们介绍了任意项级数的两个重要判别法，但对某些变号级数来说，可以用更简单的方法判定它收敛. 例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}\dfrac{1}{n^2}$ 各项的符号变化规律并不容易掌握，但若干脆让每一项都取绝对值，便得一个收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. 问题是，从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛能否推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛？结论是肯定的，这实际上是 Cauchy 收敛原理的一个简单的推论.

**定理 14.5.1**　如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

**证明**　因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，根据 Cauchy 收敛原理，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N$，当 $n>N$ 时，

$$|a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}|<\varepsilon \tag{1}$$

对任意的正整数 $p$ 成立. 于是由式(1)知，当 $n>N$ 时，不等式

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|\leqslant|a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}|<\varepsilon$$

对任意的正整数 $p$ 成立，因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. □

由定理 14.5.1，易知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$$

都是收敛的.

但是必须注意，定理 14.5.1 的逆命题是不成立的，即从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛不能断定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 便是这样的例子.

由此可见，所有收敛的变号级数可以分成两类：一类是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$

也收敛;另一类是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散.我们把前一类级数叫做**绝对收敛级数**,后一类叫做**条件收敛级数**.

例如,上面的三个级数都是绝对收敛级数,而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\quad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln n}$$

是条件收敛级数.

**例 1** 证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$ 条件收敛.

**证明** 这个级数的收敛性已在14.4节的例4中证明过.现在证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n} \tag{2}$$

发散.如果式(2)收敛,则因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$ 收敛,故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

也收敛,这显然不成立.因而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$ 发散. □

绝对收敛级数和条件收敛级数有十分显著的差别.

大家知道,有限个数相加时,被加项可以任意交换次序而不影响其和.无限多个数相加时,情况就不同了.当然,如果只交换级数中有限多项的次序,那么既不会改变级数的收敛性,也不会改变它的和.但若交换级数中无穷多项的次序,在级数是条件收敛的情况下,就有可能改变级数的和,甚至使其发散.而绝对收敛级数则可以任意改变其项的次序而不影响级数的绝对收敛性,也不改变其和.

**定理 14.5.2** 交换绝对收敛级数中无穷多项的次序,所得的新级数仍然绝对收敛,其和也不变.

**证明** 我们把证明分为两步.

(a) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个收敛的正项级数,交换其中无穷多项的次序所得的新级数记为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.易知,一方面,新级数的任何一个部分和 $\sum_{n=1}^{N} b_n$ 都是从 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中挑选出某些有限项构成的和,因而

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{3}$$

另一方面，我们也可把 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 看成是由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 经交换项的次序后得到的新级数，因而有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{4}$$

综合式(3)和式(4)，即得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. 这就证明了命题对正项级数成立.

(b) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个变号的绝对收敛级数. 记

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2} \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{5}$$

即

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \geqslant 0, \\ 0, & a_n < 0, \end{cases} \quad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & a_n \leqslant 0, \\ 0, & a_n > 0. \end{cases}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 是两个正项级数，前者是由原级数中的正项和零组成的级数，后者是由负项的绝对值和零组成的级数. 由式(5)，可得

$$0 \leqslant a_n^+ \leqslant |a_n|, \quad 0 \leqslant a_n^- \leqslant |a_n|,$$
$$|a_n| = a_n^+ + a_n^-, \quad a_n = a_n^+ - a_n^-.$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$，即知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-. \tag{6}$$

设改变 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中无穷多项次序所得的新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，那么显然 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$ 分别是由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 改变项的次序得来的. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都是收敛的正项级数，故由(a)的证明过程，得知

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-. \tag{7}$$

由 $|b_n| = b_n^+ + b_n^-$，即知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^-. \tag{8}$$

由式(6)～(8)，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \qquad \square$$

从式(5)可以看出，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty.$$

这是条件收敛级数与绝对收敛级数最大的不同之处．正是从这一事实出发，Riemann 证明了下面关于条件收敛级数的一个非常深刻的结果．

**定理 14.5.3**（Riemann 定理）　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则适当交换各项的次序，可使其收敛到任一事先指定的实数 $S$，也可以使其发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$．

**证明**　分两种情形来讨论．

(a) 不妨假定 $S>0$．因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty.$$

为了使级数的和为 $S$，我们这样来安排级数中项的次序：按照级数原来的次序，把它的正项取出来，只要它们的和还不大于 $S$，就一直取下去，直到这些项的和刚刚大于 $S$ 为止．接着就取级数的负项（按照它们原来的次序），我们又可取得足够多的负项，使得整个和刚好小于 $S$ 为止．然后再按原来的次序把剩下的正项依次取出来，直到整个和刚好大于 $S$ 为止．这个过程无休止地进行下去．把上面这个过程用符号表示出来，就是先按次序选取 $k_1$ 个正项，使得

$$\sum_{j=1}^{k_1-1} a_j^+ \leqslant S < \sum_{j=1}^{k_1} a_j^+.$$

由此可得

$$0 < \sum_{j=1}^{k_1} a_j^+ - S \leqslant a_{k_1}^+.$$

为简化记号，记 $A_1^+ = \sum_{j=1}^{k_1} a_j^+$．那么上式可写为

$$0 < A_1^+ - S \leqslant a_{k_1}^+. \tag{9}$$

再按次序取出 $l_1$ 个负项,使得

$$A_1^+ - \sum_{j=1}^{l_1} a_j^- < S \leqslant A_1^+ - \sum_{j=1}^{l_1-1} a_j^-.$$

记 $A_1^- = \sum_{j=1}^{l_1} a_j^-$. 从上式可得

$$0 < S - (A_1^+ - A_1^-) \leqslant a_{l_1}^-. \tag{10}$$

再取 $k_2$ 个正项,使得

$$A_1^+ - A_1^- + \sum_{j=k_1+1}^{k_2-1} a_j^+ \leqslant S < A_1^+ - A_1^- + \sum_{j=k_1+1}^{k_2} a_j^+.$$

记 $A_2^+ = \sum_{j=k_1+1}^{k_2} a_j^+$. 从上式可得

$$0 < A_1^+ - A_1^- + A_2^+ - S < a_{k_2}^+. \tag{11}$$

把这个过程无限次地继续下去,可得下面的无穷级数:

$$A_1^+ - A_1^- + A_2^+ - A_2^- + \cdots. \tag{12}$$

从式(9)~(11)知,式(12)满足以下不等式:

$$0 < A_1^+ - A_1^- + A_2^+ - A_2^- + \cdots + A_n^+ - S \leqslant a_{k_n}^+, \tag{13}$$

$$0 < S - (A_1^+ - A_1^- + A_2^+ - A_2^- + \cdots + A_n^+ - A_n^-) \leqslant a_{l_n}^-. \tag{14}$$

如果记式(12)的部分和为 $S_n$,那么式(13)和式(14)可分别写为

$$0 < S_{2n-1} - S \leqslant a_{k_n}^+, \quad 0 < S - S_{2n} \leqslant a_{l_n}^-.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,所以 $\lim_{n\to\infty} a_{k_n}^+ = \lim_{n\to\infty} a_{l_n}^- = 0$. 由此即得

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

即级数(12)的和是 $S$. 最后应用定理 14.1.5,即得

$$a_1^+ + \cdots + a_{k_1}^+ - a_1^- - \cdots - a_{l_1}^- + \cdots = S.$$

(b) 现在考虑 $S = +\infty$ 或 $-\infty$ 的情形. 为了使级数发散到 $+\infty$,我们这样来安排级数的项:先按级数原来的次序取出若干正项,使其和大于 1,在这些项的后面放上级数的第一个负项;然后再在余下的正项中取若干项,使整个和大于 2,又在这些项之后放上级数的第二个负项;再在余下的正项中取出若干项,使整个和大于 3,接着放上第三个负项. 这个过程无限次地继续下去,就得到一个新级数,它是由原级数交换无限多项的次序得到的. 由于 $n$ 充分大时 $a_n^-$ 可以任意小,故当 $n > N$ 时,负项的出现并不影响级数部分和的增大,因而级数发散到 $+\infty$. 同样,可以适当

交换项的次序,使其发散到 $-\infty$. □

让我们用一个例子作为本节的结尾.

**例2** 把交错级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

的项重新这样安排:先依次取 $p$ 个正项,接着依次取 $q$ 个负项,再接着依次取 $p$ 个正项,如此继续下去.问所得的新级数是否收敛?如果收敛,求级数的和.

**解** 设重排之后的新级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.对任意给定的正整数 $N$,记 $m=[N/(p+q)]$,则当 $N\to\infty$ 时,有 $m\to\infty$,且

$$m(p+q)\leqslant N<(m+1)(p+q).$$

把级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和写成

$$\sum_{n=1}^{N}a_n=\sum_{n=1}^{m(p+q)}a_n+\sum_{n=m(p+q)+1}^{N}a_n. \tag{15}$$

因为 $N-m(p+q)<p+q$,这说明上式中第二个和式的项数不超过 $p+q$,所以当 $N\to\infty$ 时,有

$$\left|\sum_{n=m(p+q)+1}^{N}a_n\right|\leqslant\sum_{n=m(p+q)+1}^{N}|a_n|\leqslant(p+q)\frac{1}{m(p+q)}=\frac{1}{m}\to 0.$$

于是从式(15),便得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m(p+q)}a_n$$
$$=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{2n-1}-\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{2n}\right). \tag{16}$$

从上册7.3节中的式(8)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

得到

$$\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\ln mq+\frac{1}{2}\gamma+O\left(\frac{1}{m}\right), \tag{17}$$

$$\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{2n-1}=\sum_{n=1}^{2mp}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{2n}$$
$$=\ln 2mp+\gamma-\frac{1}{2}\ln mp-\frac{1}{2}\gamma+O\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}\ln mp + \frac{1}{2}\gamma + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{18}$$

把式(17)和式(18)代入式(16),得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

由此知所得的新级数收敛,且其和为 $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$. □

例如,取 $p=1, q=1$,就得

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2.$$

这就是上册 7.3 节的例 4 中已经得到的结果.

再取 $p=1, q=2$,就得

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

最后取 $p=2, q=3$,就得

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}.$$

## 练 习 题 14.5

1. 在下列级数中,哪些是绝对收敛的?哪些是条件收敛的?

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}(\alpha>1)$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cos nx$;

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\frac{n^{10}}{a^n}(a>1)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$;　　(6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$.

2. 讨论下列级数的绝对收敛性和条件收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+(1/n)}}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n^p}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^{1/n}-1)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{1/n}-\frac{b^{1/n}+c^{1/n}}{2}\right)(a>0, b>0, c>0)$.

3. 证明:$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛的充分条件是,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都收敛.

4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

(1) 证明：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$，其逆命题是否成立？

(2) 证明：记 $S_N^+ = \sum_{n=1}^{N} a_n^+, S_N^- = \sum_{n=1}^{N} a_n^-$，那么

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N^+}{S_N^-} = 1.$$

5. 把级数

$$1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\alpha} + \cdots \quad (0 < \alpha < 1)$$

的项重新安排如下：先依次取 $p$ 个正项，接着依次取 $q$ 个负项，再接着依次取 $p$ 个正项，如此继续下去.证明：所得的新级数收敛的充分必要条件为 $p = q$；当 $p > q$ 时，新级数发散到 $+\infty$，当 $p < q$ 时，新级数发散到 $-\infty$.

## 问 题 14.5

1. 讨论下列级数的绝对收敛性和条件收敛性：

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) (p > 0)$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right)^p (p > 0)$；

(3) $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \cdots (p > 0, q > 0)$.

2. 如果对任意一个趋于 0 的数列 $\{x_n\}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 收敛，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 一定绝对收敛，试证之.如果把条件中的“任意一个趋于 0 的数列”改为“任意一个递减趋于 0 的数列”，结论是否成立？

3. 如果改变调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

中项的符号，使得 $p$ 个正项之后跟 $q$ 个负项，但不变更原来的次序.证明：新的级数当且仅当 $p = q$ 时收敛.

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) = 0.$$

## 14.6 级数的乘法

设

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \tag{1}$$

是两个收敛级数,我们讨论这两个级数如何相乘.大家知道,两个有限和

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad B_m = \sum_{j=1}^{m} b_j$$

相乘的结果是把所有可能的乘积 $a_ib_i(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m)$加起来.仿照这个做法,我们把式(1)的所有可能的乘积写出来:

$$\begin{aligned}
&a_1b_1, a_1b_2, a_1b_3, \cdots;\\
&a_2b_1, a_2b_2, a_2b_3, \cdots;\\
&a_3b_1, a_3b_2, a_3b_3, \cdots;\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

这是一个无穷矩阵.这些项如何相加?通常有两种加法:一是按对角线相加,

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \cdots;$$

一是按方块相加,

$$\begin{aligned}
&a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1)\\
&+ (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \cdots.
\end{aligned}$$

用得较多的是第一种.

按照对角线相加的原则,两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 相乘得一个新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$,其中

$$c_n = \sum_{i+j=n+1} a_ib_j = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1.$$

称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的 **Cauchy 乘积**.我们当然希望在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ 的情况下,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

但实际情况并非总是如此.在 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ 都收敛的情况下，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 可能是发散的.例如

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

是一个收敛级数,它按 Cauchy 方式自乘后所得的级数便是发散的.事实上,这时 $a_n = b_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$,于是

$$|c_n| = \sum_{i+j=n+1}\frac{1}{\sqrt{ij}} \geqslant \sum_{i+j=n+1}\frac{2}{i+j} = \frac{2n}{n+1} \geqslant 1.$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散.

但若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛,不论以何种方式相加,所得的新级数都绝对收敛,其和就是两个级数和的乘积.

**定理 14.6.1**(Cauchy) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛,其和分别为 $A,B$,那么把

$$a_i b_j \quad (i,j = 1,2,\cdots)$$

按任意方式相加所得的级数都是绝对收敛的,且其和就等于 $AB$.

**证明** 设 $a_{i_l}b_{j_l}(l=1,2,\cdots)$是 $a_i b_j(i,j=1,2,\cdots)$的任意一种排列.对给定的 $n$,把 $i_1,\cdots,i_n$ 和$j_1,\cdots,j_n$ 中的最大者记为$N$,那么

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}|a_{i_l}b_{j_l}| &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{N}|a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{N}|b_j|\right)\\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|\right).\end{aligned}$$

因而级数 $\sum_{l=1}^{\infty} a_{i_l}b_{j_l}$ 绝对收敛.根据定理 14.5.2,任意改变这个级数中项的次序,其和不变.现在按方块相加的方式重新排列这个级数,便得

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{i_l}b_{j_l} = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N}b_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}b_j\right) = AB. \qquad \square$$

如果只限于 Cauchy 乘积,那么定理 14.6.1 的条件还可减弱.我们有:

**定理 14.6.2**(Mertens(梅尔滕斯,1840～1927)) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收

敛,其和分别为 $A$ 和 $B$. 如果其中至少有一个绝对收敛,那么它们的 Cauchy 乘积

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB,$$

其中 $c_n = \sum\limits_{i+j=n+1} a_i b_j$ .

**证明** 不妨假定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 记 $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k, C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$. 我们要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = AB$. 易知

$$\begin{aligned} C_n &= a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \cdots \\ &\quad + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) \\ &= a_1(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a_2(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_n b_1 \\ &= a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1. \end{aligned}$$

如果令 $B_n = B - \beta_n$, 则 $\beta_n \to 0(n\to\infty)$. 于是

$$C_n = A_n B - \gamma_n,$$

其中

$$\gamma_n = \sum_{l=1}^{n} a_l \beta_{n+1-l} = a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_1. \tag{2}$$

这样问题就归结为证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n = 0$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N$, 当 $n > N$ 时, 有 $|\beta_n| < \varepsilon$. 于是由式 (2), 可得

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leqslant |a_1\beta_n + \cdots + a_{n-N}\beta_{N+1}| + |a_{n-N+1}\beta_N + \cdots + a_n\beta_1| \\ &< \varepsilon M + |a_{n-N+1}\beta_N + \cdots + a_n\beta_1|, \end{aligned}$$

这里 $M = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. 在上式中固定 $N$, 令 $n\to\infty$, 即得

$$\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leqslant \varepsilon M.$$

由此可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n = 0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = AB$. □

如果两个级数都仅仅是条件收敛的,那么定理的结论就可能不对,本节开头已经举出了这样的例子. 但若假定它们的 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 是收敛的,那么结论仍然成立.

**定理 14.6.3**(Abel) 设

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B.$$

如果它们的 Cauchy 乘积$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛，那么必有

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB.$$

**证明**　仍沿用定理 14.6.2 中的记号. 我们已经证明

$$C_n = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1.$$

因此

$$\begin{aligned}
&C_1 = a_1 B_1, \\
&C_2 = a_2 B_1 + a_1 B_2, \\
&C_3 = a_3 B_1 + a_2 B_2 + a_1 B_3, \\
&\cdots, \\
&C_N = a_N B_1 + a_{N-1} B_2 + \cdots + a_1 B_N.
\end{aligned}$$

把它们加起来再除以 $N$，即得

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} C_n = \frac{1}{N}(A_N B_1 + A_{N-1} B_2 + \cdots + A_1 B_N).$$

令 $N \to \infty$，由上册 1.3 节中例 4 和例 5 的结果，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB. \qquad \square$$

**注意**　定理 14.6.1 和定理 14.6.2 的条件都是不必要的，可以举出这样的例子，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 却是绝对收敛的(问题 14.6 中的第 2 题).

**例 1**　用 D'Alembert 判别法容易验证，级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$对任意的实数 $x$ 都绝对收敛，用 $E(x)$ 记它的和. 我们来计算乘积 $E(x)E(y)$. Cauchy 乘积 $E(x)E(y)$ 的通项是

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

因而有

$$E(x)E(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = E(x+y). \qquad \square$$

其实在本章开头，我们已经指出，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的和就是指数函数 $e^x$. 这里不过是从级数出发证明了指数函数的乘法定理.

## 练 习 题 14.6

1. 设$|q|<1$.证明：

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.$$

2. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 对$(-R,R)$中的 $x$ 绝对收敛.证明：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

其中 $c_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$.

3. 证明：级数

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

对所有实数 $x$ 绝对收敛，而且

$$S(2x) = 2S(x)C(x).$$

## 问 题 14.6

1. 证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\beta}} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

的 Cauchy 乘积当 $\alpha+\beta>1$ 时收敛，当 $\alpha+\beta\leqslant 1$ 时发散.

2. 证明：发散级数

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n, \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

的 Cauchy 乘积是一个绝对收敛级数.

# 14.7 无 穷 乘 积

给定数列

$$p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots.$$

我们已经学会如何把这无穷多个数相加，现在讨论如何把这无穷多个数相乘．称

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 p_2 \cdots p_n \cdots$$

为一个**无穷乘积**．仿照无穷级数的做法，我们定义无穷乘积收敛和发散的概念．

设 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 是一个无穷乘积，称

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k = p_1 \cdots p_n \quad (n = 1,2,\cdots)$$

为这个无穷乘积的**部分乘积**．如果当 $n \to \infty$ 时，数列 $\{P_n\}$ 有有限的极限 $P$，且 $P \neq 0$，则称这个无穷乘积是收敛的，记为 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = P$．如果 $\{P_n\}$ 的极限不存在，或者虽然存在但等于 0，则称它是发散的．

**例 1**　无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ 是收敛的，因为

$$\begin{aligned}
P_{n-1} &= \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \\
&= \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right) \\
&= \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

□

**例 2**　证明：

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0).$$

**证明**　记

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} = \cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{x}{2},$$

两边乘以 $\sin\dfrac{x}{2^n}$，得

$$\left(\sin\frac{x}{2^n}\right)P_n = \sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{x}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^{n-2}}\cdots\cos\frac{x}{2}$$
$$= \frac{1}{2^2}\sin\frac{x}{2^{n-2}}\cos\frac{x}{2^{n-2}}\cos\frac{x}{2^{n-3}}\cdots\cos\frac{x}{2}$$
$$= \cdots$$
$$= \frac{1}{2^n}\sin x.$$

从而得

$$P_n = \frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}} \to \frac{\sin x}{x} \quad (n\to\infty).$$ □

**例 3** 证明 Wallis 公式：

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

**证明** 计算得

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{2k-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}$$
$$= \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{2k-1}\prod_{k=2}^{n+1}\frac{1}{2k-1}$$
$$= \frac{1}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)^2}.$$

由上册 7.4 节中的 Wallis 公式，即得

$$\lim_{n\to\infty}P_n = \frac{\pi}{2}.$$ □

这实际上是上册 7.4 节中 Wallis 公式的另一种表达方式.

**例 4** 设 $p_n = 1/2\ (n=1,2,\cdots)$，则其部分乘积

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \quad (n\to\infty).$$

因而无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots$ 是发散的. □

类似于无穷级数，容易得到无穷乘积收敛的必要条件.

**定理 14.7.1** 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

**证明** 设 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$,则

$$p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1 \quad (n \to \infty).$$ □

如果 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P = 0$,上面的结论就可能不对,例4便是这样的例子.由此可以看出,为什么在收敛的定义中要去掉 $P=0$ 的情形.下面我们将一再看到,只有那种 $P_n$ 的极限存在且不等于0的无穷乘积,才有许多类似于无穷级数的性质.

由于收敛的无穷乘积的通项 $p_n \to 1(n\to\infty)$,所以从某个 $n$ 起,$p_n$ 都是正数.因此在整个无穷乘积中,负因子只能有有限个,所以不妨假定所有的 $p_n$ 都是正的.在下面的讨论中,把 $p_n$ 写成

$$p_n = 1 + a_n \quad (n = 1,2,\cdots),$$

其中 $-1 < a_n < +\infty$.这样,$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 收敛的必要条件便是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

下面来建立无穷乘积与无穷级数之间的联系,从而把判别无穷乘积敛散的问题归结为判别无穷级数的敛散.

**定理 14.7.2** 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 收敛的充分必要条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n) \tag{1}$$

收敛.在收敛的情况下,如果式(1)的和是 $S$,那么

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) = e^S.$$

**证明** 因为 $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)$,所以

$$\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + a_n) = S_n,$$

这里 $S_n$ 是级数(1)的部分和.如果 $P_n \to P > 0$,那么 $S_n \to \ln P$.反之,当 $S_n \to S$ 时,$P_n \to e^S$. □

从上面的定理,可得:

**定理 14.7.3** 如果从某个 $n$ 起都有 $a_n > 0$(或者 $a_n < 0$),那么 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 与

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散.

**证明** 因为不论 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中何者收敛,都有 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.因此总可假定这个条件成立.这时有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1.$$

因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散,从定理 14.7.2 即得本定理的结论. □

如果 $a_n$ 不保持定号,我们有:

**定理 14.7.4** 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$ 那么 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散.

**证明** 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$,一方面可推出 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,因而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n^2}=\frac{1}{2}; \tag{2}$$

另一方面,从式(2)推知 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\ln(1+a_n))$ 收敛. 根据定理 14.7.2,即知

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \quad 与 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

同敛散. □

**注意** 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = +\infty$,结论可能不对.这样的例子可参见问题14.7中的第3题.

再讨论一下 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0 的情形.由

$$\ln P_n = \sum_{k=1}^{n}\ln(1+a_n)$$

可以看出,$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0 的充分必要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n) = -\infty.$$

由此可得:

**定理 14.7.5** 如果 $-1<a_n<0$,且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,那么 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0.

**证明** 由 $a_n<0$,知 $\ln(1+a_n)<0$.因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 发散到 $-\infty$,从而 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0. □

**定理 14.7.6** 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散,那么 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0.

**证明** 从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=+\infty$ 和式(2),便知

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\ln(1+a_n))=+\infty.$$

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,因而必有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)=-\infty$,从而 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0. □

**例 5** 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=+\infty$,知

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=+\infty,\quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=0.$$ □

**例 6** 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}<+\infty$,知

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right),\quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

都收敛.在例 1 中已算出后者的值为 1/2.

**例 7** 设 $\alpha>-1$.证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dbinom{\alpha}{n}=0$,这里

$$\binom{\alpha}{0}=1,\quad \binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

**证明** 容易看出

$$\begin{aligned}(-1)^n\binom{\alpha}{n}&=(-1)^n\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\\&=\left(1-\frac{\alpha+1}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha+1}{n}\right)\\&=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right).\end{aligned}$$

因为 $\alpha+1>0$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha+1}{n}$ 发散,故由定理 14.7.5 知无穷乘积发散到 0,即

$$\lim_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}=0.\qquad\square$$

在 15.5 节的例 3 中将要用到这一结果.

**例 8** 设 $\alpha>0$. 讨论无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\tag{3}$$

的敛散性.

**解** 记 $a_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 当 $\alpha>\dfrac{1}{2}$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ 收敛, 故由定理 14.7.4 知无穷乘积(3) 收敛. 当 $\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散, 因而由定理 14.7.6 知无穷乘积(3) 发散到 0. $\square$

收敛的无穷乘积能不能任意改变因子的次序且仍收敛?答案是否定的. 很容易举出这样的例子:取一个条件收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛, 那么 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 便是一个不能任意改变因子次序的收敛的无穷乘积. 事实上, 在所设的条件下, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 当然收敛, 但因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|=+\infty$, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 是一个条件收敛级数, 设其和为 $\alpha$. 现改变 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 的次序, 得到一个新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$, 使其和 $\beta\neq\alpha$. 于是

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)=\mathrm{e}^{\beta}\neq\mathrm{e}^{\alpha}=\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n),$$

而 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ 正是由 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 改变因子次序所得的无穷乘积.

在什么条件下可以保证收敛的无穷乘积能任意改变因子的次序? 为此, 引进无穷乘积绝对收敛的概念.

如果无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛, 则称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ **绝对收敛**.

**定理 14.7.7** 绝对收敛的无穷乘积一定收敛.

**证明** 设 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛. 由定理 14.7.3 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$ 收敛, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 收敛. 再从定理 14.7.2 即知

$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛. □

**定理 14.7.8** 任意改变绝对收敛的无穷乘积因子的次序,所得的新的无穷乘积仍然绝对收敛,且其积不变.

**证明** 设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛.任意改变其因子的次序得到一个新的无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$.从定理 14.7.7 的证明知,这时 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 也绝对收敛,所以它可以任意改变求和的次序,因而 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$ 也绝对收敛,而且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n),$$

从而 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ 绝对收敛,且

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n).$$ □

如果无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛,但无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 发散,那么称 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ **条件收敛**.

例如,$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)$ 就是一个条件收敛的无穷乘积.

对条件收敛的无穷乘积,也有类似于条件收敛的无穷级数那样的 Riemann 定理.

**定理 14.7.9** 设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 条件收敛,那么适当改变其因子的次序,可使它收敛到任意事先指定的正数 $s$,也可使其发散到 $+\infty$ 或 0.

证明留作练习.

## 练 习 题 14.7

1. 能否由 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$,$\prod_{n=1}^{\infty}q_n$ 的收敛性,得出下列乘积的收敛性?

$$\prod_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n),\quad \prod_{n=1}^{\infty}p_nq_n,\quad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}.$$

2. 证明下列等式：

(1) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^3-1}{n^3+1}=\dfrac{2}{3}$；

(2) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{2}{n(n+1)^2}\right)=\dfrac{1}{3}$；

(3) $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}\right)=2$.

3. 利用 Wallis 公式，证明：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{4n^2}\right)=\dfrac{2}{\pi}$；

(2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

4. 讨论下列无穷乘积的敛散性：

(1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$；

(2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$；

(3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{n}}$.

5. 讨论下列无穷乘积的敛散性：

(1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$；

(2) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$（$p$ 为任意的实数）；

(3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}\,(x>0)$.

6. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2<+\infty$，则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos a_n$ 收敛，其中 $\cos a_n\neq 0$.

7. 证明定理 14.7.9.

## 问 题 14.7

1. 证明：

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots=\frac{\pi}{2}.$$

2. 设 $a_1=1, a_n=n(a_{n-1}+1)(n=2,3,\cdots)$. 证明：

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=\mathrm{e}.$$

3. 设

$$a_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{k}}, & n=2k-1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k\sqrt{k}}, & n=2k.\end{cases}$$

证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都发散，但 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.

4. 证明：$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=0$. 由此证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}=0.$$

5. 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-n^2)$$

在 $x=x_0$(非整数)处收敛，证明：它对所有的 $x$ 都收敛.

6. 证明：设正数列$\{a_n\}$满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+O(b_n)\quad(n\to\infty),$$

这里 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是一个绝对收敛级数，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

7. 如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=1.$$

# 第 15 章　函数列与函数项级数

## 15.1　问题的提出

有了上一章数项级数的知识，就有可能讨论如何通过无穷多个函数的叠加来产生新函数，以及研究这样产生的新函数的性质.

设

$$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$$

是定义在区间$[a,b]$上的一列函数.称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{1}$$

是$[a,b]$上的一个**函数项级数**.在$[a,b]$内任取一点 $x_0$，那么$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$便是一个数项级数.如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛，则称函数项级数(1) 在点 $x_0$ 处收敛；反之，则称级数(1) 在点 $x_0$ 处发散.如果级数(1) 在$[a,b]$内的每一点都收敛，则称级数(1) 在区间$[a,b]$上收敛或在区间$[a,b]$上逐点收敛.一般来说，级数(1) 可能在$[a,b]$内的某些点上收敛，在另一些点上发散.使级数(1) 收敛（或发散）的那些点的全体，称为级数(1) 的**收敛**（或**发散**）**点集**.例如

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

是定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数项级数，它的收敛点集是区间$(-1,1)$，发散点集是区间$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

设$[a,b]$是级数(1) 的收敛点集.对$[a,b]$内的每一点 $x$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$都有一个确定的和，记为 $S(x)$，那么

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b)$$

是在$[a,b]$上的一个确定函数,称为级数(1)的**和函数**.我们首先关心的是,由无穷级数(1)所确定的和函数$S(x)$是否具有有限和的那些性质?也就是:

(a) 如果函数$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$都在$[a,b]$上连续,它们的和函数$S(x)$是否也在$[a,b]$上连续?

(b) 如果$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$都在$[a,b]$上 Riemann 可积,它们的和函数$S(x)$是否也在$[a,b]$上可积?如果$S(x)$在$[a,b]$上可积,等式

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x$$

是否成立?或者说,积分号与求和号能否交换?即级数能否"**逐项积分**"?

(c) 如果$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$都在$[a,b]$上可导,$S(x)$是否也在$[a,b]$上可导?等式

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$$

是否成立?或者说,级数是否可以"**逐项求导**"?

以上三条,对有限个函数的和都是正确的,但对无穷级数的和则未必成立.

为了说明这个问题,我们注意,如果记级数(1)的部分和序列为$S_n(x)$,即

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),$$

那么$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$,即$S(x)$是函数序列$\{S_n(x)\}$的极限函数.以上三个问题便可等价地转化为:

(a)′ 如果$\{S_n(x)\}$是$[a,b]$上一列收敛的连续函数,其极限函数$S(x)$是否在$[a,b]$上连续?

(b)′ 如果$\{S_n(x)\}$是$[a,b]$上一列收敛的可积函数,其极限函数$S(x)$是否在$[a,b]$上可积?如果$S(x)$可积,等式

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x$$

是否成立?即极限号与积分号能否交换?

(c)′ 如果$\{S_n(x)\}$是$[a,b]$上一列收敛的可导函数,其极限函数$S(x)$是否在$[a,b]$上可导?如果$S(x)$可导,等式

$$S'(x)=\lim_{n\to x}S'_n(x)$$

是否成立?即极限号与微分号能否交换?

以下四个例子说明,上面三个问题的答案有时是否定的.

**例 1** 在区间[0,1]上考虑函数序列$\{x^n\}$,它的每一个函数当然都在[0,1]上连续可导,但它的极限函数

$$S(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1\end{cases}$$

在$x=1$处不连续,当然也不可导.这个例子给出了问题(a)′和(c)′前半个问题的否定答案. □

**例 2** 设$\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$是区间[0,1]上的全体有理数.在[0,1]上定义

$$S_n(x)=\begin{cases}1, & x=r_1,r_2,\cdots,r_n,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$S(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

显然,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$.对每一个固定的$n$,$S_n(x)$是[0,1]上的 Riemann 可积函数,而$S(x)$在[0,1]上不可积.这个例子给出了问题(b)′前半个问题的否定答案. □

**例 3** 在[0,1]上,考虑函数序列

$$S_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

显然

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0.$$

因而$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x=0$,但

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(1-e^{-n^2})=1.$$

这个例子给出了问题(b)′后半个问题的否定答案. □

**例 4** 在$(-\infty,+\infty)$,上考虑函数列

$$S_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\quad(n=1,2,\cdots).$$

显然

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0.$$

它在$(-\infty,+\infty)$上当然可导,但

$$S_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx\not\to 0\quad(-\infty<x<+\infty),$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n'(x)\neq S'(x)$.这个例子给出了问题(c)′后半个问题的否定答案. □

由此看来,要使以上三个命题成立,还必须补充条件,下节介绍的“一致收敛”便是这种条件中最重要的一个.

## 练习题 15.1

求下列函数项级数的收敛点集：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}\left(\frac{x}{3x+1}\right)^n$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n+y^n}(x>0, y>0)$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^x}(x>0)$；

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^x(x>0)$.

## 问题 15.1

1. 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上收敛于 $S(x)$. 如果 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 都是 $[a,b]$ 上的非负连续函数，证明：$S(x)$ 必在 $[a,b]$ 上取到最小值.
2. 第 1 题中的 $S(x)$ 是否一定能取到最大值？
3. 把第 1 题中的有界闭区间换成开区间或无穷区间，结论是否还成立？

# 15.2 一致收敛

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数列. 对 $x_0 \in [a,b]$，如果数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛，则称函数列 $\{f_n\}$ 在点 $x_0$ 收敛. 如果 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 内的每一点都收敛，则称 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛或在 $[a,b]$ 上逐点收敛.

现设 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $f$. $[a,b]$ 内有无穷多个点，这就意味着无穷多个数列收敛. 一般来说，这些数列收敛的速度是不一致的，有的收敛得快些，有的慢些. 用 $\varepsilon-N$ 的语言来说，对任给的 $x_0 \in [a,b]$ 和任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(x_0,\varepsilon)$，当 $n>N$ 时，有

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

这里的 $N=N(x_0,\varepsilon)$不仅与 $\varepsilon$ 有关,也与 $x_0$ 有关.对同一个 $\varepsilon>0$,不同的 $x_0$ 所要求的 $N(\varepsilon,x_0)$值可以相差很大.

以 15.1 节中的例 1 来说,$f_n(x)=x^n$,对(0,1)中任意的点 $x$,函数列都收敛于 $f(x)=0$. 对 $0<\varepsilon<1$,要使

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n<\varepsilon,$$

必须要求

$$n>N(x,\varepsilon)=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right]. \tag{1}$$

对不同的 $x$,相应的 $N(x,\varepsilon)$就很不一样.例如,要使

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n<\frac{1}{10^{100}},$$

即 $\varepsilon=10^{-100}$,在 $x=x_1=1/10^{10}$处,只要

$$n>N(x_1,\varepsilon)=10$$

就行;而在 $x=x_2=1/10^4$ 处,必须要求

$$n>N(x_2,\varepsilon)=25$$

才行;而在 $x=x_3=1/10$ 处,则必须要求

$$n>N(x_3,\varepsilon)=100$$

才行.由此可见,当 $x$ 越靠近原点,$\{x^n\}$收敛于 0 的速度越快.那么对任意给定的 $\varepsilon>0$,能否找到一个与 $x$ 无关的$N$,只要 $n>N$,对(0,1)中任意的 $x$ 都有 $x^n<\varepsilon$ 呢? 容易知道,这样的 $N$ 是不存在的.因为如果存在 $n_0$,使得不等式

$$x^{n_0}<\varepsilon$$

对(0,1)中所有的 $x$ 都成立,那么取 $x=\varepsilon^{1/n_0}$,便得到 $\varepsilon<\varepsilon$ 的矛盾.实际上,在式(1)中令 $x\to1$,就得到 $N(x,\varepsilon)\to+\infty$.这也说明不存在与 $x$ 无关的$N$.

但是下面这个例子就不一样了.令

$$f_n(x)=\frac{1}{n+x}\quad(n=1,2,\cdots).$$

对(0,1)中任意的 $x$,都有 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 由于

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n+x}<\frac{1}{n}$$

对(0,1)中一切的 $x$ 成立,因此,对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$,只要取 $N=[1/\varepsilon]$,当 $n>N$ 时,

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

对(0,1)中所有的 $x$ 就都成立.显然,这时的 $N=[1/\varepsilon]$与 $x$ 无关.

以上两例，同样都在(0,1)上收敛，然而却有似乎很微小但又非常重要的差别：在给定正数 $\varepsilon$ 以后，前者对每一个 $x\in(0,1)$ 都有相应的 $N(x,\varepsilon)$，但却找不到一个与 $x$ 无关的 $N$；后者则有这样的 $N$. 因此后者比前者多满足了一个条件——存在与 $x$ 无关的 $N$. 这个条件对 15.1 节提出的三个命题的成立具有实质性的作用. 所以有必要在原来的收敛概念的基础上建立一个更强的收敛概念.

**定义 15.2.1**　设函数列 $\{f_n\}$ 在点集 $I$（可以是区间，也可以不是区间）上收敛于 $f$. 如果对任意给定的正数 $\varepsilon$，都存在与 $x$ 无关的正整数 $N(\varepsilon)$，使得当 $n>N(\varepsilon)$ 时，不等式

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对 $I$ 中一切的 $x$ 都成立，则称函数列 $\{f_n\}$ 在 $I$ 上**一致收敛**于函数 $f$.

根据这个定义，函数列 $\{x^n\}$ 在(0,1)上不一致收敛于 0，而函数列 $\left\{\dfrac{1}{n+x}\right\}$ 则在(0,1)上一致收敛于 0.

从几何上来看，$y=f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 表示一系列曲线. 所谓 $\{f_n\}$ 一致收敛于 $f$，就是指从某个下标 $N(\varepsilon)$ 之后，曲线

$$y=f_n(x)\quad(n=N+1,N+2,\cdots)$$

全部落入条形区域 $f(x)-\varepsilon<y<f(x)+\varepsilon$ 之中（图 15.1）.

从图 15.2 中可以看出，不论 $n$ 多大，曲线 $y=x^n$ 永远不会全部落入条形区域 $0<y<\varepsilon$ 之中，这里 $\varepsilon\in(0,1)$. 因而 $\{x^n\}$ 在(0,1)上不是一致收敛于 0 的.

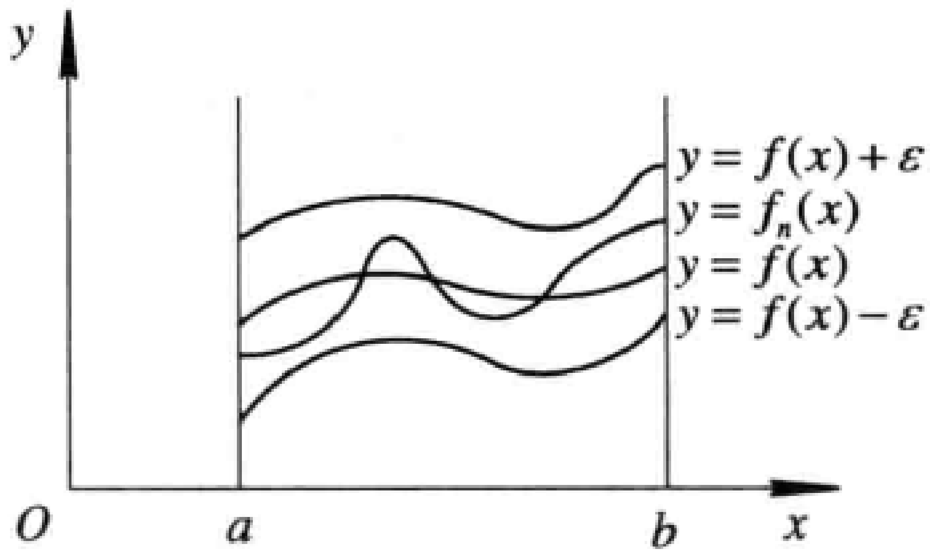



图 15.1

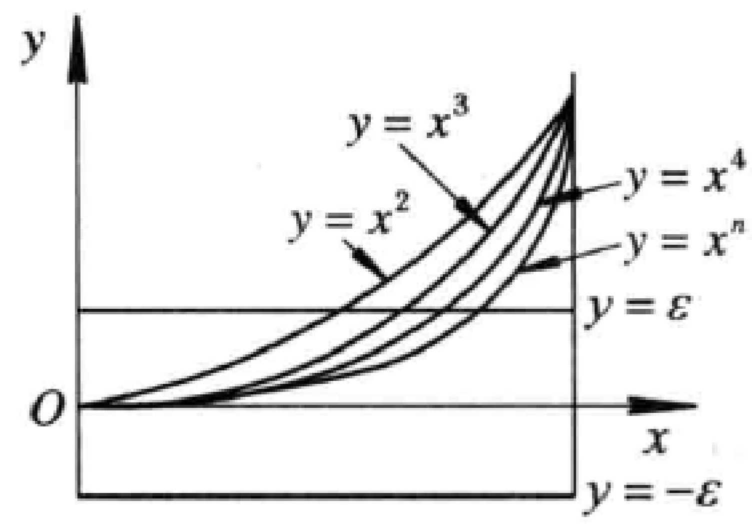



图 15.2

如果记

$$\beta_n=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|,$$

那么从上面的几何考察，可以得到：

**定理 15.2.1**　函数列 $\{f_n\}$ 在 $I$ 上一致收敛于 $f$ 的一个充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0. \tag{2}$$

**证明** 如果$\{f_n\}$在 $I$ 上一致收敛于$f$,那么对任意的 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$时,$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对任意的$x\in I$ 都成立.由此即得

$$\beta_n=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

这就是式(2).反之,如果式(2)成立,那么对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$时,$\beta_n<\varepsilon$.于是对任意的 $x\in I$,有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\beta_n<\varepsilon,$$

即$\{f_n\}$在 $I$ 上一致收敛于$f$. □

**例 1** 讨论函数列 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$在区间$(0,+\infty)$和$[\delta,+\infty)$上的一致收敛性,其中 $\delta>0$.

**解** 对任意给定的 $x>0$,$f_n(x)\to0(n\to\infty)$.当 $\delta\leqslant x<+\infty$时,由于

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{nx}{n^2x^2}=\frac{1}{nx}<\frac{1}{n\delta},$$

故

$$\beta_n=\sup_{\delta\leqslant x<+\infty}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{n\delta}\to0\quad(n\to\infty).$$

由定理 15.2.1 知$\{f_n\}$在$[\delta,+\infty)$上一致收敛于 0.

当 $0<x<+\infty$时,由于

$$\beta_n\geqslant\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{2},$$

所以 $\beta_n\not\to0$.由定理 15.2.1 知$\{f_n\}$在$(0,1)$上不一致收敛于 0. □

从这个例子看出,用定理 15.2.1 来证明函数列不一致收敛比较方便.

**例 2** 讨论函数列

$$f_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}\quad(n=1,2,\cdots)$$

在$[0,1]$上的一致收敛性.

**解** 这就是 15.1 节中的例 3.已知它在$[0,1]$上收敛于 $f(x)=0$.由于

$$\beta_n\geqslant\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=2ne^{-1}\not\to0,$$

所以这个函数列在$[0,1]$上不一致收敛. □

像数列的 Cauchy 收敛原理一样,也有判断函数列是否一致收敛的 Cauchy 原理,它的好处是无须知道极限函数,就能判别它是否一致收敛.

**定理 15.2.2**(Cauchy 收敛原理) 设$\{f_n\}$是定义在区间 $I$ 上的一个函数列,那么$\{f_n\}$在 $I$ 上一致收敛的充分必要条件是,对任意的 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$时,

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon \tag{3}$$

对任意的 $x\in I$ 及任意的正整数 $p$ 成立.

**证明**　设$\{f_n\}$在 $I$ 上一致收敛于$f$,那么对任意的 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$时,

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f_{n+p}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对任意的 $x\in I$ 及任意的正整数 $p$ 成立.因而

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对任意的 $x\in I$ 及 $p=1,2,\cdots$都成立.这就证明了条件的必要性.

再证条件的充分性.如果式(3)成立,根据数列的 Cauchy 收敛原理,$\{f_n(x)\}$在 $I$ 中的每一点 $x$ 都收敛,设其极限函数为 $f(x)$.当 $n>N(\varepsilon)$固定时,式(3)对每个 $p=1,2,\cdots$都成立.现在式(3)中令 $p\to\infty$,即得

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon$$

对任意的 $x\in I$ 成立.根据定义 15.2.1,$\{f_n\}$在 $I$ 上一致收敛于$f$. □

弄清了函数列一致收敛的概念后,就可很容易讨论函数项级数的一致收敛概念了.

**定义 15.2.2**　设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$是定义在区间 $I$ 上的一个函数项级数,令 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$为它的部分和.如果函数列$\{S_n(x)\}$在 $I$ 上一致收敛于$S(x)$,则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在 $I$ 上**一致收敛**于$S(x)$.

利用函数列的 Cauchy 收敛原理,即可得到函数项级数的 Cauchy 收敛原理.

**定理 15.2.3**(Cauchy 收敛原理)　定义在区间 $I$ 上的函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在 $I$ 上一致收敛的一个充分必要的条件是,对任意的 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$时,不等式

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{u+p}(x)|<\varepsilon$$

对任意的 $x\in I$ 及任意的正整数 $p$ 成立.

在上面的定理中取 $p=1$,就得到函数项级数一致收敛的一个必要条件:

**推论 15.2.1**　$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在 $I$ 上一致收敛的一个必要条件是,它的通项 $u_n(x)$在 $I$ 上一致收敛于 0.

这个条件仅仅是必要的. 例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+x}$ 的通项 $u_n(x) = \dfrac{1}{n+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛于 0，但级数本身根本不收敛.

这个必要条件经常用来判断函数项级数的非一致收敛性.

**例 3** 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

**解** 容易知道该级数在 $(0,+\infty)$ 上收敛，其通项 $u_n(x)=n\mathrm{e}^{-nx}$. 由于

$$\beta_n = \sup_{0<x<+\infty} u_n(x) \geqslant u_n\left(\frac{1}{n}\right) = n\mathrm{e}^{-1} \not\to 0,$$

故 $\{u_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛于 0. 从而由推论 15.2.1 知该级数在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛. □

下面的 Weierstrass 判别法是判断级数一致收敛的最常用的方法.

**定理 15.2.4**（Weierstrass 判别法） 如果存在收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，使得在区间 $I$ 上有不等式

$$|u_n(x)| \leqslant a_n \quad (n=1,2,\cdots), \tag{4}$$

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $I$ 上一致收敛.

**证明** 因为正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故由 Cauchy 收敛原理知，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N$，当 $n>N$ 时，

$$0 < a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$$

对任意的正整数 $p$ 成立. 由式(4)知，当 $n>N$ 时，

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

对任意的正整数 $p$ 及 $I$ 中的一切 $x$ 成立. 从而由定理 15.2.3 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛. □

满足条件式(4) 的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $I$ 上的一个**优级数**. 定理 15.2.4 是说，在区间 $I$ 上有收敛的优级数的函数项级数必在 $I$ 上一致收敛.

**例 4** 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. 在 $(-\infty,+\infty)$ 上，有不

等式

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

即该级数在$(-\infty, +\infty)$上有收敛的优级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,因而在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛. □

**例 5**　级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛.这是因为当$x\in(-\infty, +\infty)$时,有不等式

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n^2} \quad (n = 1,2,\cdots).$$ □

**例 6**　例 3 已经证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在$(0, +\infty)$上不一致收敛,但它在$[\delta, +\infty)$上一致收敛,这里$\delta$是任意的一个正数.事实上,由于$x\geqslant\delta>0$,故存在$N$,当$n>N$时,有

$$ne^{-nx} \leqslant ne^{-n\delta} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

从而级数在$[\delta, +\infty)$上一致收敛. □

Weierstrass判别法用起来很方便,但条件太强,它要求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$绝对收敛,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$一致收敛才行.实际上存在这样的级数,它一致收敛,但不绝对收敛(见例 7);还可能有这样的情形:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$绝对且一致收敛,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$却不一致收敛(见练习题 15.2 中的第 5 题).对这种级数,Weierstrass 判别法就无效了.因此,还需要研究更精细的判别法.

对函数项级数,也有类似于数项级数的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法.我们先引进函数列在区间上一致有界的概念.

设$\{a_n\}$是一数列,此数列有界是指:存在正数$M$,使得$|a_n|\leqslant M$对$n=1,2,\cdots$都能成立.设$\{f_n\}$是定义在区间$I$上的函数列.如果对每一个$x\in I$,都有正数$M(x)$,使得$|f_n(x)|\leqslant M(x)$对$n=1,2,\cdots$成立,则称函数$\{f_n\}$在$I$上**逐点有界**.应当注意,这里的$M(x)$是随$x$的变化而变化的.如果能找到一个常数$M$,使得

$$|f_n(x)| \leqslant M \quad (n = 1,2,\cdots)$$

对一切$x\in I$成立,则称函数列$\{f_n\}$在$I$上**一致有界**.

比较一下下列两个例子对我们会有帮助.取 $I=(0,1)$,$f_n(x)=x^n$($n=1,2,\cdots$).由于

$$0<f_n(x)=x^n<1\quad(n=1,2,\cdots)$$

对一切 $x\in(0,1)$成立,所以函数数列$\{x^n\}$在$(0,1)$上一致有界.

在$(0,1)$上讨论函数列$\{nx^n\}$.由于当 $x\in(0,1)$时,$\lim\limits_{n\to\infty}nx^n=0$,所以函数列$\{nx^n\}$在$(0,1)$上逐点有界,但是它不是一致有界的.否则,存在常数 $M>0$,使得

$$0<nx^n\leqslant M\quad(n=1,2,\cdots)$$

对一切 $x\in(0,1)$成立.任意固定 $n$,在上式的两边令 $x\to1^-$,即得 $n<M$,这说明 $n$ 不能是任意的正整数.这一矛盾表明$\{nx^n\}$在$(0,1)$上不是一致有界的.

下面是关于函数项级数的 Dirichlet 和 Abel 判别法.

**定理 15.2.5**(Dirichlet 判别法)　设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$在区间 $I$ 上满足下面两个条件:

(a) $\{b_n(x)\}$对每个固定的 $x\in I$ 都是单调的,且在区间 $I$ 上一致收敛于 0;

(b) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$的部分和在 $I$ 上**一致有界**,即

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\right|\leqslant M\quad(x\in I,n=1,2,\cdots).$$

那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$在 $I$ 上一致收敛.

**证明**　与数项级数一样,我们用 Cauchy 收敛原理来证明它一致收敛.从条件(b)知,当 $n+1\leqslant m\leqslant n+p$ 时,有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{m}a_k(x)\right|&=\left|\sum_{k=1}^{m}a_k(x)-\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\right|\\&\leqslant\left|\sum_{k=1}^{m}a_k(x)\right|+\left|\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\right|\\&\leqslant 2M.\end{aligned}$$

于是由 Abel 引理,可得

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k(x)b_k(x)\right|\leqslant 2M(|b_{n+1}(x)|+2|b_{n+p}(x)|).$$

因为$\{b_n(x)\}$在 $I$ 上一致收敛于 0,故对任意的 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$时,对任意的 $x\in I$,有

$$|b_n(x)|<\frac{\varepsilon}{8M}.$$

于是，当 $n>N(\varepsilon)$时，

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right|<\varepsilon$$

对任意的 $x \in I$ 及任意的正整数 $p$ 成立. 根据 Cauchy 收敛原理，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛. □

**定理 15.2.6**(Abel 判别法)　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在区间 $I$ 上满足下面两个条件：

(a) $\{b_n(x)\}$对每个固定的 $x\in I$ 都是单调的，且在 $I$ 上一致有界，即

$$|b_n(x)|\leqslant M \quad (x \in I, n=1,2,\cdots);$$

(b) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛.

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛.

**证明**　因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛，所以对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3M}$$

对任意的 $x\in I$ 及任意的正整数 $p$ 成立. 于是由 Abel 引理，即得

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}(|b_{n+1}(x)|+2|b_{n+p}(x)|)<\varepsilon.$$

对任意的 $x \in I$ 及任意的正整数 $p$ 成立. 因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛. □

前面讲过，数项级数的 Abel 判别法(定理 14.4.4)是用 Dirichlet 判别法来证明的. 请读者想一想，这里为什么不能这样做?

**例 7**　证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n}$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ 在$[\delta, 2\pi-\delta](0<\delta<\pi)$ 上一致收敛.

**证明**　令 $a_n(x)=\cos nx, b_n(x)=1/n$，则 $b_n(x)$递减趋于 0，并且

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}.$$

由于 $x\in[\delta,2\pi-\delta]$,所以 $\sin\frac{x}{2}\geqslant\sin\frac{\delta}{2}$,从而有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

即 $\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上一致有界. 故由 Dirichlet 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上一致收敛. 同理,可证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 的一致收敛性. □

容易证明,例 7 中的两个级数在 $(0,\pi)$ 上不是绝对收敛的. 这说明一致收敛的级数未必绝对收敛. 而级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 在 $[0,1)$ 上绝对收敛,但并不一致收敛. 由此可见,绝对收敛和一致收敛是两个毫不相关的概念.

## 练习题 15.2

1. 研究下列函数列在指定区间上的一致收敛性:

(1) $f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$:

(a) $0<x<+\infty$; (b) $0<\lambda<x<+\infty$.

(2) $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$:

(a) $0\leqslant x\leqslant 1-\lambda$; (b) $1-\lambda\leqslant x\leqslant 1+\lambda$;

(c) $1+\lambda\leqslant x<+\infty\ (\lambda>0)$.

(3) $f_n(x)=\mathrm{e}^{-(x-n)^2}$:

(a) $-l<x<l\ (l>0)$; (b) $-\infty<x<+\infty$.

2. 研究下列级数在指定区间上的一致收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, $(0,+\infty)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, $(-\infty,+\infty)$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$, $[-3,-1/3]\cup[1/3,3]$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $(-\infty,+\infty)$;

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$,$(-l,l)(l>0)$;

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$,$[0,2\pi]$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$,$(0,+\infty)$.

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

4. 设 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数.如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 绝对收敛,证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对且一致收敛.

5. 证明:级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$$

在 $[0,1]$ 上绝对且一致收敛,但 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上并不一致收敛.

6. 在区间 $[0,1]$ 上,定义

$$u_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{1}{n},\\ 0, & x\neq\frac{1}{n}.\end{cases}$$

证明:$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛,但它不存在收敛的优级数.

7. 设 $\{u_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列.证明:如果 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 内的每一点收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 发散,那么 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上不一致收敛.

8. 设 $a_n\geqslant 0$.证明:$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛的充分必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$.

9. 证明:级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln n}$ 在 $(0,\pi]$ 上不一致收敛.

10. 设 $[a,b]$ 是一个有限闭区间.如果对任一点 $x\in[a,b]$,存在一个包含 $x$ 的开区间 $I_x$,使得 $\{f_n\}$ 在 $I_x$ 上一致收敛于 $f$.求证:$\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f$.(提示:用有限覆盖定理.)

11. 证明:函数列

$$f_n(x)=xn^{-x}(\ln n)^{\alpha}\quad(n=1,2,\cdots)$$

在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛的充分必要条件是 $\alpha<1$.

12. 设 $f_1$ 在$[a,b]$上 Riemann 可积,定义

$$f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(x)\mathrm{d}t \quad (n=1,2,\cdots).$$

证明:函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于 0.

13. 证明:当 $\alpha>2$ 时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx^2}$ 在$[0,+\infty)$上一致收敛.

## 问题 15.2

1. 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$$

在区间$[0,\delta]$和$[\delta,+\infty)$上的一致收敛性,其中 $\delta>0$.

2. 设函数列$\{f_n\}$和$\{g_n\}$在区间 $I$ 上一致收敛.如果对每个 $n=1,2,\cdots$,$f_n$ 和 $g_n$ 都是 $I$ 上的有界函数(不要求一致有界),证明:$\{f_n g_n\}$在 $I$ 上必一致收敛.
3. 如果去掉第 2 题中 $f_n$ 和 $g_n$ 有界的条件,结论是否还成立?试举例说明之.
4. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上收敛.如果存在常数 $M$,使得对任意的 $x\in[a,b]$及一切正整数 $n$,都有$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}u'_k(x)\right|\leqslant M$,证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛.
5. 设函数 $f$ 在$x=0$的邻域内有二阶连续导函数,且$f(0)=0$,$0<f'(0)<1$.如果记 $f_n$ 是 $f$ 的 $n$ 次复合,证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在 $x=0$ 的邻域内一致收敛.
6. 证明:级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\cos nx$$

在$[0,1]$上一致收敛.

7. 设$\{a_n\}$是递减的正数列.证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛的充分必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

# 15.3 极限函数与和函数的性质

现在回过头来研究 15.1 节中提出的三个问题.我们将看到,只要加上一致收

敛的条件，那里所提问题的答案都是肯定的.

**定理 15.3.1**　如果函数列$\{f_n\}$的每一项都在区间 $I$ 上连续，且$\{f_n\}$在 $I$ 上一致收敛于函数$f$，那么 $f$ 也在$I$ 上连续.

**证明**　我们证明 $f$ 在$I$ 中的任一点$x_0$ 处连续. 由于$\{f_n\}$在 $I$ 上一致收敛于$f$，故对任给的 $\varepsilon>0$，可取一充分大的正整数 $n_0$，使得

$$|f_{n_0}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

对 $I$ 中的一切 $x$ 都成立. 又因为 $f_{n_0}$ 是 $I$ 上的连续函数，在 $x_0$ 处连续，故存在 $\delta>0$，当 $x\in I$ 且$|x-x_0|<\delta$ 时，有$|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|<\varepsilon/3$. 于是当 $x\in I$ 且$|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|&\leqslant|f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|\\&\quad+|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 $f$ 在$x_0$ 处连续. 由于 $x_0$ 是 $I$ 中的任意点，所以 $f$ 在$I$ 上连续.　□

对应于无穷级数，我们有：

**定理 15.3.2**　如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 $I$ 上一致收敛于$S(x)$，且每一项 $u_n(x)$ 都在 $I$ 上连续，那么和函数 $S(x)$ 也在 $I$ 上连续.

**例 1**　因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，所以它的和函数是整个数轴上的连续函数.　□

**例 2**　设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$. 计算$\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

**解**　在区间$[-2,2]$上考察这个函数. 由于

$$\left|\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

故由 Weierstrass 判别法知原级数在$[-2,2]$上一致收敛，从而 $f$ 是$[-2,2]$上的连续函数. 于是

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cos n\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{3}{4}.\qquad\square$$

**例 3**　证明：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 是$(0,+\infty)$上的连续函数.

**证明**　15.2 节中的例 3 已经证明此级数在$(0,+\infty)$上不是一致收敛的，因而

不能直接用定理 15.3.2 来证明 $f$ 在$(0,+\infty)$上的连续性.但可以这样做:设 $x_0$ 是$(0,+\infty)$中的任一点,这时总能取 $\delta$,使得 $0<\delta<x_0$.由 15.2 节中的例 6 知,该级数在$[\delta,+\infty)$上一致收敛,因而 $f$ 在 $x_0$ 处连续.由于 $x_0$ 是$(0,+\infty)$中的任一点,所以 $f$ 在$(0,+\infty)$上连续. □

**例 4** 证明:$f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{x}{\ln n}\right)^n$ 是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数.

**证明** 容易证明原级数在$(-\infty,+\infty)$上不是一致收敛的,因而不能直接用定理 15.3.2 来证明 $f$ 在$(-\infty,+\infty)$上的连续性.但对任意的正数 $M$,当 $|x|\leqslant M$ 时,有

$$\left(\frac{|x|}{\ln n}\right)^n\leqslant\left(\frac{M}{\ln n}\right)^n.$$

由 Cauchy 判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{M}{\ln n}\right)^n<+\infty$.从而由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{x}{\ln n}\right)^n$ 在$[-M,M]$上一致收敛,因而 $f$ 是$[-M,M]$上的连续函数.由于 $M$ 是任意的正数,所以 $f$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续. □

定理 15.3.2 告诉我们,如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的每一项 $u_n(x)$ 都在区间 $I$ 上连续,那么加上一致收敛的条件后就能保证它的和函数 $S$ 也在 $I$ 上连续.现在反过来问,在每个 $u_n(x)$ 都连续的前提下,从和函数 $S$ 的连续性能否推出级数在 $I$ 上一致收敛?一般来说,答案是否定的.但如果考虑的是正项级数,而且 $I$ 是有界的闭区间,答案则是肯定的.

先考虑函数列的情形.

**定理 15.3.3**(Dini 定理) 设函数列$\{f_n\}$在有限闭区间$[a,b]$上连续.如果对每一个 $x\in[a,b]$,数列$\{f_n(x)\}$递减地趋于 0,那么$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 0.

**证明** 对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N_x=N(\varepsilon,x)$,使得

$$0\leqslant f_{N_x}(x)<\varepsilon.$$

由于 $f_{N_x}$ 在点 $x$ 处连续,故必存在 $\delta_x>0$,使得当 $t\in[a,b]$且 $t\in(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 时,仍有

$$0\leqslant f_{N_x}(x)<\varepsilon. \tag{1}$$

于是这些区间的并

$$\bigcup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)$$

构成$[a,b]$的一个开覆盖.由有限覆盖定理知,从中可以选出有限个开区间

$$(x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}) \quad (i = 1, \cdots, m),$$

它们仍构成$[a,b]$的一个开覆盖.令

$$N = \max(N_{x_1}, \cdots, N_{x_m}).$$

由式(1)和$\{f_n\}$的递减性知,当 $n \geqslant N$ 时,不等式

$$0 \leqslant f_n(x) < \varepsilon$$

对一切 $x \in [a,b]$成立.这正说明$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$在$[a,b]$上一致地成立. □

如果把定理中的有限闭区间$[a,b]$改成开区间或无穷区间,结论则不再成立.例如,$f_n(x) = x^n$ 在$(0,1)$上单调递减地趋于 0,但它不一致收敛于 0.又如 $f_n(x) = x/n$ 在$(0,+\infty)$上单调递减地趋于 0,但不一致地趋于 0.

下面是级数形式的 Dini 定理.

**定理 15.3.4**(Dini 定理)　设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的每一项在有限闭区间$[a,b]$上连续且非负.如果它的和函数 $S(x)$ 也在$[a,b]$上连续,那么该级数在$[a,b]$上一致收敛.

**证明**　记 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, $f_n(x) = S(x) - S_n(x)$,那么$\{f_n\}$是$[a,b]$上连续且递减地趋于 0 的函数列.由定理 15.3.3 知$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致地趋于 0,即$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛. □

与定理 15.3.3 的情形一样,如果把定理中的闭区间$[a,b]$换成开区间或无穷区间,结论就可能不成立.例如,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 的每一项 $x^n$ 在区间$[0,1)$上非负且连续,它的和函数 $1/(1-x)$ 也在$[0,1)$上连续,但该级数在$[0,1)$上并不一致收敛.对无穷区间,由例 4 知,它的每一项在$[0,+\infty)$上是非负的,和函数在$[0,\infty)$上连续,但它在$[0,\infty)$上不一致收敛.这是因为

$$\beta_n = \sup_{x\in[0,+\infty)} \left(\frac{x}{\ln n}\right)^n \geqslant \left(\frac{n}{\ln n}\right)^n \to +\infty.$$

现在讨论级数的逐项积分问题.先看函数列的情形.

**定理 15.3.5**　如果$[a,b]$上的可积函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $f$,那么 $f$ 也在$[a,b]$上可积,并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

**证明**　先证 $f$ 在$[a,b]$上可积.用 $D(f)$和 $D(f_n)$分别记 $f$ 和$f_n$ 在$[a,b]$上的不连续点的全体.由于 $f_n$ 在$[a,b]$上可积,由 Lebesgue 定理(定理 6.6.1)知

$D(f_n)$是一个零测集.又由于$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f$,故存在自然数$n_0$,使得

$$|f(x)-f_{n_0}(x)|\leqslant 1$$

对所有$x\in[a,b]$成立.因为$f_{n_0}$是有界函数,不妨设$|f_{n_0}(x)|\leqslant M$,于是有

$$|f(x)|\leqslant|f_{n_0}(x)|+1\leqslant M+1,$$

即$f$是$[a,b]$上的有界函数.现设$x_0\in D(f)$,则$x_0$必是某个$f_n$的不连续点.否则,$x_0$是所有$f_n$的连续点,于是由定理15.3.1知$x_0$也必是$f$的连续点,这与假设相违背.因而有

$$D(f)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}D(f_n).$$

由于每一个$D(f_n)$都是零测集,所以$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D(f_n)$也是零测集,因而$D(f)$是零测集.由 Lebesgue 定理即知$f$在$[a,b]$上 Riemann 可积.

现在来证明等式(2).由于$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f$,故对任意的$\varepsilon>0$,存在正整数$N(\varepsilon)$,当$n>N(\varepsilon)$时,$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/(b-a)$对$[a,b]$中所有的$x$成立.于是当$n>N(\varepsilon)$时,有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

这就证明了等式(2)成立. □

**注意** 如果$\{f_n\}$不一致收敛于$f$,那么$f$可能在$[a,b]$上不可积.15.1节中的例2就是这样的例子.

由于$[a,b]$上的连续函数是可积的,故从定理15.3.5立刻可得:

**推论 15.3.1** 如果$[a,b]$上的连续函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f$,那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

对函数项级数也有相应的结果.

**定理 15.3.6** 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$,且每一项$u_n(x)$都在$[a,b]$上可积,那么$S(x)$也在$[a,b]$上可积,并且

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

**推论 15.3.2** 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛,且每一项$u_n(x)$都在$[a,b]$上连续,那么

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

**例 5**　设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$. 计算$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

**解**　因为级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，故在任意有限区间内能逐项积分. 于是

$$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\mathrm{d}x=0.$$ □

现在来讨论函数列的逐项微分的问题. 从 15.1 节中的例 4，可以看出$\{f_n\}$一致收敛于 $f$ 并不能导出$\{f'_n\}$收敛于 $f'$，而是应该要求$\{f'_n\}$一致收敛. 这就是下面的定理.

**定理 15.3.7**　设函数列$\{f_n\}$满足条件：

(a) 每一个 $f_n$ 在$[a,b]$上有连续的导函数；

(b) 由导函数构成的函数列$\{f'_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于函数 $g$；

(c) 至少在某一点 $x_0\in[a,b]$上收敛.

那么函数列$\{f_n\}$在闭区间$[a,b]$上一致收敛于某个连续可微函数 $f$，并且对每一个 $x\in[a,b]$，有

$$f'(x)=g(x),\quad 即\quad \left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'=\lim_{n\to\infty}f'_n(x).$$

**证明**　因为$\{f_n\}$在 $x_0\in[a,b]$处收敛，由 Cauchy 收敛原理，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N_1$，当 $n,m>N_1$ 时，有不等式

$$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{3}$$

又因为$\{f'_n\}$在$[a,b]$上一致收敛，仍由 Cauchy 收敛原理，存在 $N_2$，当 $m,n>N_2$ 时，不等式

$$|f'_n(x)-f'_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\tag{4}$$

对每一个 $x\in[a,b]$成立. 令 $N=\max(N_1,N_2)$，则当 $m,n>N$ 时，式(3)和式(4)都成立. 由 Newton-Leibniz 公式，对任意的 $x\in[a,b]$，有

$$\begin{aligned}f_n(x)&=f_n(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'_n(t)\mathrm{d}t,\\ f_m(x)&=f_m(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'_m(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{5}$$

因而当 $m,n>N$ 时，有

$$|f_m(x)-f_n(x)|\leqslant|f_m(x_0)-f_n(x_0)|+\left|\int_{x_0}^{x}(f'_m(t)-f'_n(t))\mathrm{d}t\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}|x-x_0|<\varepsilon.$$

根据 Cauchy 收敛原理，$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛. 设其极限函数为 $f$. 由于$\{f'_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $g$，根据定理 15.3.5，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f'_n(t)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x}g(t)\mathrm{d}t.$$

在式(5)的两边取极限($n\to\infty$)，便得

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}g(t)\mathrm{d}t.$$

由此即得

$$f'(x)=g(x).$$ □

关于函数项级数，相应的定理是：

**定理 15.3.8** 设函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$满足条件：

(a) 每一项 $u_n(x)$在$[a,b]$上有连续的导函数；

(b) 由各项的导函数组成的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于函数 $g(x)$；

(c) 至少在某一点 $x_0\in[a,b]$处收敛.

那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，其和函数 $S(x)$在$[a,b]$上连续可导，并且 $S'(x)=g(x)$，即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x).$$

**例 6** 证明：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^4}$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导函数，并计算 $f''(x)$.

**解** 容易看出，原级数以及每一项求导后所得的级数都在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，因而有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}.$$

对这个级数再逐项求导，所得的级数仍在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，因而有

$$f''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$ □

由于积分运算和微分运算都是某种极限运算，所以以上这些定理实质上都是断言，在一定的条件下两种极限运算交换的合理性. 例如，定理 15.3.1 的结论可以写成

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x);$$

定理 15.3.5 的结论可以写成

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x;$$

定理 15.3.7 的结论可以写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_n(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right).$$

这里起关键作用的是函数列的一致收敛性. 在下面的几章中，极限运算交换的合理性仍然是我们讨论的焦点.

从历史上来看，本节介绍的一些结果对当时的数学家也不是一下子都能明白的. 19 世纪的大数学家 Cauchy 在他的《分析教程》中曾断言：收敛的连续函数项级数的和函数也是连续的. 后来 Abel 在一篇关于二项式级数的长文章中指出了他的错误. Abel 举出了下面的例子：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}\quad(0 < x < 2\pi). \tag{6}$$

由于正弦函数 $\sin x$ 以 $2\pi$ 为周期，所以上述级数的和函数如图 15.3 所示. 它在 $2\pi$ 的整数倍的点上都不连续，但级数在整个数轴上都收敛，它的每一项 $(\sin nx)/n$ 也都在整个数轴上连续. 发生这一现象的根本原因是，上述级数在 $2\pi$ 的整数倍的点的附近是不一致收敛的. 可见一致收敛的概念在级数理论中是何等重要！等式(6)的证明将在17.2 节中给出.

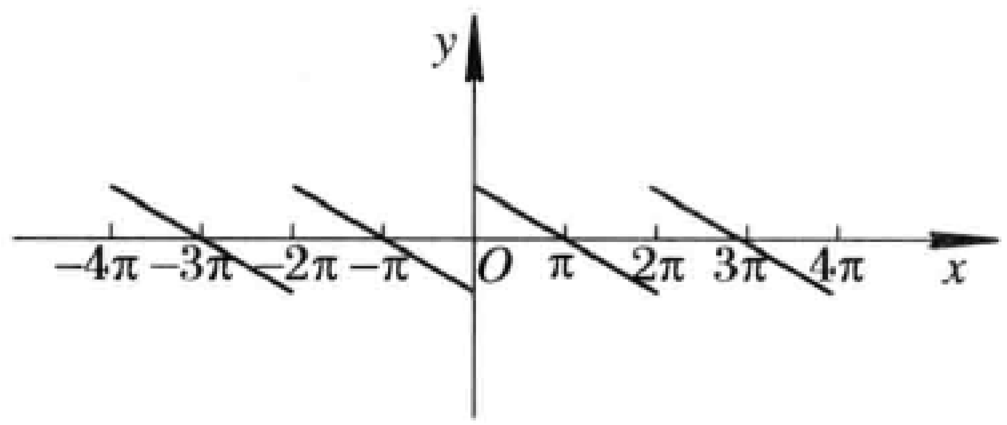



**图 15.3**

## 练 习 题 15.3

1. 确定下列函数的存在域，并研究它们的连续性：

(1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$；

(2) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+(-1)^{n}n}{x^{2}+n^{2}}$.

2. 证明：函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{4}}$$

在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导函数，并计算$f''(x)$.

3. 证明：Riemann $\zeta$ 函数

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x}}$$

在$(1,+\infty)$上是连续的，并在此区间内有各阶连续导函数.

4. 设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}\ (x>0)$，计算$\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)\mathrm{d}x$.

5. 已知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$. 证明：

$$\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{x}}=\ln 2.$$

6. 设$E$是$(-\infty,+\infty)$中的一个点集，$x_0$是$E$的一个极限点（$x_0$可以是$\pm\infty$）. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$E$上一致收敛，而且$\lim_{x\to x_0}u_n(x)=a_n\ (x\in E,n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；

(2) $\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ (x\in E)$.

7. 设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^{n}\cos\frac{n\pi}{x}$. 计算：$\lim_{x\to1}f(x)$，$\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

8. 证明：

$$\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}(1-x)}{n(1-x^{2n})}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}.$$

## 问题 15.3

1. 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上收敛. 如果

$$|S_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|\leqslant M\quad(a\leqslant x\leqslant b,n=1,2,\cdots),$$

则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上**有界收敛**.设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上有界收敛,且对任意的$\delta>0$和$c\in(a,b)$,$\sum_{n=1}^{\infty} u(x)$在$[a,c-\delta]$和$[c+\delta,b]$上一致收敛.证明:如果$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上 Riemann 可积,那么$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$也在$[a,b]$上 Riemann 可积,而且

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

2. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足下列条件:

(a) 反常积分$\int_a^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$收敛;

(b) 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛,这里$b$是大于$a$的任何实数;

(c) 级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[a,+\infty)$上一致收敛,这里

$$f_n(x)=\int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t.$$

证明:$\int_a^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x$和$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x$都收敛,而且

$$\int_a^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x.$$

3. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足下列条件:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上收敛于$f(x)$;

(b) 级数的每一项$u_n(x)$在$x=x_0$处可微;

(c) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}$在$0<|x-x_0|<\delta$上一致收敛.

证明:$f$在$x_0$处可微,而且

$$f'(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0).$$

4. 在$(0,1)$中任取一数列$\{a_n\}$,其中两两不相同.证明:函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-a_n|}{2^n}$$

在$(0,1)$上连续,且在$x=a_n(n=1,2,\cdots)$处都不可微,而在$(0,1)$中其他点处都可微.

5. 设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{x+2^n}(0\leqslant x<+\infty)$.证明:

(1) $f$在$[0,+\infty)$上连续;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=0$；

(3) 对一切 $x\in(0,+\infty)$，有

$$0<f(x)-\frac{\ln(1+x)}{x\ln 2}<\frac{1}{1+x}.$$

6. 证明：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!}=\pi$.

7. 构造一个可导函数，使它在有理点处取有理数值，它的导数在有理点处取无理数值.

## 15.4 由幂级数确定的函数

本节要讨论一种特殊的函数项级数——**幂级数**. 幂级数的一般形式如下：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots,\tag{1}$$

其每一项都是幂函数. 这是一种理论上简单、用起来方便的函数项级数. 如果在级数(1)中令

$$a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=0,$$

那么级数(1)就退化为一个多项式. 因此多项式可看做一种特殊的幂级数. 反过来，幂级数也可看做一个"无穷次"的多项式. 下面将看到，幂级数的确有许多与多项式类似的性质.

为讨论简单起见，我们往往在级数(1)中令 $x_0=0$，只讨论形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots\tag{2}$$

的幂级数. 对一般的情形，只需作变换 $y=x-x_0$ 就可把级数(1)变成级数(2)的形式.

我们首先关心的是级数(2)的收敛点集. 与一般的函数项级数不同，幂级数的收敛点集一定是一个区间. 我们先证明下面的定理.

**定理 15.4.1**(Abel) 如果幂级数(2)在点 $x=x_0$ $(x_0\neq 0)$ 处收敛，那么它必在区间 $|x|<|x_0|$ 上绝对收敛；如果幂级数(2)在点 $x=x_1$ 处发散，那么它必在 $|x|>|x_1|$ 上发散.

**证明** 因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ 收敛，所以存在 $M>0$，使得 $|a_nx_0^n|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$.

对满足条件 $|x|<|x_0|$ 的 $x$,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|=\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n<+\infty,$$

即幂级数(2)绝对收敛.如果对满足条件 $|x|>|x_1|$ 的 $x$,$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛,那么由刚才的结论,$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_1^n$ 绝对收敛,这与假设$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_1^n$ 发散矛盾. □

现在可以证明:

**定理 15.4.2**(Cauchy-Hadamard(阿达马,1865～1963))　对给定的幂级数(2),记

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}},$$

那么:

(1) 当 $R=0$ 时,级数(2)只在 $x=0$ 这一点处收敛;

(2) 当 $R=+\infty$时,级数(2)在整个数轴上都绝对收敛;

(3) 当 $0<R<+\infty$时,级数(2)在区间$(-R,R)$内绝对收敛,在$[-R,R]$之外发散.

**证明**　(1) 因为 $R=0$,对 $x\neq0$,有

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=|x|\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=+\infty.$$

根据定理14.3.2,知$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$发散.为了证明$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散,任取 $x_0\neq0$,不妨设 $x_0>0$.如果$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ 收敛,再取 $x_1$ 满足 $0<x_1<x_0$,由定理15.4.1,知$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx_1^n|$收敛,这就与上面证明的"对任意的 $x\neq0$,$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nx^n|$发散"矛盾.

(2) 当 $R=+\infty$时,有

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=|x|\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0.$$

由定理14.3.2,即知级数(2)在整个数轴上都绝对收敛.

(3) 当 $0<R<+\infty$时,因为

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=\frac{|x|}{R},$$

由定理14.3.2,知级数(2)在$(-R,R)$内绝对收敛.现在$[-R,R]$之外任取一点 $x_0$,则 $|x_0|>R$.如果$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ 收敛,那么对任意满足条件 $|x_0|>x_1>R$ 的 $x_1$,

由定理15.4.1,知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx_1^n|<+\infty$,但

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx_1^n|}=\frac{|x_1|}{R}=\frac{x_1}{R}>1,$$

由定理14.3.2,知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx_1^n|=+\infty$.这个矛盾说明$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$发散. □

由此可见,幂级数(2)的收敛点集是区间$(-R,R)$,$R$称为级数(2)的**收敛半径**,$(-R,R)$称为级数(2)的**收敛区间**.这时幂级数(1)的收敛区间是$(x_0-R,x_0+R)$.定理15.4.2实际上给出了计算$R$的公式.

**例1** 用定理15.4.2,容易算出幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^nx^n$$

的收敛半径分别为1,$+\infty$和0. □

**例2** 计算幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^kx^{2k}$的收敛半径.

**解** 当$n=2k$时,$a_n=2^k$;当$n=2k+1$时,$a_n=0$.于是

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{2^k}=\sqrt{2}.$$

因此$R=1/\sqrt{2}$. □

必须指出,在幂级数的收敛区间$(-R,R)$的两个端点$x=\pm R$处,级数的收敛性没有肯定的结论.下面三个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

的收敛半径都是1,收敛区间是$(-1,1)$.但第一个级数在左端点$x=-1$处条件收敛,在右端点$x=1$处发散;第二个级数在两个端点处都绝对收敛;第三个级数在两个端点处都发散.

设级数(2)的收敛半径为$R$,它在区间$(-R,R)$内确定了一个和函数$S(x)$.为了研究$S(x)$在$(-R,R)$内的性质,首先要知道级数(2)在它的收敛区间内是否一致收敛.一般来说,答案是否定的.例如,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$在它的收敛区间$(-1,1)$内就不一致收敛,但我们有:

**定理15.4.3** 设级数(2)的收敛半径为$R$,则对任意的$r\in(0,R)$,级数(2)在$[-r,r]$上一致收敛.

这时称级数(2)在$(-R,R)$上内闭一致收敛.

**证明** 因为当 $x\in[-r,r]$时,有

$$|a_nx^n|\leqslant|a_n|r^n,$$

而$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$ 收敛,故由 Weierstrass 判别法,知$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在$[-r,r]$上一致收敛. □

幂级数的这一性质保证了它的和函数不仅在收敛区间内是连续的,而且具有任意阶导数.

**定理 15.4.4** 设级数(2)的收敛半径为 $R$,则其和函数 $S(x)$在$(-R,R)$内连续,而且在$(-R,R)$内有任意阶导数:

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}\quad(k=1,2,\cdots).\tag{3}$$

**证明** 任取 $x_0\in(-R,R)$,取 $r$ 使得$|x_0|<r<R$,于是 $x_0\in[-r,r]\subset(-R,R)$. 由定理 15.4.3,知级数(2)在$[-r,r]$上一致收敛,因而 $S(x)$在 $x_0$ 处连续. 由于 $x_0$ 是$(-R,R)$内的任意一点,所以 $S(x)$在$(-R,R)$上连续.

为了证明 $S(x)$在$(-R,R)$内可导,考虑把级数(2)逐项求导后所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.\tag{4}$$

由于

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|},$$

根据定理 15.4.2,知级数(4)的收敛半径也是 $R$,因而级数(4)也在$[-r,r]$上一致收敛. 于是对级数(2)而言,定理 15.3.8 中的三个条件在闭区间$[-r,r]$上都成立,因而

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\tag{5}$$

在$[-r,r]$上成立. 由于 $r$ 可任意地接近$R$,所以级数(5)在$(-R,R)$内成立. 反复运用上面的推理,即知式(3)在$(-R,R)$内成立. □

这条定理所揭示的正是幂级数和多项式的相似之处.

**定理 15.4.5** 设级数(2)的收敛半径为 $R$,$S(x)$是它的和函数,那么对任意的 $x\in(-R,R)$,有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\tag{6}$$

而且式(6)右边幂级数的收敛半径仍为 $R$.

**证明** 不妨设 $x>0$. 由于级数(2)在$[0,x]$上一致收敛,且在$[0,x]$上能逐项积

分，所以有

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (a_n t^n) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

这就是式(6). 再由定理 15.4.2，易知式(6)右边级数的收敛半径也是 $R$. □

利用上面这些定理可以求出一些幂级数的和，还可以把一些初等函数展开为幂级数.

**例 3** 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和.

**解** 易知这个幂级数的收敛半径 $R=1$. 为了求出它的和，对幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1)$$

逐项求导，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x|<1).$$ □

在上式中取 $x$ 的一些特殊值，即可求得一些数项级数的和. 例如，分别取 $x=1/2, 1/3$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

**例 4** 把 $\ln(1+x)$ 和 $\arctan x$ 展开成幂级数.

**解** 当 $x \in (-1,1)$ 时，有

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

从 0 到 $x$ 对上式逐项积分，得

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1<x<1). \end{aligned}$$

再对等式

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

逐项积分，即得 $\arctan x$ 的展开式：

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 < x < 1).$$ □

在收敛区间的两端点处，和函数有如下性质.

**定理 15.4.6**（Abel 第二定理）　设级数(2)的收敛半径为 $R$. 如果在 $x = R$ 处级数(2)收敛，则其和函数 $S(x)$ 在 $x = R$ 处左连续；如果级数(2)在 $x = -R$ 处收敛，则 $S(x)$ 在 $x = -R$ 处右连续.

**证明**　设级数(2)在 $x = R$ 处收敛，我们证明级数(2)必在$[0, R]$上一致收敛. 事实上，把级数(2)写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛，数列 $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$ 对$[0, R]$中的每一个 $x$ 而言是递减的，且一致有界. 根据级数一致收敛的 Abel 判别法，级数(2)在$[0, R]$上一致收敛. 所以 $S(x)$ 在 $x = R$ 处左连续. 同理可证定理的另一半. □

**例 5**　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

**解**　已知当 $x \in (-1, 1)$ 时，有等式

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

因为上式右边的级数在 $x = 1$ 处收敛，故由 Abel 第二定理，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

利用例 4 的另一个展开式

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 < x < 1),$$

可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$ □

再来看一个稍难的例子.

**例 6**　求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+1}$ 的和.

**解**　与例 5 类似，考虑幂级数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+1} x^{3n+1}.$$

易知,它的收敛半径是1.由于它在 $x=1$ 处收敛,故由 Abel 第二定理知,它的和函数 $S(x)$ 在 $x=1$ 处左连续,因而有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3n+1}=\lim_{x\to 1^-} S(x).$$

由于 $S(0)=0, S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\dfrac{1}{1+x^3}$,所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3n+1}=\lim_{x\to 1^-} S(x)=\lim_{x\to 1}\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right). \qquad \square$$

Abel 第二定理的逆定理是否成立?即若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为1(这里设 $R=1$),且 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n=A$ 存在,能否断言 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n=A$?很容易举出使上述结论不成立的例子.例如,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 的收敛半径为1,它在 $(-1,1)$ 内等于 $1/(1+x)$,因而

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{2}$$

存在,但级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 显然是发散的.如果给系数 $a_n$ 加上适当的条件,那么上面的逆定理也能成立.

**定理 15.4.7**(Tauber 定理) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为1,且

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=A$$

存在.如果

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right),$$

那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n=A$.

**证明** 由假定知 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n=0$.若令

$$\delta_n=\sup_{k\geqslant n}\{|k a_k|\},$$

则当 $n\to\infty$ 时,$\delta_n$ 递减趋于0.令

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad (0\leqslant x<1).$$

对任何正整数 $N$,都有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}a_n-A&=\sum_{n=0}^{N}a_n-S(x)+S(x)-A\\&=\sum_{n=1}^{N}a_n(1-x^n)-\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nx^n+(S(x)-A)\\&=I_1(x)+I_2(x)+I_3(x).\end{aligned}\tag{7}$$

对 $x\in[0,1)$,有

$$\begin{aligned}|I_1(x)|&\leqslant(1-x)\sum_{n=1}^{N}|a_n|(1+x+\cdots+x^{n-1})\\&\leqslant(1-x)\sum_{n=1}^{N}n|a_n|\leqslant(1-x)N\delta_1,\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}|I_2(x)|&\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}|na_n|\frac{x^n}{n}\leqslant\frac{\delta_N}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n\\&=\frac{\delta_N}{N}\frac{x^{N+1}}{1-x}\leqslant\frac{\delta_N}{N(1-x)}.\end{aligned}\tag{9}$$

令 $x_N=1-\sqrt{\delta_N}/N$,即 $N(1-x_N)=\sqrt{\delta_N}$.易见当 $N\to\infty$ 时,$x_N\to1$.由式(8)和式(9),可得

$$|I_1(x_N)|\leqslant\delta_0\sqrt{\delta_N},$$

$$|I_2(x_N)|\leqslant\frac{\delta_N}{\sqrt{\delta_N}}=\sqrt{\delta_N},$$

$$I_3(x_N)=S(x_N)-A.$$

由式(7),即得

$$\left|\sum_{n=0}^{N}a_n-A\right|\leqslant(\delta_0+1)\sqrt{\delta_N}+|S(x_N)-A|.\tag{10}$$

令 $N\to\infty$,由式(10),即得 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$. □

另外一个简单的充分条件是 $a_n\geqslant0$.由这个条件即可保证定理的结论成立,证明留作练习.

最后来看两个幂级数如何相乘.设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径均为 $R$,那么当 $|x|<R$ 时,这两个幂级数都绝对收敛,它们的乘积就等于它们的 Cauchy

乘积：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}(a_l x^l)(b_{n-l}x^{n-l})$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l}\right)x^n.$$

这样,我们已经证明了：

**定理 15.4.8** 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径均为$R$,那么当 $x \in (-R, R)$时,有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

其中 $c_n = \sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l}(n = 0,1,2,\cdots)$.

**例 7** 由于当$|x|<1$时,$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$,故若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是1,那么当$|x|<1$时,有

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n,$$

这里 $S_n = \sum_{l=0}^{n} a_l$.类推下去,便有

$$\frac{1}{(1-x)^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n)x^n,$$

等等. □

**例 8** 证明:当 $x\in(-1,1)$时,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

**证明** 由例 7,知

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

再用一次例 7 的结果,即得

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

这就是要证的等式. □

## 练习题 15.4

1. 求下列幂级数的收敛半径，并研究它们在收敛区间端点处的性质：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n(a>0,b>0)$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n x^n$.

2. 求下列广义幂级数的收敛点集：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\mathrm{e}^{-nx}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$.

3. 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$. 证明：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径 $R\geqslant\min(R_1,R_2)$；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_nb_n)x^n$ 的收敛半径 $R\geqslant R_1R_2$；

(3) 举例说明在(1)中 $R>\min(R_1,R_2)$ 和在(2)中 $R>R_1R_2$ 的情形都是可能发生的.

4. 求下列级数在区间 $(-1,1)$ 上的和：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

5. 证明下列等式在区间 $(-1,1)$ 内成立：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n=\frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3!}(n+1)(n+2)(n+3)x^n=\frac{1}{(1-x)^4}$.

6. 设

$$l=\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,\quad L=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R$,证明:

$$l \leqslant R \leqslant L.$$

7. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为1,$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$.如果$a_n \geqslant 0$,证明:$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$.
8. 利用定理15.4.8和定理15.4.6,证明定理14.6.3.

## 问题15.4

1. 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$是一个发散的正项级数.如果$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_0+\cdots+a_n}=0$,证明:级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$R=1$.
2. 求级数$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\cdots$的和.
3. 证明:

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\cdots=\frac{1}{4\sqrt{2}}(\pi+2\ln(\sqrt{2}+1)).$$

4. 证明:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

5. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R$,且$a_n \geqslant 0$.

(1) 证明:$\lim_{x\to R^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_n$;

(2) 由(1),证明:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$.

# 15.5 函数的幂级数展开式

前面我们讨论了由幂级数所确定的和函数的性质;这一节要讨论一个函数在什么条件下能展开成幂级数以及如何展开.

设函数$f$在区间$(x_0-R, x_0+R)$内能展开成幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

根据定理 15.4.4,$f$ 在$(x_0 - R, x_0 + R)$内有任意阶导数,这是 $f$ 能展开成幂级数的必要条件.其次,由于

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k} \quad (k = 1,2,\cdots),$$

令 $x = x_0$,则得

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 0,1,2,\cdots).$$

这就是说,如果 $f$ 能展开为 $x - x_0$ 的幂级数,那么这个幂级数一定是下面的这种形式:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

现在设 $f$ 在 $x = x_0$ 处有任意阶导数,那么由 $f$ 就能作出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

称这个幂级数为 $f$ 在 $x = x_0$ 处的 **Taylor 级数**,记为

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{1}$$

特别地,当 $x_0 = 0$ 时,级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

也称为 $f$ 的 **Maclaurin 级数**.

只要 $f$ 在 $x = x_0$ 处有任意阶导数,就能作出它的 Taylor 级数(1).但这个级数不一定是收敛的,即使收敛,也未必收敛到 $f$ 自己.例如函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{n!}$$

这是一个由函数项级数确定的函数.利用定理 15.3.4,不难证明它在$(-\infty, +\infty)$上有任意阶导数.它在 $x_0 = 0$ 处的 Taylor 级数为

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{2^{2k+1}}}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

这个级数除 $x = 0$ 外是处处发散的.

再如函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在 4.3 节中,我们证明过

$$f^{(n)}(0)=0\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

因而它的 Taylor 级数收敛于 0,而不收敛于 $f$ 自己.

于是产生这样的问题,$f$ 要满足什么条件才能保证它的 Taylor 级数收敛于 $f$ 自己? 即在什么条件下,等式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

成立?

设 $f$ 在$(x_0-R,x_0+R)$上有任意阶导数.根据 Taylor 公式,对$(x_0-R,x_0+R)$内的任一点 $x$,有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$是余项.它有两种表示:Lagrange 余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

Cauchy 余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(x-x_0),$$

其中 $\xi$ 和 $\eta$ 是介于 $x_0$ 和 $x$ 之间的数.因此,$f$ 能在$(x_0-R,x_0+R)$上展开为 Taylor 级数的充分必要条件是,对任意的 $x\in(x_0-R,x_0+R)$,有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

下面的定理给出了一个 $f$ 能在$(x_0-R,x_0+R)$上展开为 Taylor 级数的十分便于应用的充分条件.

**定理 15.5.1** 如果存在常数 $M$,使得对$(x_0-R,x_0+R)$内的所有 $x$ 及一切充分大的正整数 $n$,均有

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M,$$

那么 $f$ 能在$(x_0-R,x_0+R)$上展开为 Taylor 级数.

**证明** 只需证明在上述条件下,有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\quad (x_0-R<x<x_0+R).$$

事实上,利用 Lagrange 余项,可得

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n-1}\right|$$

$$\leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{n!}$ 收敛,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0$,从而得

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x) = 0 \quad (x_0 - R < x < x_0 + R).$$

□

**例 1**　求函数 $e^x$ 的 Maclaurin 展开式.

**解**　因为 $(e^x)^{(n)} = e^x (n=0,1,2,\cdots)$,故其 Maclaurin 级数为

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n.$$

我们证明对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,上式为一个等式.为此,任取正数 $R$,当 $|x|<R$ 时,对一切自然数 $n$,均有

$$|(e^x)^{(n)}| = e^x < e^R.$$

根据定理 15.5.1,等式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \tag{2}$$

在 $(-R,R)$ 上成立.由于 $R$ 是任意的,故式(2)在 $(-\infty,+\infty)$ 上成立.　□

**例 2**　求函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的 Maclaurin 展开式.

**解**　因为

$$(\sin x)^{(n)}\big|_{x=0} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\bigg|_{x=0} = \sin\frac{n\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^k, & n = 2k+1, \end{cases}$$

且

$$|(\sin x)^{(n)}| = \left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1 \quad (-\infty < x < +\infty),$$

所以根据定理 15.5.1,有

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

□

用同样的方法,可得

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

**例 3**　求函数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 的 Maclaurin 展开式,其中 $\alpha$ 是任意的实数.

**解** 4.3 节中的例 5 已经证明,对任何 $x>-1$,有

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^{k}+R_{n}(x),$$

其中

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},\quad \binom{\alpha}{0}=1,$$

$$R_{n}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n}(1+\theta x)^{\alpha-1}x^{n+1},$$

这里 $0<\theta<1$,并且对 $R_n(x)$ 已经得到如下估计:

$$|R_{n}(x)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}(1+|x|)^{\alpha-1}|x|^{n+1}, & \alpha>1,\\ \dfrac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}(1-|x|)^{\alpha-1}|x|^{n+1}, & \alpha<1.\end{cases}$$

由于当 $|x|<1$ 时,级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}<+\infty,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}=0$. 这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}R_{n}(x)=0\quad(|x|<1).$$

从而有展开式

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{k}\quad(|x|<1).\tag{3}$$

等式(3)在 $x=\pm1$ 处是否成立?分下面几种情形来讨论:

(a) $\alpha\leqslant-1$. 这时,

$$\left|\binom{\alpha}{k}\right|=\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)|}{k!}\geqslant\frac{k!}{k!}=1,$$

从而当 $x=\pm1$ 时,式(3)右边的级数发散.

(b) $-1<\alpha<0$. 当 $x=-1$ 时,

$$\begin{aligned}(-1)^{k}\binom{\alpha}{k}&=\frac{-\alpha(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+k-1)}{k!}\\&=\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+k-1)}{k!}\\&=\frac{|\alpha|}{k}\frac{|\alpha|+1}{1}\cdots\frac{|\alpha|+k-1}{k-1}\\&\geqslant\frac{|\alpha|}{k},\end{aligned}$$

从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(-1)^k$ 发散.

当 $x=1$ 时,级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}=1+\alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}+\cdots$$

是一个交错级数.并且由 $\frac{|\alpha-k|}{k+1}\leqslant\frac{|\alpha|+k}{k+1}<1$,得

$$\begin{aligned}\left|\binom{\alpha}{k}\right| &= \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\right| \\ &\geqslant \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\right|\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| \\ &= \left|\binom{\alpha}{k+1}\right|,\end{aligned}$$

故 $\left\{\left|\binom{\alpha}{k}\right|\right\}$ 是一递减数列.再由 14.7 节中的例 7,知

$$\lim_{k\to\infty}\left|\binom{\alpha}{k}\right|=0.$$

从而由 Leibniz 判别法即可断言 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}$ 收敛.

(c) $\alpha>0$. 14.3 节中的例 5 已经用 Raabe 判别法证明了级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{k}\right|<+\infty$.

因而级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k},\quad \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(-1)^k$$

绝对收敛.

综上所述,根据 Abel 第二定理,式(3)成立的范围如下:当 $\alpha\leqslant-1$ 时,式(3)只在 $(-1,1)$ 上成立;当 $-1<\alpha<0$ 时,式(3)在 $(-1,1]$ 上成立;当 $\alpha>0$ 时,式(3)在 $[-1,1]$ 上成立. □

定理 15.5.1 给出了把函数展开为幂级数的方法.除此之外,利用某些函数的已知展开式,通过幂级数的微分、积分以及代数运算也能作出其他一些函数的幂级数展开式. 15.4 节中的例 4 通过幂级数的逐项积分求得了函数 $\ln(1+x)$ 和 $\arctan x$ 的幂级数展开式.下面再看三个这样的例子.

**例 4**　求函数 $\frac{1}{(1-x)(2-x)}$ 的 Maclaurin 展开式.

**解** 易知

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x},$$

而

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (-1<x<1),$$

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (-2<x<2).$$

因此当$-1<x<1$时,有

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$ □

**例 5** 把函数$\frac{\ln(1-x)}{1-x}$展开为 Maclaurin 级数.

**解** 易知

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad (-1\leqslant x<1).$$

由 15.4 节中的例 6,可得

$$\frac{\ln(1-x)}{1-x}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n \quad (-1<x<1).$$ □

**例 6** 把函数 $\ln\frac{1+x}{1-x}$展开为幂级数.

**解** 已知

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad (-1<x\leqslant 1),$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad (-1\leqslant x<1).$$

两式相减即得

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (-1<x<1).$$ □

下面六个初等函数的幂级数展开式以后会经常用到,应该熟练地掌握:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad (-\infty<x<+\infty),$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad (-\infty<x<+\infty),$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leqslant 1),$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1),$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

最后一个展开式的成立范围视 $\alpha$ 的数值而定，详见例 3.

## 练 习 题 15.5

1. 利用已知的初等函数展开式，写出下列函数的幂级数展开式：

(1) $e^{x^2}$；　(2) $\cos^2 x$；

(3) $\dfrac{x^{12}}{1-x}$；　(4) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$；

(5) $(1+x)e^{-x}$.

2. 求下列函数的幂级数展开式：

(1) $(1+x)\ln(1+x)$；　(2) $x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$；

(3) $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$；　(4) $(1+x^2)\arctan x$.

3. 将下列函数展开成幂级数：

(1) $\arcsin x$；　(2) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(3) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

4. 把函数 $f(x)=\ln x$ 按 $\dfrac{x-1}{x+1}$ 的正整数幂展开成幂级数.

5. 把函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ 按 $\dfrac{x}{1+x}$ 的正整数幂展开成幂级数.

## 问 题 15.5

1. 证明：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{n!}$$

在 $x=0$ 处的 Taylor 级数除 $x=0$ 外处处发散.

2. 设 $f$ 及其所有导数在区间$[0,r]$上都是非负的.证明:$f$ 能在$[0,r]$上展开为 Taylor 级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\quad(0\leqslant x<r).$$

3. 求证:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

4. 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}(n=2,3,\cdots)$.证明:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{S_n}{n}=\gamma,$$

式中 $\gamma$ 是 Euler 常数.

## 15.6 用多项式一致逼近连续函数

设 $f$ 是定义在有限闭区间$[a,b]$上的函数.如果对任意的 $\varepsilon>0$,总能找到多项式 $P$,使得对$[a,b]$中所有的 $x$,

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon$$

成立,则称 $f$ 在$[a,b]$上能用多项式**一致逼近**.

什么样的函数能在$[a,b]$上用多项式一致逼近?

如果 $f$ 在$(-R,R)$上能展开成幂级数,那么对任意的$[a,b]\subset(-R,R)$,$f$ 在$[a,b]$上能用多项式一致逼近.但是能展开成幂级数的函数毕竟是范围很窄的一类函数,因为它要求函数有任意阶导数,而且就像在 15.5 节中所看到的,即使这样强的条件还是不充分的.下面我们将看到,$f$ 能在$[a,b]$上用多项式一致逼近的充分必要条件是,$f$ 在$[a,b]$上连续.必要性是明显的,因为如果 $f$ 能用多项式在$[a,b]$上一致逼近,那么对任意的正整数 $n$,存在多项式 $P_n$,使得不等式

$$|f(x)-P_n(x)|<\frac{1}{n}$$

在$[a,b]$上成立.这说明多项式序列$\{P_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $f$,因而 $f$ 在$[a,b]$上连续.Weierstrass 在 1885 年证明 $f$ 连续这个条件也是充分的.这就是:

**定理 15.6.1**(Weierstrass 逼近定理) 闭区间$[a,b]$上的任何连续函数 $f$ 都

能在这个区间上用多项式一致逼近.

为了给出这个定理的证明,我们要引进 $f$ 的 Bernstein(伯恩斯坦,1880～1968)多项式的概念.

记

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \quad (i = 0,1,\cdots,n).$$

不难证明 $B_i^n(x)$有下面三条简单的性质:

(1) 对 $x \in [0,1]$,

$$B_i^n(x) \geqslant 0 \quad (i = 0,1,\cdots,n); \tag{1}$$

(2) 对 $x \in [0,1]$,

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(x) = 1; \tag{2}$$

(3) 设 $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i B_i^n(x)$,那么

$$P'(x) = n \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_i^{n-1}(x). \tag{3}$$

式(1)是显然的.

由二项式定理,即得

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = (x + (1-x))^n = 1.$$

从而式(2) 成立.现在来证明式(3).因为 $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$,所以

$$\begin{aligned}
P'(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{n!}{i!(n-i)!} (ix^{i-1}(1-x)^{n-i} - (n-i)x^i(1-x)^{n-i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1}(1-x)^{n-i} \\
&\quad - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{n!}{i!(n-i-1)!} x^i (1-x)^{n-i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \frac{n!}{i!(n-i-1)!} x^i (1-x)^{n-i-1} \\
&\quad - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{n!}{i!(n-i-1)!} x^i (1-x)^{n-i-1} \\
&= n \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_i^{n-1}(x).
\end{aligned}$$

现在给出 $f$ 的 Bernstein 多项式的定义.

**定义 15.6.1** 设 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$. 称

$$B_n(f;x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)B_i^n(x)$$

为 $f$ 的 $n$ 次 **Bernstein 多项式**.

作为例子,我们给出

$$f(x)=1,\quad f(x)=x,\quad f(x)=x^2$$

这三个函数的 Bernstein 多项式.

由式(2),可得

$$B_n(1;x)=\sum_{i=0}^{n}B_i^n(x)=1. \tag{4}$$

因为 $B_n(x;x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{i}{n}B_i^n(x)$,故由式(3),即得

$$B_n'(x;x)=n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}B_i^{n-1}(x)=1,$$

从而有 $B_n(x;x)=x+c$. 令 $x=0$,即得 $c=0$,因而有

$$B_n(x;x)=x. \tag{5}$$

由于 $B_n(x^2;x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{i^2}{n^2}B_i^n(x)$,由式(3),可得

$$\begin{aligned}B_n'(x^2,x)&=n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2i+1}{n^2}B_i^{n-1}(x)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2i}{n}B_i^{n-1}(x)+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}B_i^{n-1}(x)\\&=2\,\frac{n-1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}B_i^{n-1}(x)+\frac{1}{n}\\&=2\left(1-\frac{1}{n}\right)x+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

于是

$$B_n(x^2;x)=\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{x}{n}+c.$$

令 $x=0$,即得 $c=0$. 因而得

$$B_n(x^2;x)=\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{x}{n}. \tag{6}$$

由式(4)～(6),可得:

**引理 15.6.1**　对 $x\in[0,1]$,有不等式

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 B_k^n(x)\leqslant\frac{n}{4}.$$

**证明**　计算得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 B_k^n(x)\\&\quad=\sum_{k=0}^{n}(k^2-2knx+n^2x^2)B_k^n(x)\\&\quad=n^2\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}B_k^n(x)-2n^2x\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}B_k^n(x)+n^2x^2\sum_{k=0}^{n}B_k^n(x)\\&\quad=n^2B_n(x^2;x)-2n^2xB_n(x;x)+n^2x^2\\&\quad=n^2\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{x}{n}\right)-2n^2x^2+n^2x^2\\&\quad=nx(1-x)\leqslant\frac{n}{4}.\end{aligned}$$

这就是要证明的不等式.　□

**定理 15.6.1 的证明**　证明分为两部分.

(a) 设 $f$ 是$[0,1]$上的连续函数.我们证明 $f$ 的 Bernstein 多项式在$[0,1]$上一致收敛于 $f$.

因为 $f$ 在$[0,1]$上连续,从而一致连续,所以对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $x',x''\in[0,1]$,且满足 $|x'-x''|<\delta$ 时,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2$.由式(2),可得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x)B_k^n(x),$$

因而有

$$\begin{aligned}|B_n(f;x)-f(x)|&\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_k^n(x)\\&=\sum_{k\in E_1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_k^n(x)+\sum_{k\in E_2}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_k^n(x)\\&=S_1+S_2,\end{aligned}\tag{7}$$

这里

$$E_1=\left\{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta\right\},\quad E_2=\left\{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta\right\}.$$

因为 $f$ 在$[0,1]$上连续,所以有界.设 $|f(x)|\leqslant M\ (0\leqslant x\leqslant1)$.于是由引理 15.6.1,得

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k\in E_1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_k^n(x)\leqslant 2M\sum_{k\in E_1}B_k^n(x)\\
&= \frac{2M}{\delta^2}\sum_{k\in E_1}\delta^2 B_k^n(x)\leqslant\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k\in E_1}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 B_k^n(x)\\
&= \frac{2M}{\delta^2 n^2}\sum_{k\in E_1}(k-nx)^2 B_k^n(x)\\
&\leqslant\frac{2M}{\delta^2 n^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 B_k^n(x)<\frac{M}{2n\delta^2}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

对 $S_2$，利用 $f$ 在$[0,1]$上的一致连续性，可得

$$S_2=\sum_{k\in E_2}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_k^n(x)<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

由式(7)～(9)，即得

$$|B_n(f;x)-f(x)|\leqslant\frac{M}{2n\delta^2}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $n>[M/(\varepsilon\delta^2)]$，则

$$|B_n(f,x)-f(x)|<\varepsilon$$

对任意的 $x\in[0,1]$成立. 这就证明了 $B_n(f;x)$在$[0,1]$上一致收敛于 $f(x)$.

(b) 现设 $f$ 在$[a,b]$上连续. 作变换

$$x=a+t(b-a),$$

记 $f(a+t(b-a))=g(t)$，那么 $g$ 是$[0,1]$上的连续函数. 由上面证明的(a)，对任意的 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(t)$，使得

$$|g(t)-P(t)|<\varepsilon$$

在$[0,1]$上成立. 把 $t=\dfrac{x-a}{b-a}$代入，即得

$$\left|f(x)-P\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right|<\varepsilon$$

在$[a,b]$上成立. 这就证明了定理 15.6.1. □

必须指出，如果把有限闭区间$[a,b]$改成开区间或无穷区间，定理就不再成立. 例如，$f(x)=1/x$ 是$(0,1]$上的连续函数，但它在 $x=0$ 的附近是无界的，因此不可能用多项式来一致逼近. 同样，$f(x)=1/x$ 也在$[1,+\infty)$上连续且有界，而任一多项式在$[1,+\infty)$上必定无界，故也不能用来一致逼近 $f(x)$.

上面给出的 Weierstrass 定理的证明，在数学上叫做**"构造性证明"**. 它不仅证明了逼近 $f$ 的多项式 $P$ 是存在的，而且给出了 $P$ 的具体构造，这就是 $f$ 的 Bernstein 多项式序列 $B_n(f;x)$. 进一步的问题自然是逼近的速度如何. 如果逼近的速

度很快,那么用 $B_n(f;x)$代替 $f(x)$在数值计算上将取得很大的效益.遗憾的是实际情况并非如此.例如,对 $f(x)=x^2$,由式(6),可得

$$B_n(x^2;x)-x^2=\frac{x(1-x)}{n}\leqslant\frac{1}{4n}.$$

这就是说,用 $x^2$ 的 Bernstein 多项式来逼近 $x^2$ 时,逼近的阶是 $1/n$.这是非常慢的速度.由此足以说明,Bernstein 多项式在数值计算的应用上是没有前途的.P.J. Davis 在 20 世纪 60 年代中期出版的《插值与逼近》一书中谈到这一点时曾说,或许当人们发现逼近多项式在大范围内的性质比逼近的速度更重要时,Bernstein 多项式才能得到有效的应用.事实证明,Davis 的看法非常正确.差不多在他发表这一看法的同时,Bezier 已经把 Bernstein 多项式的“保形性质”(见练习题 15.6 中的第 1 题)用到了自由型曲线和曲面的设计中了.

## 练 习 题 15.6

1. 证明 Bernstein 多项式的保形性质:
   (1) $B_n(f;0)=f(0)$,$B_n(f;1)=f(1)$;
   (2) 如果 $f\geqslant0$,那么 $B_n(f)\geqslant0$,如果 $f\leqslant0$,那么 $B_n(f)\leqslant0$;
   (3) 如果 $f$ 递增(减),那么 $B_n(f)$也递增(减);
   (4) 如果 $f$ 是凸函数,那么 $B_n(f)$也是凸函数.
2. 设 $f\in C[a,b]$.
   (1) 如果
   $$\int_a^b f(x)x^n\mathrm{d}x=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$
   那么 $f(x)\equiv0$;
   (2) 如果存在正整数 $N$,使得
   $$\int_a^b f(x)x^n\mathrm{d}x=0\quad(n\geqslant N),$$
   那么 $f(x)\equiv0$.
3. 设 $f\in C[0,1]$.如果存在正整数 $k$,使得
   $$\int_0^1 f(x)x^{kn}\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots),$$
   证明:$f(x)\equiv0$.
4. 设 $f\in C[-1,1]$.证明:
   (1) 如果
   $$\int_{-1}^1 x^{2n+1}f(x)\mathrm{d}x=0\quad(n=0,1,\cdots),$$

那么 $f$ 是偶函数；

(2) 如果

$$\int_{-1}^{1} x^{2n} f(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (n = 0,1,\cdots),$$

那么 $f$ 是奇函数.

5. 证明：若 $f$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上能用多项式一致逼近，那么 $f$ 必为一多项式.
6. 设 $f\in C[1,+\infty]$，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ 存在、有限. 证明：对任意的 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(x)$，使得 $|f(x)-P(1/x)|<\varepsilon(1\leqslant x<+\infty)$.

## 问题 15.6

1. 按照下列步骤给出 Weierstrass 逼近定理的另一证明：

(1) 设 $c_n = \left(\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n \mathrm{d}x\right)^{-1}$，证明 $c_n<\sqrt{n}$.

(2) 设 $f$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，并且 $f(0)=f(1)=0$. 当 $x\notin[0,1]$ 时，定义 $f(x)=0$，记 $Q_n(x)=c_n(1-x^2)^n$. 证明：

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\mathrm{d}t \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

是一个多项式，而且

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

在 $[0,1]$ 上一致地成立.

(3) 当 $f(0)=f(1)=0$ 的条件不成立时，证明 Weierstrass 逼近定理.

2. 设 $f$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数. 证明：

$$\lim_{n\to\infty} B'_n(f;x) = f'(x)$$

在 $[0,1]$ 上一致地成立.

3. 设 $f\in C[a,b]$. 试证明：存在递增的多项式序列

$$P_1(x)\leqslant P_2(x)\leqslant\cdots\leqslant P_n(x)\leqslant P_{n+1}(x)\leqslant\cdots \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

使得 $\{P_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

# 15.7 幂级数在组合数学中的应用

幂级数理论在组合数学中的应用是通过母函数这一概念来实现的.

**定义 15.7.1**　设$\{a_n\}$是一个给定的数列.称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

为$\{a_n\}$的**母函数**或**生成函数**.

数列和它的母函数之间是一一对应的.引进母函数概念后,有些与数列有关的问题可以通过它的母函数来解决.

15.5 节中的例 3 已经得到了函数$(1+x)^\alpha$的幂级数展开式:对任意的实数$\alpha$,有

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (|x| < 1). \tag{1}$$

这说明函数$(1+x)^\alpha$是数列

$$\binom{\alpha}{0}, \binom{\alpha}{1}, \cdots, \binom{\alpha}{n}, \cdots$$

的母函数.

根据这一事实,便可推出若干有趣的组合恒等式.

**例 1**　设$\alpha,\beta$是任意的实数.证明:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}. \tag{2}$$

**证明**　因为数列$\left\{\binom{\alpha}{k}\right\}$,$\left\{\binom{\beta}{k}\right\}$的母函数分别为$(1+x)^\alpha$与$(1+x)^\beta$,所以

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha+\beta} &= (1+x)^\alpha (1+x)^\beta \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} x^k\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}\right) x^n,\end{aligned}$$

这里我们已经应用了定理 15.5.1.由此可见,一方面数列$\left\{\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}\right\}$的母函数是$(1+x)^{\alpha+\beta}$;但另一方面,$\left\{\binom{\alpha+\beta}{n}\right\}$的母函数也是$(1+x)^{\alpha+\beta}$.这两个数列应该是相同的.这样就得到了等式(2).　□

若在上面的等式中取$\alpha=\beta=n$,则可得等式

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

**例 2** 设 $p,q,n$ 都是非负整数. 证明:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{p}\binom{q+n-k}{q}=\binom{p+q+n+1}{p+q+1}. \tag{3}$$

**证明** 由式(1),得

$$(1+x)^{-p-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-p-1}{n}x^{n}. \tag{4}$$

因为

$$\binom{-p-1}{n}=(-1)^{n}\frac{(p+1)\cdots(p+n)}{n!}=(-1)^{n}\binom{p+n}{p},$$

故由式(4),可得

$$(1-x)^{-p-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p+n}{p}x^{n}.$$

同理,可得

$$(1-x)^{-q-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{q+n}{q}x^{n}.$$

因此

$$(1-x)^{-(p+q+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{p}\binom{q+n-k}{q}\right)x^{n}.$$

这说明数列$\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{p}\binom{q+n-k}{q}\right\}$的母函数是$(1-x)^{-(p+q+2)}$,但它同时又是数列$\left\{\binom{p+q+n+1}{p+q+1}\right\}$的母函数,因而式(3) 成立. □

母函数方法还是求解线性递推数列一般表达式的有力工具.

**例 3** 设数列$\{a_n\}$满足线性递推关系

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\quad(n=2,3,\cdots).$$

已知初始值 $a_0=1,a_1=1$,求$\{a_n\}$的一般表达式.

**解** 设数列$\{a_n\}$的母函数是 $f(x)$. 我们有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n,$$

$$-xf(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=-x-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n,$$

$$-x^2f(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n.$$

把以上三个等式加起来，得

$$(1-x-x^2)f(x)=1+\sum_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1}-a_{n-2})x^n=1.$$

从而得$\{a_n\}$的母函数

$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}.$$

为了求出$\{a_n\}$的一般表达式，只要把 $f(x)$展开为幂级数就行了．先把 $f(x)$分解成部分分式：

$$f(x)=\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{x-r_1}-\frac{1}{x-r_2}\right),$$

其中 $r_1,r_2$ 是方程 $1-x-x^2=0$ 的两个根：

$$r_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad r_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

由于

$$\frac{1}{x-r_1}=-\frac{1}{r_1\left(1-\dfrac{x}{r_1}\right)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_1^{n+1}}x^n,$$

$$\frac{1}{x-r_2}=-\frac{1}{r_2\left(1-\dfrac{x}{r_2}\right)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_2^{n+1}}x^n,$$

所以

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2^{n+1}}-\frac{1}{r_1^{n+1}}\right)\right)x^n.$$

于是

$$a_n=\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2^{n+1}}-\frac{1}{r_1^{n+1}}\right)=\frac{1}{(r_1r_2)^{n+1}}\frac{r_1^{n+1}-r_2^{n+1}}{r_2-r_1}.$$

又因为 $r_1r_2=-1, r_2-r_1=-\sqrt{5}$，且

$$\begin{aligned}r_1^{n+1}-r_2^{n+1}&=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\\&=(-1)^{n+2}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right),\end{aligned}$$

故有

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\quad(n=0,1,2,\cdots).\tag{5}$$

这就是要求的$\{a_n\}$的一般表达式. □

这个数列通常称为 **Fibonacci**(斐波那契,1170～1250)**数列**. 这个表达式如果不是通过现在的方法计算出来是很难想象的:一串正整数通过一个包含无理数的式子表示出来!

在实际计算时,把式(5)改写为

$$a_n + (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

因为$(\sqrt{5}-1)/2$是一个小于1的正数,而$a_n$是正整数,故得

$$a_n = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], & \text{当 } n \text{ 是奇数时}, \\ \left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]+1, & \text{当 } n \text{ 是偶数时}. \end{cases}$$

一般来说,如果数列$\{a_n\}$满足$k$阶线性递推关系

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} \quad (c_k \neq 0, n = k, k+1, \cdots),$$

且$a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$这$k$个初始值已知,那么用例3的方法能求得$\{a_n\}$的一般表达式. 但若$\{a_n\}$满足非线性的递推关系,那么只在一些特殊的情况下才能求得$\{a_n\}$的一般表达式. 下面就是一个这样的例子.

**例4** 用$n-3$条在内部不相交的对角线,把一个凸$n$边形分成$n-2$个三角形. 问一共有多少种不同的方法?

**解** 设对凸$n+1$边形有$a_n$种不同的分法,我们设法来求数列$\{a_n\}$的母函数. 显然,当$n=0$或$n=1$时问题没有意义,我们规定$a_0=0, a_1=1$. 当$n=2$时,$n+1$边形是个三角形,它只有一种分法,就是它自己,因此$a_2=1$. 现设$n \geqslant 3$. 我们在凸$n+1$边形$T$中先任意取定一条边,例如图15.4中的$AB$,另取一点$C$. 设$\triangle ABC$左边的图形$T_1$是一个凸$k+1$边形,那么$\triangle ABC$右边的图形$T_2$必是一个凸$n-k+1$边形. 根据假定,凸$k+1$边形$T_1$有$a_k$种不同的分法,凸$n-k+1$边形$T_2$有$a_{n-k}$种不同的分法,$T_1, T_2$的每一种分法就给出整个$n+1$边形$T$的一种分法. 因为$T_1$有$a_k$种分法,$T_2$有$a_{n-k}$种分法,故$T$有$a_ka_{n-k}$种分法,这些分法是对固定的$C$点而言的. 现让$C$点取遍$A, B$之外的所有点,那么共有

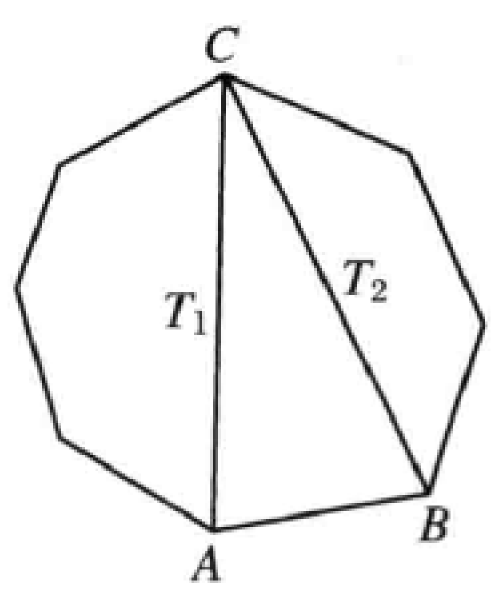


图 15.4

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1$$

种不同的分法.因而

$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1 \quad (n \geqslant 3).$$

这就是$\{a_n\}$满足的递推关系.这个关系与例 3 的递推关系是根本不同的,这是非线性的,但我们仍可用母函数的方法求其解.设数列$\{a_n\}$的母函数是 $f(x)$,即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_1 = 1, a_0 = 0).$$

于是根据幂级数的乘法,得

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\Big)x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\Big)x^n = \sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}\Big)x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = f(x) - x. \end{aligned}$$

这就是说,$f(x)$满足一个二次方程

$$f^2(x) - f(x) + x = 0.$$

有两个函数满足上面的方程,它们是

$$f_1(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}, \quad f_2(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

由于 $f_1(0)=1, f_2(0)=0$,而我们要找的 $f$ 满足

$$f(0) = a_0 = 0,$$

所以

$$f(x) = f_2(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

把它展开成幂级数,就能得到 $a_n$ 的表达式.由于

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{n} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!\,n!} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{1}{n2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}, \end{aligned}$$

以及二项展开式

$$\begin{aligned}(1-4x)^{1/2} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n \\ &= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^{2n-1}}4^n\binom{2n-2}{n-1}x^n \\ &= 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n,\end{aligned}$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{1/2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n.$$

因而

$$a_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$ □

## 练 习 题 15.7

1. 证明：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{k+n-1}{n-1}=\binom{m+n}{n}.$$

2. 证明：$\left\{\binom{2n}{n}\right\}$的母函数是$(1-4x)^{-1/2}$.

3. 证明：$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=2^{2n}$.

4. 证明：$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=n2^{2n-1}$.（提示：从数列$\left\{\binom{2n}{n}\right\}$的母函数去找数列$\left\{n\binom{2n}{n}\right\}$的母函数.）

5. 证明：$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\binom{m}{k}=m\binom{n+m-1}{n-1}$.

6. 求满足下列递推关系和初始条件的数列$\{a_n\}$：

(1) $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}, a_0=1, a_1=-2$;

(2) $a_n=-a_{n-1}+16a_{n-2}-20a_{n-3}, a_0=0, a_1=1, a_2=-1$;

(3) $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+2^{n-2}, a_0=a_1=1$.

## 问题 15.7

1. 证明：$\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{1-2k}\binom{2k}{k}2^{2n-2k} = \binom{2n}{n}$.

2. 计算$\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}\binom{n-k}{k}$.

3. 设 $\alpha$ 是一个实数. 计算$\sum\limits_{k=0}^{[1/2]}\binom{n-k}{k}\alpha^k$.

4. 利用第 3 题的结果，证明：

   (1) $\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}2^k\binom{n-k}{k} = \frac{1}{3}(2^{n+1}+(-1)^n)$；

   (2) $\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n-k}{k} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{n+1}{3}\pi$.

5. 证明：

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{k}\right)\left(\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}+\cdots+\binom{n}{n}\right) = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}.$$

# 15.8　从两个著名的例子谈起

作为函数项级数理论的应用，我们介绍两个著名的例子. 这两个例子在澄清一些模糊的认识方面起过重要的作用.

### 15.8.1　处处连续、处处不可微的函数

在第 14 章的引言中，我们已经指出，第一个具有这种性质的函数是 1875 年由 Weierstrass 作出的. 下面介绍的这个函数是 1930 年由 van der Waerden 所构造的，在想法上更为直观.

在$[-1/2,1/2]$这一区间上，以它为斜边，向横轴的上方作一等腰直角三角形，它的两条直角边确定了$[-1/2,1/2]$上的一个连续函数. 然后把这个函数在整个实轴上进行周期为 1 的周期延拓，所成的函数记为 $u_0(x)$. 显然，$u_0(x)$是一个分段

线性的、以 1 为周期的连续函数. 它在一列长度为 1/2 的区间上是线性的,我们称这些区间为 $u_0(x)$ 的**"线性区间"**. 在线性区间的内部, $u_0(x)$ 是可微的,并且 $u_0'(x)=1$ 或 $-1$. 另外,对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$,有 $0\leqslant u_0(x)\leqslant 1/2$. 所有这些性质在图 15.5 上都是一目了然的. 现在来构造函数 $u_1(x)$:把 $y=u_0(x)$ 的图像与横轴围成的每一个等腰直角三角形的斜边四等分,接着在每一小份上向 $x$ 轴上方作一个等腰直角三角形,所有这种直角三角形的直角边组成一条连续的折线,它定义一个函数 $u_1(x)$. 我们把 $u_1(x)$ 的图像与 $u_0(x)$ 的图像都画在图 15.5 中.

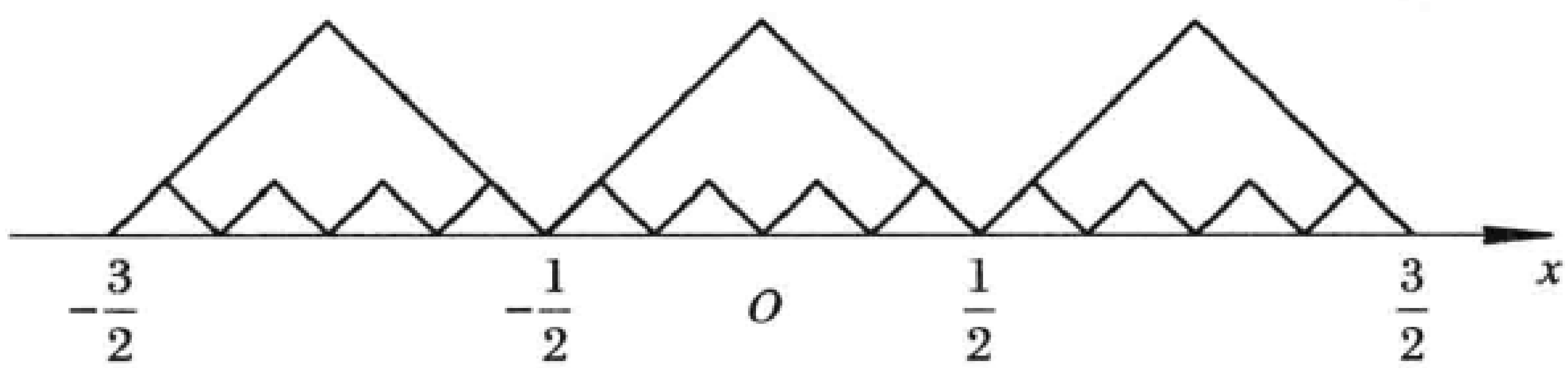



**图 15.5**

由图 15.5 可见, $u_1(x)$ 是以 1/4 为周期的周期函数; $u_1(x)$ 的最大值是 $1/2\times1/4$,因此它满足 $0\leqslant u_1(x)\leqslant 1/2\times1/4$; $u_1(x)$ 的线性区间的长度是 $1/2\times1/4$,且每一线性区间完全含在 $u_0(x)$ 的某一线性区间之内;在 $u_1(x)$ 的线性区间的内点上, $u_1'(x)=1$ 或 $-1$.

采用上述"一分为四"的办法,可以依次定义函数 $u_2(x), u_3(x),\cdots$. 也就是说,由 $u_{n-1}(x)$ 构造出 $u_n(x)$ 的方式与由 $u_0(x)$ 构造出 $u_1(x)$ 的方式完全一样. 因此,由几何作图法立即得知:

(a) $u_n(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期函数,它的周期是 $1/4^n$,这里 $n=0,1,2,\cdots$;

(b) $u_n(x)$ 满足不等式: $0\leqslant u_n(x)\leqslant 1/2\cdot 1/4^n\ (-\infty<x<+\infty)$;

(c) $u_n(x)$ 的线性区间的长度为 $1/2\cdot1/4^n$,且每一线性区间完全在 $u_{n-1}(x)$ 的某个线性区间之内;

(d) 在 $u_n(x)$ 的线性区间的内点上, $u_n'(x)=1$ 或 $-1$.

把上面这些函数

$$u_0(x), u_1(x), \cdots, u_n(x), \cdots$$

叠加起来,考虑由它们构成的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots.$$

由性质(b),知

$$0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^n} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} < +\infty$. 故由 Weierstrass 判别法知，上面的级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛，因而它的和函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

是实数轴上的连续函数. 这就是 van der Waerden 所构造的函数.

下面证明 $f$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处不可微. 任取 $x \in (-\infty, +\infty)$，我们证明 $f'(x)$ 不存在. 这只需找到一个数列 $\{x_n\}$，使得 $x_n \to x\ (n \to \infty)$，但

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$$

不存在.

对给定的 $x$，选取 $x_n$，使得 $x$ 与 $x_n$ 同属于 $u_n(x)$ 的某一个线性区间，且有

$$|x - x_n| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{4^{n+1}}. \tag{1}$$

这总是办得到的，因为 $1/4^{n+1}$ 是 $u_n(x)$ 的线性区间长度的一半（见性质(c)）. 由此可见，当 $n \to \infty$ 时，$x_n \to x$. 我们证明，对这样选定的 $x_n$，有下面的等式：

$$\frac{u_k(x_n) - u_k(x)}{x_n - x} = \begin{cases} \pm 1, & k = 0, 1, \cdots, n, \\ 0, & k = n+1, n+2, \cdots. \end{cases} \tag{2}$$

事实上，由于 $x_n$ 与 $x$ 同在 $u_n(x)$ 的某一线性区间内，由性质(c)，$x_n$ 与 $x$ 也同在 $u_{n-1}(x)$ 的某一线性区间内. 反复利用性质(c)，即可推出 $x_n$ 与 $x$ 同在 $u_{n-2}(x)$，$u_{n-3}(x), \cdots, u_1(x), u_0(x)$ 的线性区间内. 根据性质(d)，得

$$\frac{u_k(x_n) - u_k(x)}{x_n - x} = \pm 1$$

对 $k = 0, 1, \cdots, n$ 均成立. 这就是式(2)的第一个等式. 再注意到 $1/4^{n+1}$ 是 $u_{n+1}(x)$ 的周期，故由式(1)，知

$$u_{n+1}(x_n) = u_{n+1}(x).$$

由于 $1/4^{n+1}$ 也是 $u_{n+2}(x), u_{n+3}(x), \cdots$ 的周期，所以

$$u_k(x_n) = u_k(x)$$

对 $k = n+1, n+2, \cdots$ 都成立. 这样就得到式(2)的第二个等式. 从式(2)，可得

$$\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \frac{1}{x_n - x} \sum_{k=0}^{\infty} (u_k(x_n) - u_k(x))$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k(x_n) - u_k(x)}{x_n - x}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \pm 1. \tag{3}$$

当 $n$ 取不同的值时,式(3)右边和式中 $\pm 1$ 的分布是不一样的,因而式(3)的右边并不是某个由 1 和 $-1$ 构成的级数的部分和,但若注意到

$$\sum_{k=0}^{n} \pm 1 = \begin{cases} \text{偶数}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}, \\ \text{奇数}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}, \end{cases}$$

则立刻可以断言:当 $n \to \infty$ 时,式(3)的极限不存在.这就证明了 $f$ 在 $x$ 点处不可微.由于 $x$ 是任取的,所以 $f$ 在整个数轴上处处不可微.

## 15.8.2 填满正方形的连续曲线

1890 年,Peano 构造出一条连续曲线,它把整个正方形填满了.这一事实乍听起来,就像处处连续、处处不可微的函数那样令人不可思议.用我们熟知的那些初等函数是构造不出这种曲线的,还是要依靠无穷级数来做.下面介绍的例子是 Schoenberg 于 1938 年提出的.

记 $I = [0,1]$.我们要构造一条连续曲线

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t \in I),$$

当 $t$ 取遍区间$[0,1]$时,$(x(t), y(t))$连续地走遍正方形 $I \times I$ 中的每一点.为此,在 $I$ 上定义函数 $\varphi$ 如下:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{1}{3}\right), \\ 3t - 1, & t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\ 1, & t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases} \tag{4}$$

然后再把 $\varphi$ 扩充为整个数轴上周期为 2 的偶函数(图 15.6),即让 $\varphi$ 满足

$$\varphi(t) = \varphi(-t), \quad \varphi(t+2) = \varphi(t) \quad (-\infty < t < +\infty).$$

现在令

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2n-2} t)}{2^n}, \\ y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2n-1} t)}{2^n} \end{cases} \quad (t \in I). \tag{5}$$

这就是能填满正方形 $I\times I$ 的连续曲线.

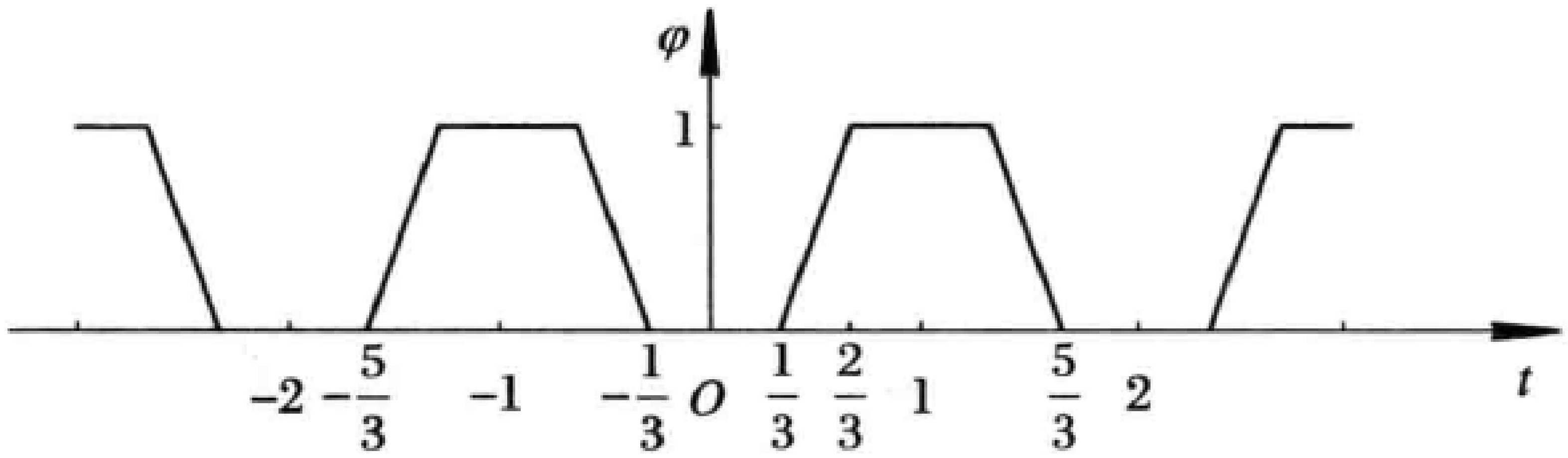



图 15.6

由于 $0\leqslant\varphi(t)\leqslant 1$,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 是上面两个级数的收敛的优级数,因而 $x(t)$, $y(t)$ 都是 $I$ 上的连续函数,所以式(5) 是一条连续曲线. 为了证明它能填满正方形 $I\times I$,只要能证明对任取的 $(a,b)\in I\times I$,一定存在 $t_0\in I$,使得

$$x(t_0)=a,\quad y(t_0)=b. \tag{6}$$

为此,把 $a,b$ 用二进制小数表示为

$$a=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n},\quad b=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^n},$$

这里 $a_n,b_n$ 都只取 0,1 中的某一个值. 把 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 交错排列为

$$a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n,\cdots,$$

并重新记为

$$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\cdots,\eta_{2n-1},\eta_{2n},\cdots,$$

其中 $\eta_{2n-1}=a_n$, $\eta_{2n}=b_n(n=1,2,\cdots)$. 定义

$$t_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\eta_n}{3^n}.$$

由于

$$0\leqslant t_0\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1,$$

所以 $t_0\in I$. 我们证明 $t_0$ 满足条件式(6). 为此,先证明

$$\varphi(3^k t_0)=\eta_{k+1}\quad(k=0,1,2,\cdots). \tag{7}$$

分 $k=0$ 和 $k\geqslant 1$ 两种情形来证明.

当 $k=0$ 时,我们要证明 $\varphi(t_0)=\eta_1$. 先设 $\eta_1=0$,那么

$$t_0=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\eta_n}{3^n}\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{1}{3},$$

即 $0\leqslant t_0\leqslant 1/3$,所以 $\varphi(t_0)=0=\eta_1$;如果 $\eta_1=1$,那么

$$t_0 = \frac{2}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\eta_n}{3^n} \leqslant \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

即 $2/3 \leqslant t_0 \leqslant 1$,所以 $\varphi(t_0) = 1 = \eta_1$.

当 $k \geqslant 1$ 时,有

$$3^k t_0 = 2\sum_{n=1}^{k} 3^{k-n}\eta_n + \frac{2}{3}\eta_{k+1} + 2\sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{\eta_n}{3^{n-k}}.$$

容易看出上式右边中的第一个和式是 2 的整数倍,记为 $2m$.若把第三个和式记为 $\alpha_k$,那么

$$0 \leqslant \alpha_k \leqslant 2\sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{1}{3^{n-k}} = \frac{1}{3}.$$

这样便有

$$3^k t_0 = 2m + \frac{2}{3}\eta_{k+1} + \alpha_k.$$

由于 $\varphi$ 是以 2 为周期的周期函数,所以

$$\varphi(3^k t_0) = \varphi\left(\frac{2}{3}\eta_{k+1} + \alpha_k\right).$$

当 $\eta_{k+1} = 0$ 时,因为 $0 \leqslant \alpha_k \leqslant 1/3$,所以

$$\varphi(3^k t_0) = \varphi(\alpha_k) = 0 = \eta_{k+1}.$$

当 $\eta_{k+1} = 1$ 时,因为$\frac{2}{3} \leqslant \frac{2}{3}\eta_{k+1} + \alpha_k \leqslant 1$,所以

$$\varphi(3^k t_0) = \varphi\left(\frac{2}{3} + \alpha_k\right) = 1 = \eta_{k+1}.$$

因而式(7)成立.现在有

$$x(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2n-2}t_0)}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_{2n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = a,$$

$$y(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2n-1}t_0)}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_{2n}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} = b.$$

这就证明了连续曲线(5)的确填满了正方形 $\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{I}$.

不难看出,利用上面的方法,我们还能构造出填满整个立方体 $\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{I}$ 的空间连续曲线.请读者自己证明,空间连续曲线

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(3^{3n-3}t)}{2^n}, \\ y(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(3^{3n-2}t)}{2^n}, \quad (t \in \boldsymbol{I}) \\ z(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(3^{3n-1}t)}{2^n} \end{cases}$$

便能填满整个立方体 $I\times I\times I$.

上述两个例子的魅力不仅在于它们揭示了两件令人惊异的事实,还在于它们是近二十几年来正在蓬勃兴起并已很有应用前景的一门新兴学科**"分形几何"**中所谓**"分形集"**的典型例子.

很长时间以来,人们只重视那些可以用经典微积分进行研究的函数类,那些不够光滑和不够规则的函数被认为是病态的、不值得研究的.像上面那种处处连续而处处不可微的函数、那种能填满正方形的连续曲线,它们的意义仅仅在于这种函数或这种曲线是存在的.既然是处处不可微的,微分学的方法对它们当然就无能为力了.

近年来,这种态度开始发生了变化.人们已经意识到,不光滑、不规则的几何图形能更好地反映自然界的许多现象(如粒子的布朗运动、流体的湍流、奇形怪状的海岸线、高度无规则的材料裂纹、云彩的边界、肿瘤的边界等等),而规则的、光滑化的图形则是理想化的结果,从而有必要对那些不规则的几何图形进行详细的数学描述和研究.**"分形几何"**恰好为研究这种不规则集提供了一种有力的工具.

1982 年,分形几何的奠基人 Mandelbrot(芒德布罗,1924～)发表了他的专著《大自然的分形几何》,这标志着分形几何迈进了现代新兴学科之林.

分形几何的研究对象是分形集(或简称分形).那么,什么是分形呢?这是一个至今仍没有明确定义的概念.最初,Mandelbrot 把那些 Hausdorff(豪斯多夫,1868～1942)维数(这里不深究它的定义)不是整数的集合称为分形.按这个定义,上面那条填满正方形的曲线就要被排除在分形之外,后来 Mandelbrot 又修改了原来的定义,把分形定义为那些局部和整体按某种方式相似的集合,这是目前被普遍接受的说法.说得更明确一些,一个分形集大体有下列这些特征:

(a) 它通常有某种自相似的结构,这种自相似可以是近似的或者是统计的;

(b) 它通常有错综复杂的细致的构造;

(c) 它的几何性质难以用经典的数学语言来描述,它既不是满足若干简单条件的点的轨迹,也不是任何简单方程或方程组的解集;

(d) 虽说它的整体甚至它的局部结构非常复杂,但它却是用简单明了的方式(通常是用迭代)所确定的.

回头来看看前面讨论过的处处连续、处处不可微的函数.从几何作图来看,从 $u_0$ 到 $u_1$、从 $u_1$ 到 $u_2$……从 $u_{n-1}$到 $u_n$……是一次又一次地使用同样的办法而做的,这就是**"迭代"**;然后把这一系列函数叠加起来,就确定出了我们需要的函数 $f$.应当说,它的生成是简单的、明确的、通过迭代来完成的.但是 $y=f(x)$的图像,甚至在任何一点的一个充分小的邻域内都是非常复杂的.即使我们取很大的 $n$ 作出

$$y = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x)$$

的图像作为它的近似，但由于这条曲线仍只在可数个点上不可微，因此与处处不可微的 $y=f(x)$ 的图像有着天壤之别．所以 $y=f(x)$ 的图像复杂得难以使人去构想．难怪在 Weierstrass 的例子出现以前，人们总以为处处连续、处处不可微的函数是不存在的！填满正方形的连续曲线也有类似的特点．

从我们举的两个例子来看，它们都是 19 世纪的产物，却一直没有引起足够的重视．Mandelbrot 在《大自然的分形几何》一书中谈到这一现象时说："我赞扬这些早年的数学家，因为他们早就为我提供了这样的结构，使我能把它们串联在一起进行思考，从而发现其宝贵的价值；同时，我也责备他们，因为他们虽然构造出了许多精彩的反例，却没有发现它们之间的内在联系，反而像对待不受欢迎的畸形怪胎那样，认为那是不正常的事情．这样一来，真正深刻的内涵反而被完全忽视了．" Mandelbrot 的贡献正在于找到了这些"反例"的内在联系，使它们成了分形几何中的主角．

由于分形现象广泛地存在于自然界和人们的社会活动中，各方学者都关注着这一新兴学科的发展和应用．从已发表的论文来看，它的应用面遍及哲学、数学、物理学、化学、冶金学、材料科学、计算机科学、心理学、生物学、经贸和管理科学等各个方面．

分形几何作为一门学科，从提出到现在刚刚 30 年的时间，但在广大科学工作者的共同努力下，无论在理论上还是应用上都已取得了巨大的进展，足见这一学科的旺盛的生命力．我们在这里通过两个例子作此引论式的介绍，只是希望引起读者对这一新兴学科的注意，至于它的研究内容与方法，不属于本课程的范围，有兴趣的读者可参阅 K. J. Falconer 著的《分形几何——数学基础及其应用》一书．

## 练 习 题 15.8

证明：空间连续曲线

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(3^{3n-3}t)}{2^n}, \\ y(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(3^{3n-2}t)}{2^n}, \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \\ z(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(3^{3n-1}t)}{2^n} \end{cases}$$

能填满整个立方体 $[0,1]^3$，其中 $\varphi$ 见本节的式(4)．

# 第16章　反常积分

在6.7节中,我们介绍过两种反常积分——无穷积分和瑕积分,但对如何判断这两种积分的敛散性,没有作进一步的讨论.学过无穷级数之后,再来学习反常积分的收敛判别法,就会发现两者在许多方面基本上是一样的.本章的目的是让读者学会判断反常积分敛散的方法,为讨论含参变量的反常积分作好准备.

## 16.1　非负函数无穷积分的收敛判别法

在6.7节中定义过,无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛,是指$f$在任意有限区间$[a,A]$上可积,并且

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

有有限的极限.如果记

$$F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x,$$

那么$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛,是指$\lim\limits_{A\to+\infty}F(A)$有有限的极限.这里$F(A)$就相当于无穷级数中的部分和.

在下面的讨论中,我们总假定$f$在任意有限区间$[a,A]$$(A>a)$上可积,不再一一说明.

设$f\geqslant 0$,则积分$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$是上限$A$的增函数(这相当于正项级数中的部分

和)，因而 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 存在的充分必要条件是$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 对 $A$ 而言有界. 这样我们就得到：

**定理 16.1.1** 若 $f$ 是$[a,+\infty)$上的非负函数，则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

收敛的充分必要条件是$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 在$[a,+\infty)$上有界.

根据这个定理，就能得到类似于正项级数中的比较判别法.

**定理 16.1.2** 设对充分大的 $x$，函数 $f$ 和 $g$ 满足不等式

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x).$$

那么：

(1) 若$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明和级数中的比较判别法一样.

设 $a>0$，则当 $p>1$ 时，积分$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛；当 $p\leqslant 1$ 时，积分$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 发散，所以经常拿 $f$ 和函数 $1/x^p$ 作比较，正像在正项级数中经常拿 $a_n$ 和 $1/n^\alpha$ 作比较一样.

**例 1** 设 $a>0$，则积分$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}$是收敛的. 因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}\leqslant\frac{1}{x^{4/3}},$$

而积分$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{4/3}}$ 收敛，故由比较判别法知原积分收敛. □

定理 16.1.2 的极限形式更便于应用.

**定理 16.1.3** 设 $f$ 和 $g$ 都是$[a,+\infty)$上的非负函数，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

那么：

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时，积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散；

(2) 当 $l=0$ 时，如果$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

(3) 当 $l=+\infty$ 时，如果 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

证明和级数中相应的定理一样.

**例 2** 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x$ 是收敛的.

**解** 因为当 $x\to+\infty$ 时，

$$\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\sim\frac{1}{x^2},$$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 是收敛的，再由定理 16.1.3 知原积分收敛. □

**例 3** 研究积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

**解** 当 $x\to+\infty$ 时，由于

$$\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\sim\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^3},$$

所以原积分收敛. □

设 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是一收敛的无穷积分，这里 $f$ 不一定是非负的，$\{A_n\}(A_1=a)$ 是任一递增趋于 $+\infty$ 的数列，那么

$$\int_a^{A_{N+1}} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x.$$

令 $N\to\infty$，即得

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

这就是说，一个收敛的无穷积分总可以写成上式右边那样的级数. 反过来，如果存在某个递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}$，使得式(1)右边的级数收敛，能否断言 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛呢?答案是否定的. 例如，积分 $\int_0^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$ 是发散的，这是因为

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}\cos x\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\sin A$$

不存在. 但若取 $A_n=n\pi$，这是一个趋于 $+\infty$ 的递增数列，这时级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}\cos x\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\cos x\mathrm{d}x=0$$

却是收敛的.

但若 $f$ 是非负的，那么答案是肯定的.

**定理 16.1.4** 设 $f$ 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数. 如果存在一个递增趋于 $+\infty$ 的

数列$\{A_n\}(A_1=a)$，使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

收敛，那么积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，并且

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

**证明** 因为$\{A_n\}$是趋于$+\infty$的递增数列，故对任意给定的$A>0$，总能找到正整数$N$，使得$A_N\leqslant A<A_{N+1}$. 由于$f(x)\geqslant 0$，所以

$$\sum_{n=1}^{N-1}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{N}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x.$$

又由于式(2)收敛，故$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，并且式(3)成立. □

下面是应用这个定理的一个例子.

**例4** 证明：积分$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2x}$收敛.

**证明** 因为被积函数是非负的，故只要证明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2x} \tag{4}$$

收敛即可. 因为$\sin^2x$是周期$\pi$的偶函数，故当$n\geqslant 1$时，有

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2x}&\leqslant(n+1)\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^6\sin^2x}\\&=2(n+1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^6\sin^2x}\\&\leqslant 2(n+1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x+n^6\sin^2x}\\&=\frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}(n^3\tan x)}{1+(n^3\tan x)^2}\\&=\frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\&\leqslant\frac{2\pi^2}{n^2}.\end{aligned}$$

由此即知级数(4)收敛，因而原积分收敛. □

从无穷级数收敛的定义，立刻可以得到$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的必要条件是$\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

自然联想到，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的必要条件是不是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 这是不对的. 例4就是这样一个例子. 这里

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^6\sin^2 x}$$

是 $(0, +\infty)$ 上的连续正值函数. 虽然 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，但当 $x \to +\infty$ 时，$f(x)$ 不仅不趋于0，而且是无界的，因为当 $x = n\pi$ 时，$f(n\pi) = n\pi$.

### 练 习 题 16.1

1. 判断下列无穷积分的敛散性：

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{+\infty} \frac{3x^3-2}{x^5-x^3+1}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$；　　(4) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$；

(5) $\int_1^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^p}{1+x^2}\mathrm{d}x\ (p>0)$.

2. 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明：如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ 存在，那么必有 $b = 0$.

3. 证明：积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^\alpha\cos^2 x}\ (\alpha > 4)$ 收敛.

4. 证明：积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛于 $I$ 的充分必要条件是，对任一递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}(A_1 = a)$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛于 $I$.

## 16.2 无穷积分的 Dirichlet 和 Abel 收敛判别法

与无穷级数一样，无穷积分也有相应的 Cauchy 收敛原理. 回忆一下，在练习题2.5的第9题中，我们已经证明过：$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 存在的充分必要条件是，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在一个正数 $A$，只要 $A', A'' > A$，便有

$$|F(A') - F(A'')| < \varepsilon.$$

利用这个事实,立刻可得:

**定理 16.2.1**(Cauchy 收敛原理) 积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是,对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $A_0 > a$,只要 $A', A'' > A_0$,便有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

这个定理说明,要想使反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,必须且只需在充分远的、不管多长的区间上,积分的绝对值可以任意小.

根据定理 16.2.1,容易证明:

**定理 16.2.2** 如果积分$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,那么积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

**证明** 由于$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,故对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $A_0$,当 $A', A'' > A_0$ 时,有$\int_{A'}^{A''} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$.从而有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{A'}^{A''} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon. \qquad \square$$

仿照无穷级数中的说法,如果积分$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,则称积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **绝对收敛**.

定理 16.2.2 断言,绝对收敛的积分一定收敛.与无穷级数的情形一样,定理 16.2.2 的逆定理是不成立的(见下面的例 1).

如果积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,而$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散,则称积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **条件收敛**.

利用 Cauchy 收敛定理,可以得到类似于无穷级数中的 Dirichlet 和 Abel 收敛判别法,但还需要一个类似于 Abel 引理的结果.先证明下面的定理.

**定理 16.2.3**(第二积分平均值定理) 若函数 $f$ 在$[a,b]$上可积,$g$ 在$[a,b]$上非负,那么:

(1) 若 $g$ 在$[a,b]$上递减,则必存在 $\xi \in [a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 若 $g$ 在$[a,b]$上递增,则必存在 $\eta \in [a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_{\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** (1) 因为 $f$ 在$[a,b]$上可积,$g$ 是$[a,b]$上的非负减函数,也是可积函数,所以 $fg$ 在$[a,b]$上可积.用分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

细分区间$[a,b]$,则 $fg$ 在$[a,b]$上的积分可写为

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \\
&\quad = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\mathrm{d}x \\
&\quad = \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(g(x) - g(x_{i-1}))\mathrm{d}x. \qquad (1)
\end{aligned}$$

如果用 $K$ 表示$|f|$在$[a,b]$上的一个上界,$\omega_i$ 表示 $g$ 在小区间$[x_{i-1},x_i]$上的振幅,那么式(1)右边第二个和数的绝对值不超过

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)||g(x) - g(x_{i-1})|\mathrm{d}x \leqslant K\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i.$$

因为 $g$ 在$[a,b]$上可积,所以

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0.$$

于是式(1)可写成

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

若记 $b_i = g(x_{i-1})(i=1,\cdots,n)$,则因 $g$ 是非负递减的,故有

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant 0. \qquad (3)$$

再记 $a_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x$,那么 $S_k = \sum_{i=1}^k a_i = \int_a^{x_k} f(x)\mathrm{d}x$.由于 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是$[a,b]$上的连续函数,若它在$[a,b]$上的最大值和最小值分别记为 $M$ 和 $m$,那么

$$m \leqslant S_k = \int_a^{x_k} f(t)\mathrm{d}t = F(x_k) \leqslant M \quad (k = 1,\cdots,n). \qquad (4)$$

应用 Abel 分部求和公式,式(2)右边的和式可写成

$$\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} S_i(b_i - b_{i+1}) + S_n b_n.$$

利用式(3)和式(4),即得

$$mg(a) = mb_1 \leqslant \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x \leqslant Mb_1 = Mg(a).$$

在上式中令 $\|\pi\|\to 0$,再由式(2),即得

$$mg(a) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant Mg(a).$$

由于 $F$ 连续，根据连续函数的介值定理，存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 对积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 作变量代换 $x = a + b - t$，则得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x &= -\int_b^a f(a+b-t)g(a+b-t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(a+b-t)g(a+b-t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5}$$

因为 $g$ 在 $[a,b]$ 上递增，$g(a+b-t)$ 对 $t$ 而言是递减的，由(1)得式(5)右边的积分为

$$\int_a^b f(a+b-t)g(a+b-t)\mathrm{d}t = g(b)\int_a^\xi f(a+b-t)\mathrm{d}t, \tag{6}$$

其中 $\xi \in [a,b]$. 对式(6)右边的积分再作变量代换 $x = a + b - t$，则得

$$\int_a^\xi f(a+b-t)\mathrm{d}t = -\int_b^{a+b-\xi} f(x)\mathrm{d}x = \int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{7}$$

这里 $\eta = a + b - \xi \in [a,b]$. 综合式(5)～(7)即得(2). □

如果 $g$ 在 $[a,b]$ 上不保持定号，则有：

**定理 16.2.4**（推广的第二积分平均值定理） 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g$ 在 $[a,b]$ 上单调，则必存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

**证明** 不妨设 $g$ 在 $[a,b]$ 上递减，则对任意的 $x \in [a,b]$，均有 $g(x) \geqslant g(b)$. 令

$$\varphi(x) = g(x) - g(b),$$

那么 $\varphi$ 在 $[a,b]$ 上非负且递减. 由定理 16.2.3 知，存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)(g(x) - g(b))\mathrm{d}x = (g(a) - g(b))\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

由此即得式(8).

如果 $g$ 在 $[a,b]$ 上递增，则可令 $\psi(x) = g(b) - g(x)$，仍用定理 16.2.3，可得式(8). □

利用定理16.2.4就可得到类似于引理14.4.2的Abel引理.

**定理16.2.5** 设 $f$ 在$[a,b]$上可积,$g$ 在$[a,b]$上单调.如果对任意的 $A\in[a,b]$,有$\left|\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M$,那么

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M(|g(a)|+2|g(b)|).$$

**证明** 由定理16.2.4知,存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

由假设条件

$$\left|\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M,\quad \left|\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 2M,$$

即得

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M(|g(a)|+2|g(b)|).$$ □

由定理16.2.5很容易得到下面的定理.

**定理16.2.6**(Dirichlet判别法) 设 $f,g$ 满足下面两个条件:

(a) $g$ 在$[a,+\infty)$上单调,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$;

(b) $F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 在$(a,+\infty)$上有界.

那么积分$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

**证明** 设$\left|\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M$.由 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$知,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $A_0$,只要 $A'>A_0$,便有 $|g(A')|<\varepsilon/(8M)$.现取 $A''>A'>A_0$,对任意的 $A\in[A',A'']$,有$\left|\int_{A'}^A f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 2M$.于是由定理16.2.5,得

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 2M(|g(A')|+2|g(A'')|)<\varepsilon.$$

由Cauchy收敛原理,即知$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛. □

**例1** 证明:$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛,而$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

**证明** 因为对任意的 $A\geqslant 1$,有

$$\left|\int_1^A \sin x\mathrm{d}x\right| = |\cos A-\cos 1|\leqslant 2,$$

且 $1/x$ 当 $x\to+\infty$ 时递减趋于 0,故由 Dirichlet 判别法,知$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.因为

$$\frac{|\sin x|}{x}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x},$$

用和上面一样的方法,知$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛,但$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散,所以$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ 发散. □

积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 是一个条件收敛的例子.

**例 2** 讨论积分$\int_1^{+\infty}(-1)^{[x]}\mathrm{d}x$ 和$\int_1^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$ 的收敛性,这里$[x]$ 表示 $x$ 的整数部分.

**解** 如果$\int_1^{+\infty}(-1)^{[x]}\mathrm{d}x$ 收敛,那么有

$$\int_1^{+\infty}(-1)^{[x]}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}(-1)^{[x]}\mathrm{d}x.$$

但显然级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}(-1)^{[x]}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

发散,因而积分$\int_1^{+\infty}(-1)^{[x]}\mathrm{d}x$ 发散.

对第二个积分作变量代换 $x^2=t$,那么

$$\int_1^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{[t]}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

令 $g(t)=1/\sqrt{t}$,$f(t)=(-1)^{[t]}$,那么 $g(t)$当 $t\to+\infty$时递减趋于 0.任取 $A>1$,存在正整数 $n$,使得 $n\leqslant A<n+1$.于是

$$\begin{aligned}\int_1^{A}(-1)^{[t]}\mathrm{d}t&=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}(-1)^{[t]}\mathrm{d}t+\int_n^{A}(-1)^{n}\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k+(-1)^n(A-n).\end{aligned}$$

由此易知 $\left|\int_1^{A}(-1)^{[t]}\mathrm{d}t\right|\leqslant 2$.由 Dirichlet 判别法,易知积分$\int_1^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$ 收敛.显然这是条件收敛的另一个例子. □

**定理 16.2.7**(Abel 判别法) 设 $f,g$ 满足下面两个条件:

(a) $g$ 在$[a,+\infty)$上单调有界;

(b) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

那么积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

**证明** 由(a)知 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l$ 存在且有限,因而 $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-l)=0$. 由 Dirichlet 判别法,知积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)(g(x)-l)\mathrm{d}x$$

收敛,因而

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f(x)(g(x)-l)\mathrm{d}x+l\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

收敛. □

**例 3** 设 $\max(p,q)>1$. 证明:积分$\int_1^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 收敛.

**证明** 不妨设 $p\geqslant q$, $p>1$,则原积分可写为

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{p-1}(1+(1/x^{p-q}))}\mathrm{d}x.$$

由 Dirichlet 判别法,知$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{p-1}}\mathrm{d}x$ 收敛,又因$\frac{1}{1+(1/x^{p-q})}$在$[1,+\infty)$上单调有界,故由 Abel 判别法知原积分收敛. □

## 练习题 16.2

1. 研究下列积分的敛散性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{1+x}\mathrm{d}x$;  (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(a+2)x}{1+x^{a}}\mathrm{d}x\,(\alpha>0)$;

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}\mathrm{d}x$;  (4) $\int_0^{+\infty}\frac{[t]-t+1/2}{t+x}\mathrm{d}t\,(x>0)$;

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{[t]-t+a}{t+x}\mathrm{d}t\,(x>0,a\neq\frac{1}{2})$.

2. 研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin x}{1+x}\mathrm{d}x$;  (2) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(1-2x)}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2+1}}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$;  (4) $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}\mathrm{d}x$.

3. 设 $f$ 为非负的减函数，且$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明：当 $x\to+\infty$ 时，

$$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. 设 $f$ 在$[a,+\infty)$上递减趋于 0. 试用 Dirichlet 判别法证明：积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x \quad 和 \quad \int_a^{+\infty}f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$$

同敛散.

5. 设 $f,g$ 在$[a,b]$上连续，$g$ 在$(a,b)$内可微，且 $g'(x)\geqslant 0(a<x<b)$. 试用分部积分公式证明第二积分平均值定理.

6. 设 $P_m$ 和$P_n$ 分别为$m$ 和$n$ 次多项式，且当 $x\geqslant a$ 时，$P_n(x)>0$. 试研究积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\mathrm{d}x$$

的绝对收敛性和条件收敛性.

7. 如果 $f$ 在$[a,+\infty)$上连续可微，且$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 和$\int_a^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，证明：必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

## 问 题 16.2

1. 设 $0<\alpha\leqslant 1/2$. 证明：积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}\mathrm{d}x$$

发散

2. 对任意的 $b>0$，设 $f$ 在$[0,b]$上可积. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$，证明：

$$\lim_{t\to 0^+}t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}t=a.$$

# 16.3 瑕积分的收敛判别法

现在讨论另一种反常积分——**瑕积分**.

我们知道，如果函数 $f$ 定义在区间$(a,b]$上，当 $x\to a^+$ 时，$f$ 无界，则称 $a$ 为$f$ 的**瑕点**. 这时 $f$ 在$(a,b]$上按 Riemann 积分的意义是不可积的. 但若对任意的

$\varepsilon>0$，$f$ 在$[a+\varepsilon,b]$上可积，而且

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

有有限的极限，则称瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并把上面的极限定义为瑕积分的值.在6.7节中我们已经见到不少瑕积分的例子.

如何判断瑕积分的敛散性?先看一个简单的例子.为了研究积分$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$的收敛性，作变换 $1/\sqrt{x}=y$，即得

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\int_{1}^{1/\sqrt{\varepsilon}}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}.$$

这样就把判断瑕积分$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$收敛的问题归结为判断无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}$的收敛问题.

一般来说，如果 $a$ 是$f$ 的瑕点，作变换 $x=a+(1/y)$，那么有

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x&=-\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{1/\varepsilon}^{1/(b-a)}f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y\\&=\int_{1/(b-a)}^{+\infty}f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

这就是说，通过上面的变换，每一个瑕积分一定可以化成一个无穷积分.因此，前面那些判断无穷积分收敛的方法，都可以平行地对瑕积分建立起来.这里我们不再重复这些定理的证明，而只是把结果写下来，请读者补出这些定理的证明，这将是很好的练习.

为简单起见，下面的定理中都假定积分下限 $a$ 是瑕点，$f$ 和 $g$ 都在$[a+\varepsilon,b]$上可积.

**定理 16.3.1** 设对充分靠近 $a$ 的 $x(x>a)$，$f$ 和 $g$ 满足不等式 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，那么:

(1) 若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

**定理 16.3.2** 设 $f$ 和 $g$ 都是$(a,b]$上的非负函数，且

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l,$$

那么:

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时,积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散;

(2) 当 $l = 0$ 时,如果 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 时,如果 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散,那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

**定理 16.3.3**(Cauchy 收敛原理) 积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是,对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,只要 $0 < \eta < \delta, 0 < \eta' < \delta$,就有

$$\left|\int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

**定理 16.3.4** 如果积分 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,那么积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

这个定理的逆定理是不成立的,下面的例 5 便是这样一个例子.从这里可看出反常积分和普通的 Riemann 积分的差别.在 Riemann 积分的情形下,从 $f$ 可积可以推出 $|f|$ 可积,但从 $|f|$ 可积不能推出 $f$ 可积.这里的情况正好反了过来.

瑕积分的绝对收敛和条件收敛的概念和无穷积分是一样的,不再赘述.

对瑕积分也有相应的 Dirichlet 和 Abel 收敛判别法,但在考虑这种瑕积分时,往往先作变换把它化成无穷积分,应用无穷积分的相应判别法就可以了(见下面的例 5),这里就不再详细论述它们了.

**例 1** 研究积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

**解** 看上去 $x=0, x=1$ 似乎都是瑕点,但实际上,由于

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^2} = -\frac{1}{2},$$

被积函数在 $x=1$ 附近是有界的,所以 $x=1$ 并不是瑕点.

考虑 $x=0$ 附近的情况.对充分小的 $x$,恒有 $1-x^2 \geqslant 1/2$,所以

$$\left|\frac{\ln x}{1-x^2}\right| \leqslant 2|\ln x|,$$

而积分 $\int_0^1 |\ln x|\mathrm{d}x = -\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$ 是收敛的,从而原积分收敛. □

**例 2** 研究积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ 的敛散性.

**解** 易知,$x=1$ 是瑕点.当 $x\to 1$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}\frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)(1+x^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}.$$

由于$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1-x}}$收敛，故原积分收敛. □

**例 3** 研究积分$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$的敛散性.

**解** 当$p<1$时，$x=0$是瑕点；当$q<1$时，$x=1$是瑕点. 为了分别考虑函数在这两点附近的情况，把积分拆成两部分：

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x = \int_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x + \int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,$$

其中$a\in(0,1)$. 当$x\to 0$时，

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1}.$$

因此，当$p>0$时，第一个积分收敛. 当$x\to 1$时，

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1},$$

第二个积分当$q>0$时收敛.

综上，原积分在$p>0,q>0$时收敛. □

这个积分定义了一个以$p,q$为变量的二元函数$\mathrm{B}(p,q)$，称为 **Beta 函数**. 这是将要专门讨论的一个重要的特殊函数.

**例 4** 研究积分$\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$的敛散性.

**解** 当$s<1$时，$x=0$是瑕点，但原积分又是无穷积分. 与刚才一样，把它拆成两部分来考虑：

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

当$x\to 0$时，

$$x^{s-1}\mathrm{e}^{-x} \sim x^{s-1},$$

因而第一个积分当$s>0$时收敛. 当$x\to +\infty$时，

$$x^2 \cdot x^{s-1}\mathrm{e}^{-x} \to 0,$$

故对充分大的$x$，恒有

$$x^{s-1}\mathrm{e}^{-x} < \frac{1}{x^2}.$$

从而第二个积分不论$s$为何值都收敛.

综上，原积分当$s>0$时收敛. □

这个积分确定了一个以$s$为变量的函数$\Gamma(s)$，称为 **Gamma 函数**. 这是另一个要专门讨论的特殊函数.

**例 5** 设$p>0$. 讨论积分

$$\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^p} \mathrm{d}x$$

的敛散性.

**解** 这是一个以 $x=0$ 为瑕点的瑕积分. 作变换 $1/x = t$, 即得

$$\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^p} \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-p}} \mathrm{d}t. \tag{1}$$

换成无穷积分比较容易处理. 容易看出, 当 $p-2 \geqslant 0$ 时, 积分是发散的. 因为如果式(1)收敛, 则当 $A'$, $A''$ 充分大时, 必有

$$\left| \int_{A'}^{A''} t^{p-2} \sin t \, \mathrm{d}t \right| \leqslant 1. \tag{2}$$

现若取 $A' = 2k\pi$, $A'' = (2k+1)\pi$, 那么当 $k \to \infty$ 时,

$$\left| \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} t^{p-2} \sin t \, \mathrm{d}t \right| \geqslant (2k\pi)^{p-2} \int_0^{\pi} \sin t \, \mathrm{d}t = 2(2k\pi)^{p-2} \geqslant 2,$$

这与式(2)显然是矛盾的. 由于

$$| t^{p-2} \sin t | \leqslant \frac{1}{t^{2-p}},$$

故当 $2-p>1$, 即 $0<p<1$ 时, 式(1) 绝对收敛. 而当 $2-p>0$, 即 $0<p<2$ 时, 由于当 $t \to +\infty$ 时, $t^{p-2}$ 单调地趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法, 知积分(1) 收敛. 用 16.2 节中例 1 的方法, 可知当 $1 \leqslant p < 2$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{2-p}} \mathrm{d}t$ 发散.

综上, 当 $0<p<1$ 时, 积分(1)绝对收敛; 当 $1 \leqslant p < 2$ 时, 积分(1)条件收敛; 当 $2 \leqslant p < \infty$ 时, 积分(1)发散. □

**例 6** 设 $\alpha > 0$. 讨论积分

$$I = \int_0^{+\infty} \left( \left( 1 - \frac{\sin x}{x} \right)^{-\alpha} - 1 \right) \mathrm{d}x$$

的敛散性.

**解** 因为当 $x \to 0$ 时, $(\sin x)/x \to 1$, 所以 $x=0$ 是一个瑕点. 因此, 可把积分分成两部分:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left( \left( 1 - \frac{\sin x}{x} \right)^{-\alpha} - 1 \right) \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \left( \left( 1 - \frac{\sin x}{x} \right)^{-\alpha} - 1 \right) \mathrm{d}x \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

显然, $I_1$ 是否收敛取决于

$$I_1' = \int_0^1 \left( 1 - \frac{\sin x}{x} \right)^{-\alpha} \mathrm{d}x$$

是否收敛. 因为当 $x\to 0$ 时

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5),$$

所以

$$1 - \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3!}x^2 + O(x^4) = \frac{1}{6}x^2(1 + O(x^2)).$$

因而当 $x\to 0$ 时,

$$\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha} \sim \left(\frac{1}{6}\right)^{-\alpha} x^{-2\alpha}.$$

故当 $\alpha<1/2$ 时, $I_1'$ 收敛. 由于 $(\sin x)/x\leqslant 1$, 故 $I_1'$ 绝对收敛. 再看 $I_2$, 因为 $|(\sin x)/x|<1$, 由二项式的展开式, 得

$$\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha} = 1 + \alpha\frac{\sin x}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

所以

$$\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha} - 1 = \alpha\frac{\sin x}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

因为积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛, $\int_1^{+\infty}O\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 所以 $I_2$ 条件收敛.

综上, 当 $0<\alpha<1/2$ 时原积分条件收敛. □

最后提一下反常积分主值的概念.

在 6.7 节中, 我们定义无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 是指两个无穷积分

$$\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x,\quad \int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛, 并且规定

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

这就意味着, 当 $A, A'$ 独立地趋于 $+\infty$ 时,

$$\lim_{\substack{A\to+\infty\\ A'\to+\infty}}\int_{-A}^{A'}f(x)\mathrm{d}x \tag{3}$$

存在. 对某些函数 $f$ 来说, 极限(3)并不存在. 但当 $A=A'$ 时,

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

是存在的. 例如, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}x$ 便是这种情形. 因为

$$\int_{-A}^{A'} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(A'^2 - A^2),$$

式(3)这样的极限当然不存在,式(4)却是存在的.

如果极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x$$

存在,则称这个极限为无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的 **Cauchy 主值**,记为

$$\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x.$$

例如

$$\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0.$$

对瑕积分,同样可以定义 Cauchy 主值的概念.

设 $c$ 是 $f$ 在区间$[a,b]$内唯一的瑕点,定义

$$\mathrm{P.V.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right).$$

例如,$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 是发散的,但它的 Cauchy 主值存在:

$$\mathrm{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = 0.$$

容易知道,收敛的无穷积分或瑕积分的 Cauchy 主值一定存在,但反之不然.

## 练 习 题 16.3

1. 判断下列反常积分的敛散性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\mathrm{d}x\ (\beta\geqslant0)$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$;

(4) $\int_0^{1}\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{\pi/2}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(6) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q}$;

(7) $\int_0^{+\infty}\sin x^\alpha\mathrm{d}x(\alpha>1)$.

2. 判断下列反常积分的绝对收敛性和条件收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}x^p\sin x^q\mathrm{d}x(q\neq0)$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x(q\geqslant0)$.

# 问题 16.3

1. 判断反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^\alpha} \mathrm{d}x$$

的绝对收敛性和条件收敛性.

2. 设函数 $f$ 在 $(0,1)$ 上单调,在点 $x=0$ 和 $x=1$ 的邻域内不必有界.如果 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

3. 上一题的逆命题是否成立?即若 $f$ 在 $(0,1)$ 上单调,且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ 存在,是否能保证 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛?试研究

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}.$$

4. 利用第 2 题的结果,证明:对任意的 $\alpha>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^{\alpha-1} + 2^{\alpha-1} + \cdots + n^{\alpha-1}}{n^\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

5. 设 $f$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

都存在.证明:对任意的 $\eta>0$,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+\eta) - f(x))\mathrm{d}x = \eta(a-b).$$

6. 设 $a>0, b>0$.证明:

(1) 如果 $f$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$ 存在,那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \mathrm{d}x = (f(0) - f(+\infty))\ln\frac{b}{a};$$

(2) 如果 $f$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,且 $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛,那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a};$$

(3) 如果 $f$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,$f(+\infty)$ 存在,且 $\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛,那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \mathrm{d}x = f(+\infty) \ln \frac{b}{a}.$$

7. 利用上述结果,计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x} \mathrm{d}x (a > 0, b > 0)$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} \mathrm{d}x (a > 0, b > 0)$.

# 16.4 反常重积分

与单重积分的情形一样,在第 10 章讨论重积分时也有个限制:积分区域必须是有界的,被积函数在积分域上必须是有界的.对不满足上述条件的情形,如何定义重积分?下面先来讨论无界区域上的重积分.

## 16.4.1 无界区域上的反常重积分

为简单起见,我们只对 $\mathbf{R}^2$ 上的无界区域作详细的讨论,一般 $\mathbf{R}^n$ 上的无界区域的情形是一样的.

**定义 16.4.1** 设 $D$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的无界区域,$f: D \to \mathbf{R}$,$f$ 在 $D$ 的任何有界子区域上都可积.又设 $\Gamma$ 是一条面积为零的曲线,它和原点的距离记为 $d(\Gamma)$,即

$$d(\Gamma) = \inf\{\sqrt{x^2 + y^2} : (x, y) \in \Gamma\}.$$

由 $\Gamma$ 割出来的 $D$ 的子区域记为 $D_\Gamma$(图 16.1).如果极限

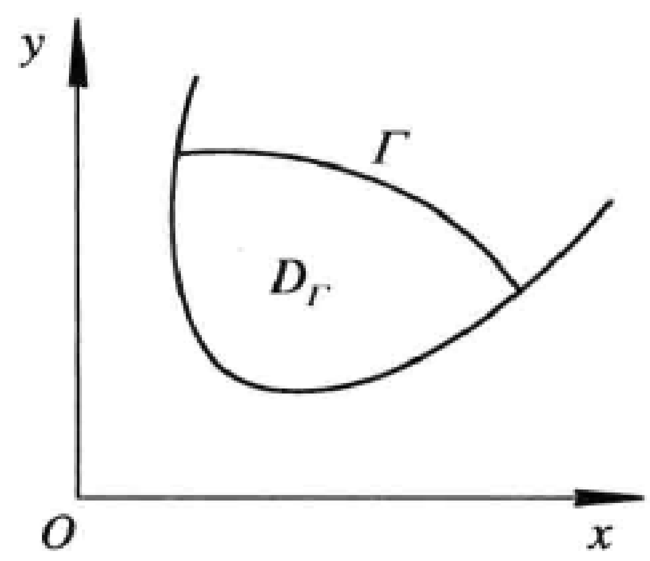


图 16.1

$$\lim_{d(\Gamma) \to +\infty} \iint_{D_\Gamma} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

存在且有限,并且与 $\Gamma$ 的选取无关,则称 $f$ 在 $D$ 上反常可积,简称可积,记为

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \lim_{d(\Gamma) \to +\infty} \iint_{D_\Gamma} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

这时称**反常积分** $\displaystyle\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ 收敛;反之,称积分

发散.

**例 1**　设 $D=\{(x,y):x^2+y^2\geqslant a^2\}$. 讨论积分

$$\iint\limits_{D}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{p/2}}$$

的收敛性.

**解**　取 $\Gamma_s=\{(x,y):x^2+y^2=s^2,s>a\}$. 这时,

$$D_s=\{(x,y):a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant s^2\}.$$

计算得

$$\iint\limits_{D_s}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{p/2}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^s\frac{r\mathrm{d}r}{r^p}=2\pi\int_a^s\frac{\mathrm{d}r}{r^{p-1}}.$$

当 $s\to+\infty$ 时, $p-1>1$, 即当 $p>2$ 时, 原积分收敛; 当 $p\leqslant 2$ 时, 原积分发散.　□

与单变量反常积分一样, 我们先给出非负函数的比较判别法. 为此, 先证明下面的引理.

**引理 16.4.1**　设 $f(x,y)$ 是无界区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的非负函数. 如果 $\{\Gamma_n\}$ 是一列分段光滑曲线, 它们割出的 $D$ 的有界子区域 $\{D_n\}$ 满足

$$D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_n\subset\cdots,\quad \text{且}\quad \lim_{n\to\infty}d(\Gamma_n)=+\infty,$$

那么 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛的充分必要条件是, 数列

$$\left\{\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}$$

有界. 如果记

$$I=\sup_n\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

在收敛时, 有

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I.$$

**证明**　必要性由收敛的定义即得. 下面证明定理的充分性. 设数列 $\left\{\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}$ 有界, 记 $\sup\limits_n\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I$. 我们要证明

$$\lim_{d(\Gamma)\to+\infty}\iint\limits_{D_\Gamma}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I.\tag{1}$$

任取一条曲线 $\Gamma$, 记 $\rho(\Gamma)=\sup\{\sqrt{x^2+y^2}:(x,y)\in\Gamma\}$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}d(\Gamma_n)=+\infty$, 故当 $n$ 充分大时, 总有 $d(\Gamma_n)>\rho(\Gamma)$, 因而 $D_\Gamma\subset D_n$, 于是

$$\iint_{D_{\Gamma}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant I.$$

另外,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $n_0$,使得

$$\iint_{D_{n_0}} f(x,y)\mathrm{d}x > I-\varepsilon.$$

因此当 $d(\Gamma)>d(\Gamma_{n_0})$时,有

$$I \geqslant \iint_{D_{\Gamma}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \iint_{D_{n_0}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > I-\varepsilon.$$

这就证明了式(1). □

现在可以证明下面的比较判别法.

**定理 16.4.1** 设 $D$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的无界区域.在 $D$ 上,

$$0 \leqslant f(x,y) \leqslant g(x,y), \tag{2}$$

那么:

(1) 当$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛时,$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 也收敛;

(2) 当$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 发散时,$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 也发散.

**证明** (1) 取$\{\Gamma_n\}$,使得$\lim\limits_{n\to\infty} d(\Gamma_n)=+\infty$.因为$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$收敛,故由引理 16.4.1,知数列$\left\{\iint\limits_{D_n} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}$有界.由式(2),知$\left\{\iint\limits_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}$也有界.再用引理 16.4.1,即知$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛.

(2) 这是显然的. □

在单积分的情形下,我们已经知道,如果 $|f(x)|$ 在$[a,+\infty)$上可积,即反常积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,可以推出$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;但从$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,却推不出$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛.但在重积分的情形下,两者却是等价的.这是反常单积分和反常重积分的重要差别.

**定理 16.4.2** 设 $D$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的无界区域,那么 $f(x,y)$在 $D$ 上可积的充分必要条件是,$|f(x,y)|$在 $D$ 上可积.

**证明** 先证定理的充分性.设$\iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛.记

$$f^+(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & \text{当 } f(x,y)\geqslant 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } f(x,y)<0 \text{ 时},\end{cases}$$

$$f^-(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当 } f(x,y)>0 \text{ 时},\\ -f(x,y), & \text{当 } f(x,y)\leqslant 0 \text{ 时}.\end{cases}$$

这样 $f^+$ 和 $f^-$ 都取非负值,而且

$$f(x,y)=f^+(x,y)-f^-(x,y). \tag{3}$$

根据比较判别法,再从

$$f^+(x,y)\leqslant|f(x,y)|,\quad f^-(x,y)\leqslant|f(x,y)|,$$

知 $f^+$ 和 $f^-$ 都在 $D$ 上可积.从而由式(3)即得 $f$ 在 $D$ 上可积.

现证必要性.设 $f(x,y)$ 在 $D$ 上可积,如果 $|f(x,y)|$ 在 $D$ 上不可积,我们要导出矛盾.由于

$$|f(x,y)|=f^+(x,y)+f^-(x,y),$$

$f^+$ 和 $f^-$ 中必有一个在 $D$ 上不可积.不妨设 $f^+$ 在 $D$ 上不可积.由引理16.4.1知,对任意大的正数 $G$,存在一条曲线 $\Gamma$,使得在由它割出的 $D$ 的有界子区域 $D_\Gamma$ 上,有

$$\iint\limits_{D_\Gamma} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>G. \tag{4}$$

从式(4)出发,可用数学归纳法证明,存在一列曲线 $\{\Gamma_n\}$,使得它们割出的 $D$ 的有界子区域满足:

$$D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_n\subset\cdots,\quad \lim_{n\to\infty}d(\Gamma_n)=+\infty,$$

$$\iint\limits_{D_{n+1}} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>2\iint\limits_{D_n}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+n\quad(n=1,2,\cdots). \tag{5}$$

事实上,对任意给定的 $D_1$,由式(4)知,总有 $D_2$,使得

$$\iint\limits_{D_2} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>2\iint\limits_{D_1}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+1.$$

这就是说,当 $n=1$ 时,式(5)成立.现设 $n=k$ 时,式(5)成立,即

$$\iint\limits_{D_{k+1}} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>2\iint\limits_{D_k}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+k.$$

于是总可取 $D_{k+2}$,使得

$$\iint\limits_{D_{k+2}} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>2\iint\limits_{D_{k+1}}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+k+1,$$

即式(5)对 $n=k+1$ 也成立.由于

$$
\begin{aligned}
&f^+(x,y) \leqslant |f(x,y)|, \\
&-\iint\limits_{D_n} |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant -\iint\limits_{D_n} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned} \tag{6}
$$

故从式(6)和式(5),得

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D_{n+1}\setminus D_n} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_{n+1}} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_n} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\geqslant \iint\limits_{D_{n+1}} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_n} |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&> \iint\limits_{D_n} |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y + n \quad (n = 1,2,\cdots).
\end{aligned} \tag{7}
$$

现在对 $D_{n+1}\setminus D_n$ 进行矩形网分割,记为 $\pi$(图 16.2).设

$$
\sum_{i=1}^{m} m_i^{(n)} \sigma(I_i^{(n)}) \tag{8}
$$

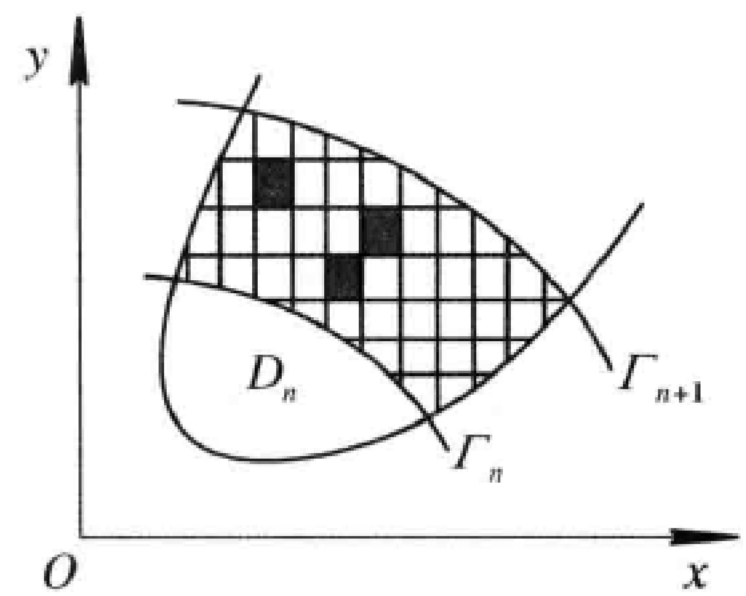



**图 16.2**

是 $f^+(x,y)$ 在 $D_{n+1}\setminus D_n$ 上的下和,因 $f^+$ 可积,式(8)的极限就是 $\iint\limits_{D_{n+1}\setminus D_n} f^+ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

故当分割充分细时,有

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} m_i^{(n)} \sigma(I_i^{(n)}) &> \iint\limits_{D_{n+1}\setminus D_n} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 1 \\
&> \iint\limits_{D_n} |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y + n - 1 \quad (n = 1,2,\cdots).
\end{aligned} \tag{9}
$$

这里已经用了不等式(7).从式(9)可知在分割 $\pi$ 下,有许多小矩形使得 $m_i^{(n)} > 0$.记这些小矩形的并为 $P_n$,从而有

$$
\iint\limits_{P_n} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > \sum_{i=1}^{m} m_i^{(n)} \sigma(I_i^{(n)}) > \iint\limits_{D_n} |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y + n - 1. \tag{10}
$$

再记 $E_n=D_n\cup P_n$，则有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{E_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{P_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{P_n}f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\geqslant-\iint\limits_{D_n}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{P_n}f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&>n-1.\end{aligned}\tag{11}$$

最后一个不等式用了不等式(10). 现在的问题是，$E_n$ 不一定是连通的，就像图 16.2 中所画的. 但解决这个问题很简单，只要在 $D_n$ 和 $P_n$ 之间连一些小通道，两者就连通了，记连通后得到的区域为 $Q_n$. 由于这些小通道的面积可以充分小，且 $f$ 是有界的，$f$ 在其上积分的绝对值也相应地小，因而总可使不等式

$$\iint\limits_{Q_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>n-2\quad(n=1,2,\cdots)$$

成立. 这就和 $f$ 在 $D$ 上可积矛盾了. 这个矛盾说明 $|f(x,y)|$ 在 $D$ 上也可积. □

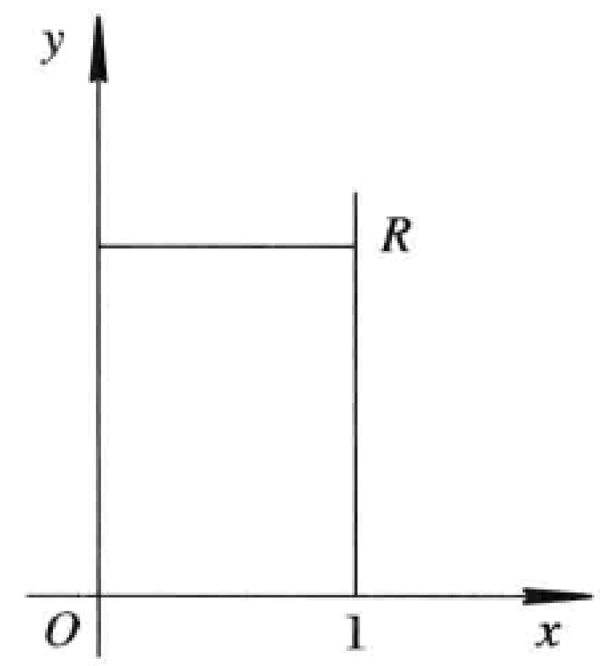


图 16.3

**例 2** 设 $f(x,y)=(2-xy)xy\mathrm{e}^{-xy}$，$D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y<+\infty\}$. 证明：积分 $I=\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛.

**证明** 记(图 16.3)

$$D_R=\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant R\}.$$

按定义，有

$$I=\lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{D_R}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_R}(2-xy)xy\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^R(2-xy)xy\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^R\left(\frac{\partial}{\partial y}(xy^2\mathrm{e}^{-xy})\right)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1(xy^2\mathrm{e}^{-xy})\Big|_0^R\mathrm{d}x=\int_0^1xR^2\mathrm{e}^{-Rx}\mathrm{d}x\\&=-R\left(x\mathrm{e}^{-Rx}\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^{-Rx}\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

$$= -R\left(e^{-R} + \frac{e^{-R}-1}{R}\right) \to 1 \quad (R \to \infty).$$

这就证明了积分是收敛的. □

若记

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_0^{+\infty} f(x,y)dy, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} dy \int_0^1 f(x,y)dx,$$

那么从

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 e^{-xy}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y e^{-xy}),$$

立刻可得 $I_1 = 0, I_2 = 1$. 这个例子说明,即使积分收敛,也不一定能交换积分的次序.

## 16.4.2 无界函数的反常重积分

设 $D$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的有界区域,点 $\boldsymbol{p}_0 \in D$,二元函数 $f(x,y)$ 在 $D\backslash\{\boldsymbol{p}_0\}$ 上有定义,但在 $\boldsymbol{p}_0$ 附近无界,这时称 $\boldsymbol{p}_0$ 为 $f$ 的瑕点. 如果曲线 $\gamma \subset D$, $f$ 在 $D\backslash\gamma$ 上有定义,但在 $\gamma$ 附近无界,则称 $\gamma$ 为 $f$ 的瑕线.

**定义 16.4.2** 设 $f: D\backslash\{\boldsymbol{p}_0\} \to \mathbf{R}$, $\boldsymbol{p}_0$ 为 $f$ 的一个瑕点. 设 $\Gamma$ 为 $D$ 中一条分段光滑的闭曲线, $\boldsymbol{p}_0$ 含在 $\Gamma$ 的内部. 记 $\Gamma$ 包围的区域为 $\sigma$,

$$\rho(\Gamma) = \sup\{\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0\| : \boldsymbol{p} \in \Gamma\}.$$

如果二重积分

$$\iint\limits_{D\backslash\sigma} f(x,y)dxdy$$

总存在,而且极限

$$\lim_{\rho(\Gamma)\to 0} \iint\limits_{D\backslash\sigma} f(x,y)dxdy$$

存在,且极限值与 $\Gamma$ 的取法无关,则称 $f$ 在 $D$ 上可积,并记

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\rho(\Gamma)\to 0} \iint\limits_{D\backslash\sigma} f(x,y)dxdy.$$

这时称无界函数的反常重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 收敛;反之,称积分发散.

**例 3** 设 $D = \{(x,y): x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$. 讨论积分

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{p/2}} \quad (p > 0)$$

的敛散性.

**解**　显然,(0,0)是被积函数

$$f(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2)^{p/2}}$$

的瑕点.记 $\Gamma_\varepsilon=\{(x,y):x^2+y^2=\varepsilon^2\}$.当 $0<\varepsilon<a$ 时,$\Gamma_\varepsilon\subset D$.记 $D_\varepsilon$ 是 $\Gamma_\varepsilon$ 的内部,那么

$$\iint\limits_{D\setminus D_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{p/2}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^a\frac{\mathrm{d}r}{r^{p-1}}=2\pi\int_\varepsilon^a\frac{\mathrm{d}r}{r^{p-1}},$$

这里 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.当 $\varepsilon\to0$ 时,上述积分当 $p<2$ 时收敛,当 $p\geqslant2$ 时发散.　□

与无界区域上的反常积分一样,比较判别法、可积和绝对可积等价的定理对无界函数的反常积分同样成立,这里不再详述.

**例4**　计算反常积分

$$I=\iint\limits_D\ln\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 $D$ 是由 $y=0,y=x$ 和 $x=\pi$ 围成的区域(图 16.4).

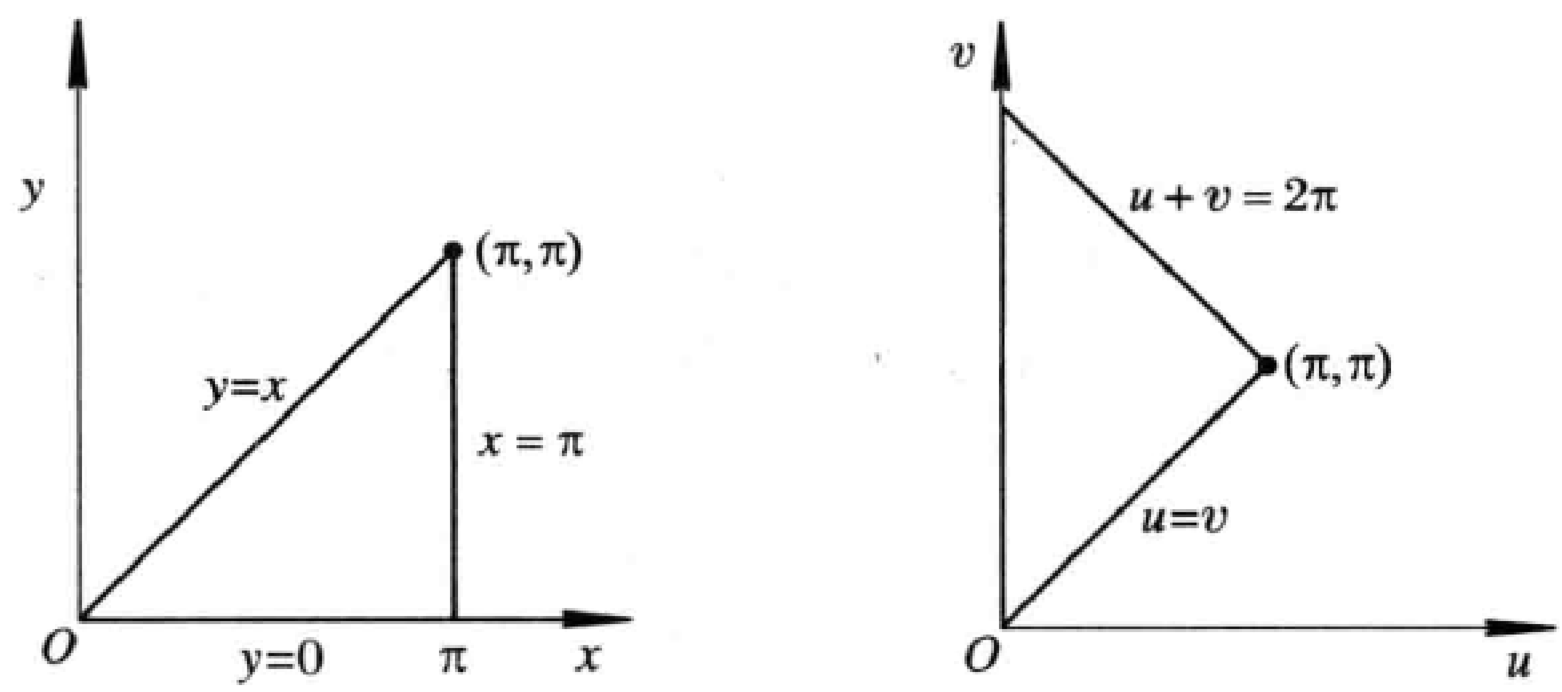



**图 16.4**

**解**　作变换 $u=x-y,v=x+y$,即

$$x=\frac{1}{2}(u+v),\quad y=\frac{1}{2}(v-u).$$

这时,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$

区域 $D$ 变成了 $u,v$ 平面上由直线 $u=v,u=0,u+v=2\pi$ 围成的区域 $D'$.于是

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \ln\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_{D'} \ln\sin u\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin u\mathrm{d}u\int_u^{2\pi-u}\mathrm{d}v = \int_0^{\pi}(\pi-u)\ln\sin u\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\pi} t\ln\sin t\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} t\ln\sin t\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{\pi} t\ln\sin t\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} t\ln\sin t\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2}(\pi-t)\ln\sin t\mathrm{d}t \\
&= \pi\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\mathrm{d}t = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2,
\end{aligned}
$$

这里我们已经引用了已知的结果(6.7 节中的例 9),

$$
\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln 2.
$$

□

**例 5** 研究积分

$$
I = \iiint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x+y+z)^p}.
$$

的敛散性,其中

$$
D = \{(x,y,z): x>0, y>0, z>0, x+y+z<1\}.
$$

**解** 作变量代换 $x=u(1-v), y=uv(1-w), z=uvw$. 它把区域 $D$ 变成

$$
D' = \{(u,v,w): 0\leqslant u\leqslant 1, 0\leqslant v\leqslant 1, 0\leqslant w\leqslant 1\}.
$$

这时,Jacobi 行列式为

$$
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = u^2 v.
$$

于是

$$
I = \iiint_{D'} \frac{u^2 v}{u^p}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{p-2}}\int_0^1 v\mathrm{d}v\int_0^1\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{u^{p-2}}.
$$

因此积分当 $p-2<1$,即 $p<3$ 时收敛,这时,

$$
I = \frac{1}{2(3-p)}.
$$

□

## 练 习 题 16.4

1. 讨论下列反常重积分的敛散性:

(1) $\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$;

(2) $\iint\limits_{0<y<1} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^p}$;

(3) $\iint\limits_{D} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^\alpha+y^\beta)^m}\ (\alpha>0,\beta>0)$，$D=\{(x,y):x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^\alpha+y^\beta\geqslant 1\}$;

(4) $\iint\limits_{D} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^p}$，$D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,x+y\geqslant 1\}$;

(5) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1-x^2-y^2)^p}$;

(6) $\iint\limits_{D} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1-x^\alpha-y^\beta)^p}\ (\alpha>0,\beta>0)$，$D=\{(x,y):x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^\alpha+y^\beta\leqslant 1\}$;

(7) $\iint\limits_{D} \dfrac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$;

(8) $\iint\limits_{D} \dfrac{(x+y)^2\ln(x+y)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D=\{(x,y):x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1\}$.

2. 证明：

(1) $\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\dfrac{\pi}{4}$;

(2) 反常重积分$\iint\limits_{D}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$发散，这里

$$D=\{(x,y):0\leqslant x,y<\infty\}.$$

(提示：记$D_R=\{(x,y):x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^2+y^2\leqslant R^2\}$，证明$\lim\limits_{R\to\infty}\iint\limits_{D_R}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$不存在.)

3. 计算下列反常重积分：

(1) $\iint\limits_{D} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x+y)^3}$，$D=\{(x,y):x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$;

(2) $\iint\limits_{D} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}$，$D=\{(x,y):x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$;

(3) $\iint\limits_{D} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^p}(p>1)$，$D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,x+y\geqslant 1\}$;

(4) $\iint\limits_{D} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p y^q}(p>q>1)$，$D=\{(x,y):x\geqslant 1,xy\geqslant 1\}$;

(5) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

(6) $\iint\limits_{D} e^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant y\}$;

(7) $\iint\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \iint\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(8) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(9) $\iint\limits_{D} \ln\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=\{(x,y):0\leqslant y\leqslant x\leqslant \pi\}$;

(10) $\iiint\limits_{D} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x+y+z)^p}(p>1), D=\{(x,y,z):x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0, x+y+z\leqslant 1\}$.

# 第 17 章　Fourier 分析

在第 15 章中，我们详细地讨论了一种特殊的函数项级数——幂级数，它的每一项都是幂函数. 这一章我们要讨论另一种特殊的函数项级数——三角级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

它的每一项都是三角函数. 讨论这种级数，不仅是数学上的兴趣，而且有强烈的物理背景，它是工程技术，特别是无线电通信、数字处理中一个不可缺少的重要数学工具.

## 17.1　周期函数的 Fourier 级数

我们知道，在很多科学技术问题中，经常会遇到周期现象，即经历一定的时间 $T$ 后又恢复到原状的现象. $T$ 称为这个周期现象的**周期**. 周期现象都可以用周期函数来描写. 最简单的周期函数就是通常所谓的**简谐波**：

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi),$$

它的周期是 $T = 2\pi/\omega$，$\omega$ 称为**圆频率**，$\varphi$ 称为**初相**，$a$ 称为**振幅**.

容易证明，两个频率相同的简谐波叠加的结果仍是一个简谐波，而两个频率不同的简谐波叠加的结果就不再是简谐波了. 例如

$$x_1(t) = \sin t,\quad x_2(t) = \frac{1}{3}\sin 3t,$$

前者的圆频率 $\omega = 1$，后者的圆频率 $\omega = 3$，它们叠加的结果

$$x_1(t) + x_2(t) = \sin t + \frac{1}{3}\sin 3t$$

是一个较为复杂的周期波.

这个例子说明,把两个频率不同的简谐波叠加起来能产生较为复杂的周期波.反过来看,一个较为复杂的周期波有可能分解成若干个简谐波的和.这个事实使人们产生一种想法:能否把一个周期函数分解为一系列频率不同的简谐波的和?即把周期函数 $f$ 表示为

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \tag{1}$$

如果能做到这一点,就可大大简化对周期波的研究.

设 $g(t)$是一个以 $T$ 为周期的周期函数,作变量代换

$$x = \frac{2\pi}{T}t \quad 或 \quad t = \frac{T}{2\pi}x,$$

则有

$$g(t) = g\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = f(x),$$

那么 $f$ 是以 $2\pi$ 为周期的函数.因此,只需讨论以 $2\pi$ 为周期的周期函数.

设 $f$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数,它的圆频率 $\omega=1$,表达式(1)可写为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n). \tag{2}$$

若记

$$a_0 = 2A_0 \sin\varphi_0, \quad a_n = A_n \sin\varphi_n, \quad b_n = A_n \cos\varphi_n \quad (n = 1,2,\cdots),$$

则式(2)又可写为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{3}$$

这样一来,刚才提出的把周期函数分解为一系列简谐波叠加的问题就变成一个纯粹的数学问题:在什么条件下,周期为 $2\pi$ 的函数能展开成形如式(3)的三角级数?

在下面的讨论中,要用到三角函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots$$

的一个重要性质——**正交性**,即任意两个不同的函数的乘积在区间$[-\pi,\pi]$上的积分为 0.这通过直接计算就能得到:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0.$$

利用三角公式

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x],$$

$$\sin mx\sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx\sin nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x - \sin(m-n)x],$$

又可得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x = \pi\delta_{mn},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x = \pi\delta_{mn},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\mathrm{d}x = 0.$$

现在回到刚才提出的问题,在什么条件下,周期为 $2\pi$ 的函数 $f$ 能表示成

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)? \tag{4}$$

暂且假定式(4)已成立,并且右边的级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于 $f(x)$,我们来确定级数中的系数 $a_n,b_n$.将式(4)的两边同乘以 $\cos nx$,并计算它们在$[-\pi,\pi]$上的积分:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$
$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\mathrm{d}x + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\mathrm{d}x\right).$$

根据三角函数系的正交性,右边第三项为 0;右边第一项当 $n=0$ 时等于 $\pi a_0$,当 $n$ 为正整数时为 0;右边第二项当 $k=n$ 时等于 $\pi a_n$,当 $k\neq n$ 时为 0.因而有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \pi a_n \quad (n=0,1,\cdots).$$

用同样的方法,在式(4)的两边同乘以 $\sin nx$,并在$[-\pi,\pi]$上积分,即得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \pi b_n \quad (n=1,2,\cdots).$$

于是得到

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots), \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots). \end{cases} \tag{5}$$

从这里可以看出,式(4)的常数项写成 $a_0/2$ 而不写成 $a_0$,就是为了使 $a_n$ 有一个统一的表达式.

公式(5)把展开式(4)中的系数完全确定了下来,但这是在上面所作的假定下

得到的.

现在从另外一个角度来看,假定 $f$ 是一个周期为 $2\pi$ 的可积且绝对可积的函数(如果 $f$ 是有界函数,就假定它是 Riemann 可积的,简称**可积**;如果 $f$ 是无界函数,就假定它是反常绝对可积的,简称**绝对可积**).按照公式(5),可以得出一列系数 $a_n,b_n$,有了 $a_n,b_n$,就可以写出相应的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{6}$$

至于这个级数是否收敛,如果收敛的话,它的和是否就等于 $f(x)$,这些问题都有待于进一步研究.但有一点是可以肯定的,这个级数是由 $f$ 所确定的.

为叙述简单起见,我们把具有周期 $2\pi$ 且在$[-\pi,\pi]$上可积且绝对可积的函数的全体记为 $\mathbf{R}[-\pi,\pi]$.

**定义 17.1.1** 设 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$.称由公式(5)确定的 $a_n,b_n$ 为$f$ 的 **Fourier**(傅里叶,1768~1830)**系数**,由 $a_n,b_n$ 确定的级数(6)称为 $f$ 的 Fourier 级数,记为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

下面将要看到,对相当广泛的一类函数,它的 Fourier 级数是收敛于它自己的,这正是 Fourier 级数之所以重要的原因.

下面看两个 Fourier 级数的例子.

**例 1** 设 $f$ 是周期为 $2\pi$ 的函数,且

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\leqslant x<\pi,\\ -\pi, & x=\pi.\end{cases}$$

写出它的 Fourier 级数.

**解** 因为 $x\cos nx$ 是奇函数,所以

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=(-1)^{n-1}\frac{2}{n}.$$

从而有

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx,$$

或者

$$x\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx\quad(-\pi\leqslant x<\pi).$$

□

**例 2** 设 $f$ 是周期为 $2\pi$ 的函数，且

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 2\pi,\\ 2\pi, & x=0.\end{cases}$$

写出它的 Fourier 级数.

**解** 按定义，有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\mathrm{d}x=2\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{2}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

从而有

$$f(x)\sim\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx,$$

或者

$$x\sim\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx\quad(0<x\leqslant 2\pi).$$

□

上面两个例子中的函数，作为 $2\pi$ 的周期函数，是不一样的（两个例子中函数的图像分别见图 17.1 和图 17.2），因而它们的 Fourier 级数也不一样.

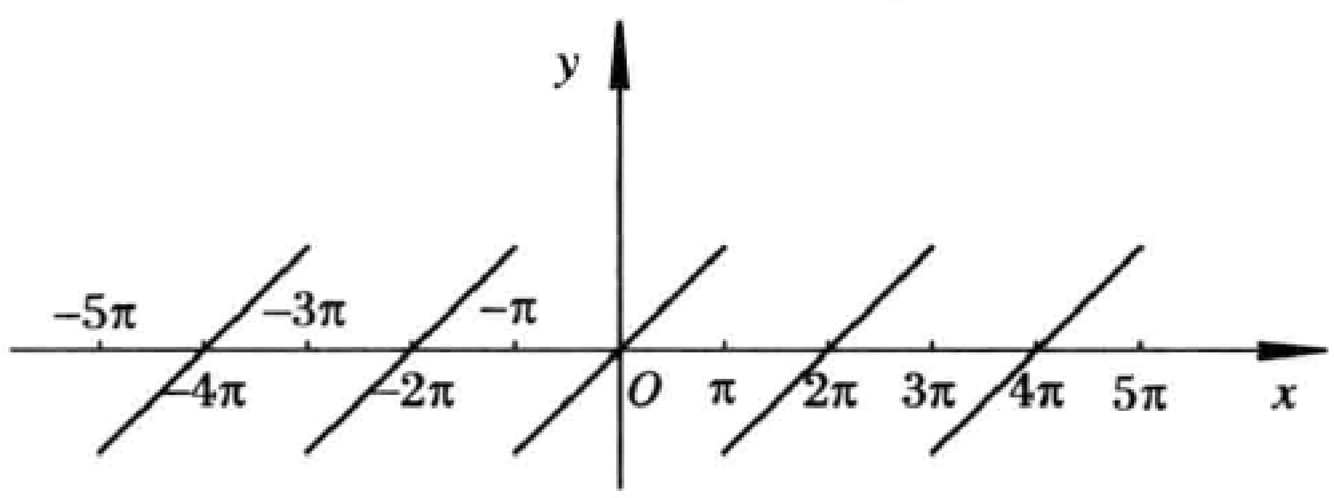



**图 17.1**

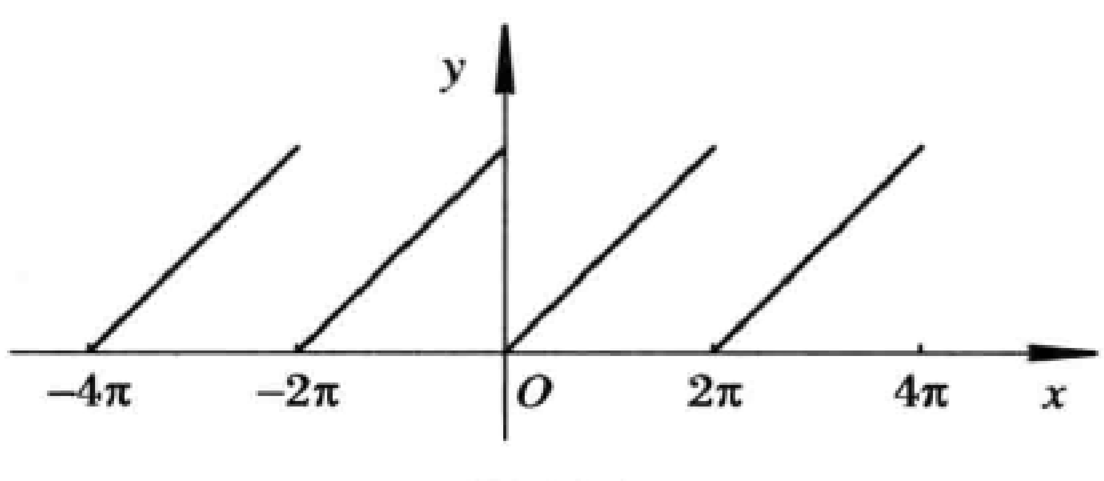



**图 17.2**

至于能否把“～”改成“＝”，要等学习过 Fourier 级数的收敛定理后才能作出判断. 不过从这两个例子可以看出一个共同点，它们的 Fourier 系数 $a_n$，$b_n$ 都满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

这个事实并非偶然的，下面的 Riemann-Lebesgue 引理断言，任何可积且绝对可积函数 $f$ 的 Fourier 系数都有此性质.

**定理 17.1.1**（Riemann-Lebesgue 引理） 设 $f$ 在 $[a,b]$（$b$ 可以是 $+\infty$）上可积且绝对可积，那么

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = 0, \tag{7}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = 0. \tag{8}$$

**证明** 我们先证明式(7)成立. 先设 $f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，故它必有界，即存在常数 $M$，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对 $x\in[a,b]$ 成立. 记 $n=[\sqrt{\lambda}]$，则当 $\lambda\to+\infty$ 时，$n\to+\infty$. 现在把区间 $[a,b]$ $n$ 等分，分点为

$$x_i = a+\frac{i}{n}(b-a)\quad (i=0,1,\cdots,n).$$

记 $\omega_i$ 为 $f$ 在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅，那么由于 $f$ 是可积的，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i = 0, \tag{9}$$

这里 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 注意到

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{\lambda}\,|\sin\lambda x_{i-1}-\sin\lambda x_i|\leqslant\frac{2}{\lambda},$$

$$|\cos\lambda x|\leqslant 1,$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\\
&\quad=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\\
&\quad=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(x_{i-1}))\cos\lambda x\,\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

利用式(9)，便有

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i+\frac{2n}{\lambda}M$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i + \frac{2}{\sqrt{\lambda}} M \to 0 \quad (\lambda \to +\infty).$$

再设 $f$ 在$[a,b]$上反常绝对可积.不妨设 $b$ 是 $f$ 唯一的瑕点,那么对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\eta>0$,使得

$$\int_{b-\eta}^{b} |f(x)| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $f$ 在$[a,b-\eta]$上 Riemann 可积,由刚才证明的结果知,存在 $\lambda_0>0$,当 $\lambda>\lambda_0$ 时,有

$$\left|\int_{a}^{b-\eta} f(x)\cos \lambda x \mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $\lambda>\lambda_0$ 时,有

$$\left|\int_{a}^{b} f(x)\cos \lambda x \mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{a}^{b-\eta} f(x)\cos \lambda x \mathrm{d}x\right| + \int_{b-\eta}^{b} |f(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

当 $b=+\infty$ 时,因为 $f$ 在$(a,+\infty)$上绝对可积,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $A_0>a$,使得$\int_{A_0}^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}$.又因 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_{a}^{A_0} f(x)\cos \lambda x \mathrm{d}x = 0$,所以存在 $\lambda_0>0$,当 $\lambda>\lambda_0$ 时,有$\left|\int_{a}^{A_0} f(x)\cos \lambda x \mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.于是,当 $\lambda>\lambda_0$ 时,有

$$\left|\int_{a}^{+\infty} f(x)\cos \lambda x \mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{a}^{A_0} f(x)\cos \lambda x \mathrm{d}x\right| + \int_{A_0}^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

这就证明了式(7)成立.用同样的方法,可以证明式(8)成立. □

由 Riemann-Lebesgue 引理,可得:

**推论 17.1.1**　设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$是某个可积且绝对可积函数的 Fourier 系数,那么

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{10}$$

由此可见,并不是每个三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

都有"资格"作为某个可积且绝对可积函数的 Fourier 级数的,它要能成为一个 Fourier 级数,必须满足条件式(10).

由 Dirichlet 判别法知,积分$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ 是收敛的,作为 Riemann-Lebesgue 引理的一个应用,我们可以算出这个积分的值.

**例 3**　证明:$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

**证明** 将等式

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

的两边对 $t$ 在$[0,\pi]$上积分,得

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t. \tag{11}$$

把上式右边的积分写成

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\sin(t/2)}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t$$

$$+\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\mathrm{d}t.$$

由于$\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{2\sin(t/2)}-\frac{1}{t}\right)=0$,根据 Riemann-Lebesgue 引理,上式右边中的第一个积分当 $n\to\infty$时趋于 0,因而有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+1/2)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

再由式(11),得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

在式(12)中作变量代换 $x=\lambda t$ $(\lambda>0)$,又得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$ □

我们将在定理 17.5.4 的证明中用到这一结果.

## 练 习 题 17.1

1. 证明:$n$ 次三角多项式

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

的 Fourier 级数就是它自己.

2. 设 $f$ 是周期为 $2\pi$ 的可积且绝对可积函数.证明:

(1) 如果 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=f(x)$,那么

$$a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0;$$

(2) 如果 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=-f(x)$,那么

$$a_{2n} = b_{2n} = 0.$$

3. 设 $a_n, b_n$ 是周期为 $2\pi$ 的可积且绝对可积函数 $f$ 的 Fourier 系数.证明:平移函数 $f(x+h)$ 的 Fourier 系数是

$$\tilde{a}_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh, \quad \tilde{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh.$$

4. 如果级数

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) < +\infty,$$

那么级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

必为某周期为 $2\pi$ 的函数的 Fourier 级数.

5. 计算极限 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_0^1 \ln x \cos^2 \lambda x \mathrm{d}x$.

6. 设 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可导,$f'$ 可积且绝对可积.如果 $f(-\pi)=f(\pi)$,证明:

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty).$$

## 问 题 17.1

1. 设 $f$ 是周期为 $2\pi$ 的可积且绝对可积函数.证明:

(1) 如果 $f$ 在 $(0,2\pi)$ 上递减,那么 $b_n \geqslant 0$;

(2) 如果 $f$ 在 $(0,2\pi)$ 上递增,那么 $b_n \leqslant 0$.

2. 设 $f$ 是周期为 $2\pi$ 的 Riemann 可积函数.如果它在 $(-\pi,\pi)$ 上单调,证明:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty).$$

3. 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,|\cos nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

4. 设 $f$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,|\cos nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

5. 设 $f$ 在 $[-a,a]$ 上连续, 且在 $x=0$ 处可导. 求证:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1-\cos\lambda x}{x}f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}\frac{f(x)-f(-x)}{x}\mathrm{d}x.$$

## 17.2 Fourier 级数的收敛定理

现在开始讨论 Fourier 级数的收敛问题. 为此, 先把它的部分和用积分表示出来.

固定 $x_0$, 17.1 节中式(6)的部分和为

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx_0 + b_k\sin kx_0).$$

把上节中 $a_k, b_k$ 的表达式(5)代入上式, 得

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx\cos kx_0 + \sin kx\sin kx_0)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

利用三角恒等式

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \quad (x\neq 2m\pi), \tag{1}$$

即得

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-x_0)}{2\sin\frac{1}{2}(x-x_0)}\mathrm{d}x.$$

由于被积函数以 $2\pi$ 为周期, 故可把积分区间改为 $[x_0-\pi, x_0+\pi]$, 再作变量代换

$x - x_0 = t$，则积分变为

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t + x_0)\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

把上述积分分为两个积为的和：

$$\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi},$$

并对前一积分作变量代换 $t = -u$，最后得 $S_n(x_0)$的积分表达式：

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x_0 + t) + f(x_0 - t))\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t. \tag{2}$$

这个重要的积分称为 **Dirichlet 积分**，是讨论 Fourier 级数收敛问题的出发点. 函数

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

称为 **Dirichlet 核**.

这样一来，Fourier 级数的收敛问题，就变为研究含有参变量 $n$ 的积分(2)当 $n\to\infty$ 时是否有极限的问题. 不难看出，上节证明的 Riemann-Lebesgue 引理在这个问题的讨论中将发挥重要的作用.

让我们对 Dirichlet 积分(2)作进一步的研究.

把积分(2)写成两部分：

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right), \tag{3}$$

这里 $\delta$ 是一个任意小的正数. 由于函数

$$\frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

在区间$[\delta,\pi]$上可积且绝对可积，由 Riemann-Lebesgue 引理，式(3)右边中的第二个积分当 $n\to\infty$ 时趋于 0. 因此，当 $n\to\infty$ 时，$S_n(x_0)$的极限存在与否，以及收敛到什么数值，完全取决于式(3)右边中的第一个积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}(f(x_0 + t) + f(x_0 - t))\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t,$$

而这个积分的值仅与 $f$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上的值有关. 这样,我们就得到了下面所谓的 Fourier 级数的**局部化定理**:

**定理 17.2.1** 设 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$. 那么 $f$ 的 Fourier 级数在点 $x_0$ 处是否收敛,以及收敛到什么数值,仅与 $f$ 在 $x_0$ 点附近的行为有关.

由此可见,如果函数 $f$ 和 $g$ 在 $x_0$ 点的充分小邻域内有相同的值,则不论它们在这邻域之外的值如何,它们的 Fourier 级数在 $x_0$ 处同敛散,而且当收敛时有相同的和. 考虑到 $f$ 的 Fourier 系数 $a_n,b_n$ 是由 $f$ 在整个区间 $[-\pi,\pi]$ 上的数值确定的,上述这个结论是出乎意料的.

现在利用 Riemann-Lebesgue 引理给出 $f$ 的 Fourier 级数收敛的充分条件.

**定理 17.2.2**(Dini 判别法) 设 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$. 对某个实数 $s$,令

$$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s.$$

如果存在 $\delta>0$,使得函数 $\varphi(t)/t$ 在 $[0,\delta]$ 上可积且绝对可积,那么 $f$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 处收敛于 $s$.

**证明** 在 17.1 节的例 3 中已经证明

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=1.$$

于是对任意的 $s$,有

$$\begin{aligned}S_n(x_0)-s&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{4}$$

因为当 $t\to0$ 时,$2\sin(t/2)\sim t$,由假定,$\varphi(t)/t$ 在 $[0,\delta]$ 上可积且绝对可积,所以 $\dfrac{\varphi(t)}{2\sin(t/2)}$ 也在 $[0,\delta]$ 上可积且绝对可积,因而在 $[0,\pi]$ 上也可积且绝对可积. 由 Riemann-Lebesgue 引理,式(4)的右边当 $n\to\infty$ 时趋于 0,因而

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=s.$$ □

从 Dini 判别法,可以得到下面一些便于应用的判别法.

**定义 17.2.1** 设 $f$ 是定义在 $x_0$ 附近的函数. 如果存在 $\delta>0$, $L>0$ 和 $\alpha\in(0,1]$,使得当 $t\in(0,\delta]$ 时,有

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\leqslant Lt^{\alpha},\quad |f(x_0-t)-f(x_0-0)|\leqslant Lt^{\alpha},$$

则称 $f$ 在 $x_0$ 附近满足 $\alpha$ 阶 **Lipschitz**(利普希兹,1832~1903)**条件**.

**定理 17.2.3** 设 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$. 如果 $f$ 在 $x_0$ 附近满足 $\alpha$ 阶 Lipschitz 条件,那么 $f$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 处收敛于 $(f(x_0+0)+f(x_0-0))/2$.

**证明** 在定理 17.2.1 中取 $s=(f(x_0+0)+f(x_0-0))/2$,于是

$$\frac{\varphi(t)}{t}=\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}+\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}.$$

因为 $f$ 在 $x_0$ 附近满足 $\alpha$ 阶 Lipschitz 条件,所以

$$\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right|\leqslant\frac{2L}{t^{1-\alpha}}\quad(0<t\leqslant\delta).$$

当 $\alpha=1$ 时,$\varphi(t)/t$ 是有界函数;当 $0<\alpha<1$ 时,$\varphi(t)/t$ 在 $[0,\delta]$ 上绝对可积. 从而 Dini 判别法的条件成立. □

**定理 17.2.4** 设 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$.

(1) 如果 $f$ 在 $x_0$ 处存在导数 $f'(x_0)$,或者有两个有限的单侧导数:

$$f'_+(x_0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t},\quad f'_-(x_0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{-t},$$

那么 $f$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 处收敛于 $f(x_0)$.

(2) 如果 $f$ 在 $x_0$ 处仅有两个有限的广义单侧导数:

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t},\quad \lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t},$$

那么 $f$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 处收敛于 $(f(x_0+0)+f(x_0-0))/2$.

**证明** 设 $f$ 在 $x_0$ 处有两个有限的单侧导数,从而存在 $\delta>0$,当 $0<t<\delta$ 时,有

$$|f(x_0+t)-f(x_0)|\leqslant Lt,\quad |f(x_0-t)-f(x_0)|\leqslant Lt.$$

这说明 $f$ 在 $x_0$ 的附近满足 1 阶 Lipschitz 条件. 在其他几种情况下也能推出同样的结论. 由定理 17.2.3,即知 $f$ 的 Fourier 级数收敛于 $(f(x_0+0)+f(x_0-0))/2$. □

为了把 Fourier 级数收敛的条件说得更明确些,我们引入下面的定义.

**定义 17.2.2** 如果存在 $[a,b]$ 的一个分割

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b,$$

使得按以下方式定义在每个子区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上的函数

$$g_i(x)=\begin{cases}f(t_{i-1}+0), & x=t_{i-1},\\ f(x), & x\in(t_{i-1},t_i)\\ f(t_i-0), & x=t_i\end{cases}\quad(i=1,\cdots,n),$$

都是可微的(在两个端点处单侧可微),则称函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上是**分段可微的**.

根据这个定义,我们有:

**定理 17.2.5** 如果周期为 $2\pi$ 的函数 $f$ 在$[-\pi,\pi]$上是分段可微的,那么 $f$ 的 Fourier 级数在每点 $x_0$ 处收敛于$(f(x_0+0)+f(x_0-0))/2$.特别是在 $f$ 的连续点处,它收敛于 $f(x_0)$.

**证明** 这实际上就是定理 17.2.4,不过是换一种说法而已. □

由此可见,只要 $f$ 在$[-\pi,\pi]$上有一阶导数,就能把它展开成 Fourier 级数.从这一点来看,Fourier 级数比幂级数优越得多.

现在让我们回过头来看一下 17.1 节中的两个例子.这两个例子中的函数显然都是分段可微的.根据定理 17.2.5,对例 1 而言,有

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx \quad (-\pi<x<\pi),$$

或者

$$\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi<x<\pi).$$

在上式中取 $x=\pi/2$,就得到

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

$f$ 在两个端点处不连续,$f(\pi+0)=-\pi,f(\pi-0)=\pi$,因而 $f$ 的 Fourier 级数在 $x=\pi$ 处收敛于$(f(\pi+0)+f(\pi-0))/2=0$.同理,它在 $x=-\pi$ 处也收敛于 0.

对例 2,有

$$x=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx \quad (0<x<2\pi),$$

或者

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \quad (0<x<2\pi). \tag{5}$$

这正是当年 Abel 举的例子,用以说明连续函数项级数的和可能是不连续的(见 9.3 节).

在区间$(0,2\pi)$的两个端点处,由于 $f(0+0)=0,f(0-0)=2\pi$,所以 $f$ 的 Fourier 级数在 $x=0$ 处收敛于$(f(0+0)+f(0-0))/2=\pi$.同理,它在 $x=2\pi$ 处也收敛于 $\pi$.

从等式(5)出发,不必经过计算就可得到其他一些有趣的等式.例如,在式(5)中把 $x$ 换成 $2x$,便可得

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n} \quad (0<x<\pi).$$

再从式(5)中减去这个等式,便有

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\quad(0<x<\pi).$$

令 $x=\pi/2$. 由于 $\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=(-1)^{n-1}$,我们再一次得到

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

下面再看两个例子.

**例 1**　把函数

$$f(x)=x^2\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

展开为 Fourier 级数.

**解**　把 $f$ 的定义扩充到整个数轴上,使之成为周期为 $2\pi$ 的函数(图 17.3). 把扩充定义后的函数记为 $\tilde{f}$,那么 $\tilde{f}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期为 $2\pi$ 的连续偶函数. 于是

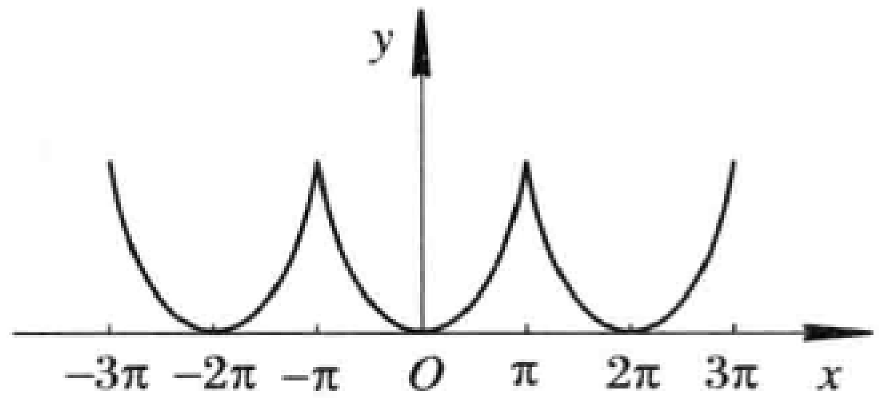



图 17.3

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{4}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

由 Dini 判别法,即得

$$\tilde{f}(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nx,$$

限制在区间 $[-\pi,\pi]$ 上,有

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nx\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi),$$

或者

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).\tag{6}$$

在式(6)中取 $x=\pi$,则得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6};$$

取 $x=0$,则得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \qquad \square$$

**例 2** 把 $f(x)=\cos ax\,(a\notin \mathbf{Z})$在$[-\pi,\pi]$上展开为 Fourier 级数.

**解** 把 $f$ 延拓为整个数轴上的以 $2\pi$ 为周期的函数. 记延拓后的函数为 $\tilde{f}$,那么 $\tilde{f}$ 是$(-\infty,+\infty)$上的周期为 $2\pi$ 的连续偶函数. 因此

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax \cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(a-n)x+\cos(a+n)x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(a-n)\pi}{a-n}+\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2a\sin a\pi}{a^2-n^2} \quad (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n &= 0 \quad (n=1,2,\cdots). \end{aligned}$$

由 Dini 判别法,即得 $\tilde{f}$ 的 Fourier 展开式为

$$\tilde{f}(x) = \frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right).$$

限制在$[-\pi,\pi]$上,就得

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right). \qquad \square$$

如果在上式中取 $x=0$,可得

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2a}{a^2-n^2} \quad (a\notin \mathbf{Z}). \tag{7}$$

我们将在 18.2 节中用这个等式来计算一个重要的反常积分.

对上面几个例子,都是先给出函数在$[-\pi,\pi]$或$[0,2\pi]$上的表达式,然后把它扩充成整个数轴上的周期为 $2\pi$ 的函数,再把它展开为 Fourier 级数. 对只在$(0,\pi)$上定义的函数,如何将其展开成 Fourier 级数? 这时,在$(-\pi,0)$上可任意补充 $f$ 的定义,使 $f$ 在$(-\pi,\pi)$上有定义,然后再把它以 $2\pi$ 为周期延拓到整个数轴上去. 对各种不同的补充,得到的 Fourier 级数自然也是不同的,但在$(0,\pi)$上,它们都收敛到同一个函数.

下面的两种补充方法是最常用的.

一种方法是用公式

$$f(x) = f(-x) \quad (-\pi < x < 0)$$

来补充 $f$ 在$(-\pi,0)$上的定义，使 $f$ 在$(-\pi,\pi)$上成为偶函数. 这种补充方法简称为**偶性延拓**. 这样便有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0 \quad (n = 1,2,\cdots).$$

因此，$f$ 的 Fourier 级数中只含余弦项：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx,$$

称它为**余弦级数**.

另一种补充方法是所谓的**奇性延拓**，即用公式

$$f(x) = -f(-x) \quad (-\pi < x < 0)$$

来补充 $f$ 在$(-\pi,0)$上的定义. 这时，$f$ 是$(-\pi,\pi)$上的奇函数. 于是

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0 \quad (n = 0,1,\cdots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots).$$

因而 $f$ 的 Fourier 级数是一个**正弦级数**：

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx.$$

由此可见，对只定义在区间$(0,\pi)$上的函数，只要满足 Dini 定理的条件，我们既可把它展开成正弦级数，也可把它展开成余弦级数.

**例 3**　把函数

$$f(x) = x \quad (0 < x < \pi)$$

分别展开成余弦级数和正弦级数.

**解**　为把 $f$ 展开成余弦级数，先把 $f$ 偶性延拓到区间$(-\pi,0)$上，然后再把它以周期 $2\pi$ 延拓到整个数轴上，所得的函数记为 $\tilde{f}$(图 17.4). 于是

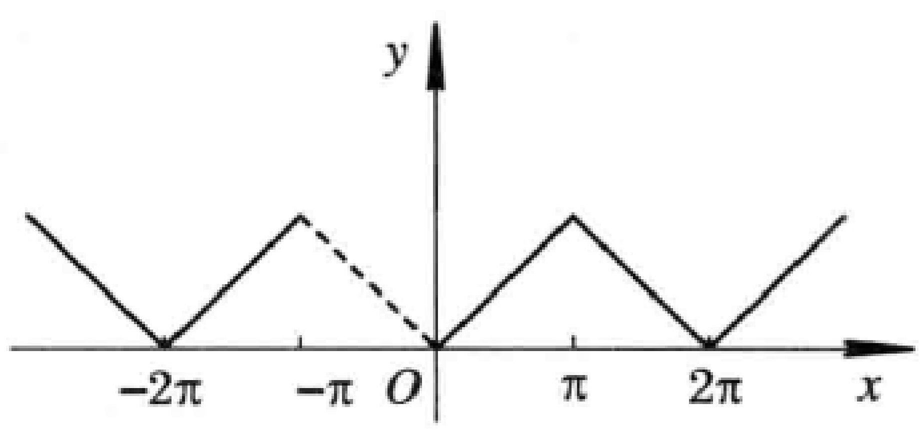



图 17.4

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1)$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{-4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

因此

$$\widetilde{f}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

特别当 $x \in [0,\pi]$ 时，有

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

令 $x=0$，得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

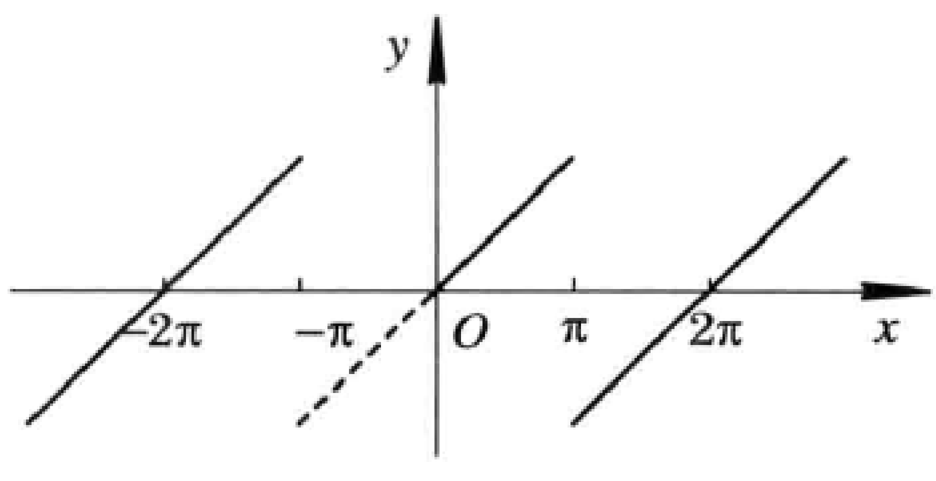



图 17.5

为把 $f$ 展开成正弦级数，先把 $f$ 奇性延拓到区间 $(-\pi,0)$ 上，然后再把它以周期 $2\pi$ 延拓到整个数轴上，所得的函数的图像见图 17.5. 这就是 17.1 节的例 1 中讨论过的情形，故得

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} \quad (0 \leqslant x < \pi). \qquad \square$$

现在讨论 $f$ 的周期为 $2l$ 的情形. 作变换 $x = lt/\pi$，并记

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = g(t),$$

那么 $g$ 是周期为 $2\pi$ 的函数. 如果 $g$ 满足 Dini 定理的条件，便有

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt),$$

这里

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,\mathrm{d}t \quad (n = 0,1,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \quad (n = 1,2,\cdots).$$

回到原来的变量 $x$，就有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n = 0,1,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n = 1,2,\cdots).$$

这就是周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 展开式.

如果 $f$ 只定义在 $(0,l)$ 上，那么既可把它展开成余弦级数：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n = 0,1,\cdots);$$

也可把 $f$ 展开成正弦级数：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n = 1,2,\cdots).$$

**例 4**　把

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{l}{2}, \\ l - x, & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

在 $(0,l)$ 上展开为正弦级数.

**解**　把 $f$ 作奇性延拓(图 17.6)，于是

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \\ &= \frac{2}{l}\int_0^{l/2} x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx + \frac{2}{l}\int_{l/2}^{l}(l - x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \\ &= \frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

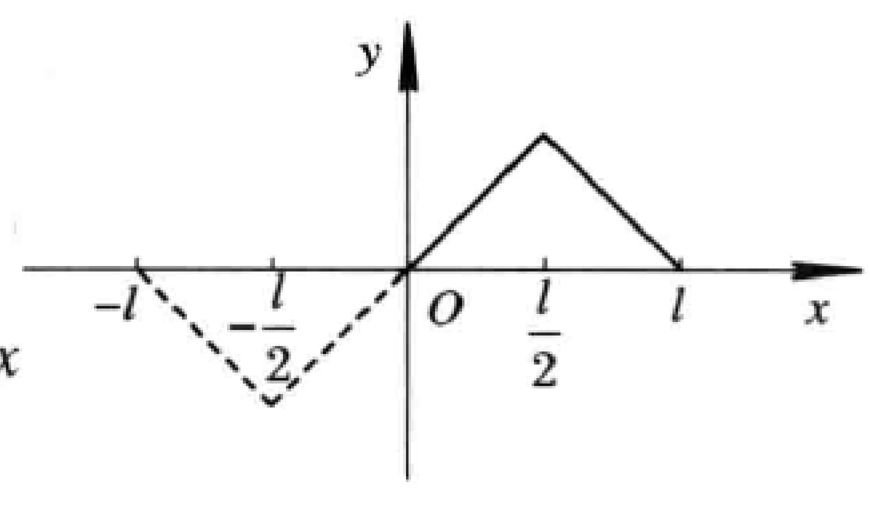


图 17.6

因此

$$b_{2k} = 0, \quad b_{2k+1} = \frac{4l}{\pi^2}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \quad (k = 0,1,\cdots).$$

从而得 $f$ 的正弦展开式

$$f(x) = \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{2k+1}{l}\pi x \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$ □

## 练 习 题 17.2

1. 把函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (-\pi < x < \pi)$$

展开为 Fourier 级数；证明：当 $0 < x < \pi$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \dfrac{\pi}{4}$，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.

2. 在区间$(-\pi,\pi)$上把下列函数展开为 Fourier 级数：

(1) $|x|$；　(2) $\sin ax\,(a \notin \mathbf{Z})$；　(3) $x\sin x$.

3. 把 $f(x) = x - [x]$在$[0,1]$上展开为 Fourier 级数.

4. 在区间$(-l,l)$上把下列函数展开为 Fourier 级数：

(1) $x$；　(2) $x + |x|$.

5. 利用 $\cos ax$ 在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 展开式(例 2)，证明：

(1) $\cot x = \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}\,(x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$；

(2) $\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}\,(x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

6. 证明：对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$，有

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 2nx,$$

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2nx.$$

7. 对 $x \in (0, 2\pi)$以及 $a \neq 0$，求证：

$$e^{ax} = \frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi} \left( \frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\cos kx - k\sin kx}{k^2 + a^2} \right).$$

## 问 题 17.2

1. 证明下列等式：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\cos nx}{n} = \ln\left(2\cos\dfrac{x}{2}\right)(-\pi < x < \pi)$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n} = -\ln\left(2\sin\dfrac{x}{2}\right)(0 < x < 2\pi)$.

2. 设 $f$ 在$[a,b]$上 Riemann 可积. 利用练习题 17.2 的第 6 题中的等式，证明：

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \mid \cos \lambda x \mid \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x,$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \mid \sin \lambda x \mid \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

3. 设 $g$ 是区间$[0,h]$($h>0$)上的增函数.证明:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^h g(t) \frac{\sin \lambda t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} g(0+0).$$

## 17.3　Fourier 级数的 Cesàro 求和

Dini 收敛判别法告诉我们,要使 $f$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 处收敛于 $f(x_0)$,除了要求 $f$ 在 $x_0$ 处连续外,还要求 $f$ 在 $x_0$ 处有一阶导数,或有左右导数.这就自然产生这样的问题:仅有 $f$ 的连续性,是否能保证它的 Fourier 级数收敛于自己? 1876 年,Du Bois-Reymond(杜布瓦雷蒙,1831～1889)举出了一个连续函数,它的 Fourier 级数在若干点是发散的,从而否定地回答了刚才的问题.

另一方面,人们并不在连续函数上加条件,而去改进级数收敛的定义,使得在新的收敛意义下,连续函数的 Fourier 级数能收敛于自己.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个无穷级数,$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 为它的部分和.我们曾经定义:如果 $\lim_{n \to \infty} S_n = s$,则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的,$s$ 是它的和.这个定义很自然,与人们的直观认识是一致的.它的不足之处是,一些很简单的级数在上述意义下却没有和.例如,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \tag{1}$$

就是这样.

新给出的收敛定义,必须使得在原来意义下收敛的级数,在新的意义下仍然收敛,而且有相同的和;而一些在原来意义下发散的级数,在新的意义下却是收敛的.换句话说,新的定义必须比原来的定义能使更多的级数有和.下面介绍的 Cesàro 求和法就能满足这种要求.

**定义 17.3.1**　设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个无穷级数,$\{S_n\}$ 是它的部分和数列.如果$\{S_n\}$

的算术平均

$$\sigma_n = \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

是一个收敛数列,即$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma$,就称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **在Cesàro意义下收敛(或均值意义下收敛)**,$\sigma$ 称为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的 **Cesàro 和**,记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sigma(\mathrm{C})$. 这时,称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **可以 Cesàro 求和**

容易看出,如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 在原来意义下收敛于$s$,即$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$,那么$\{S_n\}$的算术平均序列

$$\sigma_n = \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n}$$

也以 $s$ 为极限,即$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 Cesàro 意义下也收敛,而且有相同的和 $s$. 另一方面,的确有这样的级数,它在 Cesàro 意义下收敛,而在原来意义下是发散的. 例如刚才提到的级数(1),它的部分和数列$\{S_n\}$是

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 1, \quad S_4 = 0, \quad \cdots,$$

因而在原来的意义下是发散的. 但是

$$\sigma_{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty),$$

因而有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = \frac{1}{2}\ (\mathrm{C}).$$

现在把 Cesàro 求和法用到 Fourier 级数上去. 我们证明,连续函数 $f$ 的 Fourier 级数在 Cesàro 意义下一定收敛于自己.

现设

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

它的部分和

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0 + t) + f(x_0 - t))\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t,$$

因而它的算术平均

$$\begin{aligned}\sigma_n(x_0) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x_0) \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(k+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{2}$$

这里我们用了三角恒等式

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin(t/2)}.$$

式(2)对任何可积且绝对可积的 $f$ 都成立. 特别地,取 $f=1$,这时 $S_n(x_0)=1$,所以 $\sigma_n(x_0)=1$,代入式(2),得

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2\mathrm{d}t = 1. \tag{3}$$

现在证明:

**定理 17.3.1**(Fejér)　设 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$. 如果 $f$ 在 $x_0$ 处有左、右极限 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$,那么它的 Fourier 级数在 $x_0$ 处的 Cesàro 和为

$$\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)).$$

特别地,当 $f$ 在 $x_0$ 处连续时,它的 Fourier 级数的 Cesàro 和即为 $f(x_0)$.

**证明**　记 $s=(f(x_0+0)+f(x_0-0))/2$. 我们要证明

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x_0) = s.$$

根据式(2)和式(3),可得

$$\begin{aligned}\sigma_n(x_0)-s &= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s)\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin t/2}\right)^2\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{4}$$

这里

$$\varphi(t) = f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s.$$

由于左、右极限 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 都存在,故对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta\in(0,\pi)$,当 $0<t<\delta$ 时,

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x_0-t)-f(x_0-0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

即 $|\varphi(t)|<\varepsilon$. 把式(4)写成两个积分:

$$\sigma_n(x_0) - s = \frac{1}{2n\pi}\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right) = I_1 + I_2.$$

分别估计这两个积分，得

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leqslant \frac{1}{2n\pi}\int_0^\delta |\varphi(t)| \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2 \mathrm{d}t \\
&< \frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^\delta \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2 \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2}, \\
|I_2| &\leqslant \frac{1}{2n\pi}\int_\delta^\pi |\varphi(t)| \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2 \mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{2n\pi\sin^2\dfrac{\delta}{2}}\int_0^\pi |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{A}{n},
\end{aligned}$$

其中 $A = \left(2\pi\sin^2\dfrac{\delta}{2}\right)^{-1}\displaystyle\int_0^\pi |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$ 是一个常数. 故当 $n > 2A/\varepsilon$ 时,

$$|\sigma_n(x_0) - s| \leqslant |I_1| + |I_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

从上面的定理，可得：

**推论 17.3.1** 设 $f \in \mathbf{R}[-\pi,\pi]$. 如果 $f$ 在 $x_0$ 处有左、右极限，且其 Fourier 级数在 $x_0$ 处收敛，那么必收敛于 $(f(x_0+0)+f(x_0-0))/2$.

**证明** 设 $f$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 处收敛于 $s$，则其 Cesàro 和也必为 $s$. 由定理 17.3.1 知，其 Cesàro 和为 $(f(x_0+0)+f(x_0-0))/2$，故得

$$s = \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0)). \qquad \square$$

这个推论断言，如果 $f$ 的 Fourier 级数在某点 $x_0$ 处收敛，且 $f(x_0+0)$ 和 $f(x_0-0)$ 存在，那么必收敛于 $(f(x_0+0)+f(x_0-0))/2$，而不会收敛于其他值. 这是 Fourier 级数和 Taylor 级数的又一个不同之处.

如果 $f$ 是周期为 $2\pi$ 的连续函数，则有下述更强的结果.

**定理 17.3.2**(Fejér 定理) 如果 $f$ 是周期为 $2\pi$ 的连续函数，那么它的 Fourier 级数在 Cesàro 意义下在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $f$.

**证明** 根据定理 17.3.1 中的推导，有

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \varphi_x(t)\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2 \mathrm{d}t, \tag{5}$$

其中 $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$.

由于 $f$ 是整个数轴上的连续函数，故在闭区间 $[-2\pi,2\pi]$ 上一致连续. 对给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,\pi)$，当 $0\leqslant t<\delta$ 时，不等式

$$|f(x+t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x-t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对$[-\pi,\pi]$中所有 $x$ 成立. 因而$|\varphi_x(t)|<\varepsilon$ 对$[-\pi,\pi]$中所有 $x$ 成立. 与定理 17.3.1 的证明一样,把式(5)拆成两个积分:

$$\sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{2n\pi}\left(\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)=I_1+I_2.$$

易知

$$|I_1|\leqslant\frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon}{2}.$$

估计 $I_2$ 时,注意到 $f$ 是$[-\pi,\pi]$上的周期为 $2\pi$ 的连续函数,故在$(-\infty,+\infty)$上,有$|f(x)|\leqslant M$. 于是当 $x\in[-\pi,\pi]$, $t\in[0,\pi]$时,

$$|\varphi_x(t)|\leqslant|f(x+t)|+|f(x-t)|+2|f(x)|\leqslant 4M,$$

因而

$$|I_2|\leqslant\frac{1}{2n\pi}\int_{\delta}^{\pi}|\varphi_x(t)|\frac{\mathrm{d}t}{\sin^2\frac{t}{2}}\leqslant\frac{2M}{n\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

所以当 $n>4M\Big/\left(\varepsilon\sin^2\frac{\delta}{2}\right)$时,

$$|\sigma_n(x)-f(x)|\leqslant|I_1|+|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

对$[-\pi,\pi]$中所有 $x$ 成立. 由周期性,上式对$(-\infty,+\infty)$中所有 $x$ 成立. □

作为 Fejér 定理的一个重要应用,我们来研究用三角多项式逼近周期为 $2\pi$ 的连续函数的问题.

称

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$$

为 $n$ 次三角多项式. Fourier 级数的部分和就是一个三角多项式.

15.6 节曾经讲过,闭区间$[a,b]$上的连续函数不一定能展开成幂级数,但能用多项式序列一致逼近. 同样,闭区间$[-\pi,\pi]$上的连续函数不一定能展开成 Fourier 级数,那么能不能用三角多项式来一致逼近呢? 答案是肯定的.

**定理 17.3.3**(Weierstrass 逼近定理) 如果 $f$ 在$[-\pi,\pi]$上连续,且 $f(-\pi)=f(\pi)$,那么 $f$ 必能用三角多项式一致逼近.

**证明** 根据假定,我们能把 $f$ 延拓成整个数轴上的以 $2\pi$ 为周期的连续函数. 于是由 Fejér 定理知,$f$ 能在$(-\infty,+\infty)$上用序列$\{\sigma_n(x)\}$一致逼近. 因为 $f$ 的 Fourier 级数的 $k$ 次部分和$S_k(x)$是一个 $k$ 次三角多项式,所以

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}(S_0(x) + \cdots + S_{n-1}(x))$$

是一个 $n-1$ 次三角多项式，它就是一个一致逼近 $f$ 的三角多项式序列. □

上面这个证明虽然简单，却是一个构造性的证明，因为它给出了用来一致逼近 $f$ 的三角多项式 $\sigma_n$，它就是 $f$ 的 Fourier 级数部分和的算术平均.

## 练 习 题 17.3

1. 求下列级数的 Cesàro 和：

   (1) $1+0-1+1+0-1+\cdots$；

   (2) $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx+\cdots(0<x<2\pi)$；

   (3) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots(0<x<2\pi)$.

2. 证明：$[0,\pi]$上的连续函数可用余弦多项式一致逼近.

3. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 可以 Cesàro 求和的必要条件是

$$a_n = o(n).$$

4. 试由 Weierstrass 的关于三角多项式的逼近定理，导出关于代数多项式的逼近定理.

## 问 题 17.3

1. 设由无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 产生的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1. 如果

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s,$$

   则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **在 Abel 意义下收敛**，$s$ 称为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 的 **Abel 和**，记为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(\mathrm{A})$. 这时，称 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **可以 Abel 求和**. 证明：

   (1) 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 在原来意义下收敛于 $s$，那么必有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s\ (\mathrm{A});$$

   (2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{2}\ (\mathrm{A})$.

2. 证明：如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s\ (\mathrm{C})$，那么必有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s\ (\mathrm{A})$.

3. 证明：级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)=\frac{1}{4}$ (A)，但它不能 Cesàro 求和.

4. 证明：$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln n=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}$ (C).

5. 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ 是两个收敛级数，其和分别为 $A$ 和 $B$. 证明：它们的 Cauchy 乘积 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ 必能 Abel 求和，并且

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=AB\ (\mathrm{A})$$

## 17.4　平方平均逼近

前面已经证明，周期为 $2\pi$ 的连续函数能用三角多项式一致逼近. 对一般的可积函数，这个结论不再成立. 问题出在哪里呢？所谓一致逼近，是指

$$\sup_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|f(x)-T_n(x)|\to 0\quad(n\to\infty).$$

这就要求 $f$ 与 $T_n$ 之差在整个区间 $[-\pi,\pi]$ 上均匀地趋于 0，而不允许有某些点例外. 由于连续函数在邻近点处的值相差很小，这点能办到，而对一般的可积函数就做不到了. 在这种情况下，我们只能放弃一致逼近，退而求其次，要求能用三角多项式 $T_n$ 平均地逼近 $f$，即要求

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2\mathrm{d}x\to 0\quad(n\to\infty).$$

这时，我们要求对 $f$ 增加一些条件，如果 $f$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的有界函数，我们假定它是 Riemann 可积的，因而 $f^2$ 也是 Riemann 可积的；如果 $f$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的无界函数，我们假定 $f^2$ 是反常可积的. 从不等式

$$|f|\leqslant\frac{1}{2}(1+|f|^2)$$

知，$f$ 是反常绝对可积的，因而反常可积. 把 $[-\pi,\pi]$ 上这种函数的全体记为 $\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$.

现在给出下面的定义.

**定义 17.4.1**　设 $f\in\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$. 如果存在三角多项式序列 $\{T_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2\mathrm{d}x=0,$$

则称$\{T_n\}$**平方平均收敛于** $f$,或者称 $f$ 可用三角多项式**平方平均逼近**.

那么,对 $\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$中的 $f$,是否存在平方平均收敛于 $f$ 的三角多项式序列$\{T_n\}$呢? 回答是肯定的.证明这个结论的关键是 Fourier 级数部分和 $S_n(x)$的一个极值性质.下面先对一般正交系的 Fourier 级数证明这个性质,然后把它用到三角函数系的 Fourier 级数上去.

我们把$[a,b]$上所有可积且平方可积的函数的全体记为 $\mathbf{R}^2[a,b]$.在 $\mathbf{R}^2[a,b]$上按通常函数的加法和乘以实数的运算引进加法与数乘运算,$\mathbf{R}^2[a,b]$成为一个线性空间.对任意的 $f,g\in\mathbf{R}^2[a,b]$,称积分

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

为 $f$ 和 $g$ 的**内积**.内积有以下简单性质:

(1) $\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$对任意的 $f,g\in\mathbf{R}^2[a,b]$成立;

(2) 对任意的实数 $\alpha_1,\alpha_2$ 及 $f_1,f_2,g\in\mathbf{R}^2[a,b]$,有

$$\langle\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2,g\rangle=\alpha_1\langle f_1,g\rangle+\alpha_2\langle f_2,g\rangle;$$

(3) 对任意的 $f\in\mathbf{R}^2[a,b]$,$\langle f,f\rangle\geqslant 0$.

称

$$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

为 $f$ 的**范数**.

如果 $f,g\in\mathbf{R}^2[a,b]$满足条件

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0,$$

我们就称 $f$ 和 $g$ 是**正交**的.

设$\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n,\cdots\}$是 $\mathbf{R}^2[a,b]$中的一个函数系.如果它们满足

$$\langle\varphi_k,\varphi_l\rangle=\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_l(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & k\neq l,\\ \lambda_k>0, & k=l,\end{cases}$$

则称$\{\varphi_k\}$是 $\mathbf{R}^2[a,b]$中的一个**正交系**.如果还有

$$\lambda_k=1\quad(k=0,1,\cdots),$$

则称这个函数系是**规范正交**的.

例如,函数系

$$\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$$

是$[-\pi,\pi]$上的正交系,而

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\cdots\right\}\tag{1}$$

是$[-\pi,\pi]$上的规范正交系.

设$\{\varphi_k\}$是$\mathbf{R}^2[a,b]$中一个给定的规范正交系.对任意的$f\in\mathbf{R}^2[a,b]$,称

$$c_k=\langle f,\varphi_k\rangle=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x\quad(k=0,1,\cdots)\tag{2}$$

为$f$关于正交系$\{\varphi_k\}$的 **Fourier 系数**.由此产生的级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$称为$f$关于正交系$\{\varphi_k\}$的 **Fourier 级数**,记为

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x).\tag{3}$$

前面讨论的 Fourier 级数只是对特定的规范正交系(1)而言的.

与以前一样,记

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x)$$

为式(3)的部分和.称

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$$

为$n$次$\varphi$多项式,其中$\alpha_k$是任意给定的实数.

现在问,对于给定的$f$和正整数$n$,怎样的$\varphi$多项式$T_n$使范数

$$\|f-T_n\|=\left(\int_a^b(f(x)-T_n(x))^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

取最小值,即平方平均误差最小?根据$\{\varphi_k\}$的规范正交性以及等式(2),有

$$\begin{aligned}\|f-T_n\|^2&=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_a^b f(x)T_n(x)\mathrm{d}x+\int_a^b T_n^2(x)\mathrm{d}x\\&=\|f\|^2-2\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x\\&\quad+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\alpha_k\alpha_j\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x\\&=\|f\|^2-2\sum_{k=0}^{n}c_k\alpha_k+\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^2\\&=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}c_k^2+\sum_{k=0}^{n}(c_k-\alpha_k)^2.\end{aligned}$$

由此看出,当且仅当

$$\alpha_k=c_k\quad(k=0,1,\cdots,n)$$

时,$\|f-T_n\|^2$才取到最小值

$$\| f-\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k \|^2 = \| f\|^2-\sum_{k=0}^{n} c_k^2. \tag{4}$$

这就是说，$f$ 关于$\{\varphi_k\}$的 Fourier 级数的 $n$ 次部分和，使得 $\| f-T_n \|$ 取得最小值.这就是前面曾经提到的 Fourier 级数部分和的极值性质.从式(4)，可得

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^2 \leqslant \| f\|^2, \tag{5}$$

这里$\{c_k\}$是 $f$ 关于$\{\varphi_k\}$的 Fourier 系数.式(5)称为 **Bessel**(贝塞尔，1784～1846)**不等式**.注意到式(5)的右边与 $n$ 无关，得出

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 <+\infty,$$

因而

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0.$$

我们把上面的结果总结成下面的定理.

**定理 17.4.1** 设 $f\in \mathbf{R}^2[a,b]$，$\{\varphi_k\}$是 $\mathbf{R}^2[a,b]$中的一个规范正交系，$\{c_k\}$是 $f$ 关于$\{\varphi_k\}$的 Fourier 系数.那么：

(1) 对任意的正整数 $n$ 及实数 $\alpha_0,\cdots,\alpha_n$，有

$$\| f-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k \| \geqslant \| f-\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k \|;$$

(2) $\| f-\sum\limits_{k=0}^{n} c_k\varphi_k \|^2 = \| f\|^2-\sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2$；

(3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leqslant \| f\|^2$.

现在问，对什么样的规范正交系$\{\varphi_k\}$，(3)中不等式的等号成立，即

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \| f\|^2? \tag{6}$$

式(6)称为 **Parseval**(帕塞瓦尔，1755～1836)**等式或封闭性方程**.

Parseval 等式(6)有明确的几何意义.我们把规范正交系$\{\varphi_k\}$看做无穷维空间 $\mathbf{R}^2[a,b]$的一个基，如果 $f\in \mathbf{R}^2[a,b]$能展开成 Fourier 级数，即

$$f(x) = c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)+\cdots,$$

那么$\{c_0,c_1,\cdots,c_n,\cdots\}$可以看成是 $f$ 在这组基下的坐标.于是 Parseval 等式(6)就是无穷维空间中的勾股定理.

**定义 17.4.2** 设$\{\varphi_k\}$是 $\mathbf{R}^2[a,b]$中的一个规范正交系.如果对任意的 $f\in \mathbf{R}^2[a,b]$，均有 Parseval 等式(6)成立，则称$\{\varphi_k\}$是**完备**的.

从定理 17.4.1(2)和(3),可得:

**推论 17.4.1**　规范正交系$\{\varphi_k\}$是完备的充分必要条件是,对任意的$f\in \mathbf{R}^2[a,b]$,有

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f-\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k \right\|^2=0,$$

即$f$可用它的 Fourier 级数的部分和平方平均逼近.

我们将证明三角函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}},\cdots\right\} \tag{7}$$

是完备的.从上面的推论知,这等价于$f$可用它的 Fourier 级数的部分和平方平均逼近.这就肯定地回答了本节开头提出的问题.

下面先对三角函数系(7)写出 Parseval 等式.令

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \varphi_{2k-1}(x)=\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\quad \varphi_{2k}(x)=\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\quad (k=1,2,\cdots).$$

对任意的$f\in \mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$,有

$$c_0=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_0(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0,$$

$$c_{2k-1}=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_{2k-1}(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}a_k,$$

$$c_{2k}=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_{2k}(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}b_k,$$

这里$a_k,b_k$是 17.1 节的式(5)中定义的 Fourier 系数.于是

$$\sum_{k=0}^{2n} c_k\varphi_k(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

这时 Bessel 不等式和 Parseval 等式分别为

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x,$$

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

现在证明:

**定理 17.4.2**　设$f\in \mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$,$a_n,b_n$是$f$关于三角函数系的 Fourier 系数,那么$f$可用它的 Fourier 级数的部分和平方平均逼近,即 Parseval 等式(8)成立.

**证明** 分两步来证明.

(a) 设 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积.

因为 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积,故对 $\varepsilon>0$,存在 $[-\pi,\pi]$ 的一个分割

$$-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = \pi,$$

使得

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4\Omega}, \tag{9}$$

其中 $\omega_i = M_i - m_i$ 是 $f$ 在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅,$\Omega = M - m$ 是 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的振幅.

改变 $f$ 在区间端点 $-\pi$ 或 $\pi$ 的值,使得

$$f(-\pi) = f(\pi).$$

这种改变当然不会影响 $f$ 的 Fourier 系数.

用直线将点 $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ 和 $(x_i, f(x_i))$ 连接起来,得到区间 $[-\pi,\pi]$ 上的一条折线.设此折线的方程为 $y = g(x)$,它当然是 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数,而且满足 $g(-\pi) = g(\pi)$. 根据定理 17.3.3,存在三角多项式 $T_{n_0}(x)$,使得

$$|g(x) - T_{n_0}(x)| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}} \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi),$$

因而

$$\int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - T_{n_0}(x))^2 \mathrm{d}x < \frac{1}{4}\,\frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot 2\pi = \frac{\varepsilon}{4}. \tag{10}$$

我们有

$$f(x) - T_{n_0}(x) = (f(x) - g(x)) + (g(x) - T_{n_0}(x)).$$

利用不等式 $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$,得

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_{n_0}(x))^2 \mathrm{d}x &\leqslant 2\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 \mathrm{d}x \\ &\quad + 2\int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - T_{n_0}(x))^2 \mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 \mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned} \tag{11}$$

这里已经用了式(10). 由于当 $x \in [x_{i-1}, x_i]$ 时,

$$m_i \leqslant f(x) \leqslant M_i, \quad m_i \leqslant g(x) \leqslant M_i,$$

所以

$$|f(x) - g(x)| \leqslant M_i - m_i = \omega_i.$$

于是有

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{m}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-g(x))^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}\omega_i^2\Delta x_i\leqslant\Omega\sum_{i=1}^{m}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{4}.\tag{12}$$

这里已经用了式(9).把式(12)代入式(11),即得

$$\|f-T_{n_0}\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_{n_0}(x))^2\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

根据 Fourier 级数部分和 $S_n$ 的极值性质,有

$$\|f-S_{n_0}\|^2\leqslant\|f-T_{n_0}\|^2<\varepsilon.$$

从定理 17.4.1(2)可以看出,$\|f-S_n\|^2$ 随 $n$ 的增大而递减,因此,当 $n>n_0$ 时,有

$$\|f-S_n\|^2\leqslant\|f-S_{n_0}\|^2<\varepsilon.$$

这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}\|f-S_n\|=0$.故由推论 17.4.1 知 Parseval 等式成立.

(b) 设 $f$ 在$[-\pi,\pi]$上反常平方可积.

由于 $f\in\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$,所以 $f^2$可积.不妨设 $\pi$ 是 $f$ 的瑕点.于是对 $\varepsilon>0$,存在 $\eta>0$,使得

$$\int_{\pi-\eta}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}.\tag{13}$$

作函数

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & -\pi\leqslant x\leqslant\pi-\eta,\\ 0, & \pi-\eta<x\leqslant\pi\end{cases}$$

与

$$f_2(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x\leqslant\pi-\eta,\\ f(x), & \pi-\eta<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

显然,有 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$.由于 $f_1$ 在$[-\pi,\pi]$上 Riemann 可积,故由(a)证明的结论知,存在三角多项式 $T(x)$,使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x)-T(x))^2\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}.\tag{14}$$

于是由式(14)和式(13),即得

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T(x))^2\mathrm{d}x\leqslant2\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x)-T(x))^2\mathrm{d}x+2\int_{-\pi}^{\pi}f_2^2(x)\mathrm{d}x$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+2\int_{\pi-\eta}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

重复上面的讨论，即得

$$\lim_{n\to\infty} \| f - S_n \| = 0.$$

故 Parseval 等式在这种情形下也成立. □

**例 1** 在 17.2 节的例 1 中，我们得到等式

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2}\cos nx \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi),$$

并且已经算出 $a_0 = \frac{2}{3}\pi^2, a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}, b_n = 0$. 应用 Parseval 等式，得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \mathrm{d}x = \frac{2}{9}\pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}.$$

由此即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

若对展开式

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi)$$

用 Parseval 等式，我们重新得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$ □

从 Parseval 等式，可以得到下面两个重要推论.

**推论 17.4.2** 如果$[-\pi,\pi]$上的连续函数 $f$ 和三角函数系

$$\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

中的每一个函数都正交，那么必有 $f = 0$.

**证明** 根据假定，可得

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x = 0 \quad (n = 0, 1, \cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

于是由 Parseval 等式，得出$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = 0$，再由 $f$ 的连续性即得$f = 0$. □

**推论 17.4.3**（唯一性） 如果两个连续函数有相同的 Fourier 级数，则这两个连续函数必恒等.

**证明** 设连续函数 $f$ 和 $g$ 有相同的 Fourier 级数，那么 $f-g$ 的 Fourier 系数全为 0. 由 Parseval 等式，知 $f-g=0$，即 $f=g$. □

Parseval 等式还可推广到两个不同的函数.

**定理 17.4.3** 设 $f,g\in\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$，$a_n,b_n$ 和 $\alpha_n,\beta_n$ 分别是 $f$ 和 $g$ 的 Fourier 系数，那么

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n). \tag{15}$$

**证明** 分别写出 $f+g$ 和 $f-g$ 的 Parseval 等式：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x=\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}((a_n+\alpha_n)^2+(b_n+\beta_n)^2),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2\mathrm{d}x=\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}((a_n-\alpha_n)^2+(b_n-\beta_n)^2),$$

两式相减，即得式(15). □

作为定理 17.4.3 的一个应用，我们来证明 Fourier 级数的逐项积分定理.

**定理 17.4.4** 设 $f\in\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$，其 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

那么对包含在$[-\pi,\pi]$中的任意区间$[a,b]$，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\mathrm{d}x.$$

**证明** 任取 $g\in\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$，其 Fourier 级数为

$$g(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx).$$

把

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad(n=0,1,\cdots),$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nx\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)$$

代入推广的 Parseval 等式(15)，即得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}g(x)\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{16}$$

上式对任何 $g\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$都成立. 现取

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b],\\ 0, & x\in[-\pi,a)\cup(b,\pi],\end{cases}$$

式(16)就变成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\mathrm{d}x.$$

这就是要证明的. □

这个定理说明,$f$ 的 Fourier 级数不论是否收敛,都永远可以逐项积分.这是 Fourier 级数特有的性质.

## 练 习 题 17.4

1. 利用 $f(x)=|x|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 展开式和 Parseval 等式,求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^4}$ 的和.

2. 写出函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant\alpha,\\ 0, & \alpha<|x|<\pi\end{cases}$$

的 Parseval 等式,并求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$$

的和.

3. 对展开式

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\quad(-\pi<x<\pi)$$

逐项积分,求函数 $x^2,x^3$ 和 $x^4$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 上的 Fourier 展开式,并证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{9\,450}.$$

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{\pi-x}{2}, & 1<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

证明:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx\quad(|x|\leqslant\pi).$$

5. 利用第 4 题的结果,证明:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2=\frac{\pi-1}{2}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{(\pi-1)^2}{6}$.

6. 设 $a_n, b_n$ 是 $f\in\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 系数. 证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

收敛.

7. 证明：级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 在不包含 $2\pi$ 整数倍的区间上一致收敛，但它不是 $\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$ 中任意一个函数的 Fourier 级数.

## 问　题　17.4

1. 设 $f$ 是周期为 $2\pi$ 的连续函数. 令

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t,$$

用 $a_n, b_n$ 和 $A_n, B_n$ 分别记 $f$ 和 $F$ 的 Fourier 系数. 证明：

$$A_0=a_0^2,\quad A_n=a_n^2+b_n^2,\quad B_n=0.$$

由此推出 $f$ 的 Parseval 等式.

2. 设 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且在此区间上有可积且平方可积的导数 $f'$. 如果 $f$ 满足

$$f(-\pi)=f(\pi),\quad \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0,$$

证明：

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\mathrm{d}x\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x,$$

等式当且仅当 $f(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$ 时成立.

3. 设 $f$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，$f(0)=f(1)=0$，且 $f(1/2-x)=-f(1/2+x)$ 对 $x\in[0,1/2]$ 成立. 求证：

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x,$$

并讨论等号成立的条件.

4. 定义在区间 $[0,1]$ 上的函数系

$$\varphi_n(t)=\operatorname{sgn}\sin(2^n\pi t)\quad(n=1,2,\cdots)$$

称为 **Rademacher**(拉德马赫，1892～1969) **函数系**. 证明：Rademacher 函数系是 $[0,1]$ 上的规范正交系.

# 17.5 Fourier 积分和 Fourier 变换

前面说过，如果函数 $f$ 在区间$[-l,l]$上满足一定的条件（例如可微），$f$ 就能在$[-l,l]$上展开为 Fourier 级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\quad(n=0,1,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).$$

如果 $f$ 定义在整个数轴上，在任何有限区间上满足收敛定理的条件，且在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积，那么对任何固定的 $x$ 值，总能选取充分大的 $l$，使得 $l>|x|$. 因此 $f$ 仍能用上式表示，但是对不同的 $x$，表达式可能不一样.

为了让 $f$ 在$(-\infty,+\infty)$上能有一个统一的表达式，必须换一种方法考虑.

设 $f$ 在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积，对任意的实数 $u$，定义

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos ut\mathrm{d}t,\quad b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin ut\mathrm{d}t.\tag{1}$$

这两个积分都是绝对收敛的. 仿照 Fourier 级数中的做法，称

$$\int_0^{+\infty}(a(u)\cos ux+b(u)\sin ux)\mathrm{d}u$$

为 $f$ 的 **Fourier 积分**，记为

$$f(x)\sim\int_0^{+\infty}(a(u)\cos ux+b(u)\sin ux)\mathrm{d}u.$$

与 Fourier 级数的情形一样，右边的积分是否收敛，如果收敛，是否收敛到 $f(x)$都是不知道的. 为了研究 Fourier 积分的收敛性，记

$$S(\lambda,x)=\int_0^{\lambda}(a(u)\cos ux+b(u)\sin ux)\mathrm{d}u,\tag{2}$$

它相当于 Fourier 级数的部分和. 为了说明 $S(\lambda,x)$是有意义的，我们先证明：

**定理 17.5.1** 设 $f$ 在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积，那么由式(1)定义的 $a(u)$和 $b(u)$都在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

**证明**　对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $A>0$,使得

$$\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|\mathrm{d}t+\int_{A}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\frac{\pi}{4}\varepsilon.$$

因为 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续,故对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\eta>0$,当 $|x'-x''|<\eta$ 时,有

$$|\cos x'-\cos x''|<\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}|f(t)|\mathrm{d}t\right)^{-1}.$$

现取 $\delta=\eta/A$,当 $|u'-u''|<\delta$, $t\in[-A,A]$ 时,由于

$$|u't-u''t|<A\delta=\eta,$$

所以

$$|\cos u't-\cos u''t|<\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}|f(t)|\mathrm{d}t\right)^{-1}.$$

于是当 $|u'-u''|<\delta$ 时,有

$$\begin{aligned}|a(u')-a(u'')|&\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)||\cos u't-\cos u''t|\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|\mathrm{d}t+\frac{2}{\pi}\int_{A}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t\\&\quad+\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}|f(t)||\cos u't-\cos u''t|\mathrm{d}t\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

同理,可证 $b(u)$ 也在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.　□

由此可知,$S(\lambda,x)$ 对任意的 $\lambda\in(0,+\infty)$ 都是有意义的.把 $a(u)$, $b(u)$ 的表达式(1)代入式(2),即得

$$S(\lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u.\tag{3}$$

为了研究 $S(\lambda,x)$ 当 $\lambda\to+\infty$ 时的性态,把 $S(\lambda,x)$ 写成类似于 Fourier 级数中的 Dirichlet 积分那样更为方便.

**定理 17.5.2**　设 $f$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积,那么对任意的 $\lambda>0$,有

$$S(\lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t.\tag{4}$$

**证明**　关键是要证明等式

$$\int_{0}^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{0}^{\lambda}f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\tag{5}$$

成立.如果式(5)成立,那么由式(3),即得

$$\begin{aligned}S(\lambda,x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_0^{\lambda}\cos u(t-x)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(x+t)+f(x-t))\,\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

根据第 10 章的二重积分的知识,对任意的正数 $A$,有等式

$$\int_0^{\lambda}\left(\int_{-A}^{A} f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u = \int_{-A}^{A}\left(\int_0^{\lambda} f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t. \tag{6}$$

因为$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty$,故对任意固定的 $\lambda>0$ 和 $\varepsilon>0$,存在 $A_0$,当 $A>A_0$ 时,有

$$\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|\mathrm{d}t+\int_A^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

于是当 $A>A_0$ 时,

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{\lambda}\left(\int_{-A}^{A} f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u-\int_0^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\right|\\ &\quad\leqslant\int_0^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|\mathrm{d}t+\int_A^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u<\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^{\lambda}\left(\int_{-A}^{A} f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u = \int_0^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u. \tag{7}$$

在式(6)的两边令 $A\to+\infty$,由式(7)即得式(5). □

从式(4)可以得到 Fourier 积分的局部化定理.

**定理 17.5.3** 设 $f$ 在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积,那么 $f$ 的 Fourier 积分在某点 $x$ 是否收敛,以及收敛于什么值,仅与 $f$ 在 $x$ 附近的函数值有关.

**证明** 把式(4)右边的积分写成

$$\begin{aligned}S(\lambda,x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\\ &\quad+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty}(f(x+t)+f(x-t))\,\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\\ &= I_1+I_2.\end{aligned}$$

在第二个积分 $I_2$ 中,

$$\int_{\delta}^{+\infty}\frac{|f(x+t)+f(x-t)|}{t}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta}\int_{\delta}^{+\infty}(|f(x+t)|+|f(x-t)|)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{2}{\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t,$$

即 $\dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{t}$ 在$[\delta,+\infty)$上绝对可积.由 Riemann-Lebesgue 引理,知 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_2=0$.这样,当 $\lambda\to+\infty$ 时,积分(4)是否收敛,以及收敛于什么值,完全取决于积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t \tag{8}$$

当 $\lambda\to+\infty$时的极限情况,因而仅与 $f$ 在 $x$ 附近的值有关. □

从式(4)可以得到 Fourier 积分的类似于 Fourier 级数的 Dini 收敛判别法.

**定理 17.5.4**(Dini 定理)　设 $f$ 在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积,对任意的实数 $s$ 及固定的 $x$,记

$$\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2s.$$

如果存在 $\delta>0$,使得 $\varphi(t)/t$ 在$[0,\delta]$上可积且绝对可积,那么 $f$ 的 Fourier 积分在 $x$ 处收敛于 $s$.

**证明**　由 17.2 节中的例 1 知,对任意的 $\lambda>0$,有

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},\quad 即\quad \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t=1.$$

由式(4),可得

$$\begin{aligned}S(\lambda,x)-s&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}(f(x+t)+f(x-t)-2s)\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}\frac{\varphi(t)}{t}\sin\lambda t\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}\sin\lambda t\mathrm{d}t\\&\quad-\frac{2s}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t.\\&=I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

由假定 $\varphi(t)/t$ 在$[0,\delta]$上可积且绝对可积,再由 Riemann-Lebesgue 引理,知 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_1=0$.再看 $I_2$,这时 $t\geqslant\delta$,在定理 17.5.3 中已经证明过 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_2=0$.再对 $I_3$ 的积分作变量代换 $\lambda t=u$,得

$$\begin{aligned}\int_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t&=\int_{\lambda\delta}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\\&=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u-\int_{0}^{\lambda\delta}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\to 0\quad(\lambda\to+\infty).\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{\lambda \to +\infty} S(\lambda, x) = s. \qquad \square$$

与 Fourier 级数的情形一样,从定理 17.5.4 可以得到:

**定理 17.5.5** 设 $f$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积,且在 $x$ 处有广义的左右导数,那么 $f$ 的 Fourier 积分在 $x$ 处收敛于 $(f(x+0)+f(x-0))/2$,即

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)),$$

或者

$$\int_0^{+\infty} (a(u)\cos ux + b(u)\sin ux)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)).$$

如果 $f$ 在 $x$ 处连续,则有

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t, \tag{9}$$

或者

$$f(x) = \int_0^{+\infty} (a(u)\cos ux + b(u)\sin ux)\mathrm{d}u.$$

式(9)称为 $f$ 的 **Fourier 积分公式**.

特别地,若 $f$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积,且在 $x$ 处有有限的导数,那么 Fourier 积分公式(9)成立.

**例 1** 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

试由 $f$ 的 Fourier 积分公式,导出等式

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u\cos ux}{u}\mathrm{d}u = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & |x| < 1, \\ \dfrac{\pi}{4}, & |x| = 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \tag{10}$$

**证明** 因为 $f$ 是偶函数,所以

$$a(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos ut\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\frac{\sin u}{u},$$

$$b(u) = 0.$$

从而对 $f$ 的连续点 $x$,有

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(u)\cos ux\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin u\cos ux}{u}\mathrm{d}u.$$

这样就得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u \cos ux}{u} \mathrm{d}u = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

在 $x = \pm 1$ 处，$f$ 的 Fourier 积分收敛于

$$\frac{1}{2}(f(1+0) + f(1-0)) = \frac{1}{2}(f(-1+0) + f(-1-0)) = \frac{1}{2}.$$

由此即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u \cos ux}{u} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{4} \quad (x = \pm 1).$$ □

在等式(10)中，取 $x = 0$，我们又得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$

在 Fourier 积分公式

$$f(x) = \int_0^{+\infty} (a(u)\cos ux + b(u)\sin ux)\mathrm{d}u,$$

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t,$$

$$b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\mathrm{d}t$$

中，如果 $f$ 是偶函数，那么

$$a(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t, \quad b(u) = 0.$$

这时，积分公式可写为

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos ux\mathrm{d}u \int_0^{+\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t. \tag{11}$$

这称为 **Fourier 余弦公式**.

如果 $f$ 是奇函数，那么

$$a(u) = 0, \quad b(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin ut\mathrm{d}t.$$

这时，积分公式又可写为

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \sin ux\mathrm{d}u \int_0^{+\infty} f(t)\sin ut\mathrm{d}t, \tag{12}$$

这称为 **Fourier 正弦公式**.

如果 $f$ 只是定义在$[0, +\infty)$上的绝对可积函数，对它作偶性延拓或奇性延拓，

就可分别得到公式(11)或公式(12).

如果令

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\cos ut\mathrm{d}t, \tag{13}$$

那么式(11)可写为

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}g(u)\cos xu\mathrm{d}u. \tag{14}$$

在这两个公式中,$f$ 和$g$ 以完全相同的形式相互表示.我们称 $g$ 为$f$ 的 **Fourier 余弦变换**,式(14)是余弦变换的**反变换公式**.

同样,称

$$h(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\sin ut\mathrm{d}t \tag{15}$$

为 $f$ 的 **Fourier 正弦变换**.由式(12),即得它的反变换公式

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}h(u)\sin ux\mathrm{d}u.$$

**例 2** 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-\beta x}(\beta>0,x>0)$的 Fourier 余弦变换和正弦变换.

**解** 由公式(13)和公式(15),分别得到余弦变换和正弦变换为

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\cos ut\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\beta^2+u^2},$$

$$h(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\sin ut\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u}{\beta^2+u^2}.$$

再分别用反变换公式,可得

$$\mathrm{e}^{-\beta x}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\beta^2+u^2}\cos xu\mathrm{d}u,$$

$$\mathrm{e}^{-\beta x}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u}{\beta^2+u^2}\sin xu\mathrm{d}u.$$

这样,我们就得到两个并不容易计算的积分的数值:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xu}{\beta^2+u^2}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2\beta}\mathrm{e}^{-\beta x}\quad(x>0,\beta>0),$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{u\sin xu}{\beta^2+u^2}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\beta x}\quad(x>0,\beta>0).$$ □

**例 3** 解积分方程

$$\int_0^{+\infty}g(u)\sin xu\mathrm{d}u=f(x),$$

其中

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & \pi<x<+\infty.\end{cases}$$

**解**　把原方程写为

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}g(u)\sin xu\,\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x),$$

因此 $\sqrt{2/\pi}f(x)$ 是 $g$ 的 Fourier 正弦变换.利用反变换公式,即得

$$\begin{aligned}g(u)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x)\sin ux\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin x\sin xu\,\mathrm{d}x=\frac{\sin\pi u}{1-u^2}.\end{aligned}$$ □

在给出一般的 Fourier 变换概念之前,我们先给出 Fourier 积分公式(9)的复数形式.

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)\,\mathrm{d}t$$

是 $u$ 的偶函数,故 Fourier 积分公式(9)可以写成更对称的形式:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)\,\mathrm{d}t.\tag{16}$$

又因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin u(x-t)\,\mathrm{d}t$ 是 $u$ 的奇函数,所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin u(x-t)\,\mathrm{d}t=0.\tag{17}$$

将式(17)乘以 i 再与式(16)相加,即得

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(x-t)}\,\mathrm{d}t.\tag{18}$$

这就是 **Fourier 积分公式的复数形式**.

现给出下面的定义.

**定义 17.5.1**　设 $f$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积.称

$$\hat{f}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}\,\mathrm{d}t\tag{19}$$

为 $f$ 的 **Fourier 变换**.这里 $u$ 是实数,$\hat{f}(u)$ 是一个实变量的复函数.

从复数形式的 Fourier 积分公式(18),可得它的**反变换公式**为

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u) e^{iux} du. \tag{20}$$

如果把 $f$ 的 Fourier 级数也写成复数形式,那么和这里的 Fourier 变换可以有一个很好的类比.

设

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

把表达式

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \quad \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})$$

代入上式的右边,得

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2}, \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx - i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx. \end{aligned}$$

如果把 $c_n$ 记为 $\hat{f}(n)$,且设 $f$ 满足收敛定理的条件,那么有

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}, \tag{21}$$

其中

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n = 0, \pm 1, \cdots). \tag{22}$$

比较 Fourier 变换公式(19)和反变换公式(20),这里的 Fourier 系数公式(22)和 Fourier 展开式(21)便可分别看成是“离散的 Fourier 变换”和“离散的 Fourier 反变换”.

Fourier 变换是数学物理中一种重要的积分变换，如同对数能把乘法运算变为加法运算，除法运算变为减法运算那样，Fourier 变换能把分析运算变为代数运算，从而使问题得到简化.

**定理 17.5.6** 若 $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)=0$，那么

$$\hat{f'}(x) = \mathrm{i}x\hat{f}(x).$$

**证明** 由分部积分法，得

$$\begin{aligned}\hat{f'}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \mathrm{i}x\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t\right) \\ &= \mathrm{i}x\hat{f}(x).\end{aligned}$$

□

**推论 17.5.1** 如果 $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f^{(k)}(t)=0(k=0,1,\cdots,n-1)$，那么

$$\hat{f^{(n)}}(x) = (\mathrm{i}x)^n\hat{f}(x).$$

这说明，经过 Fourier 变换，对函数的微分运算就转变为用 $\mathrm{i}x$ 相乘，求 $n$ 阶导数就变为乘以$(\mathrm{i}x)^n$. 这一性质使得解常系数的线性微分方程变得容易了. 例如，要解常系数线性微分方程

$$a_nf^{(n)}(t) + a_{n-1}f^{n-1}(t) + \cdots + a_1f'(t) + a_0f(t) = g(t),$$

这里 $a_n,\cdots,a_0$ 是给定的常数，$g$ 是已知函数. 对等式的两边作 Fourier 变换，利用 Fourier 变换的线性性质和推论 17.5.1，即得

$$a_n(\mathrm{i}x)^n\hat{f}(x) + a_{n-1}(\mathrm{i}x)^{n-1}\hat{f}(x) + \cdots + a_1\mathrm{i}x\hat{f}(x) + a_0\hat{f}(x) = \hat{g}(x),$$

于是

$$\hat{f}(x) = \frac{\hat{g}(x)}{a_n(\mathrm{i}x)^n + a_{n-1}(\mathrm{i}x)^{n-1} + \cdots + a_1(\mathrm{i}x) + a_0}.$$

右边是已知的，通过 Fourier 反变换即能求得 $f(t)$.

Fourier 变换另一个非常有用的性质，就是将函数的卷积运算转化为乘法运算.

**定义 17.5.2** 两个函数 $f$ 与 $g$ 的**卷积**定义为

$$(f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)\mathrm{d}u.$$

**定理 17.5.7** $\widehat{f*g}(x)=\hat{f}(x)\hat{g}(x)$.

**证明** 根据定义，可得

$$
\begin{aligned}
\widehat{f*g}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(g(u)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(g(u)\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(u+v)x}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}vx}\mathrm{d}v \\
&= \hat{f}(x)\hat{g}(x).
\end{aligned}
$$

□

卷积运算的重要意义在于,它描述了一类重要的物理现象——平移不变的线性系统,这类系统的输入 $f(t)$ 与输出 $g(t)$ 可用卷积运算来描述:

$$
g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)f(u)\mathrm{d}u = (h*f)(t),
$$

这里 $h$ 是由系统确定的函数.由定理 17.5.7 知,输入 $f(t)$ 与输出 $g(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(x)$ 与 $\hat{g}(x)$ 满足

$$
\hat{g}(x) = \hat{h}(x)\hat{f}(x). \tag{23}
$$

在通信理论中,常称一个函数的 Fourier 变换为其频谱,因此,对平移不变的线性系统,其输入与输出的频谱之间的关系式(23)是十分简单的.所以研究 $\hat{f}(x)$ 与 $\hat{g}(x)$ 之间的关系比直接研究 $f(t)$ 与 $g(t)$ 之间的关系要简单方便.这就是所谓在频率域上考虑问题或频谱分析的方法.但根据 Fourier 变换的定义,$\hat{f}(x)$,$\hat{g}(x)$ 取决于信号 $f(t)$,$g(t)$ 在实轴 $(-\infty,+\infty)$ 上的整体性质,因此它不能反映出信号在局部时间范围内的特征,而在实际问题中,这却是非常重要的.例如,对地震信号,人们关心的是在什么位置出现什么样的反射波.而这正是 Fourier 变换难以弄清的问题.从 20 世纪 80 年代开始发展起来的**小波变换**,一方面继承了 Fourier 变换的许多长处,另一方面又在一定程度上克服了 Fourier 变换缺乏局部性的弱点,对解决实际问题更为有利.关于小波变换的具体内容,有兴趣的读者可参阅有关的专著.

最后,解一个卷积型积分方程作为本节的结尾.

**例 4** 设 $g,h$ 是已知函数.求解关于未知函数 $f$ 的积分方程

$$
f(u) = g(u) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u-t)f(t)\mathrm{d}t \quad (-\infty < u < +\infty).
$$

**解** 对方程式的两边进行 Fourier 变换,

$$\hat{f}(x) = \hat{g}(x) + \hat{h}(x)\hat{f}(x),$$

由此即得

$$\hat{f}(x) = \frac{\hat{g}(x)}{1 - \hat{h}(x)}.$$

对 $\hat{f}$ 进行 Fourier 反变换即能算出 $f$. □

## 练 习 题 17.5

1. 用 Fourier 积分表示下列函数：

(1) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn} x, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\leqslant \pi,\\ 0, & |x|>\pi;\end{cases}$

(3) $f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}\ (a>0)$.

2. 求下列积分方程的解：

(1) $\int_0^{+\infty} f(t)\sin xt\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\ (x>0)$;

(2) $\int_0^{+\infty} f(t)\cos xt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}$.

3. 证明：

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\cos 2xt\,\mathrm{d}t = \begin{cases}1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

4. 求函数 $F(u)=u\mathrm{e}^{-\beta|u|}\ (\beta>0)$ 的 Fourier 反变换.

# 第 18 章　含参变量积分

在第 15 章已经看到，无穷级数是构造新函数的一种重要工具，我们用它构造了处处连续、处处不可微的函数，还用它构造了能填满正方形的连续曲线. 与无穷级数具有同样重要意义的另一种构造新函数的工具是含参变量的积分.

设二元函数 $f(x,u)$在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，那么对固定的 $u\in[\alpha,\beta]$，函数 $f(x,u)$对变量 $x$ 在$[a,b]$上 Riemann 可积. 这时，称积分

$$\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

是**含参变量 $u$ 的常义积分**. 如果对固定的 $u$，$f(x,u)$是变量 $x$ 在$[a,b]$上的无界函数，或者若$[a,b]$是一个无限区间，则称相应的积分是**含参变量 $u$ 的反常积分**. 例如，积分

$$\int_0^{+\infty} x^{u-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

是含参变量 $u$ 的反常积分；积分

$$\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\mathrm{d}x$$

当 $u<1$ 或 $v<1$ 时是含两个参变量 $u,v$ 的反常积分.

本章就是要讨论由含参变量的常义积分或反常积分所确定的函数的分析性质，即它们的连续性、可微性，以及如何计算它们的导数和积分；还要研究两个重要的特殊函数——$\Gamma$ 函数和 $\mathrm{B}$ 函数.

## 18.1　含参变量的常义积分

设二元函数 $f(x,u)$在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续. 我们要研究由含参

变量的常义积分所确定的函数

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

的分析性质.首先有:

**定理 18.1.1** 如果函数 $f$ 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续,那么

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数.

**证明** 任取 $u_0\in[\alpha,\beta]$,我们证明 $\varphi$ 在 $u_0$ 处连续.从

$$\varphi(u)-\varphi(u_0)=\int_a^b(f(x,u)-f(x,u_0))\mathrm{d}x,$$

得到

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)|\leqslant\int_a^b|f(x,u)-f(x,u_0)|\mathrm{d}x. \tag{1}$$

由于 $f$ 在闭矩形 $I$ 上连续,所以必定一致连续.因而对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对闭矩形 $I$ 中任意的两点 $(x_1,u_1)$,$(x_2,u_2)$,只要它们的距离小于 $\delta$,就有

$$|f(x_1,u_1)-f(x_2,u_2)|<\varepsilon.$$

由于点 $(x,u)$ 和 $(x,u_0)$ 的距离等于 $|u-u_0|$,所以当 $|u-u_0|<\delta$ 时,

$$|f(x,u)-f(x,u_0)|<\varepsilon$$

对任意的 $x\in[a,b]$ 成立.于是由式(1),即得

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)|<\varepsilon(b-a).$$

这就证明了 $\varphi$ 在 $u_0$ 处连续.由于 $u_0$ 是 $[\alpha,\beta]$ 中的任意一点,所以 $\varphi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续. □

注意,$\varphi$ 在 $u_0$ 处连续意味着

$$\lim_{u\to u_0}\varphi(u)=\varphi(u_0). \tag{2}$$

而

$$\varphi(u_0)=\int_a^b f(x,u_0)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{u\to u_0}f(x,u)\mathrm{d}x,$$

这样,式(2)可写为

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{u\to u_0}f(x,u)\mathrm{d}x.$$

这就是说,$f$ 的连续性保证了积分运算和极限运算可以交换次序.

关于 $\varphi$ 的微分性质,有下面的定理.

**定理 18.1.2** 如果函数 $f$ 及其偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 都在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连

续，那么函数

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

在$[\alpha,\beta]$上可微，而且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\varphi(u)=\int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\right)\mathrm{d}x.$$

**证明** 任取 $u_0\in[\alpha,\beta]$，$|h|$充分小，使得 $u_0$ 和 $u_0+h$ 仍在$[\alpha,\beta]$中，于是

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(u_0+h)-\varphi(u_0)}{h}&=\frac{1}{h}\int_a^b(f(x,u_0+h)-f(x,u_0))\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial u}(x,u_0+\theta h)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于$\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)$在$[a,b]\times[\alpha,\beta]$上一致连续，在上式两边令 $h\to0$，即得

$$\varphi'(u_0)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial u}(x,u_0)\mathrm{d}x.$$ □

既然 $\varphi$ 在$[\alpha,\beta]$上连续，我们就可讨论 $\varphi$ 在$[\alpha,\beta]$上的积分

$$\int_\alpha^\beta\varphi(u)\mathrm{d}u=\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u.$$

我们的问题是，在计算上述积分时，能否交换积分的次序？也就是说，等式

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$$

是否成立？答案是肯定的.

**定理 18.1.3** 如果函数 $f$ 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，那么

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.\tag{3}$$

**证明** 我们证明，对任意的 $t\in(\alpha,\beta]$，有

$$\int_\alpha^t\left(\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^b\left(\int_\alpha^t f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.\tag{4}$$

令 $t=\beta$ 就得到式(3). 把式(4)左边和右边的函数分别记为 $g(t)$和 $h(t)$，那么

$$g(t)=\int_\alpha^t\left(\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_\alpha^t\varphi(u)\mathrm{d}u,$$

式中 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$；

$$h(t)=\int_a^b\left(\int_\alpha^t f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\psi(x,t)\mathrm{d}x,$$

式中 $\psi(x,t)=\int_\alpha^t f(x,u)\mathrm{d}u$.

由定理18.1.1，$\varphi(u)$在$[\alpha,\beta]$上连续，所以

$$g'(t)=\varphi(t). \tag{5}$$

又因$\psi(x,t)$和$\frac{\partial\psi}{\partial t}=f(x,t)$都在$[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，由定理18.1.2，得

$$h'(t)=\int_a^b\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x=\varphi(t). \tag{6}$$

比较式(5)和式(6)即知$g'(t)=h'(t)$，所以$g(t)=h(t)+c$.由于$g(\alpha)=h(\alpha)=0$，所以$c=0$.因而$g(t)=h(t)$. □

根据二重积分的知识，式(3)的两边都等于$f$在矩形区域$[a,b]\times[\alpha,\beta]$上的积分，因而相等.这里给出的是不依赖重积分知识的证明.

**例1**　计算积分

$$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x\quad(0<a<b).$$

**解**　把被积函数写为

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^u\mathrm{d}u,$$

那么

$$I=\int_0^1\left(\int_a^b x^u\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

交换积分次序，即得

$$I=\int_a^b\left(\int_0^1 x^u\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^b\frac{\mathrm{d}u}{u+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

还有另一种计算方法：在上述积分中把$a$看做常数，把$b$看做参变量，应用定理18.1.2，可得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}b}=\int_0^1 x^b\mathrm{d}x=\frac{1}{b+1}.$$

因此

$$I=\ln(b+1)+c.$$

显然，当$b=a$时，$I=0$，因而$c=-\ln(a+1)$，重新得到

$$I=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

□

**例2**　计算积分

$$I(r)=\int_0^\pi\ln(1-2r\cos x+r^2)\mathrm{d}x.$$

**解**　先考虑$|r|<1$的情形.把$r$看成参变量，并对$r$求导数，得

$$I'(r)=\int_0^{\pi}\frac{-2\cos x+2r}{1-2r\cos x+r^2}\mathrm{d}x.$$

由此可得

$$I'(0)=-2\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=0. \tag{7}$$

现设 $r\neq 0$,则

$$\begin{aligned}I'(r)&=\frac{1}{r}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{r}\left(\pi-(1-r^2)\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1-2r\cos x+r^2}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

作变换 $t=\tan(x/2)$,可得

$$\begin{aligned}(1-r^2)\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1-2r\cos x+r^2}&=\frac{1+r}{1-r}\int_0^{+\infty}\frac{2\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)^2}\\&=2\arctan\frac{1+r}{1-r}t\Big|_0^{+\infty}=\pi.\end{aligned}$$

这里用到了$|r|<1$的条件.代入式(8),并注意到式(7),即知 $I'(r)=0$ 当$|r|<1$时成立.因此 $I(r)=c$.由于 $I(0)=0$,所以

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\mathrm{d}x=0\quad(|r|<1).$$

再考虑$|r|>1$的情形.令 $\rho=1/r$,则$|\rho|<1$.于是

$$\begin{aligned}I(r)=I\left(\frac{1}{\rho}\right)&=\int_0^{\pi}\ln(1-2\rho\cos x+\rho^2)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\ln\rho^2\mathrm{d}x\\&=-2\pi\ln|\rho|=2\pi\ln|r|.\end{aligned}$$

当$|r|=1$时,利用6.7节中例7的结果

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

可直接算得 $I(\pm 1)=0$.最后得

$$I(r)=\begin{cases}0, & |r|\leqslant 1,\\ 2\pi\ln|r|, & |r|>1.\end{cases}$$

□

在很多问题中,经常要遇到这样的情形:不仅被积函数含有参变量,积分限也含有参变量.这时,积分可写为

$$\psi(u)=\int_{p(u)}^{q(u)}f(x,u)\mathrm{d}x. \tag{9}$$

对这样的含参变量积分,我们有:

**定理 18.1.4** 设函数 $f$ 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续,函数 $p(u)$,

$q(u)$都在$[\alpha,\beta]$上连续,而且当$\alpha\leqslant u\leqslant\beta$时,$a\leqslant p(u)\leqslant b$,$a\leqslant q(u)\leqslant b$,那么由式(9)所确定的函数$\psi$在$[\alpha,\beta]$上连续.

**证明** 任取$u_0\in[\alpha,\beta]$,则当$u\in[\alpha,\beta]$时,有

$$\psi(u)-\psi(u_0)=\int_{p(u)}^{q(u)}f(x,u)\mathrm{d}x-\int_{p(u_0)}^{q(u_0)}f(x,u_0)\mathrm{d}x.$$

由于

$$\int_{p(u)}^{q(u)}f(x,u)\mathrm{d}x=\int_{p(u)}^{p(u_0)}f(x,u)\mathrm{d}x+\int_{p(u_0)}^{q(u_0)}f(x,u)\mathrm{d}x+\int_{q(u_0)}^{q(u)}f(x,u)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\psi(u)-\psi(u_0)=\int_{p(u)}^{p(u_0)}f(x,u)\mathrm{d}x+\int_{q(u_0)}^{q(u)}f(x,u)\mathrm{d}x+\int_{p(u_0)}^{q(u_0)}(f(x,u)-f(x,u_0))\mathrm{d}x.$$

根据定理18.1.1,当$u\to u_0$时,最后一个积分趋于0.而前面两个积分的绝对值分别不超过

$$M\mid p(u)-p(u_0)\mid,\quad M\mid q(u)-q(u_0)\mid,$$

其中$M$是$|f|$在$I$上的最大值.根据$p(u)$,$q(u)$的连续性,当$u\to u_0$时,它们也都趋于0.因此

$$\lim_{u\to u_0}\psi(u)=\psi(u_0).$$ □

关于$\varphi$的微分性质,有:

**定理18.1.5** 如果函数$f$和$\dfrac{\partial f}{\partial u}$都在闭矩形$I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续,函数$p(u)$,$q(u)$都在$[\alpha,\beta]$上可微,而且当$\alpha\leqslant u\leqslant\beta$时,$a\leqslant p(u)\leqslant b$,$a\leqslant q(u)\leqslant b$,那么由式(9)确定的函数$\psi$在$[\alpha,\beta]$上可微,并且

$$\psi'(u)=\int_{p(u)}^{q(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x+f(q(u),u)q'(u)-f(p(u),u)p'(u).$$

**证明** 记

$$F(u,\xi,\eta)=\int_{\xi}^{\eta}f(x,u)\mathrm{d}x,$$

那么$\psi(u)=F(u,p(u),q(u))$.由定理18.1.3,得

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\int_{\xi}^{\eta}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}u.$$

再由对变上限积分求导的法则,得

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}=f(\eta,u),\quad \frac{\partial F}{\partial \xi}=-f(\xi,u).$$

于是由复合函数的求导法则,即得

$$\begin{aligned}\psi'(u)&=\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}u}+\frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}u}\\&=\int_{p(u)}^{q(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x+f(q(u),u)q'(u)-f(p(u),u)p'(u).\end{aligned}$$

这就是要证的结果. □

**例 3** 设

$$\psi(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{t^2+xt}\mathrm{d}t.$$

计算 $\psi'(0)$.

**解** 由定理 18.1.5,得

$$\psi'(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}t\mathrm{e}^{t^2+xt}\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{\cos^2x+x\cos x}\sin x-\mathrm{e}^{\sin^2x+x\sin x}\cos x.$$

因而

$$\psi'(0)=\int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-1=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-3).$$ □

**例 4** 设 $f$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数,

$$\varphi(x)=\int_0^x\left(\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t.$$

计算 $\varphi'(x)$.

**解** 记 $G(t,x)=\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\mathrm{d}s$,则

$$\varphi(x)=\int_0^x G(t,x)\mathrm{d}t.$$

因而

$$\varphi'(x)=\int_0^x\frac{\partial G}{\partial x}(t,x)\mathrm{d}t+G(x,x)=2x\int_0^x f(t,x^2)\mathrm{d}t.$$ □

## 练 习 题 18.1

1. 求极限:

(1) $\lim\limits_{a\to0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$;　　(2) $\lim\limits_{t\to0}\int_0^2 x^2\cos tx\mathrm{d}x$.

2. 设 $f$ 是可微函数. 令

$$F(u)=\int_0^u (x+u)f(x)\mathrm{d}x,$$

计算 $F''(u)$.

3. 计算下列函数的导数：

(1) $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{(1+t)^2}\mathrm{d}t$；　　(2) $f(x)=\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-x^2u^2}\mathrm{d}u$；

(3) $f(x)=\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t$；　　(4) $f(u)=\int_0^u g(x+u,x-u)\mathrm{d}x$.

4. 设 $\varphi,\psi$ 可以分别微分两次和一次. 证明：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

5. 设 $f$ 在闭区间 $[0,a]$ 上连续，且当 $t\in[0,a]$ 时，$(x-t)^2+y^2+z^2\neq 0$. 证明：

$$u(x,y,z)=\int_0^a\frac{f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{(x-t)^2+y^2+z^2}}$$

满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

6. 设 $a<b$，$f$ 为可微函数. 令

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x)\,|\,x-u\,|\,\mathrm{d}x,$$

计算 $\varphi''(u)$.

7. 在区间 $[1,3]$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似代替函数 $f(x)=x^2$. 试选取 $a,b$，使得

$$\int_1^3(a+bx-x^2)^2\mathrm{d}x$$

取最小值.

## 问 题 18.1

1. 证明：$n$ 阶 Bessel 函数

$$\mathrm{J}_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

满足 Bessel 方程

$$x^2\mathrm{J}_n''(x)+x\mathrm{J}_n'(x)+(x^2-n^2)\mathrm{J}_n(x)=0.$$

2. 利用对参数的微分法，计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^{\pi/2} \ln\frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}(|a| < 1)$；

(3) $\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$.

3. 证明：对任意的实数 $u$，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x)\mathrm{d}x = 1.$$

## 18.2 含参变量反常积分的一致收敛

在讨论含参变量反常积分一致收敛的概念以前，先对一般的函数极限的一致收敛性作一些讨论. 我们记得，在讨论函数列$\{f_n(x)\}$的收敛问题时，首先引入了一致收敛的概念. 其实对一般的函数极限也有一致收敛的概念.

**定义 18.2.1** 设 $D$ 和 $E$ 是 $\mathbf{R}$ 的子集，$u_0$(可以是 $+\infty$)是 $E$ 的极限点，$f(x,u)$在 $D\times E$ 上定义，且对任意的 $x\in D$，存在有限的极限：

$$\lim_{u\to u_0} f(x,u) = g(x) \quad (或者 \lim_{u\to+\infty} f(x,u) = g(x)).$$

如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$(或者 $U>0$)，使得当 $u\in E, 0<|u-u_0|<\delta$(或者 $u\in E, u>U$)时，

$$|f(x,u) - g(x)| < \varepsilon$$

对所有的 $x\in D$ 成立，我们就说当 $u\to u_0$(或者 $u\to+\infty$)时，函数 $f(x,u)$对 $x\in D$ 一致收敛于极限函数$g(x)$. 容易看出，如果 $D=[a,b], E=\mathbf{N}^*, u_0=+\infty$，那么 $f(x,u)$就可写成 $f_n(x)$，而

$$\lim_{u\to+\infty} f(x,u) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

这里的一致收敛概念就是第 15 章中讲的函数列一致收敛的概念. 那里的极限函数的一些性质也很容易推广到这里来. 为此，我们先证明：

**定理 18.2.1** 当 $u\to u_0$ 时(或者 $u\to+\infty$时)，函数 $f(x,u)$对 $x\in D$ 一致收敛于极限函数$g(x)$的充分必要条件是，对 $E\setminus\{u_0\}$中满足条件 $u_n\to u_0$ 的任意序列$\{u_n\}$(或者 $E$ 中满足条件$u_n\to+\infty$的任意序列$\{u_n\}$)，相应的每一函数序列

$$\psi_n(x) = f(x, u_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

都在 $D$ 上一致收敛于函数 $g(x)$.

**证明**　条件的必要性是显然的,现在来证明条件的充分性.用反证法.如果当 $u \to u_0$ 时(或者 $u \to +\infty$ 时),函数 $f(x, u)$ 对 $x \in D$ 不一致收敛于 $g(x)$,那么对某个 $\varepsilon > 0$,不管 $n \in \mathbf{N}^*$ 怎样大,总存在 $u_n \in E$,使得

$$0 < | u_n - u_0 | < \frac{1}{n} \quad (\text{或者 } u_n > n),$$

有

$$\sup_{x \in D} | f(x, u_n) - g(x) | \geqslant \varepsilon_0 .$$

对这样的 $\{u_n\}$,虽然有

$$u_n \in E \setminus \{u_0\}, \quad u_n \to u_0 \quad (\text{或者 } u_n \in E, u_n \to +\infty),$$

但相应的函数列

$$\psi_n(x) = f(x, u_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

不能在 $D$ 上一致地收敛于 $g(x)$,与假设矛盾. □

现在很容易证明下面的定理.

**定理 18.2.2**　设 $f(x, u)$ 定义在 $[a, b] \times E$ 上,$u_0$(可以是 $+\infty$)是 $E$ 的一个极限点,并且对每个给定的 $u \in E$,$f(x, u)$ 是 $x$ 的连续函数.如果当 $u \to u_0$ 时(或者当 $u \to +\infty$ 时),$f(x, u)$ 对 $x \in [a, b]$ 一致收敛于 $g(x)$,那么 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

**证明**　任意取一个满足以下条件的序列 $\{u_n\}$:

$$u_n \in E \setminus \{u_0\}, \quad u_n \to u_0 \quad (\text{或者 } u_n \in E, u_n \to +\infty).$$

考察函数列

$$\psi_n(x) = f(x, u_n) \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

此连续函数列在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $g(x)$.由定理 15.3.1,知 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. □

**定理 18.2.3**　设 $f(x, u)$ 定义在 $[a, b] \times E$ 上,$u_0$(可以是 $+\infty$)是 $E$ 的一个极限点,并且对每个给定的 $u \in E$,$f(x, u)$ 在 $[a, b]$ 上可积.如果当 $u \to u_0$ 时(或者当 $u \to +\infty$ 时),$f(x, u)$ 对 $x \in [a, b]$ 一致收敛于 $g(x)$,那么 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积,并且

$$\lim_{u \to u_0} \int_a^b f(x, u) \mathrm{d}x = \int_a^b g(x) \mathrm{d}x \quad \left(\text{或者 } \lim_{u \to +\infty} \int_a^b f(x, u) \mathrm{d}x = \int_a^b g(x) \mathrm{d}x\right).$$

**证明**　任意选取一个满足以下条件的序列 $\{u_n\}$:

$$u_n \in E \setminus \{u_0\}, \quad u_n \to u_0 \quad (\text{或者 } u_n \in E, u_n \to +\infty).$$

因为函数列

$$\psi_n(x)=f(x,u_n)\quad(n=1,2,\cdots)$$

在$[a,b]$上可积,且在$[a,b]$上一致收敛于 $g(x)$,所以由定理 15.3.5,知 $g(x)$在$[a,b]$上可积,并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x,u_n)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

又因为对任意满足上述条件的$\{u_n\}$式(1)都成立,所以

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\quad\left(\text{或者}\lim_{u\to+\infty}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right).\qquad\square$$

现在回到含参变量的反常积分.

设 $f(x,u)$在$[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$上连续.如果对$[\alpha,\beta]$中的任意 $u$,反常积分

$$\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$$

都收敛,那么它就确定了$[\alpha,\beta]$上的一个函数

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

如何研究 $\varphi$ 的连续、可微等分析性质?

在第 15 章中已经看到,研究由函数项级数所确定的函数的分析性质时,函数项级数的一致收敛概念起了关键的作用.对式(2)型的积分来说,类似的概念也起着同样重要的作用.记

$$F(A,u)=\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x,$$

对每个 $u\in[\alpha,\beta]$,

$$\lim_{A\to+\infty}F(A,u)=\varphi(u).$$

如果当 $A\to+\infty$ 时,函数 $F(A,u)$ 对 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛于 $\varphi(u)$,我们就说反常积分$\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 对$u\in[\alpha,\beta]$一致收敛.也就是说,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $A_0>a$,当 $A>A_0$ 时,

$$|F(A,u)-\varphi(u)|<\varepsilon$$

对每个 $u\in[\alpha,\beta]$成立.由于

$$\begin{aligned}|F(A,u)-\varphi(u)|&=\left|\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\int_A^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\right|,\end{aligned}$$

所以$\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$ 上一致收敛可用分析的语言表达为:

**定义 18.2.2**　如果对任意给定的 $\varepsilon>0$,总能找到只与 $\varepsilon$ 有关的 $A_0(>a)$,当 $A>A_0$ 时,不等式

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 中所有的 $u$ 成立,则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ **关于 $u$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛**.

对瑕积分,也有类似的定义.

**定义 18.2.3**　设 $a$ 是瑕点.如果对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在只与 $\varepsilon$ 有关的 $\delta_0>0$,当 $0<\delta<\delta_0$ 时,不等式

$$\left|\int_a^{a+\delta} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 中所有的 $u$ 成立,则称积分 $\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$ **关于 $u$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛**.

上面两个定义中的 $[\alpha,\beta]$ 可以换成开区间或无穷区间.

与反常积分的收敛判别法一样,这里也有一系列和无穷级数类似的一致收敛判别法.下面我们只对无穷积分来讨论这些判别法,对瑕积分也有类似的结果,就不再一一说明了.

记

$$\eta(A)=\sup_{u\in[\alpha,\beta]}\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|.$$

从定义 18.2.2,可得:

**定理 18.2.4**　积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的充分必要条件是

$$\lim_{A\to+\infty}\eta(A)=0.$$

证明是显然的,留作练习.

**例 1**　讨论积分 $\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}x\ (u\geqslant 0)$ 的一致收敛性.

**解**　当 $u>0$ 时,令 $xu=t$,那么

$$\int_A^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}x=\int_{uA}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-uA}.$$

因此

$$\eta(A)=\sup_{u\in(0,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}x\right|=1\not\to 0.$$

从而由定理 18.2.4,知积分 $\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.但若任取 $\delta>$

0,考虑它在$[\delta,+\infty)$上的一致收敛性,那么由于

$$\eta(A)=\sup_{u\in[\delta,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty}u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}x\right|=\mathrm{e}^{-\delta A}\to 0\quad(A\to+\infty),$$

故由定理 18.2.4 知它在$[\delta,+\infty)$上一致收敛. □

**定理 18.2.5**(Cauchy 收敛原理) 积分$\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛的充分必要条件是,对任意的$\varepsilon>0$,存在只与$\varepsilon$有关的$A_0$,当$A',A''>A_0$时,不等式

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

对$[\alpha,\beta]$中所有的$u$都成立.

证明留作练习.

从 Cauchy 收敛原理,立刻可以推出:

**定理 18.2.6**(Weierstrass 判别法) 设$f(x,u)$关于$x$在$[a,+\infty)$上连续.如果存在$[a,+\infty)$上的连续函数$F$,使得$\int_a^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x$收敛,而且对一切充分大的$x$及$[\alpha,\beta]$上的一切$u$,都有

$$|f(x,u)|\leqslant F(x),$$

那么积分$\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

**证明** 因为$\int_a^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x$收敛,故对任意的$\varepsilon>0$,存在$A_0$,只要$A',A''>A_0$,便有

$$\left|\int_{A'}^{A''}F(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

由此便知

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x,u)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{A'}^{A''}|f(x,u)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{A'}^{A''}F(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

因而$\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛. □

**例 2** 证明:积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\mathrm{d}t\quad(\alpha>0)$$

关于$u$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

**证明** 因为对任意的$u\in[0,+\infty)$,有不等式

$$|\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t|\leqslant\mathrm{e}^{-\alpha t}\quad(0\leqslant t<+\infty),$$

而$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$收敛,故由 Weierstrass 判别法知,积分$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t}\sin t dt$关于$u$在$[0,+\infty)$上一致收敛. □

**例 3**　证明:积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t}\sin t du \quad (\alpha>0)$$

关于$t$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

**证明**　因为$u=0$不是被积函数的瑕点,所以只需证明积分

$$\int_1^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t}\sin t du \tag{3}$$

关于$t$在$[0,+\infty)$上一致收敛就行了.由于

$$|e^{-(\alpha+u^2)t}\sin t| \leqslant t e^{-u^2 t} \leqslant \frac{t}{1+u^2 t} \leqslant \frac{1}{u^2},$$

而$\int_1^{+\infty}\frac{du}{u^2}<+\infty$,所以由 Weierstrass 判别法知式(3)关于$t$在$[0,+\infty)$上一致收敛. □

例 2 和例 3 的结论将在 18.3 节的例 4 中用到.

更细致的判别法有:

**定理 18.2.7**(Dirichlet 判别法)　设$f,g$满足以下两个条件:

(a) 当$A\to+\infty$时,积分$\int_a^A f(x,u)dx$对$u\in[\alpha,\beta]$一致有界,即存在常数$M$,使得当$A$充分大时,对每个$u\in[\alpha,\beta]$,有

$$\left|\int_a^A f(x,u)dx\right| \leqslant M;$$

(b) 对每个固定的$u\in[\alpha,\beta]$,$g(x,u)$是$x$的单调函数,且当$x\to+\infty$时关于$u$一致地趋于 0.

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)dx$$

在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

**证明**　因为$g(x,u)$关于$x$是单调的,故可用推广的第二积分平均值定理:

$$\int_{A'}^{A''} f(x,u)g(x,u)dx = g(A',u)\int_{A'}^{\xi} f(x,u)dx + g(A'',u)\int_{\xi}^{A''} f(x,u)dx,$$

其中$\xi\in[A',A'']$.由条件(a),对任意的$A',A''>a$及一切$u\in[\alpha,\beta]$,有

$$\left|\int_{A'}^{\xi} f(x,u)dx\right| \leqslant \left|\int_a^{\xi} f(x,u)dx\right| + \left|\int_a^{A'} f(x,u)dx\right| \leqslant 2M,$$

$$\left|\int_{\xi}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{a}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{a}^{\xi} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M.$$

由条件(b),对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $A_0>a$,只要 $x>A_0$,

$$|g(x,u)|<\frac{\varepsilon}{4M}$$

就对一切 $u\in[\alpha,\beta]$成立. 于是取 $A',A''>A_0$,即得

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon \quad (\alpha\leqslant u\leqslant\beta).$$

因此,由 Cauchy 收敛原理,知积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛. □

**定理 18.2.8**(Abel 判别法) 设 $f,g$ 满足以下两个条件:

(a) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛;

(b) 对每个固定的 $u\in[\alpha,\beta]$,$g(x,u)$关于 $x$ 单调,且关于 $u$ 一致有界.

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$$

在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

证明留作练习.

在实际情况中,经常遇到的是 $f,g$ 两个因子中只有一个包含参变量 $u$. 这时定理 18.2.7 和定理 18.2.8 叙述起来就可简单些. 例如,Abel 判别法可写成:

如果积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,函数 $g(x,u)$关于 $x$ 单调,且关于 $u\in[\alpha,\beta]$一致有界,那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x,u)\mathrm{d}x$$

在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

**例 4** 证明:积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 在$[0,+\infty)$上一致收敛.

**证明** 因为 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛,而函数 $\mathrm{e}^{-xu}$关于 $x$ 递减,且 $\mathrm{e}^{-xu}\leqslant 1$ 对 $x\in[0,+\infty)$和 $u\in[0,+\infty)$成立,故由 Abel 判别法知原积分在$[0,+\infty)$上一致收敛. □

**例 5** 证明:积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$ 在$[\delta,+\infty)$上一致收敛,这里 $a$ 及 $\delta>0$ 是常数.

**证明** 一方面,对任意的 $A>0$,有

$$\left|\int_0^A \sin ux\mathrm{d}x\right| = \frac{1-\cos uA}{u} \leqslant \frac{2}{\delta}.$$

另一方面，当 $x\to+\infty$ 时，函数 $\frac{x}{a^2+x^2}$ 递减趋于 0. 故由 Dirichlet 判别法知该积分在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛. □

**例 6** 讨论积分

$$\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x \tag{4}$$

关于 $p$ 在 $(0,2)$ 上的一致收敛性.

**解** 在 16.3 节的例 5 中，我们已经证明积分(4)在 $2\leqslant p<\infty$ 时发散，在 $0<p<1$ 时绝对收敛，在 $1\leqslant p<2$ 时条件收敛.

现在我们证明，积分(4)在 $0<p\leqslant 2-\delta$ 时一致收敛，其中 $\delta$ 是任意的正数. 与 16.3 节的例 5 中的做法一样，通过变换 $1/x=t$，积分(4)就变成下面的无穷积分：

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-p}}\mathrm{d}t. \tag{5}$$

由于 $0<p\leqslant 2-\delta$，$2-p\geqslant\delta$，所以

$$\frac{1}{t^{2-p}} \leqslant \frac{1}{t^{\delta}}.$$

因此当 $t\to+\infty$ 时，$1/t^{2-p}$ 一致地递减趋于 0. 另外

$$\left|\int_1^A \sin t\mathrm{d}t\right| \leqslant 2.$$

从而由 Dirichlet 判别法知积分(4)一致收敛.

但积分(4)在 $0<p<2$ 时非一致收敛. 因为如果积分(5)在 $0<p<2$ 时一致收敛，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>1$，只要 $A''>A'>A_0$，

$$\left|\int_{A'}^{A''} \frac{\sin t}{t^{2-p}}\mathrm{d}t\right| < \varepsilon \tag{6}$$

就对任意的 $p\in(0,2)$ 成立. 现取 $A'=2k\pi$，$A''=(2k+1)\pi$，则当 $k$ 充分大时，当然有 $A''>A'>A_0$. 于是由式(6)，得

$$\begin{aligned}\varepsilon > \left|\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t^{2-p}}\mathrm{d}t\right| &\geqslant \frac{1}{((2k+1)\pi)^{2-p}}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\sin t\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{((2k+1)\pi)^{2-p}}.\end{aligned}$$

因为上面的不等式对任意的 $p\in(0,2)$ 都成立，令 $p\to 2$，即得 $\varepsilon\geqslant 2$. 这当然是不可能的. □

回顾 15.3 节中的定理 15.3.5：如果 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $g$，那么 $g$ 也在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

如果把$[a,b]$换成无穷区间$[a,+\infty)$,即使$\{f_n\}$在$[a,+\infty)$上一致收敛于$g$,上面的等式也不一定成立.例如

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & 0\leqslant x\leqslant n^2,\\ 0, & x>n^2.\end{cases}$$

从定义即得

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{1}{n}\quad(0\leqslant x<+\infty),$$

从而$\{f_n\}$在$[0,+\infty)$上一致收敛于0,而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n^2}\frac{1}{n}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}n=+\infty\neq 0.$$

作为反常积分一致收敛概念的一个应用,我们给出在无穷区间上极限号和积分号交换的条件.

**定理 18.2.9** 设函数列$\{f_n\}$在$[a,+\infty)$上收敛于$g$,满足:

(a) 对任意的$A>a$,$\{f_n\}$在$[a,A]$上一致收敛;

(b) 积分$\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$对$n$一致收敛.

那么积分$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛,且

$$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x.$$

其实这个定理还可写成更一般的形式.

**定理 18.2.10** 设$E\subset\mathbf{R}$,$f(x,u)$定义在$[a,+\infty)\times E$上,又设$u_0$(可以是$+\infty$)是$E$的一个极限点,满足:

(a) 对任何$A>a$,等式

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ u\in E}}f(x,u)=g(x)$$

在$[a,A]$上一致地成立;

(b) $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$对$u\in E$一致收敛.

那么积分$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛,且

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ u\in E}}\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x.$$

在定理 18.2.10 中取 $E=\mathbf{N}^*$，$u_0=+\infty$，就得到定理 18.2.9. 下面给出定理 18.2.10 的证明：

由条件(b)知，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>a$，当 $A',A''>A_0$ 时，

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

对任意的 $u\in E$ 成立. 再由条件(a)，知

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ u\in E}} f(x,u)=g(x)$$

在 $[A',A'']$ 上一致地成立. 在不等式(7)中令 $u\to u_0$，即得

$$\left|\int_{A'}^{A''} g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon.$$

这就证明了 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 于是存在 $A_1>a$，使得

$$\left|\int_{A_1}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

对 $u\in E$ 成立. 由条件(a)知，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|u-u_0|<\delta$ 时(若 $u_0=+\infty$，则存在 $U$，使得当 $u>U$ 时)，

$$|f(x,u)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3(A_1-a)}$$

对 $[a,A_1]$ 中所有的 $x$ 成立. 因而当 $0<|u-u_0|<\delta$(或 $u>U$)时，有

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x\right|\\&\quad\leqslant\int_a^{A_1}|f(x,u)-g(x)|\,\mathrm{d}x+\left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{A_1}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x\right|\\&\quad<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

□

**例 7** 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x\ (0<p<1)$.

**解** 因为 $x=0$ 是瑕点，可把积分写成两部分：

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x\\&=I_1+I_2.\end{aligned}$$

对积分 $I_1$，因为 $0<x<1$，故有展开式

$$\frac{x^{p-1}}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+p-1}.$$

这个级数在(0,1)中的任何闭区间上一致收敛. 如果记它的部分和为 $f_n$，那么 $\{f_n\}$

在(0,1)中的任何闭区间上一致收敛.由于

$$0\leqslant f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{k+p-1}=\frac{x^{p-1}(1-(-1)^n x^n)}{1+x}$$
$$\leqslant 2\frac{x^{p-1}}{1+x}\leqslant 2x^{p-1},$$

而$\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{d}x$收敛,故$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$关于$n$一致收敛.于是由定理18.2.9,知

$$I_1=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+p-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}.$$

对积分$I_2$,作变换$x=1/t$,即得

$$I_2=\int_0^1\frac{t^{-p}}{1+t}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^{(1-p)-1}}{1+t}\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p-n}.$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p+n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p-n}$$
$$=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2p}{p^2-n^2}.$$

在17.2节中(见17.2节中的式(7)),我们已经证明

$$\frac{\pi}{\sin p\pi}=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2p}{p^2-n^2}.$$

故最后得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin p\pi}\quad(0<p<1).$$ □

这个积分在证明Γ函数的**余元公式**(定理18.4.9)时将要用到.

**例8** 计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha}$ $(\alpha>1)$.

**解** 作变量代换$t=x^\alpha$,那么$x=t^{1/\alpha}$,$\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}t^{(1/\alpha)-1}\mathrm{d}t$.于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha}=\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{t^{1/\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}},$$

这里已经用了例7的结果. □

## 练习题 18.2

1. 研究下列反常积分在指定区间上的一致收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-ux}\sin x\,dx$, $0 < u_0 \leqslant u < +\infty$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos ux}{1+x^4}dx$, $-\infty < u < +\infty$；

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(x+u)^2}$, $0 \leqslant u < +\infty$；

(4) $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$, $0 \leqslant \alpha < +\infty$；

(5) $\int_0^{+\infty} \sqrt{u}e^{-ux^2}dx$, $0 \leqslant u < +\infty$.

2. 证明：积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ux}{x}dx$ 在任何不包含 $u=0$ 的闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛，在包含 $u=0$ 的闭区间上不一致收敛.

3. 证明：积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x+u}e^{-ux}dx$ 关于 $u$ 在 $[0,\infty)$ 上一致收敛.

4. 设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续. 如果对每个 $u\in[\alpha,\beta)$，积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 都收敛，但积分 $\int_a^{+\infty} f(x,\beta)dx$ 发散，证明：$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上不一致收敛.

5. 证明：积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\cos ux}{a^2+x^2}dx \quad (a>0)$$

在 $[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$ 上一致收敛，但在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

6. 证明：积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ux}{a^2+x^2}dx \quad (a>0)$$

在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

## 问题 18.2

1. 证明：积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin \alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx$ 关于 $\alpha$ 在 $[\eta,+\infty)$ 上一致收敛，关于 $\alpha$ 在 $(0,\delta)$ 上不一致收敛，这里 $\eta$ 和 $\delta$ 是任意的正数.

2. 证明：积分 $\int_1^{+\infty} e^{-(x-1/\alpha)^2/\alpha^2}dx$ 关于 $\alpha$ 在 $(0,1]$ 上一致收敛，但不能用 Weierstrass 判别法来

判断.

3. 证明:积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛的充分必要条件是,对任一递增趋于$+\infty$的数列$\{A_n\}(A_1=a)$,函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,u)\mathrm{d}x$$

在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

# 18.3 含参变量反常积分的性质

设含参变量的反常积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$对$[\alpha,\beta]$中的每个$u$都收敛.我们要研究由它所确定的函数

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x \tag{1}$$

的性质.

与连续函数项级数的一致收敛性保证了级数和函数的连续性一样,积分(1)的一致收敛性保证了$\varphi$的连续性.

**定理 18.3.1** 如果函数$f(x,u)$在$[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$上连续,而且积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛,那么由式(1)所确定的函数$\varphi$在$[\alpha,\beta]$上连续.

**证明** 对任意的$A>a$,$f(x,u)$在$[a,A]\times[\alpha,\beta]$上一致连续,因而对任意的$u_0\in[\alpha,\beta]$,

$$\lim_{u\to u_0} f(x,u)=f(x,u_0)$$

对$x\in[a,A]$一致地成立.又因为$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛,所以在定理 18.2.10 中取$E=[\alpha,\beta]$,即得

$$\lim_{u\to u_0}\varphi(u)=\lim_{u\to u_0}\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f(x,u_0)\mathrm{d}x=\varphi(u_0).$$

这就证明了$\varphi$在$[\alpha,\beta]$上连续. □

**例 1** 讨论函数

$$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^u(2+x^3)}\mathrm{d}x$$

的连续性区间.

**解**　先看函数 $\varphi(u)$ 的定义域是什么,即上述积分在什么范围内收敛. 在 $x=0$ 附近,

$$\frac{\arctan x}{x^u(2+x^3)}\sim\frac{1}{2}\frac{1}{x^{u-1}},$$

因而当 $u<2$ 时,积分 $\int_0^1\frac{\arctan x}{x^u(2+x^3)}\mathrm{d}x$ 收敛. 当 $x\to+\infty$ 时,

$$\frac{\arctan x}{x^u(2+x^3)}\sim\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{u+3}},$$

从而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^u(2+x^3)}\mathrm{d}x$ 当 $u>-2$ 时收敛. 由此得知 $\varphi(u)$ 的定义域是 $(-2,2)$. 我们证明 $\varphi$ 在 $(-2,2)$ 上连续,为此,只需证明 $\varphi$ 在任意的 $[a,b]\subset(-2,2)$ 上连续就行了. 根据定理 18.3.1,只需证明上面的积分在 $[a,b]$ 上一致收敛.

当 $x\in(0,1)$ 时,设 $a\leqslant b<2$,则存在常数 $c$,使得

$$\frac{\arctan x}{x^u(2+x^3)}\leqslant\frac{c}{x^{a-1}}\leqslant\frac{c}{x^{b-1}},$$

而 $b-1<1$,故由比较判别法,知 $\int_{-1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^u(2+x^3)}\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,b]$ 上一致收敛.

当 $x\in[1,+\infty)$ 时,设 $-2<a\leqslant u$,则

$$\frac{\arctan x}{x^u(2+x^3)}\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{u+3}}\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{a+3}},$$

且 $a+3>1$. 故由比较判别法,知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^u(2+x^3)}\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛. 把两个积分合在一起,即知 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^u(2+x^3)}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]\subset(-2,2)$ 上一致收敛,故 $\varphi$ 在 $(-2,2)$ 上连续. □

与级数的情形一样,积分的一致收敛只是保证 $\varphi$ 连续的一个充分条件,但并不是必要的. 但在 $f$ 非负的条件下,积分的一致收敛便是 $\varphi$ 连续的必要条件. 我们有:

**定理 18.3.2**(Dini 定理)　设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续、非负. 如果由式(1) 定义的 $\varphi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续,那么积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

**证明** 把 $\varphi$ 写成下面级数的和：

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(u),$$

其中

$$a_n(u) = \int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots).$$

根据 $f$ 连续、非负的假定，知 $a_n(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上也是连续、非负的，因而由 Dini 定理（定理 15.3.4），知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. 从而对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N$，使得不等式

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(u) < \varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 中的所有 $u$ 成立. 现取 $A_0 = a + N$. 由于 $f$ 非负，故当 $A > A_0$ 时，对任意的 $u \in [\alpha,\beta]$，有

$$\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x \leqslant \int_{A_0}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x = \sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(u) < \varepsilon.$$

这就证明了 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. □

与级数的情形一样，这里的 $[\alpha,\beta]$ 必须是有界的闭区间，否则定理将不成立. 这样的例子见问题 18.3 中的第 2 题.

关于 $\varphi$ 的积分，我们有：

**定理 18.3.3** 设 $[\alpha,\beta]$ 是一有限区间，那么在定理 18.3.1 的同样条件下，$\varphi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，且

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

也就是说，$x$ 与 $u$ 的积分次序可以交换：

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u = \int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

**证明** 根据定理 18.3.1，$\varphi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，当然在 $[\alpha,\beta]$ 上可积. 因为对任何 $A > a$，$f(x,u)$ 在 $[a,A]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，故由定理 18.1.3，有

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u = \int_a^A\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

记 $F(A,u)=\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x$，那么当 $A\to+\infty$ 时，$F(A,u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$，因而由定理 18.2.3，知

$$\lim_{A\to+\infty}\int_\alpha^\beta F(A,u)\mathrm{d}u=\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u. \tag{4}$$

于是由式(3)和式(4)，可得

$$\begin{aligned}\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x&=\lim_{A\to+\infty}\int_\alpha^\beta\left(\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u\\&=\int_\alpha^\beta\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

这就证明了式(2)． □

**例 2**　设 $a>0,b>0,c$ 是任意的实数．计算积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos cx\mathrm{d}x$．

**解**　因为 $\dfrac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}=\int_a^b \mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}u$，所以

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos cx\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\int_a^b(\mathrm{e}^{-ux}\cos cx\mathrm{d}u)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\cos cx\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u\\&=\int_a^b\frac{u}{u^2+c^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}.\end{aligned}$$

上面两个积分之所以能交换，是因为积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\cos cx\mathrm{d}x$$

关于 $u\in[a,b]$ 一致收敛． □

定理 18.3.3 断言，在所设条件下，对 $x$ 和 $u$ 进行积分的次序可以交换，但这里关于 $u$ 的积分区间 $[\alpha,\beta]$ 是有限的．在很多情况下，往往需要知道两个无穷区间的积分是否可以交换．对此，我们有：

**定理 18.3.4**　设 $f$ 满足下列条件：

(a) $f$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续；

(b) 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x,\quad\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$$

分别关于 $u$ 在任何区间 $[\alpha,\beta]$ 上和关于 $x$ 在任何区间 $[a,b]$ 上一致收敛；

(c) 积分

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x,\quad \int_\alpha^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u$$

中至少有一个存在.那么积分

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x,\quad \int_\alpha^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u$$

都存在,且相等,即

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\int_\alpha^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u.\tag{5}$$

**证明** 为确定起见,不妨假定

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\tag{6}$$

存在.因而式(5)的左边存在,要证明的便是

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_\alpha^{\beta}\left(\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

由于$\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$关于$u$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛,故由定理18.3.3,知

$$\int_\alpha^{\beta}\left(\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{\beta}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

于是只需证明

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{\beta}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.\tag{7}$$

记

$$F(\beta,x)=\int_\alpha^{\beta}f(x,u)\mathrm{d}u.$$

由条件(b),知

$$\lim_{\beta\to+\infty}F(\beta,x)=\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$$

关于$x$在任何区间$[a,b]$($b>a$)上一致收敛.因为对任意的$\beta\in[\alpha,+\infty)$,有

$$|F(\beta,x)|\leqslant\int_\alpha^{\beta}|f(x,u)|\mathrm{d}u\leqslant\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u,$$

故由式(6)和Weierstrass判别法知,积分$\int_a^{+\infty}F(\beta,x)\mathrm{d}x$关于$\beta$在$[\alpha,+\infty)$上一致收敛.于是由定理18.2.10,得

$$\int_a^{+\infty}F(\beta,x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{\beta}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x<+\infty,$$

且

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{\beta}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

这就是要证明的式(7). □

在 $f\geqslant 0$ 的情况下,利用关于反常积分的 Dini 定理(定理 18.3.2),从定理 18.3.4,可得:

**定理 18.3.5**　设 $f$ 满足下列条件:

(a) $f$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续、非负;

(b) 函数

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x,\quad \psi(x)=\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$$

分别在 $[\alpha,+\infty)$ 和 $[a,+\infty)$ 上连续;

(c) 积分

$$\int_\alpha^{+\infty}\varphi(u)\mathrm{d}u,\quad \int_a^{+\infty}\psi(x)\mathrm{d}x$$

中至少有一个收敛.

那么(c)中另一个积分也收敛,而且两者相等,即等式(3)成立.

**例 3**　计算积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

**解**　记 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x>0$. 作变换 $x=ut\ (u>0)$,得

$$I=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2t^2}\mathrm{d}t.$$

如果记

$$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2t^2}\mathrm{d}t,$$

那么 $\varphi(u)=I$ 是个取常数值的函数. 现在有

$$\begin{aligned}I^2&=I\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}I\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

如果这两个无穷积分能交换次序,那么

$$I^2=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.$$

综上,有

$$I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

现在来证明交换次序的合理性.因为 $f(t,u)=u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上是连续、非负的,

$$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-u^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2t^2}\mathrm{d}(ut)=I\mathrm{e}^{-u^2}\quad(u>0),$$

$\varphi(0)=0$,所以 $\varphi(u)$ 在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 上是连续函数.而

$$\psi(t)=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}$$

是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数.因此由定理 18.3.5,可得

$$\begin{aligned}\int_\delta^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u&=\int_0^{+\infty}\left(\int_\delta^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\delta^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{8}$$

记 $f(\delta,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\delta^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}$,它在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续.由于

$$0<\frac{\mathrm{e}^{-\delta^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}\leqslant\frac{1}{1+t^2},$$

所以积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\delta^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

关于 $\delta$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛,从而 $\int_0^{+\infty}f(\delta,t)\mathrm{d}t$ 在 $\delta=0$ 处连续,因而由式(8),得到

$$\begin{aligned}I^2&=\lim_{\delta\to0}\int_\delta^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\\&=\lim_{\delta\to0}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\delta^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

□

**例 4** 计算 Fresnel(菲涅耳,1788~1827)积分 $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$.

**解** 令 $x^2=t$,那么

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.\tag{9}$$

对刚才算出来的结果

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

作变换 $x=\sqrt{t}u$，可得

$$\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}du. \tag{10}$$

把它代入式(9)，并交换积分的次序，便有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\sin x^2dx&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\sin t\,du\right)dt\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\sin t\,dt\right)du\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4}\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

虽然积分值算出来了，但要证明交换积分次序的合法性却并不容易. 为了克服这一困难，在式(9)中引入收敛因子 $e^{-\alpha t}(\alpha>0)$. 考虑积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

把式(10)代入，并交换积分次序，得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,du\right)dt\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,dt\right)du\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(\alpha+u^2)^2}\quad(\alpha>0).\end{aligned}\tag{11}$$

由 18.2 节中的例 2 和例 3，知积分 $\int_0^{+\infty}e^{-t(\alpha+u^2)}\sin t\,dt$ 关于 $u$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，积分 $\int_0^{+\infty}e^{-t(\alpha+u^2)}\sin t\,du$ 关于 $t$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，而且积分

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-t(\alpha+u^2)}\ |\sin t|\ dt\right)du$$

存在. 故由定理 18.3.4，知交换积分次序是允许的. 又因为积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt,\quad\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(\alpha+u^2)^2}$$

都关于 $\alpha$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，故能在积分号下取极限 $\alpha\to0$. 在式(11)的两边令 $\alpha\to0$，即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

这里我们已经利用了 18.2 节中例 8 的结果. 因此

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$ □

最后来研究函数 $\varphi$ 的求导问题.

**定理 18.3.6** 如果函数 $f$ 和 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 都在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 且积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛, 那么 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微, 且

$$\varphi'(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x\quad(\alpha\leqslant u\leqslant\beta).\tag{12}$$

**证明** 对任意的正整数 $n>a$, 令

$$\varphi_n(u)=\int_a^n f(x,u)\mathrm{d}x.$$

由定理 18.1.2, 知 $\varphi_n$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导函数

$$\varphi_n'(u)=\int_a^n\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x.$$

由于 $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛, 所以函数列 $\{\varphi_n'(u)\}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛, 且因 $\{\varphi_n\}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上收敛于 $\varphi$, 故由定理 15.3.9, 知 $\varphi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微, 且式(12) 成立. □

**例 5** 利用对参数的微分法, 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\mathrm{d}x\quad(a>0,b>0).$$

**解** 把 $a$ 看做参数, 记上面的积分为 $I(a)$, 那么

$$I'(a)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x.\tag{13}$$

为了说明微分运算和积分运算的交换是允许的, 我们把 $a$ 限制在区间 $[\delta,+\infty)$ 中, 这里 $\delta$ 是任意的正数. 于是

$$\mathrm{e}^{-ax^2}\leqslant\mathrm{e}^{-\delta x^2}.$$

由于 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\delta x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法, 知积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x$ 关于 $a$ 在

$[\delta, +\infty)$ 上一致收敛,从而由定理 18.3.6 知上面的运算是允许的. 由于 $\delta > 0$ 是任意的,故式(13) 在 $(0, +\infty)$ 上成立. 由例 3,得

$$I'(a) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}.$$

因此 $I(a) = -\sqrt{\pi a} + c$. 由于 $I(b) = 0$, $c = \sqrt{\pi b}$,故最后得

$$I(a) = \sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a}).$$

□

**例 6**　计算积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \mathrm{d}x\,(a > 0)$.

**解**　把 $b$ 看做参数,记上面的积分为 $I(b)$. 先证明

$$I'(b) = -\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx \mathrm{d}x \tag{14}$$

对任意的 $b \in (-\infty, +\infty)$ 成立. 事实上,由于

$$|x e^{-ax^2} \sin bx| \leqslant x e^{-ax^2},$$

而 $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \mathrm{d}x$ 收敛,故由 Weierstrass 判别法,知式(14)右边的积分对 $b \in (-\infty, +\infty)$ 一致收敛,因而式(14)成立. 用分部积分法,容易算出

$$I'(b) = -\frac{b}{2a} I(b).$$

由此得

$$\ln I(b) = -\frac{b^2}{4a} + c,$$

或者

$$I(b) = c' e^{-b^2/(4a)}.$$

已知 $I(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}$,所以

$$I(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/(4a)}.$$

□

以上这些结果都是对无穷积分来讨论的,对瑕积分这些结果也都成立,这里就不再叙述了.

## 练 习 题 18.3

1. 研究下列函数在指定区间上的连续性:

(1) $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2 + t^x} \mathrm{d}t, x \in (2, +\infty)$;

(2) $\varphi(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x,\alpha\in(0,2)$;

(3) $f(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x,\alpha\in(0,+\infty)$.

2. 利用公式$\int_0^1 x^{\alpha-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}(\alpha>0)$，计算积分

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(\ln x)^m\mathrm{d}x,$$

其中 $m$ 为正整数.

3. 计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin cx\mathrm{d}x\ (a>0,b>0,c>0)$.

4. 计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\mathrm{d}x\ (\beta\neq 0)$.

5. 利用已知的积分值,计算下列积分：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(2x^2+x+2)}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x}\mathrm{d}x$.

6. 如果$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,证明:函数

$$\varphi(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos ux\mathrm{d}x$$

在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

## 问题 18.3

1. 证明:函数

$$f(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{\alpha}}\mathrm{d}t$$

在$[0,1)$上连续.

2. 通过积分

$$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x\quad(0<u\leqslant 1),$$

$$\psi(u)=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{u(u-x)}\mathrm{d}x\quad(1\leqslant u<+\infty),$$

说明含参变量反常积分的 Dini 定理(定理 18.3.2)在开区间或无穷区间上不成立.

3. 计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x\arctan\beta x}{x^2}\mathrm{d}x$.

4. 计算积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\iint_{D}\frac{\sin\left(t\sqrt{x^{2}+y^{2}}\right)}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t,$$

式中

$$D=\{(x,y):1\leqslant x^{2}+y^{2}\leqslant 4\}.$$

5. 利用已知积分,计算下列积分:

(1) $\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^{2}+a^{2}/x^{2})}\mathrm{d}x\ (a>0)$;

(2) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^{2}}-\cos bx}{x^{2}}\mathrm{d}x\ (a>0)$;

(3) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^{4}x}{x^{2}}\mathrm{d}x$;

(4) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^{4}\alpha x-\sin^{4}\beta x}{x}\mathrm{d}x\ (\alpha>0,\beta>0)$.

6. 在定理 18.3.6 中,如果把条件 $\int_{a}^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上收敛,减弱为 $\int_{a}^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 中的某一点收敛,其他条件不变,证明:积分 $\int_{a}^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 $\varphi(u)$,且

$$\varphi'(u)=\int_{a}^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x.$$

# 18.4　Γ 函数和 B 函数

含参变量的反常积分

$$\Gamma(s)=\int_{0}^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_{0}^{1}t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t$$

分别称为 Γ(Gamma)函数和 B(Beta)函数,前者是含一个参变量 $s$ 的函数,后者是含两个参变量 $p,q$ 的函数,它们都是由含参变量的反常积分所确定的非初等函数.这两个积分都是由 Euler 首先提出并研究的,所以也分别称为 Euler 第二型积分和 Euler 第一型积分.这一节将专门讨论这两个函数的性质以及它们之间的联系.

16.3 节中的例 4 确定了 $\Gamma(s)$的定义域是 $s>0$,例 3 确定了 $\mathrm{B}(p,q)$的定义域是 $p>0,q>0$.

**定理 18.4.1** $\Gamma(s)$在$(0,+\infty)$上连续,且有各阶连续导数.

**证明** 把 $\Gamma(s)$分成两部分:

$$\Gamma(s)=\int_0^1 t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

对任意的 $\beta>\alpha>0$,取 $s\in[\alpha,\beta]$,则当 $0<t<1$ 时,

$$0<t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\leqslant t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

因为 $\int_0^1 t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 收敛,所以$\int_0^1 t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 关于 $s$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛,因而 $\int_0^1 t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 是$[\alpha,\beta]$上的连续函数.当 $t>1$ 时,

$$t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\leqslant t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

因为$\int_1^{+\infty} t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 收敛,所以积分$\int_1^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 关于$s$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛,因而 $\int_1^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 是$[\alpha,\beta]$上的连续函数.由 $\beta>\alpha>0$ 的任意性,即知 $\Gamma(s)$ 在$(0,+\infty)$上连续.用同样的方法,知积分

$$\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$$

也在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.根据定理 18.3.6,知

$$\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$$

存在且连续.重复上面的做法,即知 $\Gamma(s)$在$(0,+\infty)$上有任意阶导数. □

**定理 18.4.2** $\Gamma$ 函数具有以下三条性质:

(1) 对任意的 $s>0,\Gamma(s)>0$,且 $\Gamma(1)=1$;

(2) 对任意的 $s>0,\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$;

(3) $\ln\Gamma(s)$是$(0,+\infty)$上的凸函数.

**证明** (1) 从 $\Gamma$ 函数的定义,即知 $\Gamma(s)>0$ 且 $\Gamma(1)=1$.

(2) 由分部积分法,得

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty} t^s\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-t^s\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=s\Gamma(s).$$

(3) 只要证明对 $p\in(1,+\infty),1/p+1/q=1,s_1,s_2\in(0,+\infty)$,有不等式

$$\ln\Gamma\left(\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}\right)\leqslant\frac{1}{p}\ln\Gamma(s_1)+\frac{1}{q}\ln\Gamma(s_2),$$

或者

$$\Gamma\left(\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}\right)\leqslant(\Gamma(s_1))^{1/p}(\Gamma(s_2))^{1/q}.$$

事实上，由 Hölder 不等式，即得

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}\right)&=\int_0^{+\infty}t^{s_1/p+s_2/q-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}(t^{(s_1-1)/p}\mathrm{e}^{-t/p})(t^{(s_2-1)/q}\mathrm{e}^{-t/q})\mathrm{d}t\\&\leqslant\left(\int_0^{+\infty}t^{s_1-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_0^{+\infty}t^{s_2-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)^{1/q}\\&=(\Gamma(s_1))^{1/p}(\Gamma(s_2))^{1/q}.\end{aligned}$$

这里我们使用了无穷积分的 Hölder 不等式，这从通常的 Hölder 不等式取极限就能得到. □

在性质(2)中取 $s=n$（$n$ 是任意正整数），那么

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1)&=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots\\&=n(n-1)\cdots1\Gamma(1)=n!,\end{aligned}$$

因而 $\Gamma$ 函数可以看做是阶乘函数的推广.

现设 $n<s\leqslant n+1$，反复运用性质(2)，可得

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)=\cdots=s(s-1)\cdots(s-n)\Gamma(s-n),$$

这里 $0<s-n\leqslant1$. 由此可见，只要知道 $\Gamma$ 在(0,1)上的值，$\Gamma$ 在其他正数 $s$ 处的值就能由上式给出.

出乎意料的是，定理 18.4.2 中 $\Gamma$ 函数的三条性质完全确定了 $\Gamma$ 函数. 这就是说，任何定义在$(0,+\infty)$上的函数，如果具有定理 18.4.2 中的三条性质，那么它一定是 $\Gamma$ 函数. 这个意想不到的结果是由 Bohr 和 Mollerup 在 1922 年首先发现的.

**定理 18.4.3**　设$(0,+\infty)$上的函数 $f$ 满足以下三个条件：

(a) 对任意的 $x>0$，$f(x)>0$ 且 $f(1)=1$；

(b) 对任意的 $x>0$，$f(x+1)=xf(x)$；

(c) $\ln f$ 是$(0,+\infty)$上的凸函数.

那么 $f(x)=\Gamma(x)$对任何 $x>0$ 成立.

**证明**　我们只要证明 $f$ 被(a)，(b)，(c)三个条件所唯一确定就行了. 因为 $\Gamma$ 也满足(a)，(b)，(c)三个条件，所以必有 $f=\Gamma$.

由条件(b)，我们只需对(0,1)中的 $x$ 来讨论. 设 $x\in(0,1)$，因为 $\ln f$ 是$(0,+\infty)$上的凸函数，由关于凸函数性质的定理 3.5.10，得

$$\frac{\ln f(n)-\ln f(n-1)}{n-(n-1)}\leqslant\frac{\ln f(n+x)-\ln f(n)}{(n+x)-n}$$
$$\leqslant\frac{\ln f(n+1)-\ln f(n)}{(n+1)-n},$$

这里 $n$ 是大于 1 的正整数.由条件(a)和(b),知 $f(n)=(n-1)!$,所以上面的不等式可以写为

$$\ln(n-1)!-\ln(n-2)!\leqslant\frac{\ln f(n+x)-\ln(n-1)!}{x}$$
$$\leqslant\ln n!-\ln(n-1)!,$$

即

$$x\ln(n-1)\leqslant\ln f(n+x)-\ln(n-1)!\leqslant x\ln n.$$

对上面的不等式都加上 $\ln(n-1)!$,得

$$\ln((n-1)^x(n-1)!)\leqslant\ln f(n+x)\leqslant\ln(n^x(n-1)!),$$

即

$$(n-1)^x(n-1)!\leqslant f(n+x)\leqslant n^x(n-1)!.$$

由条件(b),知

$$f(n+x)=(n-1+x)\cdots(1+x)xf(x),$$

代入上式,得

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\leqslant f(x)\leqslant\frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.\tag{1}$$

把式(1)左边中的 $n-1$ 换成 $n$,不等式仍然成立,这样式(1)可写成

$$\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\leqslant f(x)\leqslant\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,\frac{x+n}{n},$$

或者

$$\frac{n}{x+n}f(x)\leqslant\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\leqslant f(x).$$

在上式的两边令 $n\to\infty$,即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=f(x).\tag{2}$$

这就证明了 $f(x)$ 被式(2)左边的极限所唯一确定. □

从等式(2)顺便得到了 Γ 函数的另一个表达式:

**定理 18.4.4** 对任意的 $x>0$,有

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.\tag{3}$$

**证明**　上面已经证明,当 $0<x<1$ 时,等式是成立的.现记

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\quad(x>0),$$

那么

$$\begin{aligned}g(x+1)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{x+1}n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}\\&=x\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\frac{n}{n+x+1}\\&=xg(x).\end{aligned}\tag{4}$$

由于当 $0<x<1$ 时,$g(x)=\Gamma(x)$.现设 $n<x\leqslant n+1$($n$ 是任意的正整数),那么从式(4),即得

$$\begin{aligned}g(x+1)=xg(x)=\cdots&=x(x-1)\cdots(x-n)g(x-n)\\&=x(x-1)\cdots(x-n)\Gamma(x-n)=\Gamma(x+1).\end{aligned}$$

这就证明了对任意的 $x>0$,式(3)成立.　□

B 函数有下面简单的递推公式.

**定理 18.4.5**　对任意的 $p>0,q>0$,有

$$\mathrm{B}(p+1,q)=\frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q).\tag{5}$$

**证明**　用一次分部积分,可得

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(p+1,q)&=\int_0^1 t^p(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^p(1-t)^{p+q-1}\mathrm{d}t\\&=\frac{p}{p+q}\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{p-1}(1-t)^{p+q}\frac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q).\end{aligned}$$
□

表面上似乎不相关联的 Γ 函数与 B 函数实际上有着密切的联系.

**定理 18.4.6**　对任意的 $p>0,q>0$,有

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

**证明**　固定 $q>0$,令

$$f(p)=\frac{\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)}{\Gamma(q)}.$$

如果能证明 $f$ 具有定理 18.4.3 中的三条性质，那么由定理 18.4.3 即得 $f(p)=\Gamma(p)$，即定理 18.4.6 成立.

利用式(5)和 $\Gamma$ 函数的递推关系，即得

$$\begin{aligned} f(p+1) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\Gamma(p+1+q)\mathrm{B}(p+1,q) \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)}(p+q)\Gamma(p+q)\frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q) \\ &= pf(p). \end{aligned}$$

因此 $f$ 具有定理 18.4.3 中的性质(b). 注意到

$$\mathrm{B}(1,q)=\int_0^1(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{q},$$

可得

$$f(1)=\frac{\Gamma(1+q)\mathrm{B}(1,q)}{\Gamma(q)}=\frac{\Gamma(q+1)}{q\Gamma(q)}=1.$$

另外，显然有 $f(p)>0$，可见 $f$ 也具有定理 18.4.3 中的性质(a). 最后证明 $\ln f$ 是 $(0,+\infty)$上的凸函数. 由于

$$\ln f(p)=\ln\Gamma(p+q)+\ln\mathrm{B}(p,q)-\ln\Gamma(q),$$

用与证明 $\ln\Gamma$ 是$(0,+\infty)$上的凸函数完全相同的方法，可以证明 $\ln\mathrm{B}(p,q)$是关于变量 $p$ 在$(0,+\infty)$上的凸函数，因而 $\ln f$ 也是$(0,+\infty)$上的凸函数. 这样，$f$ 满足定理 18.4.3 的全部条件，所以 $f(p)=\Gamma(p)$，因而式(3)成立. □

根据定理 18.4.6，不难从 $\Gamma$ 函数的性质直接推出 B 函数的一些性质.

**定理 18.4.7** (1) $\mathrm{B}(p,q)$在$(0,+\infty)\times(0,+\infty)$上连续且有各阶连续偏导数；

(2) $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)\ (p>0,q>0)$；

(3) $\mathrm{B}(p+1,q+1)=\dfrac{pq}{(p+q+1)(p+q)}\mathrm{B}(p,q)\ (p>0,q>0)$.

证明是显然的.

**例 1** 计算积分 $\int_0^{\pi/2}\cos^\alpha x\sin^\beta x\mathrm{d}x\ (\alpha>-1,\beta>-1)$.

**解** 令 $t=\sin^2 x$，则有

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2}\cos^\alpha x\sin^\beta x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{(\beta-1)/2}(1-t)^{(\alpha-1)/2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\beta+1}{2},\frac{\alpha+1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}.$$ □

如果在上式中取 $\alpha=\beta=0$,则可得到

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{6}$$

如果在 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 中作变量代换 $t = x^2$,则有

$$\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty} x^{2s-1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

令 $s=1/2$,并利用式(6)的结果,我们再一次得到

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

由于当 $\alpha=m,\beta=n$ 为正整数时,$\Gamma((m+1)/2)$ 和 $\Gamma((n+1)/2)$ 的值容易算出,这时类似于例1这种积分的值便可直接写出.例如

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\sin^4 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)},$$

而

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{\pi},$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\sin^4 x\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{512}.$$ □

**例2** 证明:$\mathrm{B}(p,q)$可表示为

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\mathrm{d}x \quad (p>0,q>0). \tag{7}$$

利用上面的公式,计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{(1+x^5)^3}\mathrm{d}x$.

**证明** 对

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t$$

作变量代换 $t=1/(1+x)$,即得式(7).对积分 $I$ 作变量代换 $x^5=t$,得

$$I=\frac{1}{5}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-1/2}}{(1+t)^3}\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\int_0^{+\infty}\frac{t^{1/2-1}}{(1+t)^3}\mathrm{d}t.$$

利用式(7),即得

$$I=\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{3}{40}\pi.$$ □

**例 3** 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}$ 的和.

**解** 利用定理 18.4.6,可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n!n!}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!n!}{(2n)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{B}(n+1,n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 t^n(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t.$$

由于当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时,$0\leqslant t(1-t)\leqslant 1/4$,所以

$$0\leqslant t^n(1-t)^{n-1}\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}t^n(1-t)^{n-1}$ 在$[0,1]$上一致收敛,于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}t^n(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t=\int_0^1 t\sum_{n=1}^{\infty}(t(1-t))^{n-1}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1\frac{t}{1-t(1-t)}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$ □

Γ 函数还有两个重要的公式.

**定理 18.4.8**(加倍公式) 对任意的 $s>0$,有

$$\Gamma(2s)=\frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right).\tag{8}$$

**证明** 令 $p=2s$,式(8)可写成

$$\Gamma(p)=\frac{2^{p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right).\tag{9}$$

要证明式(9)成立,只要证明

$$f(p)=\frac{2^{p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)$$

满足定理 18.4.3 中的三条性质就行了.显然

$$\begin{aligned}f(p+1)&=\frac{2^{p}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)\\&=\frac{p}{2}\frac{2^{p}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)=pf(p),\end{aligned}$$

$$f(1)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=1.$$

又因为

$$\ln f(p)=\ln\frac{2^{p-1}}{\sqrt{\pi}}+\ln\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)+\ln\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right),$$

所以 $\ln f$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.由定理 14.4.3,即知式(9)成立,因而式(8)成立. □

由定理 18.4.6,还可得下面的余元公式.

**定理 18.4.9**(余元公式)　对任意的 $p\in(0,1)$,有

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}.\tag{10}$$

**证明**　在定理 14.4.6 中令 $q=1-p$,那么

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\mathrm{B}(1-p,p)=\int_0^1 t^{-p}(1-t)^{p-1}\mathrm{d}t.\tag{11}$$

令 $t=1/(1+x)$,并利用 18.2 节中例 7 的结果,得

$$\int_0^1 t^{-p}(1-t)^{p-1}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

代入式(11),即得式(10). □

根据余元公式,只要知道 $\Gamma$ 在 $(0,1/2)$ 上的值,便能算出 $\Gamma$ 在 $(0,1)$ 上的值,从而算出 $\Gamma$ 在 $(0,+\infty)$ 上的值.

**例 4**　计算积分

$$\int_0^{\pi/2}(\tan x)^{\alpha}\mathrm{d}x\quad(|\alpha|<1).$$

**解**　利用例 1 的结果,得

$$\int_0^{\pi/2}(\tan x)^\alpha \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\cos^{-\alpha}x\sin^\alpha x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right).$$

利用余元公式，得

$$\int_0^{\pi/2}(\tan x)^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{1+\alpha}{2}\pi} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}.$$ □

7.4 节中的定理 7.4.1 曾经给出 $n!$ 的一个渐近表达式：

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \quad (n\to\infty). \tag{12}$$

这就是 **Stirling 公式**. 有了这个公式，处理与 $n!$ 有关的问题就方便多了.

由于 $\Gamma(n+1)=n!$，自然想到，当 $x\to+\infty$ 时，$\Gamma(x+1)$ 有没有类似于式(12)的渐近表达式？即

$$\Gamma(x+1)\sim\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x \quad (x\to+\infty) \tag{13}$$

是否成立？下面将证明式(13)是正确的. 事实上，我们能得到比式(13)更精细的结果.

**定理 18.4.10**(Stirling)　对任意的 $x>0$，存在 $\theta(x)\in(0,1)$，使得

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x \mathrm{e}^{\frac{\theta(x)}{12x}}. \tag{14}$$

**证明**　因为 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$，故式(14)等价于

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x \mathrm{e}^{\frac{\theta(x)}{12x}},$$

两边取对数，得

$$\ln\Gamma(x) = \ln\sqrt{2\pi} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{\theta(x)}{12x}. \tag{15}$$

因此只要证明式(15).

下面通过四个引理来证明式(15).

**引理 18.4.1**　对任意的 $x>0$，有不等式

$$0<\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1<\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right). \tag{16}$$

**证明**　利用 9.5 节中例 6 的展开式

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (-1<x<1),$$

可得

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{2x+1}{2}\ln\frac{1+\dfrac{1}{2x+1}}{1-\dfrac{1}{2x+1}}$$

$$=\frac{2x+1}{2}2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{2k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{2k}$$

$$=1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{2}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{4}+\cdots.$$

由此即得

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{2}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{4}+\cdots. \tag{17}$$

由于式(17)的右边取正值,这就证明了式(16)左边的不等式.另外,显然可见式(17)的右边小于

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{2}\left(1+\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{4}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{2}\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{2x+1}\right)^{2}}=\frac{1}{3}\frac{1}{4x^{2}+4x}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right).$$

这就证明了式(16)右边的不等式. □

**引理 18.4.2** 对任意的 $x>0$,有

$$0<\int_{0}^{+\infty}\frac{[t]-t+\dfrac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t<\frac{1}{12x}.$$

**证明** 计算得

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{[t]-t+\dfrac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{k}^{k+1}\frac{k-t+\dfrac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(k+\frac{1}{2}+x\right)\ln\left(1+\frac{1}{k+x}\right)-1\right).$$

在不等式(16)中,用 $k+x$ 代替 $x$,则得

$$0<\int_{0}^{+\infty}\frac{[t]-t+\dfrac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t$$

$$< \frac{1}{12}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+x+1}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{12x}.$$ □

**引理 18.4.3** 对任意的正整数 $n$ 和 $x>0$,有

$$\int_0^n \frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t = \left(n+x+\frac{1}{2}\right)\ln(n+x)-\left(\frac{1}{2}+x\right)\ln x - \sum_{k=1}^{n}\ln(k+x)-n.$$

**证明** 直接计算得

$$\begin{aligned}
\int_0^n \frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(\frac{k+1/2+x}{t+x}-1\right)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(k+\frac{1}{2}+x\right)(\ln(k+1+x)-\ln(k+x))-1\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}+x\right)\ln(k+1+x) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}+x\right)\ln(k+x)-n \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}+x\right)\ln(k+x) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}+x\right)\ln(k+x)-n \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}+x\right)\ln(k+x)-\sum_{k=1}^{n}\ln(k+x) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}+x\right)\ln(k+x)-n \\
&= \left(n+\frac{1}{2}+x\right)\ln(n+x)-\left(\frac{1}{2}+x\right)\ln x \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n}\ln(k+x)-n.
\end{aligned}$$ □

**引理 18.4.4**　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln n!\ +n-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln n\right)=\ln\sqrt{2\pi}.$　(18)

**证明**　在 Stirling 公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}\sqrt{2\pi n}}=1$$

的两边取对数，即得(18).

**式(15)的证明**　由等式

$$\ln\frac{n^{x}n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\ln n!+x\ln n-\sum_{k=0}^{n}\ln(k+x)$$

和引理 18.4.3，可得

$$\begin{aligned}
&\ln\frac{n^{x}n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}-\int_{0}^{n}\frac{[t]-t+\dfrac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t\\
&=\ln n!+x\ln n-\ln x-\left(n+x+\frac{1}{2}\right)\ln(n+x)+\left(\frac{1}{2}+x\right)\ln x+n\\
&=\ln n!+n+x\ln n-\ln x-\left(n+x+\frac{1}{2}\right)\left(\ln n+\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)+\left(\frac{1}{2}+x\right)\ln x\\
&=\ln n!+n-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-\left(n+x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x.
\end{aligned}\tag{19}$$

由引理 18.4.4，知式(19)的前三项之和的极限，当 $n\to\infty$ 时为 $\ln\sqrt{2\pi}$，而

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(n+x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+x+1/2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{x+1/2}\\
&=x.
\end{aligned}$$

由定理 18.4.4，知式(19)左边的第一项的极限当 $n\to\infty$ 时是 $\ln\Gamma(x)$. 在式(19)的两边令 $n\to\infty$，即得

$$\ln\Gamma(x)-\int_{0}^{+\infty}\frac{[t]-t+\dfrac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t=\ln\sqrt{2\pi}-x+\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x.\tag{20}$$

若记

$$\theta(x)=12x\int_{0}^{+\infty}\frac{[t]-t+\dfrac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t,$$

则由引理 18.4.3，知 $0<\theta(x)<1$，于是式(20)可写成

$$\ln\Gamma(x) = \ln\sqrt{2\pi} - x + \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln x + \frac{\theta(x)}{12x}.$$

这正是要证明的式(15). □

从定理 18.4.10,可得:

**推论 18.4.1** 对于任意的实数 $a$,有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} = 1.$$

证明留作练习.

**例 4** 计算极限 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^1(1-x^2)^\alpha\mathrm{d}x$.

**解** 令 $x^2 = t$,则

$$\begin{aligned}\int_0^1(1-x^2)^\alpha\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^\alpha\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\alpha+1\right)\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}.\end{aligned}$$

由推论 18.4.1,可得

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to+\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^1(1-x^2)^\alpha\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\sqrt{\alpha}\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

□

作为本节的结尾,我们用 Γ 函数来表示 $n$ 维球的体积和面积.

在 10.8 节的例 2 中,我们给出了半径为 $a$ 的 $n$ 维球的体积:

$$\mu(B_n(a)) = \begin{cases}\dfrac{\pi^k}{k!}a^{2k}, & n = 2k,\\[2mm] \dfrac{2^k\pi^{k-1}}{(2k-1)!!}a^{2k-1}, & n = 2k-1.\end{cases}$$

这里的公式是对 $n$ 为偶数和奇数分别给出的,颇不方便.现在用 Γ 函数可以把两者统一起来.

当 $n=2k$ 时,有

$$\mu(B_n(a)) = \frac{\pi^k}{\Gamma(k+1)}a^{2k} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}a^n.$$

当 $n=2k-1$ 时，

$$\mu(B_n(a))=\frac{\pi^{k-1}a^{2k-1}}{\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2^k}}$$

$$=\frac{\pi^{k-1/2}a^{2k-1}}{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\pi^{k-1/2}}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}a^{2k-1}=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}a^n.$$

这样，不论 $n$ 是偶数还是奇数，都有

$$\mu(B_n(a))=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}a^n.$$

利用这里的推导，还可把 10.8 节中例 3 的积分写成统一的形式：

$$\int\cdots\int_{B_n(a)}f(r)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\int_0^a t^{n-1}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^a t^{n-1}f(t)\mathrm{d}t. \tag{21}$$

下面我们将用这个公式来计算 $n$ 维球面的面积.

设 $\mathbf{R}^n$ 中的曲面 $S$ 有如下的参数表示：

$$\begin{cases}x_1=x_1(u_1,\cdots,u_{n-1}),\\ x_2=x_2(u_1,\cdots,u_{n-1}),\\ \cdots,\\ x_n=x_n(u_1,\cdots,u_{n-1})\end{cases}\quad((u_1,\cdots,u_{n-1})\in D\subset\mathbf{R}^{n-1}),$$

或用向量形式写成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_1,\cdots,u_{n-1})\quad((u_1,\cdots,u_{n-1})\in D).$$

仿照定义 12.1.1，定义 $S$ 的面积为

$$\sigma(S)=\int\cdots\int_D\|\boldsymbol{r}_{u_1}\times\boldsymbol{r}_{u_2}\times\cdots\times\boldsymbol{r}_{u_{n-1}}\|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{n-1},$$

这里

$$\boldsymbol{r}_{u_i}=\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_i},\cdots,\frac{\partial x_n}{\partial u_i}\right)\quad(i=1,\cdots,n-1),$$

$$\boldsymbol{r}_{u_i} \times \cdots \times \boldsymbol{r}_{u_{n-1}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix},$$

$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $n$ 个单位坐标向量.特别当曲面有显式表示

$$x_n = f(x_1,\cdots,x_{n-1}) \quad ((x_1,\cdots,x_{n-1}) \in D)$$

时,它的面积为

$$\sigma(S) = \int_D\cdots\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right)^2}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}. \tag{22}$$

$\mathbf{R}^n$ 中以原点为中心、以 $a$ 为半径的球面 $S_{n-1}(a)$ 的方程为

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = a^2,$$

也可写成

$$x_n = \pm\sqrt{a^2 - (x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2)} \quad (x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqslant a^2).$$

根据球的对称性和式(22),$S_{n-1}(a)$ 的面积为

$$\begin{aligned}\sigma(S_{n-1}(a)) &= 2\int_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant a^2}\cdots\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}\right)^2}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1} \\ &= 2a\int_{B_{n-1}(a)}\cdots\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1},\end{aligned}$$

这里 $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2$. 由公式(21),上面的积分为

$$\begin{aligned}\int_{B_{n-1}(a)}\cdots\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1} &= \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^a \frac{t^{n-2}}{\sqrt{a^2 - t^2}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}a^{n-2}\int_0^1 \frac{s^{n-2}}{\sqrt{1 - s^2}}\mathrm{d}s \\ &= \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}a^{n-2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}a^{n-2}.\end{aligned}$$

由此得

$$\sigma(S_{n-1}(a)) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} a^{n-1}.$$

## 练习题 18.4

1. 证明：

(1) $\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty} x^{2s-1}e^{-x^2}dx\ (s>0)$；

(2) $\Gamma(s) = a^s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-ax}dx\ (s>0, a>0)$.

2. 证明：

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta \quad (p>0, q>0).$$

3. 利用 $\Gamma$ 函数，计算下列积分：

(1) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$；　　(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$；

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$；　　(4) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\cos^6 x dx$.

4. 证明：$\ln B(p,q)$ 关于变量 $p$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

5. 计算极限

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^1 x^{3/2}(1-x^5)^\alpha dx.$$

6. 证明推论 18.4.1.

7. 设 $a>0, ac-b^2>0, \alpha>1/2$. 证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^\alpha} = \frac{(ac-b^2)^{1/2-\alpha}}{a^{1-\alpha}}\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\pi}.$$

## 问题 18.4

1. 讨论函数

$$f(s,p,q) = \int_0^{+\infty}\frac{x^s}{(a+bx^p)^q}dx \quad (a>0, b>0, p>0)$$

的定义域，并用 $\Gamma$ 函数表示 $f(s,p,q)$.

2. 证明：

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x)\mathrm{d}x = \ln \sqrt{2\pi}.$$

3. 证明：

$$\int_0^1 \sin \pi x \ln \Gamma(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\ln \frac{\pi}{2} + 1\right).$$

4. 证明：

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3 - \cos x}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

5. 证明：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{m+k+1} = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}.$$

6. 设 $f(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2, g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$. 证明：

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4},$$

并由此证明：

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

7. 利用公式

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

证明：对任意的实数 $x$，有

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

# 问题的解答或提示

## 问题 10.2

1. 用反证法. 如果结论不成立，那么对 $I$ 的任意子闭矩形，其上必有使 $f$ 取非正值的点，因而对任意的分割，所产生的下和必取非正值. 由此知 $f$ 的下积分非正，这与 $\int_I f\mathrm{d}\sigma > 0$ 矛盾.

2. 记

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in [0,1]^2 : x,y \text{ 都是无理数}\},\\
B &= \{(x,y) \in [0,1]^2 : x,y \text{ 都是有理数}\},\\
C &= \{(x,y) \in [0,1]^2 : x \text{ 是有理数}, y \text{ 是无理数}\},\\
D &= \{(x,y) \in [0,1]^2 : x \text{ 是无理数}, y \text{ 是有理数}\}.
\end{aligned}
$$

显然

$$[0,1]^2 = A \cup B \cup C \cup D.$$

易知 $B$ 是零测集，$C$ 也是零测集. 因为当 $x_0$ 为一固定的有理数时，

$$C_0 = \{(x_0,y) : y \text{ 为无理数}\}$$

是线段$\{(x_0,y):0\leqslant y\leqslant 1\}$的一个子集，而后者是零面积集，故 $C_0$ 也是一零面积集. 而

$$C = \bigcup \{C_0 : x_0 \text{ 是有理数}\}$$

是可数个零面积集的并，因而是一零测集. 当然 $D$ 也是一零测集. 因此，$B\cup C\cup D$ 是一零测集. 下面我们证明 $f$ 在 $A$ 中的每点处都连续，从而它的不连续点都在 $B\cup C\cup D$ 中，而后者是一零测集，所以由 Lebesgue 定理，$f$ 在$[0,1]^2$ 上可积. 现设 $x_0,y_0$ 都是无理数，我们证明 $f$ 在$(x_0,y_0)$处连续. 对任意的 $\varepsilon>0$，取正整数 $m_0$，使得 $1/m_0<\varepsilon/2$. 因 $x_0$ 是无理数，在 $x_0$ 的任何邻域中，分母不超过 $m_0$ 的有理数只能有有限个：

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\cdots,\frac{1}{m_0},\cdots,\frac{m_0-1}{m_0}.$$

再取正整数 $q_0$，使得 $1/q_0<\varepsilon/2$. 同理，在 $y_0$ 的任何邻域中分母不超过 $q_0$ 的有理数也只有有限个. 取定 $x_0$ 的邻域 $I$，$y_0$ 的邻域 $J$，则 $I\times J$ 为$(x_0,y_0)$的一个邻域，在这个邻域中去掉上述有限个点$(n/m,p/q)$$(m\leqslant m_0, q\leqslant q_0)$，得一新的邻域 $I'\times J'$，此邻域中的有理点$(n/m,p/q)$必满足 $m>m_0, q>q_0$，因而

$$f\left(\frac{n}{m},\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{m}+\frac{1}{q}<\frac{1}{m_0}+\frac{1}{q_0}<\varepsilon.$$

对任何非有理点$(x,y)$,必有$f(x,y)=0$,所以此邻域中所有点$(x,y)$都满足$|f(x,y)|<\varepsilon$.因此

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=0=f(x_0,y_0).$$

这就证明了$f$在$A$中的每一点都连续.

## 问题 10.3

1. 按定义,有

$$f\left(x,\frac{p}{q}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{n}{m},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

容易证明,这个函数在$[0,1]$的任何子区间$[\alpha,\beta]$上的振幅大于$1/q$,因而在$[0,1]$上不可积.$f(n/m,y)$的不可积性的证明是一样的.

2. $g$在$[0,1]^2$上不可积是明显的,因为它在$[0,1]^2$中的任何一小部分上总有取1和0的点.但对固定的$y$,若$y$为无理数,则$g(x,y)=0$;若$y$为有理数,设$y=p/m$,则只有当$x=\frac{1}{m},\frac{2}{m},\cdots,\frac{m-1}{m}$这有限个值时,$g(x,y)=1$,其余都为0.因而

$$\int_0^1 g(x,y)\mathrm{d}x=0$$

对任意的$y\in[0,1]$成立,于是

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 g(x,y)\mathrm{d}x=0.$$

同理,有$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 g(x,y)\mathrm{d}y=0$.

## 问题 10.6

1. 直接计算得

$$\iint\limits_{[0,1]^2}(xy)^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(xy)^{xy}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x}\int_0^x t^t\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{x}f(x)\mathrm{d}x,$$

这里$f(x)=\int_0^x t^t\mathrm{d}t$.再用分部积分即得.

2. 作变换

$$x=\frac{bu+av}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y=\frac{bv-au}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

就可得到所要的结果.

3. (1) 作变换 $x=tu, y=tv$,则

$$F(t)=\iint\limits_{[0,1]^2} t^2 f(t^2 uv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

所以

$$F'(t)=2t\iint\limits_{[0,1]^2} f(t^2 uv)\mathrm{d}u\mathrm{d}w+t^2\iint\limits_{[0,1]^2} 2uvf'(t^2 uv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

再用 $u=x/t, v=y/t$ 变回去,就得所要的结果.

(2) 计算得

$$F(t)=\int_0^t \mathrm{d}x\int_0^t f(xy)\mathrm{d}y=\int_0^t \frac{1}{x}\mathrm{d}x\int_0^{tx} f(s)\mathrm{d}s=\int_0^t \frac{1}{x}g(tx)\mathrm{d}x,$$

这里 $g(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$. 于是

$$\begin{aligned}F'(t)&=\frac{1}{t}g(t^2)+\int_0^t \frac{1}{x}g'(tx)x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{t}\int_0^{t^2} f(s)\mathrm{d}s+\int_0^t f(tx)\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{t}\int_0^{t^2} f(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

4. 作变换 $x=\mathrm{e}^{r\cos\theta}, y=\mathrm{e}^{r\sin\theta}$,则

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r\mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{e}^{r\sin\theta}.$$

原积分变为

$$I=\iint\limits_{\Delta}\frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{r},$$

这里 $\Delta$ 是变换以后的积分区域. 注意 $x+y=1$ 和 $x^2+y^2=1$ 分别被变为

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{r\cos\theta}+\mathrm{e}^{r\sin\theta}=1, & (1)\\ \mathrm{e}^{2r\cos\theta}+\mathrm{e}^{2r\sin\theta}=1. & (2)\end{cases}$$

现在来分析由上述两条曲线所围成的$(r,\theta)$平面上的区域是什么形状. 从式(1)可以看出,$\theta$ 的变化范围必须使 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 都取负值,因为只要有一个取正值,式(1)的左边必大于1,式(1)不能成立. 故 $\theta$ 只能在$[\pi,3\pi/2]$中取值. 现设式(1)确定的函数为 $r=r(\theta)$,则式(2)确定的函数便为 $r=r(\theta)/2$. 经过细致的分析,可得 $r=r(\theta)$ 和 $r=r(\theta)/2$ 如图 1 所示. $\Delta$ 就是夹在这两条曲线之间的区域. 所以

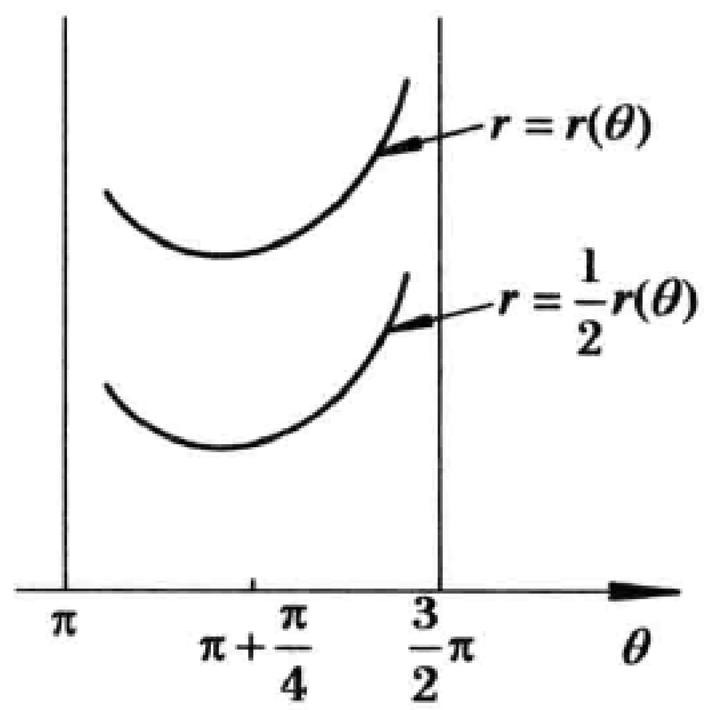



图 1

$$I=\iint\limits_{\Delta}\frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{r}=\int_\pi^{3\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_{r(\theta)/2}^{r(\theta)}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

## 问题 10.7

1. 和问题 10.6 中第 3 题(1)的证明方法相同.

2. 和问题 10.6 中第 3 题(2)的证明方法相同,但稍复杂些.

## 问题 10.8

1. 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时,这就是练习题 10.5 中的第 4 题. 现设当 $n=k$ 时等式成立,于是

$$\begin{aligned}
I_{k+1} &= \int_0^a dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_k}f(x_{k+1})dx_{k+1}\\
&= \int_0^a\Big(\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_k}f(x_{k+1})dx_{k+1}\Big)dx_1\\
&= \int_0^a\Big(\frac{1}{(k-1)!}\int_0^{x_1}f(t)(x_1-t)^{k-1}dt\Big)dx_1\\
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^a f(t)dt\int_t^a(x_1-t)^{k-1}dx_1\\
&= \frac{1}{k!}\int_0^a f(t)(a-t)^k dt.
\end{aligned}$$

2. 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时,已知等式成立(见练习题 10.5 中的第 3 题). 现设当 $n=k$ 时等式成立,即

$$\int_0^a dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{k-1}}f(x_1)\cdots f(x_k)dx_k = \frac{1}{k!}\Big(\int_0^a f(t)dt\Big)^k.$$

当 $n=k+1$ 时,有

$$\begin{aligned}
I_{k+1} &= \int_0^a dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{k-1}}dx_{k-1}\int_0^{x_k}f(x_1)\cdots f(x_k)f(x_{k+1})dx_{k+1}\\
&= \int_0^a\Big(\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_k}f(x_2)\cdots f(x_{k+1})dx_{x+1}\Big)f(x_1)dx_1\\
&= \int_0^a\frac{1}{k!}\Big(\int_0^{x_1}f(t)dt\Big)^k f(x_1)dx_1.
\end{aligned}$$

记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$,则 $F'(x)=f(x)$, 于是

$$\begin{aligned}
I_{k+1} &= \frac{1}{k!}\int_0^a F^k(x_1)f(x_1)dx_1 = \frac{1}{k!}\,\frac{1}{k+1}F^{k+1}(x_1)\Big|_0^a\\
&= \frac{1}{(k+1)!}F^{k+1}(a) = \frac{1}{(k+1)!}\Big(\int_0^a f(t)dt\Big)^{k+1}.
\end{aligned}$$

3. 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时,要证明的等式是

$$\int_a^b dx_1\int_a^{x_1}f(x_1,x_2)dx_2 = \int_a^b dx_2\int_{x_2}^b f(x_1,x_2)dx_1. \tag{1}$$

这只要考虑下面的二重积分(图 2)：

$$\iint\limits_{\triangle ABC} f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

先对 $x_2$ 积分，后对 $x_1$ 积分，即得式(1)的左边；先对 $x_1$ 积分，后对 $x_2$ 积分即得式(1)的右边. 因而两者相等. 现设对 $n-1$ 个变量的函数等式成立. 把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 看成 $n-1$ 个变量 $x_2,\cdots,x_n$ 的函数，那么有等式

$$\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\int_a^{x_2}\mathrm{d}x_3\cdots\int_a^{x_{n-1}}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n$$
$$=\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^{x_1}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_3}^{x_1}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2.$$

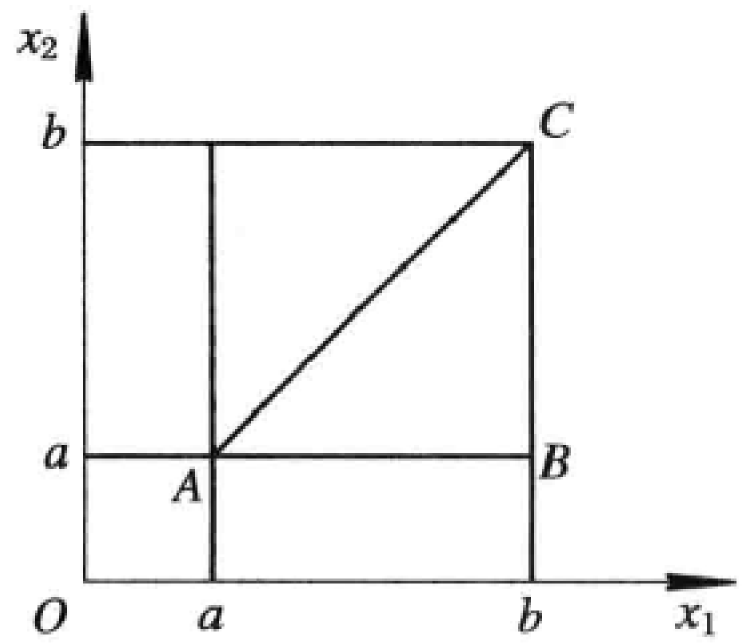


图 2

两边关于 $x_1$ 在$[a,b]$上积分，得

$$\int_a^b\mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\int_a^{x_2}\mathrm{d}x_3\cdots\int_a^{x_{n-1}}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n$$
$$=\int_a^b\mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^{x_1}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_3}^{x_1}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2.\tag{2}$$

记

$$\int_{x_n}^{x_1}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_3}^{x_1}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2=g(x_1,x_n).$$

利用式(1)和式(2)的右边，有

$$\int_a^b\mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}g(x_1,x_n)\mathrm{d}x_n=\int_a^b\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^b g(x_1,x_n)\mathrm{d}x_1.$$

式(2)就变为

$$\int_a^b\mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\int_a^{x_2}\mathrm{d}x_3\cdots\int_a^{x_{n-1}}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n$$
$$=\int_a^b\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^b\mathrm{d}x_1\int_{x_n}^{x_1}\mathrm{d}x_{n-1}\int_{x_{n-1}}^{x_1}\mathrm{d}x_{n-2}\cdots\int_{x_3}^{x_1}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2.\tag{3}$$

记

$$\int_{x_{n-1}}^{x_1}\mathrm{d}x_{n-2}\cdots\int_{x_3}^{x_1}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2=h(x_1,x_{n-1},x_n),$$

再用等式(1)，可得

$$\int_{x_n}^b\mathrm{d}x_1\int_{x_n}^{x_1}h(x_1,x_{n-1},x_n)\mathrm{d}x_{n-1}=\int_{x_n}^b\mathrm{d}x_{n-1}\int_{x_{n-1}}^b h(x_1,x_{n-1},x_n)\mathrm{d}x_1.$$

这样式(3)就变成

$$\int_a^b\mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\int_a^{x_2}\mathrm{d}x_2\cdots\int_a^{x_{n-1}}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n$$
$$=\int_a^b\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^b\mathrm{d}x_{n-1}\int_{x_{n-1}}^b\mathrm{d}x_1\int_{x_{n-1}}^{x_1}\mathrm{d}x_{n-2}\cdots\int_{x_3}^{x_1}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2.$$

继续这个过程即可得到要证的等式.

4．因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定方阵，故存在正交方阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}$，这里 $\lambda_1>0$，$\cdots$，$\lambda_n>0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个特征根．于是

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

式中 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$，这是一个变量代换，变换的 Jacobi 行列式

$$\left|\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|=|\det\boldsymbol{P}|=1.$$

当然

$$\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\right|=1.$$

于是

$$\begin{aligned}\int\cdots\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n&=\int\cdots\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-(\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2)}\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n\\&=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_1 y_1^2}\mathrm{d}y_1\right)\cdots\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_n y_n^2}\mathrm{d}y_n\right).\end{aligned}$$

利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$，即可算得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_i y_i^2}\mathrm{d}y_i=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}}.$$

从而得

$$\int\cdots\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\lambda_1\cdots\lambda_n}}=\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det\boldsymbol{A}}}.$$

## 问题 11.3

1．由上半圆周 $\Gamma$ 和直径 $l$ 围成的半圆形区域记为 $G$（图 3）．由假定

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$$

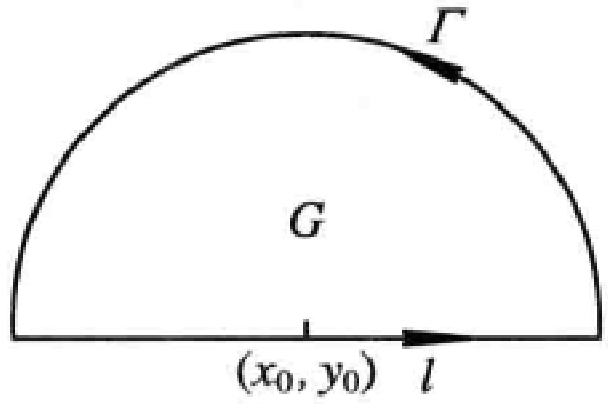


图 3

和 Green 公式，得

$$\begin{aligned}\int_l P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y&=\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big|_{(a,b)}\frac{1}{2}\pi r^2,\end{aligned}\tag{1}$$

这里 $(a,b)$ 是 $G$ 中的某一点．另外，

$$\int_l P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_l P(x,y)\mathrm{d}x = \int_{x_0-r}^{x_0+r} P(x,y_0)\mathrm{d}x = P(\xi,y_0)2r, \tag{2}$$

这里 $x_0 - r \leqslant \xi \leqslant x_0 + r$. 比较式(1)和式(2),即得

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bigg|_{(a,b)} \frac{1}{2}\pi r = 2P(\xi, y_0). \tag{3}$$

在上式中令 $r \to 0$,即得 $P(x_0,y_0)=0$. 由于$(x_0,y_0)$是 $\mathbf{R}^2$ 中的任意点,所以 $P=0$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中成立. 再由式(3),得$\left.\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(a,b)}=0$,令 $r\to 0$ 即得$\left.\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=0$.

2. 利用第一型曲线积分和第二型曲线积分的关系以及 Green 公式,容易证明:

$$\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + v\Delta u\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\int_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u\Delta v\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

把以上两式相减即得要证的等式.

3. 记 $\boldsymbol{P}_0=(x_0,y_0)$. 取 $\varepsilon$ 充分小,使得 $B_\varepsilon(\boldsymbol{P}_0)\subset G$. 容易直接验证 $\ln r$ 是 $G\backslash B_\varepsilon(\boldsymbol{P}_0)$中的调和函数. 令 $v=\ln r$,利用第 2 题的公式,得

$$\int_\Gamma \left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s = \int_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{P}_0)} \left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

上式右边的极限当 $\varepsilon \to 0$ 时为 $2\pi u(x_0,y_0)$.

4. 利用第 3 题的结果即得.

## 问题 12.2

1. 取新的坐标系 $uvw$(图 4),使得平面 $\pi: ax+by+cz=0$ 为 $w=0$. 再在 $\pi$ 中取相互垂直的两个单位向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$,使 $uvw$ 构成新的右手正交系. 我们看球面上任意点$(x,y,z)$在 $w$ 轴上的投影是什么. $w$ 轴上的单位向量是 $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$,所以$(x,y,z)$在 $w$ 轴的投影为

$$w = (x,y,z)\cdot\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

由于 $u^2+v^2+w^2=x^2+y^2+z^2=1$,所以 $u^2+v^2=1-w^2$,这就得到球面的另一种参数表示:

$$\begin{cases} u = \sqrt{1-w^2}\cos\varphi, \\ v = \sqrt{1-w^2}\sin\varphi, \quad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ -1\leqslant w\leqslant 1). \\ w = w \end{cases}$$

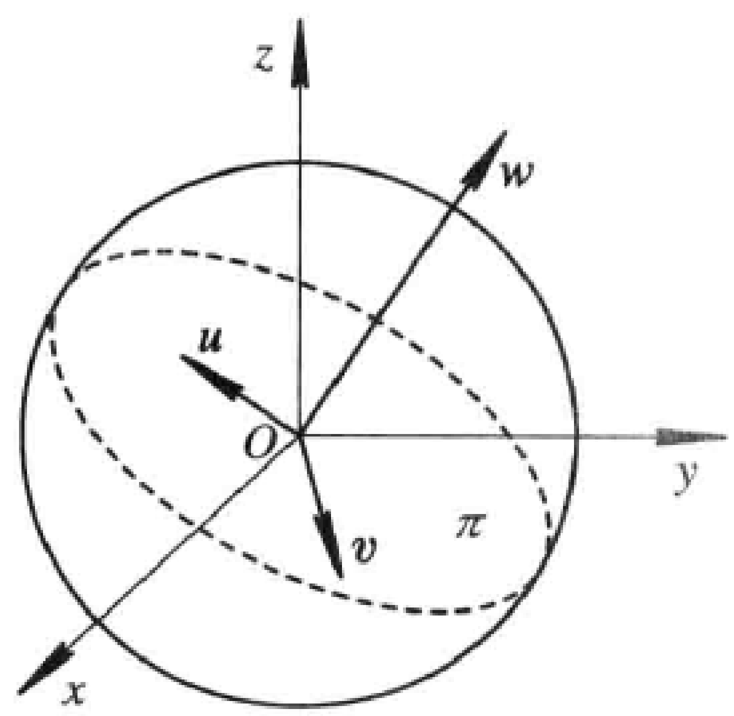


图 4

在这个表示下,

$$E = \frac{1}{1-w^2}, \quad F = 0, \quad G = 1 - w^2,$$

所以

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}w\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}w\mathrm{d}\varphi.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} f(ax + by + cz)\mathrm{d}\sigma &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}w)\mathrm{d}w\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}w)\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

2. 与第 1 题一样,取新的坐标系 $uvw$,使得平面 $\pi: x+y+z=0$ 为 $w=0$. 在平面 $\pi$ 中取 $u$ 轴和 $v$ 轴,使它们和 $w$ 轴构成新的坐标系 $uvw$. $(x,y,z)$ 在 $w$ 轴上的投影为 $w = (x+y+z)/\sqrt{3}$,故平面 $x+y+z=t$ 在新的坐标系中为 $w = t/\sqrt{3}$,从而 $\Sigma(t)$ 变为 $w = t/\sqrt{3}$ 被球面 $u^2+v^2+w^2=1$ 截下的部分,它在 $w=0$ 上的投影为 $u^2+v^2 = 1-w^2 = 1-t^2/3$. 从而所讨论的积分为

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma(t)} (1-(u^2+v^2+w^2))\mathrm{d}\sigma &= \int_{0}^{\sqrt{1-t^2/3}}\int_{0}^{2\pi}\left(1-\frac{t^2}{3}-r^2\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.\end{aligned}$$

3. 先用球坐标,再用第 1 题的 Poisson 公式.

## 问题 12.5

1. 根据外积运算的规则和行列式的定义即得.
2. 根据 $\mathrm{d}f_j$ 的定义并应用上一题的结论.

## 问题 13.2

1. 用类似于问题 11.3 中第 3 题的方法即可证明.
2. 利用上一题的等式.
3. 用反证法并利用第 2 题的结果.

## 问题 14.1

1. 利用恒等式

$$\frac{1}{(pn+q)(pn+q+pr)} = \frac{1}{pr}\left(\frac{1}{pn+q} - \frac{1}{pn+q+pr}\right)$$

及例 1 中的方法即得.

注意,练习题 14.1 的第 2 题中的(2)～(4)及第 3 题中的(4)均为此题的特例. 事实上,分别在本题中取 $p=2, q=-1, r=1$; $p=3, q=-2, r=1$; $p=1, q=0, r=3$; $p=1, q=0$,

$r=m$ 就得到上述四小题的结果.

2. 把级数的部分和写成

$$\begin{aligned}S_N&=\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N}\frac{1}{m^2-n^2}\\&=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{m^2-n^2}+\sum_{n=m+1}^{N}\frac{1}{m^2-n^2}\\&=\frac{1}{2m}\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+n}\right)+\frac{1}{2m}\sum_{n=m+1}^{N}\left(\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+n}\right),\end{aligned}$$

然后把上面四个和式分别写成

$$\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{m-n}=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k},\quad \sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{m+n}=\sum_{k=m+1}^{2m-1}\frac{1}{k},$$

$$\sum_{n=m+1}^{N}\frac{1}{m-n}=-\sum_{k=1}^{N-m}\frac{1}{k},\quad \sum_{n=m+1}^{N}\frac{1}{m+n}=\sum_{k=2m+1}^{N+m}\frac{1}{k}.$$

用完全相同的方法,读者可以证明

$$\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{m^2-n^2}=\begin{cases}\dfrac{3}{4m^2}, & m\text{ 是偶数},\\[2mm] \dfrac{1}{4m^2}, & m\text{ 是奇数}.\end{cases}$$

3. 利用不等式

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{k}<\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)\quad(k=2,3,\cdots).$$

4. 可按下列步骤来证:

(a) 证明$\{a_n\}$严格递减;

(b) 证明$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}>\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a_n^2}$;

(c) $a_n^2<(a_n-a_{a+1})\sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}\right)=+\infty$.

本题的困难之处是不易想到不等式(c),正是这个不等式充分利用了数列$\{a_n-a_{a+1}\}$严格递减的条件.

5. 先用 Cauchy-Schwarz 不等式,得到

$$(1+2+\cdots+n)^2\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right),$$

由此得

$$\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 4\,\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2}{a_j}.$$

不等式的两边对 $n$ 求和，再把不等式右边的式子交换求和次序即得.

这里需用到下面的等式：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}x_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty}x_{ij}. \tag{1}$$

要证明这个等式，只需考虑

$$\begin{array}{lllll}
x_{11}, & & & & \\
x_{21}, & x_{22}, & & & \\
x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
x_{i1}, & x_{i2}, & x_{i3}, & \cdots & x_{ii}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

式(1)的左边是先把每行的数加起来，再把每行所得的和加起来；式(1)的右边则是先把每列的数加起来，再把每列所得的和加起来. 因而两者相等.

## 问题 14.2

1. 利用等式

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$ 当 $\{a_n\}$ 有界时发散，当 $a_n\to+\infty$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 同敛散，其他情况下结论不定. 例如，令

$$a_n=\begin{cases}n, & n=2^k(k=0,1,\cdots),\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}<+\infty$. 又如令

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & n=2k(k=1,2,\cdots),\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}=+\infty$.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ 当 $\{na_n\}$ 有界时发散，当 $na_n\to+\infty$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ 也发散. 在其他情况下级数可能收敛，例如，令

$$a_n=\begin{cases}1, & n=2^k(k=0,1,\cdots),\\ \dfrac{1}{n^2}, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n} < +\infty$.

3. 当 $\alpha > 1$ 时,利用不等式

$$\frac{a_n}{S_n^{\alpha}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^{\alpha}} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}};$$

当 $\alpha \leqslant 1$ 时,利用不等式

$$\frac{a_n}{S_{n-1}} \geqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

4. 利用$\{a_n\}$的递减性,可得

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \leqslant 2^n a_{2^n},$$

$$2^n a_{2^n} = 2(2^{n-1} a_{2^n}) \leqslant 2 \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k.$$

从这两个不等式即知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同敛散. 分别取 $a_n = \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 和 $a_n = \frac{1}{n\ln n}$ 即可证明(1) 和(2).

注意,这个命题还可推广到更一般的情况:设$\{a_n\}$是递减的正数列,$\{k_n\}$是严格递增的正整数列. 如果存在常数 $M$,使得

$$\frac{k_{n+1} - k_n}{k_n - k_{n-1}} \leqslant M \quad (n = 2,3,\cdots),$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (k_{n+1} - k_n) a_{k_n}$ 同敛散.

取 $k_n = 2^n$,就得到上面的结果. 证明的方法与上面的一样.

5. 按规定,划去分母中含有数字 9 的那些项后,新级数各项的分母仅由 0,1,…,8 这九个数字组成. 所以在 0 到 $10^m - 1 = \underbrace{9\cdots9}_{m个}$中,这种数共有 $9^m$ 个. 因此,落在区间$(10^{m-1}-1, 10^m - 1)$内不含数字 9 的正整数共有 $9^m - 9^{m-1}$个. 于是新级数可以写成

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8}}_{9-1个} + \underbrace{\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{88}}_{9^2-9个} + \cdots \leqslant 80.$$

## 问题 14.3

1. 从条件 $a_n - a_{n+1} \geqslant \beta a_n^{2-\alpha}$,得

$$0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n(1 - \beta a_n^{1-\alpha}). \tag{1}$$

由此得$\{a_n\}$递减. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = c$,从式(1)可得 $c = 0$,且 $\alpha \leqslant 1$. 再分 $\alpha = 1$ 和 $\alpha < 1$ 两种情形证明所要的结论.

2. 因为 $q<r<1$,故可取 $\varepsilon>0$ 充分小,使得 $q+\varepsilon<r<1$. 记 $q_1=(q+\varepsilon)/r$,则 $0<q_1<1$. 我们只要就 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q<1$ 的情形来证. 由此可得,当 $n$ 充分大时,有

$$0<\frac{a_n}{r^n}<q_1^n.$$

3. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$,记 $S_0=0,S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$. 令 $\beta_n=S-S_{n-1},b_n=\sqrt{\beta_n}-\sqrt{\beta_{n+1}}$,那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 就是所需要的级数.

## 问题 14.4

1. 由题设的条件,易知当 $n$ 充分大时,$\{a_n\}$递减. 又因 $a_n>0$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 从而证明 $a=0$. 令 $b_n=na_n$,容易证明$\{b_n\}$和$\{a_n\}$满足同样的条件:

$$\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=\lambda.$$

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. 再令 $c_n=nb_n$,同理可证 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$. 继续同样的推理,即知对任意的正整数 $k$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{k+2}a_n=0$,因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^ka_n<+\infty$.

2. 当 $b-1>a$ 时,级数收敛. 可直接用 Raabe 判别法来证明,现求其和. 记

$$a_n=\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)},\quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S.$$

当 $n$ 充分大时,有 $a_n/a_{n+1}>1+1/n>1$,故$\{a_n\}$是严格递减数列. 由 14.4 节中的例 1,知 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. 再从

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{n(b-a)}{a+n},$$

可得

$$a(a_n-a_{n+1})+n(a_n-a_{n+1})=(b-a)a_{n+1}. \tag{1}$$

从式(1)和 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$,即可算得 $S=\dfrac{b-1}{b-a-1}$.

当 $b-1\leqslant a$ 时,级数发散.

3. 充分性. 设$\{a_n\}$有界,则$\{a_n\}$有极限. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$b_n=a_{n+1}/a_n-1$,于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=a-a_1$. 由此可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n<+\infty$.

必要性. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n<+\infty$. 若$\{a_n\}$无界,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. 由此并通过 Cauchy 收敛原理导出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散的矛盾.

4. 因为 $-1$ 的指数是$[\sqrt{n}]$,所以它不是交错级数.但若把具有相同符号的项合并后所得的级数收敛,那么根据定理 14.1.5,原级数也收敛.为此,把原级数写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{(-1)^{[n]}}{n}.$$

当 $k^2\leqslant n<(k+1)^2$ 时,$k\leqslant\sqrt{n}<k+1$,因此$[\sqrt{n}]=k$.从而有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right).$$

记

$$a_k=\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1},$$

余下的事情就是去证明$\{a_k\}$递减趋于 0.

5. 令 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\cos\dfrac{2\pi}{3}n$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 符合题中的要求.

6. 选取适当的正整数 $N$,使得

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_n\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}a_kb_n\right|+\left|\sum_{k=N+1}^{n}a_kb_n\right|.$$

可证当 $n$ 充分大时,上式右边中的两项都可小于事先指定的 $\varepsilon$.

7. 因为$\{1/b_n\}$递减趋于 0,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nb_n)\dfrac{1}{b_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,由上题即得本题的结论.

8. 记 $c_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$,则 $a_n=(c_n-c_{n-1})/n$,然后证明

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{c_n}{n+1}.$$

## 问题 14.5

1.(1)利用极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2},$$

可以证明所给级数当 $p>1$ 时绝对收敛;当 $1/2<p\leqslant1$ 时条件收敛;当 $0<p\leqslant1/2$ 时发散.

(2)当 $p>2$ 时绝对收敛,当 $0<p\leqslant2$ 时条件收敛.

(3)当 $p,q$ 都大于 1 时,级数绝对收敛;当 $0<p=q<1$ 时,级数条件收敛;其他情形下级数发散.

2. 用反证法.如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$,我们要构造一个趋于 0 的数列$\{x_n\}$,使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 发散.从$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$ 得知,对任意的正整数 $m$,有$\sum\limits_{n=m}^{\infty}|a_n|=+\infty$.现令 $k_1=1$,则必有 $k_2$,使得 $\sum\limits_{n=k_1+1}^{k_2}|a_n|>1$,存在 $k_3$,使得 $\sum\limits_{n=k_2+1}^{k_3}|a_n|>2$…… 无限次继续这个过程,可得数列

$\{k_j\}$,使得

$$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots, \quad 且 \quad \sum_{n=k_j+1}^{k_{j+1}} |a_n| > j \quad (j=1,2,\cdots).$$

现作数列$\{x_n\}$如下:

$$x_1 = 0 \quad (k_j < n \leqslant k_{j+1}), \quad x_n = \frac{1}{j}\operatorname{sgn} a_n \quad (j=1,2,\cdots).$$

可以证明这是一个趋于 0 的数列,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n = +\infty$.

如果把条件中的“任意一个趋于 0 的数列”改为“任意一个递减趋于 0 的数列”,结论则不再成立.例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$,它对任意一个递减趋于 0 的数列$\{x_n\}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ 收敛,但它本身是发散的.

这个题目还有一个简单的证明:如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = +\infty$,记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|$,那么 $S_n \to +\infty$.现取 $x_n = \dfrac{1}{S_n}\operatorname{sgn} a_n$,则 $x_n \to 0$.于是由问题 14.2 的第 3 题中(2) 的结果,得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{S_n} = +\infty.$$

这与假设矛盾.因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| < +\infty$.

3. 对任给的正整数 $N$,记 $n = [N/(p+q)]$.按照改变符号的规律,有

$$\sum_{n=1}^{m(p+q)} a_n = \sum_{n=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(n-1)p+(n-1)q+k} - \sum_{k=1}^{q}\frac{1}{np+(n-1)q+k}\right). \tag{1}$$

当 $p > q$ 时,括号中第一个和的项数比第二个和多,而且每一项都比后者大,因而括号中的数大于

$$\frac{1}{(n-1)p+(n-1)q+p} = \frac{1}{np+(n-1)q} > \frac{1}{n(p+q)},$$

即

$$\sum_{n=1}^{m(p+q)} a_n > \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(p+q)} = \frac{1}{p+q}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} \to +\infty \quad (m \to +\infty).$$

当 $p < q$ 时,把式(1)的右边改写成

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m(p+q)} a_n &= \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} + \sum_{n=2}^{m}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(n-1)p+(n-1)q+k} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{np+(n-1)q+k} \\ &< \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} + \sum_{n=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{np+nq+k} - \sum_{n=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{np+(n-1)q+k}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} - \sum_{n=1}^{m-1} \Big( \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{np + (n-1)q + k} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{np + nq + k} \Big).$$

括号中第一项的项数比第二项多,且每一项比后者大,因而括号中的数大于

$$\frac{1}{np + (n-1)q + q} = \frac{1}{n(p+q)},$$

于是

$$\sum_{n=1}^{m(p+q)} a_n < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} - \frac{1}{p+q} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n} \to -\infty \quad (m \to +\infty).$$

当 $p = q$ 时,若把级数写为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$,则

$$\{a_n\} = \{1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1, \cdots\},$$

其中 $+1$ 和 $-1$ 都有 $p$ 个,$b_n = 1/n$. 故由 Dirichlet 判别法知其收敛.

4. 见定理 14.6.2 的证明.

## 问题 14.6

1. 记 $a_n = (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$,$b_n = (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n^{\beta}}$,乘积的通项

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}(n-k+1)^{\beta}}.$$

容易证明,当 $\alpha + \beta \leqslant 1$ 时,$|c_n| \geqslant 1$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散.

要证当 $\alpha + \beta > 1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛,分下面两步做.

(a) 先证明 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. 把 $c_n$ 写成

$$c_n = (-1)^{n-1} \Big( \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{1}{k^{\alpha}(n-k+1)^{\beta}} + \sum_{k=[n/2]+1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}(n-k+1)^{\beta}} \Big).$$

因为当 $1 \leqslant k \leqslant [n/2]$ 时,$n - k + 1 \geqslant [n/2]$,所以

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{[n/2]^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} + \frac{1}{[n/2]^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\beta}}.$$

从 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 1$,即可得 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

(b) 记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$. 如果级数

$$c_1 + (c_2 + c_3) + (c_4 + c_5) + \cdots \tag{1}$$

收敛,这意味着数列 $\{S_{2n+1}\}$ 收敛,则由于

$$S_{2n+1} = S_{2n} + c_{2n+1},$$

而 $c_{2n+1} \to 0$,所以 $\{S_{2n}\}$ 与 $\{S_{2n+1}\}$ 有相同的极限,因而 $\{S_n\}$ 收敛. 从而问题就归结为式(1)收敛.

2. 记

$$a_0 = 1,\quad a_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad (n = 1,2,\cdots),$$

$$b_0 = 1,\quad b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad (n = 1,2,\cdots),$$

可以证明

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

因而 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛.

## 问题 14.7

1. 利用公式 $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos x)$,可得

$$\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4},\quad 2+\sqrt{2} = 2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) = 2^2\cos^2\frac{\pi}{2^3}.$$

因而 $\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$.一般可证

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{重}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

再利用 14.7 节中的例 2 的结果.

2. 用 $P_n$ 记它的部分乘积,证明

$$P_n = \frac{a_n + 1}{n!},\quad P_n - P_{n-1} = \frac{1}{n!}.$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散都容易证明.要证明 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛,先证明

$$P_{2N} = \prod_{n=1}^{2N}(1+a_n) = \prod_{k=1}^{N}(1+a_{2k-1})(1+a_{2k})$$

收敛,再证明$\{P_{2N+1}\}$和$\{P_{2N}\}$有相同的极限.

4. 记 $p_n = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n = -\infty$. 记 $a_n = \frac{n^n}{n!}e^{-n}$,证明 $a_{n+1} = \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)\frac{1}{e}$. 证明本题的最简单的方法是用 Stirling 公式:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}.$$

由此即得

$$\frac{n^n}{e^n}\frac{1}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

而且还能知道这个数列趋于 0 的阶. 这里之所以要设置这样一道题，是希望让读者知道，发散于 0 的无穷乘积有时可用来证明一些极限等式.

5. 固定 $x \neq x_0$，把原级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x_0^2 - 1)(x_0^2 - 2^2)\cdots(x_0^2 - n^2) \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 2^2)\cdots(x^2 - n^2)}{(x_0^2 - 1)(x_0^2 - 2^2)\cdots(x_0^2 - n^2)}. \tag{1}$$

如果能证明数列

$$a_n = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 2^2)\cdots(x^2 - n^2)}{(x_0^2 - 1)(x_0^2 - 2^2)\cdots(x_0^2 - n^2)}$$

单调有界，那么由 Abel 判别法，即知式(1)收敛. $\{a_n\}$的单调性易证，要证$\{a_n\}$有界，只需让它收敛，此时就可用无穷乘积来处理.

6. 由题设，知

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n} + O(b_n) = \frac{n+1}{n}\left(1 + \frac{n}{n+1}O(b_n)\right).$$

记 $c_n = \dfrac{n}{n+1}O(b_n)$，则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}\frac{1}{1+c_n}.$$

由此得

$$\frac{a_{n+1}}{\dfrac{1}{n+1}} = \frac{a_1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+c_k)}.$$

只要能证明 $\prod\limits_{k=1}^{n}(1+c_k)$ 收敛，问题便得到了证明. 这又是一个用无穷乘积理论来解决无穷级数问题的例子.

7. 由

$$\frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} = \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)},$$

即得级数的部分和

$$S_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}.$$

余下的只需证明 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = +\infty$.

## 问题 15.1

(1) 记 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$，则有 $0 \leqslant S_n(x) \leqslant S_{n+1}(x) \leqslant S(x)$，所以 $S(x)$在$[a,b]$上有下确界 $\alpha$. 于是对每个正整数 $n$，存在 $x_n \in [a,b]$，使得 $\alpha \leqslant S(x_n) < \alpha + 1/n$，即$\lim\limits_{n\to\infty} S(x_n) =$

$\alpha$. 因为 $x_n\in[a,b]$，故有子列 $\{x_{k_n}\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}=x_0\in[a,b]$. 我们要证明 $S(x_0)=\alpha$. 对任意的正整数 $m$，有

$$S_m(x_{k_n})\leqslant S(x_{k_n})<\alpha+\frac{1}{k_n},$$

令 $n\to\infty$，由于 $S_m(x)$ 在 $x_0$ 处连续，所以 $S_m(x_0)\leqslant\alpha$；再令 $m\to\infty$，即得 $S(x_0)\leqslant\alpha$. 但 $S(x_0)\geqslant\alpha$，所以 $S(x_0)=\alpha$.

2. 不一定能取到最大值.

3. 不再成立.

## 问题 15.2

1. 容易用 D'Alembert 判别法证明级数在 $(0,+\infty)$ 上处处收敛. 设其和为 $S(x)$，用 $S_n(x)$ 记它的部分和，那么

$$S(x)-S_n(x)=\frac{1}{(1+x)\cdots(1+nx)}.$$

由此即知级数在 $[0,\delta]$ 上非一致收敛，在 $[\delta,+\infty]$ 上一致收敛.

2. 设 $\{f_n\}$，$\{g_n\}$ 分别在区间 $I$ 上一致收敛于 $f$ 和 $g$. 先证明 $f$ 和 $g$ 都是 $I$ 上的有界函数，再证明 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 都在 $I$ 上一致有界.

3. 如在上题中去掉 $\{f_n\}$ 或 $\{g_n\}$ 有界的条件，结论便不再成立. 可举下面的例子：在区间 $[0,1]$ 上，考虑

$$f_n(x)=x\left(1+\frac{1}{n}\right),\quad g_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=0\text{ 或无理数},\\[2mm] q+\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{p}{q}(q>0).\end{cases}$$

这时，$f_n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)=x$，$g_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于

$$g(x)=\begin{cases}0, & x=0\text{ 或无理数},\\[2mm] q, & x=\dfrac{p}{q}(q>0),\end{cases}$$

而 $\{f_ng_n\}$ 在 $[0,1]$ 上不再一致收敛到 $fg$.

4. 对给定的 $\varepsilon>0$，把 $[a,b]$ 等分成若干个小区间，使每个小区间的长度小于 $\varepsilon$. 利用级数在每个分点上的收敛性以及中值定理，即可证明级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

5. 利用 $f$ 在 $x=0$ 附近的 Taylor 展开式(展到二阶导数)及 $f(0)=0$，$0<f'(0)<1$ 的条件，即可证得在 $x=0$ 的充分小的邻域内有不等式 $|f(x)|\leqslant q|x|$，其中 $q<1$. 反复利用这一不等式，即可证得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内一致收敛.

6. 容易证明所给级数在 $[0,1/2]$ 上一致收敛. 证明它在 $[1/2,1]$ 上一致收敛时，把级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\cos nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}}\cos nx$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}\frac{(1-x)x^n}{1-x^n}\cos nx.$$

若能证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)x^n}{1-x^n}\cos nx$ 在$[1/2,1]$上一致收敛,则由Abel判别法,即知原级数在$[1/2,1]$上一致收敛.

7. 设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx \tag{1}$$

在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,那么对任何 $\varepsilon>0$,存在 $N$,当 $m>n>N$ 时,

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\sin kx\right|<\varepsilon$$

对任意的 $x$ 成立.现取 $m>2N$, $n=[m/2+1]$,则 $n\leqslant m/2+1<n+1$,即 $n>m/2>N$.再取 $x=\pi/(2m)$,于是有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\sin k\frac{\pi}{2m}\right|<\varepsilon. \tag{2}$$

当 $n\leqslant k\leqslant m$ 时,$\frac{\pi}{4}<\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}\leqslant k\frac{\pi}{2m}\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以

$$\sin k\frac{\pi}{2m}\geqslant\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

于是从式(2),可得

$$\varepsilon>\sum_{k=n}^{m}a_k\sin k\frac{\pi}{2m}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=n}^{m}a_k\geqslant(m-n+1)a_m\frac{\sqrt{2}}{2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4}ma_m.$$

这就证明了 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$.

再证充分性.设 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$.令

$$\mu_n=\sup_{m\geqslant n}\{ma_m\},$$

则$\{\mu_n\}$递减趋于0.对 $m\geqslant n$,记

$$S_{n,m}(x)=\sum_{k=n}^{m}a_k\sin kx,$$

我们证明对任意的实数 $x$,均有

$$|S_{n,m}(x)|\leqslant(\pi+3)\mu_n. \tag{3}$$

由于 $S_{n,m}(x)$是周期为 $2\pi$ 的奇函数,所以只需证明上面的不等式在$[0,\pi]$上成立.把区间$[0,\pi]$分成$[0,\pi/m]$,$[\pi/m,\pi/n]$,$[\pi/n,\pi]$三段,我们证明式(3)在这三段上都成立.

(a) $x\in[\pi/n,\pi]$.根据3.5节例1中的不等式 $\sin\theta\geqslant2\theta/\pi(0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$,有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}\sin kx\right|=\frac{\left|\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right|}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{\pi}{x} \leqslant n.$$

由 Abel 引理,即得

$$|S_{n,m}(x)| \leqslant n(a_n + 2a_m) \leqslant 3na_n \leqslant 3\mu_n.$$

(b) $x \in [0, \pi/m]$. 由 $\sin\theta \leqslant \theta$,可得

$$|S_{n,m}(x)| = \sum_{k=n}^{m} a_k \sin kx \leqslant x \sum_{k=n}^{m} ka_k \leqslant x \sum_{k=n}^{m} \mu_k$$

$$\leqslant \frac{\pi}{m}(m-n+1)\mu_n \leqslant \pi\mu_n.$$

(c) $x \in [\pi/m, \pi/n]$. 这时 $n \leqslant \pi/x \leqslant m$,记 $l = [\pi/x]$. 于是

$$S_{n,m}(x) = \sum_{k=n}^{m} a_k \sin kx = \sum_{k=n}^{l} a_k \sin kx + \sum_{k=l+1}^{m} a_k \sin kx$$

$$= S_{n,l}(x) + S_{l+1,m}(x).$$

由 $l \leqslant \pi/x < l+1$,得出 $x \leqslant \pi/l$,故由(b)得

$$|S_{n,l}(x)| \leqslant \pi\mu_n.$$

因为 $\pi/(l+1) < x \leqslant \pi/n$,且 $l+1 > \pi/x \geqslant n$,由(a)和$\{\mu_n\}$的递减性,得

$$|S_{l+1,m}(x)| \leqslant 3\mu_{l+1} \leqslant 3\mu_n.$$

于是

$$|S_{n,m}(x)| \leqslant |S_{n,l}(x)| + |S_{l+1,m}(x)| \leqslant (\pi+3)\mu_n.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$,即知式(1)在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛.

## 问题 15.3

1. 先证 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$上可积. 因为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a, c-\delta]$和$[c+\delta, b]$上一致收敛,所以 $S(x)$ 在$[a, c-\delta]$和$[c+\delta, b]$上可积,因而分别存在$[a, c-\delta]$的分割 $\pi' = a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_n = c-\delta$ 和$[c+\delta, b]$的分割 $\pi'': c+\delta = x''_0 < x''_1 < \cdots < x''_m = b$,使得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega'_i \Delta x'_i < \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^{m} \omega''_i \Delta x''_i < \varepsilon,$$

这里 $\omega'_i$ 和$\omega''_i$ 分别是$S(x)$在$[x'_{i-1}, x'_i]$和$[x''_{i-1}, x''_i]$上的振幅. 现在考虑分割

$$\pi: a = x'_0 < \cdots < x'_n = c-\delta < c+\delta = x''_0 < \cdots < x''_m = b.$$

利用有界收敛的条件,便可证明

$$\sum_{\pi} \omega_i \Delta x_i < \alpha\varepsilon,$$

这里 $\alpha$ 是某个常数. 等式的证明是容易的.

本题引进了有界收敛的概念,这样就能在比一致收敛更弱的条件下保证和函数 $S(x)$是

可积的，而且级数可以逐项积分.

2. 由条件(a)，知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \int_a^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x$ 存在；由条件(c)，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上一致收敛；由练习题15.3中的第6题，即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 再用一次练习题15.3中第6题的结论即能证明题中的等式成立.

本题把定理15.3.7的结果推广到了反常积分.

3. 记 $g_n(x)=\dfrac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}$. 由条件(b)，知

$$\lim_{x\to x_0} g_n(x) = u'_n(x_0) \quad (n=1,2,\cdots).$$

令 $E=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，则 $x_0$ 是 $E$ 的极限点. 由条件(c)，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ 在 $E$ 上一致收敛. 利用练习题15.3中第6题的结果，即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x_0)$ 收敛，而且

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x_0).$$

由此即得要证的结果.

定理15.3.8给出了级数的和函数在一个区间上可以逐项微分的条件，但有时候要判断一个级数在区间中的某些点可微，在某些点不可微，就像第4题那样. 这时定理15.3.8就不能用了. 对这类问题，本题提供了一个判断的方法.

4. 任取 $x_0\neq a_n(n=1,2,\cdots)$，利用第3题的结果，即知 $f$ 在 $x_0$ 处可微. 设 $x_0=a_m$，有

$$f(x) = \frac{|x-x_0|}{2^m} + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{|x-a_n|}{2^n}.$$

利用刚才讨论的结果，即知 $f$ 在 $x_0$ 处不可微.

5. (1) 容易证明.

(2) 利用练习题15.3中第6题的结果.

(3) 对于固定的 $x\in[0,+\infty)$，令

$$\varphi(t) = \frac{1}{x+2^t} \quad (0<t<+\infty).$$

$\varphi$ 是严格递减的. 由面积原理，知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n) < \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x+2^t} < \sum_{n=0}^{\infty}\varphi(n).$$

由此即得所要证的不等式.

6. 利用积分等式(6.4节中的例2)

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1} x\mathrm{d}x = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

7. 在 $[0,1]$ 上定义函数 $\varphi(x)=x(1-x)$，把它奇性延拓到 $[-1,0]$ 上，再把它以2为周

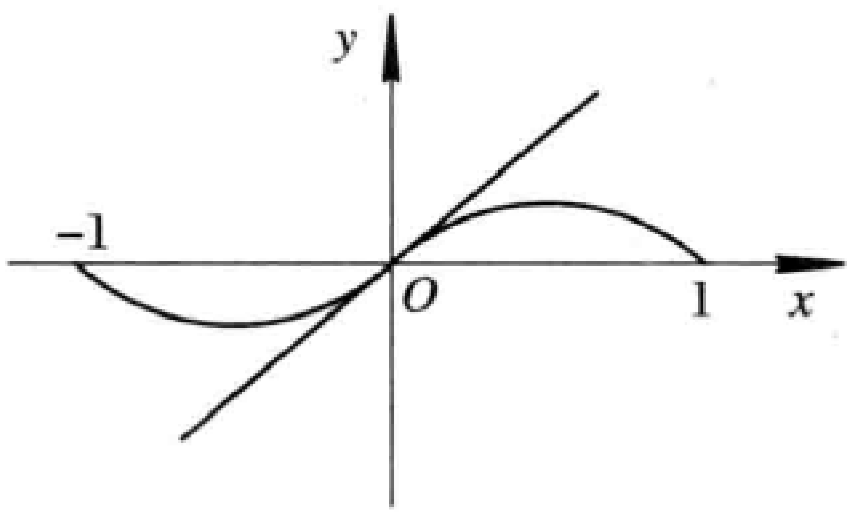



图 5

期延拓到$(-\infty, +\infty)$上，所得的函数仍记为 $\varphi$（图 5）. 容易看出，$\varphi$ 具有下列性质：

(a) $|\varphi|\leqslant 1/4$；

(b) $\varphi(k)=0\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$；

(c) $\varphi$ 处处可导，且$|\varphi'|\leqslant 1$；

(d) $\varphi'(2k)=1\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

现在定义函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(n!x)}{(n!)^2}.$$

可以证明，$f$ 在有理点处取有理数值，$f'$ 在有理点处取无理数值.

## 问题 15.4

1. 先证 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R\leqslant 1$. 然后，记 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$，证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_nx^n$ 的收敛半径 $R\geqslant 1$.

2. 题中的级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$. 由 Leibniz 判别法知该级数收敛. 令

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}x^{3n-1}.$$

由 Abel 第二定理，知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}=\lim_{x\to 1}S(x).$$

3. 把级数写成 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n+1}$. 用与上题相同的方法即能求得其和.

4. 记所求级数的和为 $S$，

$$S(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}x^{2n+1},$$

则 $S=\lim\limits_{x\to 1}S(x)$. 计算可得

$$(xS'(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}=(1-x^2)^{-1/2},$$

由此解出 $S'(x)$.

5. (1) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n<+\infty$，则由 Abel 第二定理可得要证的等式. 现设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n=+\infty$，要证

$$\lim_{x\to R}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=+\infty.$$

(2) 利用等式

$$\ln\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

## 问题 15.5

1. 利用

$$(\sin 2^n x)^{(m)}=2^{mn}\sin\left(2^n x+\frac{m}{2}\pi\right),$$

算出

$$f^{(m)}(0)=\left(\sin\frac{m}{2}\pi\right)e^{2^m}.$$

由此得 $f$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 级数为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{2^{2k+1}}}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

2. 由 Taylor 公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x),$$

以及定理 6.4.1,知 $R_n$ 有下面的积分表达式:

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

通过变换 $t=x(1-u)$,得

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}=\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x(1-u))\mathrm{d}u.$$

由此可得

$$0\leqslant R_n(x)\leqslant\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}R_n(r)\leqslant\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}f(r)\quad(0\leqslant x\leqslant r).$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0\ (0\leqslant x\leqslant r)$.

3. 证明

$$x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\frac{x^{11}}{11}-\cdots=\int_0^x\frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}.$$

再由 Abel 第二定理即得要证的结果.

4. 这是一个较难的题.

利用 $\ln(1+x)$ 的展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\quad(-1<x\leqslant 1),$$

得

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{k^3}-\cdots.$$

由此可得

$$\ln n = \sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3} - \cdots.$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n - \frac{1}{n} &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \ln n \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^4} - \cdots. \qquad (1)\end{aligned}$$

记

$$S(n) = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{4}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^4} - \cdots. \qquad (2)$$

它是一个 Leibniz 型的交错级数,其和不超过级数的第一项,因而有

$$0 < S(n) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

由此即得 $\lim\limits_{n\to\infty} S(n) = 0$. 把式(1)和式(2)逐项相加,得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n - \frac{1}{n} + S(n) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} - \cdots \\ &= \frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{3}S_3 + \frac{1}{4}S_4 - \cdots \\ &= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}S_k.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \gamma$,所以

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}S_k = \gamma.$$

## 问题 15.6

1. (1) 从不等式 $(1-x^2)^n \geqslant 1 - nx^2$,即可证得 $c_n \leqslant \sqrt{n}$.

(2) 在 $P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\mathrm{d}t$ 中,作变量代换 $x + t = u$,并注意到 $f$ 在 $[0,1]$ 外等于 0,即知 $P_n$ 是 $x$ 的多项式. 利用 $f$ 在 $[0,1]$ 上的一致连续性和(1),即可证得 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$.

(3) 在 $f(0) = f(1) = 0$ 不成立时,考虑函数

$$g(x) = f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0)) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

2. 先证明

$$B'_{n+1}(x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

用中值公式,得

$$B'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} f'(\xi_k)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \quad \left(\frac{k}{n+1} < \xi_k < \frac{k+1}{n+1}\right).$$

由此即可证得所要的结果.

3. 对任意的正整数 $n$,由 Weierstrass 定理,存在多项式 $P_n(x)$,使得

$$\left| P_n(x) - \left(f(x) - \frac{3}{2^{n+2}}\right)\right| < \frac{1}{2^{n+2}} \quad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{1}$$

上式即为

$$f(x) - \frac{1}{2^n} < P_n(x) < f(x) - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

因而有

$$P_{n-1}(x) < f(x) - \frac{1}{2^n} < P_n(x).$$

这样得到的$\{P_n(x)\}$是一列递增的多项式.在式(1)中令 $n \to \infty$,即知 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$在$[a,b]$上一致地成立.

## 问题 15.7

1. 证明数列$\left\{\frac{1}{1-2n}\binom{2n}{n}\right\}$的母函数是$(1-4x)^{1/2}$.

2. 记 $a_n = \sum\limits_{k=0}^{[n/2]}\binom{n-k}{k}$,证明 $a_n$ 满足递推关系

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n = 2,3,\cdots).$$

3. 记 $a_n = \sum\limits_{k=0}^{[n/2]}\binom{n-k}{k}\alpha^k$,证明 $a_n$ 满足递推关系

$$a_n = a_{n-1} + \alpha a_{n-2}.$$

4. (1) 在第 3 题中取 $\alpha = 2$.

(2) 在第 3 题中取 $\alpha = -1$.

5. 把等式的右边记为 $a_{n-1}$,记 $b_k = \sum\limits_{l=0}^{k}\binom{n}{l}$. 证明

$$a_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k b_{n-k-1}.$$

若记$\{b_k\}$的母函数为 $f(x)$,那么 $a_{n-1}$是 $f^2(x)$的幂级数展开式中 $x^{n-1}$的系数,算出 $f^2(x)$便能求得

$$a_{n-1} = \sum_{l=0}^{n-1}\binom{2n}{l}(n-l).$$

最后再证明上式的右边为$\dfrac{n}{2}\dbinom{2n}{n}$.

## 问题 16.2

1. 把被积函数写成

$$\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}=\frac{\sin x}{x^\alpha}-\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)}.$$

当 $\alpha>0$ 时,由 Dirichlet 判别法知积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 收敛,因此积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}\mathrm{d}x,\quad \int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)}\mathrm{d}x$$

同敛散,这样问题就归结为上面第二个积分发散.由于

$$\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+1)},$$

只要证明上式右边的积分发散就行了.

在这个问题中,

$$\left|\int_1^A\sin x\mathrm{d}x\right|=|\cos A-\cos 1|\leqslant 2,$$

且$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha+\sin x}=0$,但积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}\mathrm{d}x$ 却是发散的.问题就在于$\dfrac{1}{x^\alpha+\sin x}$不是单调地趋于 0.这个例子说明,Dirichlet 判别法中,“$g(x)$ 单调趋于 0”中的单调是不能去掉的.

2. 从$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=a$ 知,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $A>0$,当 $x>A$ 时,$a-\varepsilon<f(x)<a+\varepsilon$.把积分拆为

$$t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x=t\int_0^A\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x+t\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x.$$

由此可以算出

$$\limsup_{t\to0^+}t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x\leqslant a+\varepsilon,\quad \liminf_{t\to0^+}t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x\geqslant a-\varepsilon.$$

由此便可得所要的结果.

## 问题 16.3

1. 本题的困难在于如何处理 $\sin(x+1/x)$.把原积分写成

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x\\&=I_1+I_2.\end{aligned}$$

先证明当 $\alpha\leqslant0$ 时,$I_2$ 发散.注意到,$\sin x$ 在$(2k\pi,(2k+1/2)\pi)$上取正值且递增,因而

$$\left|\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi/2-1}x^{-\alpha}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right|=\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi/2-1}x^{-\alpha}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant (2k\pi)^{-\alpha}\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi/2-1}\sin x\mathrm{d}x\\
&=\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right)(2k\pi)^{-\alpha}\\
&=\begin{cases}1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right), & \alpha=0,\\ +\infty\,(k\to\infty), & \alpha<0.\end{cases}
\end{aligned}
$$

所以 $I_2$ 发散.而当 $\alpha\leqslant 0$ 时,$I_1$ 是一常义积分.故当 $\alpha\leqslant 0$ 时,$I$ 发散.用同样的方法可以证明 $\alpha\geqslant 2$ 时,$I$ 也发散.现证当 $0<\alpha<2$ 时,$I$ 收敛.这里需要一些技巧.把 $I_2$ 写成

$$
I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\mathrm{d}x.
$$

由于

$$
\begin{aligned}
\left|\int_1^A\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_1^A\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|\\
&=\left|\cos 2-\cos\left(A+\frac{1}{A}\right)\right|\leqslant 2,
\end{aligned}
$$

在 $0<\alpha<2$ 的条件下 $1/(x^\alpha-x^{\alpha-2})$ 递减趋于 0(当 $x\to+\infty$ 时),故由 Dirichlet 判别法,$I_2$ 收敛.同理,对 $I_1$ 作变换 $x=1/t$,知其也收敛.最后,通过不等式

$$
\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^\alpha}\geqslant\frac{\sin^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha}=\frac{1}{2x^\alpha}-\frac{1}{2x^\alpha}\cos 2\left(x+\frac{1}{x}\right),
$$

知当 $0<\alpha<2$ 时,积分 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\right|\mathrm{d}x$ 发散.总之,积分 $I$ 仅当 $0<\alpha<2$ 时条件收敛.

2. 设 $f$ 在(0,1)上递增.由不等式

$$
\int_0^{1-1/n}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_{1/n}^1 f(x)\mathrm{d}x
$$

即得证明.

3. 直接验证.

4. 令 $f(x)=x^{\alpha-1}$.

5. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$,所以对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $A_1>0$,只要 $x>A_1$,便有 $|f(x)-a|<\varepsilon$.由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$,所以对 $\varepsilon>0$,存在 $A_2>0$,只要 $x<-A_2$,便有 $|f(x)-b|<\varepsilon$.现取 $B>A_1$,$A<-A_2-\eta$,通过直接计算,可得

$$
\int_A^B(f(x+\eta)-f(x))\mathrm{d}x=(a-b)\eta+\int_B^{B+\eta}(f(x)-a)\mathrm{d}x-\int_A^{A+\eta}(f(x)-b)\mathrm{d}x.
$$

由此便得证明.

6. (1) 不妨设 $0<a<b$，对任意的 $\delta\in(0,A)$，根据积分平均值定理，得

$$\begin{aligned}\int_\delta^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x &= \int_\delta^A \frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x - \int_\delta^A \frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\\ &= \int_{a\delta}^{aA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t - \int_{b\delta}^{bA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\\ &= \int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t - \int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\\ &= (f(\xi)-f(\eta))\ln\frac{b}{a},\end{aligned}$$

其中 $\xi\in[a\delta,b\delta]$，$\eta\in[aA,bA]$. 令 $\delta\to0, A\to+\infty$ 即得要证的等式.

(2)和(3)的证明是类似的.

7. 显然.

## 问题 17.1

1. 把 $b_n$ 写成

$$b_n = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)2\pi/n}^{(k-1/2)2\pi/n}\left(f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)\sin nx\mathrm{d}x.$$

2. 用推广的第二积分中值定理.

3. 我们证明第一个等式. 选取充分大的自然数 $k_0$，使得$[a,b]\subset[-2k_0\pi,2k_0\pi]$. 在$[-2k_0\pi,2k_0\pi]$上定义

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[a,b],\\ 0, & x\in[-2k_0\pi,2k_0\pi]\setminus[a,b].\end{cases}$$

这样

$$\int_{-2k_0\pi}^{2k_0\pi}F(x)\mid\sin nx\mid\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mid\sin nx\mid\mathrm{d}x. \tag{1}$$

用分点 $x_i=-2k_0\pi+(2\pi/n)i\ (i=0,1,\cdots,2nk_0)$把区间$[-2k_0\pi,2k_0\pi]$分成 $2nk_0$ 等份. 于是

$$\int_{-2k_0\pi}^{2k_0\pi}F(x)\mid\sin nx\mid\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{2nk_0-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}F(x)\mid\sin nx\mid\mathrm{d}x. \tag{2}$$

由于$|\sin nx|$非负，故由第一积分中值定理，存在 $\mu_i\in[m_i,M_i]$，使得

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}F(x)\mid\sin nx\mid\mathrm{d}x = \mu_i\int_{x_i}^{x_{i+1}}\mid\sin nx\mid\mathrm{d}x, \tag{3}$$

这里 $m_i$ 和 $M_i$ 分别是 $F$ 在$[x_i,x_{i+1}]$上的下、上确界. 对式(3)右边的积分作变换 $t=nx+2k_0n\pi-2\pi i$，那么

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\mid\sin nx\mid\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\mid\sin t\mid\mathrm{d}t = \frac{4}{n}.$$

把它代入式(3)，式(2)可写为

$$\int_{-2k_0\pi}^{2k_0\pi} F(x)\mid\sin nx\mid\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{2nk_0-1}\mu_i\frac{2\pi}{n}.$$

于是

$$\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{2nk_0-1}m_i\frac{2\pi}{n}\leqslant\int_{-2k_0\pi}^{2k_0\pi}F(x)\mid\sin nx\mid\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{2nk_0-1}M_i\frac{2\pi}{n}.$$

由于 $F$ 在 $[-2k_0\pi,2k_0\pi]$ 上 Riemann 可积，所以当 $n\to\infty$ 时，上式的两边都趋于 $\frac{2}{\pi}\int_{-2k_0\pi}^{2k_0\pi}F(x)\mathrm{d}x$. 因而

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-2k_0\pi}^{2k_0\pi}F(x)\mid\sin nx\mid\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-2k_0\pi}^{2k_0\pi}F(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

再由式(1)，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\mid\sin nx\mid\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

仔细分析上面的证明，我们发现，除了用到三角函数周期是 $2\pi$ 的性质外，并没用到三角函数的其他性质. 因此可把上面的命题推广为下面更一般的命题：

设 $f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，$\varphi$ 是 $[a,b]$ 上非负的 Riemann 可积函数，且以 $T$ 为周期，那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\varphi(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T\varphi(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

请读者给出这一般命题的证明.

4. 利用 $f$ 的绝对可积性和上一题的结果.

5. 由于 $\int_{-a}^{a} = \int_{-a}^{0} + \int_0^a$，在 $\int_{-a}^{0}$ 中令 $x=-t$，便得

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\frac{1-\cos\lambda x}{x}f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^a\frac{1-\cos\lambda x}{x}(f(x)-f(-x))\mathrm{d}x\\ &= \int_0^a\frac{f(x)-f(-x)}{x}\mathrm{d}x - \int_0^a\frac{f(x)-f(-x)}{x}\cos\lambda x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

余下的只需证明 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 在 $[0,a]$ 上可积.

## 问题 17.2

1. (1) 求 $\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的 Fourier 展开式. 因为它是偶函数，故 $b_n=0(n=1,2,\cdots)$.

从 $\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln 2$，可以算出 $\int_0^{\pi}\ln\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x = -\pi\ln 2$，因而 $a_0=0$，

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin nx \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx = (-1)^{n-1}\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin nt \cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

由此即得(1)

(2) 在(1)中作变换 $x = t - \pi$ 即得.

2. 利用$|\cos x|$的展开式,可得

$$\int_a^b f(x)\ |\cos \lambda x|\ dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}u_k(\lambda),$$

其中

$$u_k(\lambda) = \int_a^b f(x)\cos 2k\lambda x dx.$$

再利用问题 15.3 中第 1 题的结果和 Riemann-Lebesgue 引理即得.

第二个等式的证明是一样的.

3. 把等式左边的积分写为

$$\int_0^h g(t)\frac{\sin \lambda t}{t}dt = \int_0^h (g(t) - g(0+0))\frac{\sin \lambda t}{t}dt + g(0+0)\int_0^h \frac{\sin \lambda t}{t}dt.$$

已知

$$\lim_{\lambda \to +\infty}\int_0^h \frac{\sin \lambda t}{t}dt = \lim_{\lambda \to +\infty}\int_0^{\lambda h}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2},$$

问题就归结为上式右边中的第一个积分当 $\lambda \to +\infty$时趋于 0.

## 问题 17.3

1. (1) 这是 Abel 第二定理的直接推论.

(2) 按定义即得.

2. 分下面三步来证:

(a) 证明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在$(-1,1)$上绝对收敛.

这是因为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 可以在Cesàro意义下求和,由练习题17.3中第3题的结论,知$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 0$. 由此即得

$$|a_n x^n| \leqslant n|x|^n \quad (n > N).$$

(b) 记 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则 $f$ 可以写为

$$f(x) = (1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n \quad (-1 < x < 1).$$

这是因为从级数的乘法知

$$\frac{f(x)}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n,$$

$$\frac{f(x)}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n.$$

(c) 现在有

$$f(x)-s=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}-s)x^n.$$

由此便可证明 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=s$.

3. $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)=1/4(\mathrm{A})$ 从定义便可得到. 至于该级数不能 Cesàro 求和,是因为它不满足练习题 17.3 中第 3 题的可以 Cesàro 求和的必要条件.

综合第 3、第 4 题的结果,可以得到这样的结论:Abel 求和法比 Cesàro 求和法更优越.

4. 记 $S_n=\sum\limits_{k=2}^{n}(-1)^k\ln k$. 根据 Wallis 公式,有

$$S_{2n}+S_{2n+1}=\ln\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

于是

$$\sum_{n=2}^{N}S_n=\frac{N}{2}\ln\frac{\pi}{2}+O(\ln N).$$

由此即得所要的结果.

5. 由幂级数的乘法和 Abel 求和的定义即得.

## 问题 17.4

1. 通过直接计算,即得

$$A_0=a_0^2,\quad A_n=a_n^2+b_n^2,\quad B_n=0.$$

由此得

$$F(x)\sim\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx.$$

上式右边的级数在 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛,设其和为 $G(x)$,$G$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上周期为 $2\pi$ 的连续函数,上面的级数当然是 $G$ 的 Fourier 级数. 由此得 $F(x)\equiv G(x)$,即

$$F(x)=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx.$$

令 $x=0$ 即得 $f$ 的 Parseval 等式.

2. 由假定,知

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx).$$

由 Parseval 等式即得题中的不等式. 等式成立当且仅当 $a_n = b_n = 0(n \geqslant 2)$. 由此即得所要的结论.

3. 由假定,知 $f$ 关于点$(1/2,0)$中心对称. 我们在$[-1/2,1/2]$上把 $f$ 作成奇函数,然后把它按周期 1 延拓. 再令 $\varphi(x) = f\left(\frac{x}{2\pi}\right)(|x| \leqslant \pi)$. 于是

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{x}{2\pi}\right) \mathrm{d}x = 0.$$

对 $\varphi$ 用第 2 题的结论.

4. $\varphi_n$ 可以具体表出如下:

$$\varphi_n(t) = \operatorname{sgn} \sin(2^n \pi t) = \begin{cases} 1, & \dfrac{2k}{2^n} < t < \dfrac{2k+1}{2^n}(k = 0,1,\cdots,2^{n-1}-1), \\ -1, & \dfrac{2k-1}{2^n} < t < \dfrac{2k}{2^n}(k = 1,\cdots,2^{n-1}), \\ 0, & t = \dfrac{k}{2^n}(k = 0,1,\cdots,2^n). \end{cases}$$

由此可见,除了有限个点外,$\varphi_n^2(t) = 1$ 在$[0,1]$上成立,因而 $\int_0^1 \varphi_n^2(t) \mathrm{d}t = 1$. 设 $m < n$,通过上面的表达式便可证明

$$\int_0^1 \varphi_m(t) \varphi_n(t) \mathrm{d}t = 0.$$

## 问题 18.1

1. 由积分号下求导数的法则,得

$$\mathrm{J}_n'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\varphi \sin(n\varphi - x\sin\varphi) \mathrm{d}\varphi,$$

$$\mathrm{J}_n''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \cos(n\varphi - x\sin\varphi) \mathrm{d}\varphi.$$

直接代入要证明的恒等式即得.

2. (1) 把 $a$ 看做参数,记积分为 $I(a)$,则当 $a = b$ 时,$I(a) = \pi \ln a$,当 $a \neq b$ 时,可算出

$$I'(a) = \frac{\pi}{a+b}.$$

由此即可得 $I(a) = \pi \ln \dfrac{a+b}{2}$.

(2) 记所求的积分为 $I(a)$,可以算出

$$I'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

因此 $I(a)=\arcsin a$.

(3) 记所求积分为 $I(a)$，则 $I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\tan^2 x}$. 由此可得

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a\ln(1+|a|).$$

3. 记

$$f(u)=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x)\mathrm{d}x,$$

证明 $f'(u)=0$. 由于 $f(0)=2\pi$，所以 $f(u)=2\pi$.

## 问题 18.2

1. 用 Dirichlet 判别法，证明它在 $[\eta,+\infty)$ 上一致收敛. 用反证法证明它在 $(0,\delta)$ 上不一致收敛.

2. 先证明对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>1$，当 $A>A_0$ 时，

$$\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-1/\alpha)^2/\alpha^2}\mathrm{d}x<\varepsilon \tag{1}$$

对 $\alpha\in[\varepsilon/\sqrt{\pi},1]$ 成立. 事实上，由于 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$ 收敛，故对 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>1$，当 $A>A_0$ 时，有

$$\int_{A-\sqrt{\pi}/\varepsilon}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u<\varepsilon. \tag{2}$$

在式(1)左边的积分中作变换 $u=(x-1/\alpha)/\alpha$，那么

$$\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-1/\alpha)^2/\alpha^2}\mathrm{d}x=\alpha\int_{(A-1/\alpha)/\alpha}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u. \tag{3}$$

由于 $\varepsilon/\sqrt{\pi}\leqslant\alpha\leqslant 1$，$1\leqslant 1/\alpha\leqslant\sqrt{\pi}/\varepsilon$，所以 $(A-1/\alpha)/\alpha\geqslant A-\sqrt{\pi}/\varepsilon$. 从式(3)和式(2)，即得

$$\int_A^{+\infty}\mathrm{e}-(x-1/\alpha)^2/\alpha^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{A-\sqrt{\pi}/\varepsilon}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u<\varepsilon.$$

当 $\alpha\in(0,\varepsilon/\sqrt{\pi})$ 时，由式(3)，得

$$\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-1/\alpha)^2/\alpha^2}\mathrm{d}x\leqslant\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\alpha\sqrt{\pi}<\varepsilon.$$

这就证明了原积分在 $(0,1]$ 上一致收敛. 若该积分能用 Weierstrass 判别法来判断，则意味着存在函数 $g(x)$，使得当 $(x,\alpha)\in[1,+\infty)\times(0,1]$ 时，有

$$\mathrm{e}^{-(x-1/\alpha)^2/\alpha^2}\leqslant g(x), \tag{4}$$

且 $\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x<+\infty$. 但在式(4)中令 $x=1/\alpha$，即得 $g(x)\geqslant 1$，这与 $\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x<+\infty$ 矛盾.

3. 通过反常积分的 Cauchy 收敛原理，把问题归结由级数的 Cauchy 收敛原理来处理.

## 问题 18.3

1. 问题的关键是如何处理被积函数中的绝对值.把积分写成

$$f(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{e^{-t}}{|\sin t|^{\alpha}}dt.$$

作变量代换 $t=x+n\pi$,那么

$$f(\alpha)=\frac{1}{1-e^{-\pi}}\int_0^{\pi}\frac{e^{-x}}{\sin^{\alpha}x}dx.$$

证明右边的积分对 $\alpha\in[0,\eta]$ $(0<\eta<1)$一致收敛.

2. 因为 $\varphi(u)=\int_0^{+\infty}ue^{-ux}dx=1(u>0)$,被积函数是非负、连续的,而由18.2节中的例1,知上述积分在$(0,1]$上不一致收敛.当 $u\geqslant 1$ 时,

$$\psi(u)=e^{u^2}\int_0^{+\infty}ue^{-ux}dx=e^{u^2}$$

是连续函数,被积函数非负且连续,而上述积分在$[1,+\infty)$上不一致收敛.

3. 把原积分记为 $I(\alpha,\beta)$,则

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}dx,$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial\alpha\partial\beta}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}=\frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}.$$

由此可得$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\frac{\pi}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$,进而得

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}\quad(\alpha>0,\beta>0).$$

4. 记题中的积分为 $I$,先算出重积分,再算相应的反常积分,得 $I=\ln 2$.

5. (1) 先对 $a>0,b>0$,证明$\int_0^{+\infty}f\left(\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(x^2)dx$.由此即得

$$I=e^{-2a}\int_0^{+\infty}e^{-(x-a/x)^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}.$$

(2) 用分部积分法.

(3) 利用等式

$$\sin^4 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)-\frac{1}{8}(1-\cos 4x),$$

问题就归结为计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x^2}dx,\quad\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 4x}{x^2}dx.$$

再用分部积分法就能算出这两个积分.

(4) 利用等式

$$\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x=\frac{1}{2}(\cos 2\beta x-\cos 2\alpha x)+\frac{1}{8}(\cos 4\alpha x-\cos 4\beta x)$$

和问题 16.3 中第 6 题(2)的结果,即能算出所要的积分值.

6. 设积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u_0)\mathrm{d}x$ 收敛,则有

$$\int_a^{+\infty}f(x,u_0)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(u_0),$$

其中

$$g_n(u)=\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,u)\mathrm{d}x.$$

利用问题 18.2 中第 3 题的结论即得所要的证明.

## 问题 18.4

1. 定义域是 $0<\frac{s+1}{p}<q$.

$$f(s,p,q)=\frac{1}{pa^q}\left(\frac{a}{b}\right)^{(s+1)/p}\frac{\Gamma\left(q-\frac{s+1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{p}\right)}{\Gamma(q)}.$$

2. 易知

$$I=\int_0^1\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln\Gamma(1-x)\mathrm{d}x.$$

利用余元公式和等式

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

即得所要的等式.

3. 用与第 2 题相同的方法和余元公式,可归结为计算积分

$$J=\int_0^{\pi/2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\ln\sin x\mathrm{d}x.$$

用分部积分可算出 $J=-1+\ln 2$. 由此可得要证明的等式.

4. 作变换 $\cos x=1-2\sqrt{t}$.

5. 利用公式

$$\frac{1}{m+k+1}=\int_0^1 x^{m+k}\mathrm{d}x,$$

以及 B 函数和 $\Gamma$ 函数的关系式.

6. 证明 $(f(x)+g(x))'=0$.

7. 利用题中的等式,可得

$$\Gamma(1-x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-x}n!}{(1-x)(2-x)\cdots(n+1-x)}\quad(0<x<1).$$

把 $\Gamma(x)$和 $\Gamma(1-x)$分别改写为

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)},$$

$$\Gamma(1-x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-x}}{(1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right)(n+1-x)}.$$

用余元公式,可证得

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) \quad (0<x<1).$$

记

$$\varphi(x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

它在$(-\infty,+\infty)$上有定义,再去证明 $\varphi$ 满足下面三条性质:

(a) $\varphi(0)=\varphi(1)=0$;

(b) $\varphi(-x)=-\varphi(x)(-\infty<x<\infty)$;

(c) $\varphi(x+1)=-\varphi(x)(-\infty<x<\infty)$.

由于在$(0,1)$上已知 $\varphi(x)=\sin \pi x$,故在整个数轴上也有 $\varphi(x)=\sin \pi x$.

# 索　　引