第七周作业答案

罗曾宇

题目 1. 设理想铁磁体的磁化规律为 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}+\mu_0\boldsymbol{M_0}$，$\boldsymbol{M_0}$ 是恒定的与 $\boldsymbol{H}$ 无关的量. 今将一个理想铁磁体做成的均匀磁化球 ($\boldsymbol{M_0}$ 为常值) 浸入磁导率为 μ' 的无限介质中，求磁感应强度和磁化电流分布.

解答. 球内球外两区域的定解条件为

$$\nabla^2\varphi_1=0,(r<R_0)$$

$$\nabla^2\varphi_2=0,(r>R_0)$$

$$r=0,\varphi_1\text{有限},$$

$$r\to\infty,\varphi_2\to 0,$$

$$r=R_0,\varphi_1=\varphi_2,-\mu'\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}=-\mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+\mu_0M_0\cos\theta,$$

注：对 $r=R_0$ 处的第二条边界条件作一些解释：因为没有自由电流，边界处磁感应强度连续，积分形式为

$$\int_S(-\mu\nabla\varphi_1+\mu_0\boldsymbol{M_0})\cdot d\boldsymbol{S}=\int_S-\mu'\nabla\varphi_2\cdot d\boldsymbol{S},$$

即 $-\mu'\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}=-\mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+\mu_0M_0\cos\theta$. 因为边界处微分形式失效，在新的情况下，应该回归到积分形式讨论，同学们切勿惯性思维，简单来说，不要背答案.

由过往经验，不妨设 $\varphi_1 = A_1 r\cos\theta, \varphi_2 = \frac{B_1}{r^2}\cos\theta$, 由边界条件可知，

$$\begin{cases} A_1 R_0 = \frac{B_1}{R_0^2}, \\ \frac{2\mu' B_1}{R_0^3} = -\mu A_1 + \mu_0 M_0, \end{cases}$$

解得

$$A_1 = \frac{\mu_0 M_0}{2\mu' + \mu}, B_1 = \frac{\mu_0 R_0^3 M_0}{2\mu' + \mu},$$

综上所述，

$$\varphi_1 = \frac{\mu_0 M_0}{2\mu' + \mu} r\cos\theta, (r < R_0)$$

$$\varphi_2 = \frac{\mu_0 R_0^3 M_0}{2\mu' + \mu}\frac{\cos\theta}{r^2}, (r > R_0),$$

$$\boldsymbol{B_1} = -\mu\nabla\varphi_1 + \mu_0\boldsymbol{M_0} = \frac{2\mu'\mu_0}{2\mu' + \mu}\boldsymbol{M_0},$$

$$\boldsymbol{B_2} = -\mu'\nabla\varphi_2 = \frac{\mu'\mu_0 R_0^3}{2\mu' + \mu}[\frac{3(\boldsymbol{M_0}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{M_0}}{r^3}],$$

球内为均匀场，球外为偶极场，球面的磁化电流密度为

$$\boldsymbol{\alpha_M} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{e_r}\times(\boldsymbol{B_2} - \boldsymbol{B_1})|_{r=R_0} = \frac{3\mu'}{2\mu' + \mu}M_0\sin\theta\boldsymbol{e_\varphi}.$$

题目 2. 电荷按体均匀分布的刚性小球，其总电荷为 Q，半径为 R_0，它以角速度 ω 绕自身某一直径转动，求

(1) 它的磁矩；

(2) 它的磁矩与自转动量矩之比 (设质量 M_0 是均匀分布的).

解答. 小球的电荷密度与质量密度分别为

$$\rho_q = \frac{3q}{4\pi R_0^3}, \rho_m = \frac{3M_0}{4\pi R_0^3},$$

设转动轴为 z 轴，则球内任一点的转动速度为 $\boldsymbol{v}=\omega\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{r}=\omega r\boldsymbol{e}_\varphi$，球内电流密度与动量密度分别为

$$\boldsymbol{J}=\rho_q\boldsymbol{v}=\rho_q\omega r\boldsymbol{e}_\varphi,\boldsymbol{p}=\rho_m\boldsymbol{v}=\rho_m\omega r\boldsymbol{e}_\varphi,$$

小球的磁矩 $\boldsymbol{m}$ 与自转角动量 $\boldsymbol{L}$ 分别为

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\int_V\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{J}dV=\frac{q\omega R_0^2}{5}\boldsymbol{e}_z,$$

$$\boldsymbol{L}=\int_V\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}dV=\frac{2M_0\omega R_0^2}{5}\boldsymbol{e}_z,$$

于是有

$$\boldsymbol{m}=\frac{q}{2}M_0\boldsymbol{L}.$$

题目 3. 有一块磁矩为 $\boldsymbol{m}$ 的小永磁体，位于一块磁导率非常大的实物的平坦界面附近的真空中，求作用在小永磁体上的力 $\boldsymbol{F}$.

解答.

设介质表面为 $z=0$ 平面，$\boldsymbol{m}$ 位于介质表面上方 $z=a$ 处，它与界面法向 $\boldsymbol{e}_z$ 的夹角为 α. 由于高磁导率介质表面是等磁势面，令其表面磁标势为零. 介质的磁化电流在其外部空间产生的磁场，可用介质内 $z=-a$ 处的镜像磁矩 $\boldsymbol{m}'$ 的磁场等效，为满足 $z=0$ 处标势 $\varphi=0$ 的条件，显然 $\boldsymbol{m}'$ 与 $\boldsymbol{m}$ 的数值应相等，$\boldsymbol{m}'$ 与界面法向的夹角也是 α, 但与 $\boldsymbol{m}$ 的夹角为 2α(一个与 z 轴夹角为 α, 一个与 z 轴夹角为 $-\alpha$，这样才能保证边界处磁标势为零). 但是，为了计算方便，我们这里取 $\boldsymbol{m}'$ 的方向为 z 轴.

由此，$\boldsymbol{m}'$ 在 $\boldsymbol{m}$ 处激发的磁场为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times (\frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}}{r^3}) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times (\frac{m}{r^2} \sin\theta \boldsymbol{e_\varphi}) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_r} & r\boldsymbol{e_\theta} & r\sin\theta \boldsymbol{e_\varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & \dfrac{m}{r}\sin^2\theta \end{vmatrix} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} (2\cos\theta \boldsymbol{e_r} + \sin\theta \boldsymbol{e_\theta}),
\end{aligned}$$

令 $\theta = \alpha$，则 $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{m}{r^3} (2\cos\alpha \boldsymbol{e_r} + \sin\alpha \boldsymbol{e_\theta})$, 所以 $\boldsymbol{m}$ 受力为

$$\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B})|_{r=2a} = -\frac{3\mu_0 m^2}{64\pi a^4}(1 + \cos^2\alpha)\boldsymbol{e_r}.$$