概率论期末考试

刘党政，尚世界

2024.5.28

Problem 1 (10 分)**.** 欣赏题：**Ulam Hammersley 问题与 Tracy-Widom 分布的关系。**

Problem 2 (20 分)**.** 有两个随机变量 X, Y 独立，令 $U = X + Y, V = X - Y$，则：

(1) 若 X, Y 均服从 $[-1, 1]$ 上的均匀分布，证明 U, V 不相关但不独立。

(2) 若 X, Y 均服从标准正太分布，证明 U, V 独立。

Problem 3 (15 分)**.** 称一个随机变量 X 是对称的，如果 X 与 $-X$ 同分布。

(1) 证明一个随机变量 X 是对称的当且仅当 X 的特征函数 $\phi(t)$ 是实值偶函数。

(2) 如果 $\phi(t)$ 是一个对称随机变量的特征函数，那么 $\phi^2(t)$ 是特征函数吗？请说明你的理由。

Problem 4 (20 分)**.** 解决如下问题：

(1) 若一列随机变量 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依分布收敛到随机变量 X，而另一列随机变量 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依分布收敛到常数 c，证明 $X_nY_n \xrightarrow{D} cX$。

(2) 有一列独立同分布的随机变量列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $\mathbb{E}[X_1] = \mu < \infty$，$\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$。令 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，对于任意正整数 m，证明：

$$\frac{S_n^m - (n\mu)^m}{n^{m-\frac{1}{2}}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2 m^2 \mu^{2m-2})$$

Problem 5 (15 分)**.** 解决如下问题：

(1) 一随机变量 $X \geq 0$ 非负，而且存在一个严格单调递增的函数 $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$。若 $\mathbb{E}[g(X)] = 0$，证明 $P(X = 0) = 1$。

(2) 如果两个随机变量 X 与 Y 同分布，且 $X \leq Y$，证明 $P(X = Y) = 1$。**提示：可以先假定期望存在。**

Problem 6 (15 分)**.** 有一列独立同分布的随机变量列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \dfrac{1}{2}$。

(1) 对于任意常数 $\delta > \dfrac{3}{4}$，证明：

$$n^{-\delta} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{a.s.} 0$$

(2) 当 δ 的范围改为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ 时，(1) 中的结论是否还成立？请说明你的理由。

Problem 7 (15 分)**.** 对于一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，令 $L^1(\Omega)$ 为所有一阶矩存在的随机变量组成的空间。定理 $L^1(\Omega)$ 上的 Wasserstein 距离如下：

$$W_1(X,Y) = \sup_{h:\|h\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1} |\mathbb{E}[h(X)] - \mathbb{E}[h(Y)]|$$

其中 $\|h\|_{\mathrm{Lip}}$ 是一个对一元函数定义的范数：

$$\|h\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{x \neq y} \left| \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \right|$$

对于一列随机变量列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$，和一个随机变量 X，满足 $X \in L^1(\Omega)$，$X_i \in L^1(\Omega)$, $\forall i \in \mathbb{N}^+$，并且有 $W_1(X_n, X) \to 0$。证明 $\mathbb{E}[|X_n|] \to \mathbb{E}[|X|]$ 与 $X_n \xrightarrow{D} X$。