

复分析复习课

黄天一
USTC

更新: 2024年6月7日

1 期中前的补充习题

习题 1.1 求一个共形变换, 将下列区域 D 映为单位圆盘.

- $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z - i| > \frac{1}{2}\}$.
- $D = \{z : |z| > 1\} \setminus (-\infty, -1]$.

习题 1.2 (21 期末) 设 \mathbb{H} 为上半平面, 考虑函数族

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ 全纯}, |f(z)| < 2021, f(i) = 0\}.$$

计算 $\sup\{|f(2i)| : f \in \mathcal{F}\}$.

习题 1.3 (三线定理) 考虑带状域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, 以及函数 $f \in H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. 如果

$$M_0 = \sup_{\operatorname{Re} z=0} |f(z)|, M_1 = \sup_{\operatorname{Re} z=1} |f(z)|$$

都是有限正数, 证明: 对任意 $z \in \Omega$, 都有

$$|f(z)| \leq M_0^{1-\operatorname{Re} z} M_1^{\operatorname{Re} z}.$$

2 期中后的补充习题

习题 2.1 (21H 期末) 设 f 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上全纯, 并且满足

$$|f(z)| \leq \sqrt{|z|} + \frac{1}{\sqrt{|z|}}, \forall z \neq 0.$$

证明: f 是常数.

习题 2.2 (23Yau) 设 f 为整函数, 并且存在 $C > 0$ 使得 $|f(z)| \leq C\sqrt{|z|}|\cos z|$ 对任意 $z \in \mathbb{C}$ 成立.

证明: f 恒为常数.

习题 2.3 (16 期末) 设 f 在 $B(0, 1) \setminus \{0\}$ 上全纯. 如果 $f \in L^2(B(0, 1))$, 证明 $z = 0$ 是 f 的可去奇点. 如果要求 $f \in L^p(B(0, 1))$, 什么样的 $1 \leq p \leq \infty$ 能保证结论仍然成立?

评论 第二问是我自己加的, 这样复习复分析同时还能复习实分析, 一举两得(确信).

习题 2.4 (比较难, 做做第一问) 1. 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 为整函数, 并对任意 $0 < r < \infty$, 记 $A(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z)$. 证明:

$$|a_n| r^n \leq 2A(r) - 2 \operatorname{Re} f(0), \quad n = 1, 2, \dots$$

2. 设 P 为非零多项式. 证明: $e^z = P(z)$ 有无穷个复数根.

习题 2.5 (保研优营) 设 f 为 \mathbb{C} 上的亚纯函数, 使得 $|z|$ 充分大时有 $|f(z)| = O(|z|^N)$ 对正整数 N 成立. 证明: f 为有理函数.

习题 2.6 (20H) 设 $D = B(0, 1) \setminus \{0\}$, $G = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$. 证明: 不存在从 D 到 G 的双全纯映射.

评论 想清楚, 这个真的能应用边界对应原理吗?

习题 2.7 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在收敛圆周上某点处收敛, 记幂级数的和函数为 f .

1. 对收敛圆周上任一点 $z_0 = R e^{i\theta}$, 证明:

$$\lim_{r \rightarrow R} (R - r) f(r e^{i\theta}) = 0.$$

2. 证明: 任意有理函数的 Taylor 展开在收敛圆周上处处发散.

习题 2.8 (22 期末) 证明或否定: 对每个正整数 n , 存在整函数 f_n , 满足

$$\max_{1 \leq |z| \leq 2} |\operatorname{Re} f_n(z) - \log |z|| < \frac{1}{n}.$$

3 计算题

习题 3.1 (20H 期末) 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx$.

习题 3.2 计算积分 $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{3}x^2} \cos x^2 dx$.

习题 3.3 设 $0 < b < a$. 计算积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta}.$$

习题 3.4 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta$, 并由此计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \theta d\theta$.