

结构拓扑优化综述

2023 年 8 月 20 日

摘要

连续体结构拓扑优化是结构优化中的难点和热点问题，也是结构优化领域的前沿课题之一，本文以连续体结构为研究对象，先是对拓扑优化问题做了直观介绍；然后以均匀化理论为基础，给出拓扑优化的数学形式，并使用二维拓扑优化算法进行求解；因基于均匀化理论的算法求解较为复杂，计算时间过长，我们便引入插值法对其改进，在插值法建模的基础上，使用优化准则法和 MMA 算法求解；最后，因近年来高分辨率拓扑优化设计研究较为火热，我们还对高分辨率拓扑优化问题做了简单介绍。

关键词：均匀化理论 SIMP 插值法 MMA 算法 高分辨率拓扑优化设计

目录

一、背景资料	3
二、结构拓扑优化问题简介	4
三、符号说明	5
四、拓扑优化问题建模及求解算法	5
4.1 均匀化法	5
4.1.1 均匀化理论	5
4.1.2 基于均匀化理论的二维拓扑优化算法	9
4.2 插值法	12
4.2.1 基于均匀化理论的拓扑优化算法的不足之处	12
4.2.2 几种不同的密度插值方法	12
4.2.3 基于 SIMP 插值法的拓扑优化模型	15
4.2.4 求解算法 I-优化准则法	17
4.2.5 求解算法 II-MMA 算法	20
五、高分辨率拓扑优化设计	24
5.1 多分辨率方案和刚度矩阵积分	24
5.2 一般单元类型和等参单元	25
5.3 基于最小长度尺度的投影方法	26
5.4 减少积分点的数量	27
5.5 参数的选择	28
六、总结与展望	28
参考文献	29

一、背景资料

拓扑优化按研究的结构对象可分为离散体结构拓扑优化（如桁架、刚架、加强筋板、膜等骨架结构及它们的组合）和连续体结构拓扑优化（如二维板壳、三维实体）两大类。

离散结构拓扑优化的历史可以追溯到 1904 年由 Michell 提出的桁架理论，Michell 的理论只能用于单工况并依赖于选择适当的应变场。其后陆续提出了一些优化方法，其中最具有代表性的是 Dorn、Gomory 和 Greenberg 等提出的基结构方法（Ground structure approach）。基结构方法克服了 Michell 桁架理论的不适应性，将数值方法引入结构优化领域，建立由结构节点、载荷作用点和支撑点组成的节点集合，集合中的所有节点之间用杆件连接，形成所谓的基结构，以基结构作为初始设计，以杆件面积作为设计变量，采用优化算法优化杆件面积。20 世纪 60 年代初 Schmit 将结构优化问题表述为数学规划问题，并采用数学规划算法求解，成为结构优化领域的一个重要里程碑。

包括桁架结构优化在内的离散结构拓扑优化已比较成熟，国内外已有很多深入的研究和文献。近年来连续体结构拓扑优化理论得到了较快发展，是结构优化领域研究的难点和热点问题。

连续体结构优化按照设计变量的类型和求解问题的难易程度可分为尺寸优化（尺寸变量）、形状优化（形状变量）和拓扑优化（拓扑变量）三个层次，分别对应于三个不同的产品设计阶段，即概念设计、基本设计及详细设计三个阶段，如图 1 所示

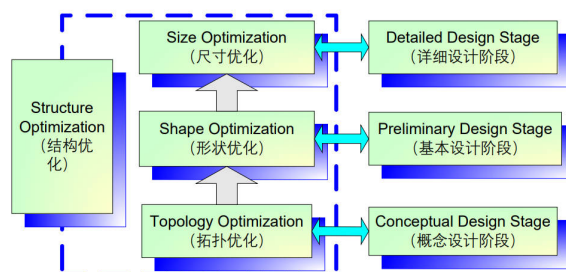


图 1 结构优化的三个阶段

连续体结构的拓扑优化由于描述和数值计算得困难，发展一直相对缓慢，直到 Bendsoe 和 Kikuchi 在 1988 年提出的均匀化方法之后才得到迅速的发展，其基本思想是在组成拓扑结构中引入微结构，以微结构的几何参数作为设计变量，通过微结构的增加和删减实现结构的拓扑形状的改变，实现拓扑优化和尺寸优化的统一。在微结构的基础上，我们介绍变密度法（也即插值法）的应用，变密度法是在均匀化方法的基础上产生的，把材料引入微结构代之以密度在 0 到 1 之间变化的假想材料，把密度作为设计变量，从而实现材料的删减，因其模型简单、计算变量相对较少成为目前广泛采用的方法。根据不同的插值模式，变密度法又有不同的插值模型：SIMP 法（Solid Isotropic Material with Penalization）、Hashin-Shtrikman 法，以及 RAMP 法（Rational Approximation of Material

Properties)。

二、 结构拓扑优化问题简介

所谓拓扑优化 (Topology optimization)，是指在一个确定的连续区域内寻求结构内部非实体区域位置和数量的最佳配置，寻求结构中的构件布局及节点联结方式最优化，使结构能在满足应力、位移等约束条件下，将外载荷传递到结构支撑位置，同时使结构的某种性能指标达到最优。在连续体 Ω 上选出一个子集 Ω_m ，使之满足目标函数及约束条件。对连续体结构拓扑优化而言，不仅要使结构的边界形状发生改变，而且对结构中的空洞个数及形状的分布也要进行优化。目前对二维连续体结构的拓扑优化研究较多。主要困难在于：满足一定要求的结构拓扑形式具有很多种，这种拓扑形式难以定量描述或参数化，而需要设计的区域预先未知，大大增加了拓扑优化的求解难度。

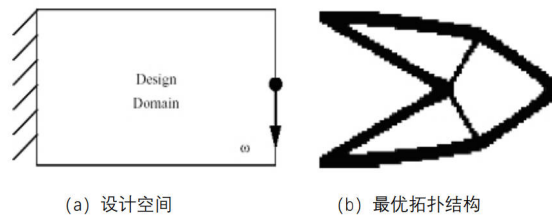


图 2 拓扑优化示意图

拓扑优化是一种比尺寸优化、形状优化更高层次的优化方法，也是结构优化中最为复杂的一类问题。拓扑优化处于结构的概念设计阶段，其优化结果是一切后续设计的基础。当结构的初始拓扑不是最优拓扑时，尺寸和形状优化可能导致次优结构的产生，因此在初始概念设计阶段需要确定结构的最佳拓扑形式。

此外，拓扑优化的思想古已有之。其实拓扑优化从本质上来说是一种非常朴素和优秀的方法，是在一定的外力和约束作用下，寻求具有最佳传力路径的结构布置形式。我国古代赵州桥的设计中就包含有非常原始的拓扑优化理论，古人在考虑桥体承受一定载荷的作用下，设计出最简洁、结构整体刚性最好的桥体结构。



图 3 赵州桥的最佳结构分布 (拓扑优化结果)

有了上述对拓扑优化问题的直观了解，后面我们将按照求解方法的不同，分别介绍拓扑优化的数学形式及其对应的算法。

三、符号说明

下文中用到的部分符号，其意义如下（因建立数学模型时用到很多符号，这里只选取部分进行介绍，大部分符号在初次引入时都有意义说明）：

符号	意义
Ω	设计域
$E(x_i)$	插值以后的弹性模量
E_0	实体部分材料的弹性模量
E_{min}	孔洞部分材料的弹性模量
x_i	单元相对密度，取值为 1 时表示有材料，为 0 表示无材料即孔洞
p	惩罚因子
ζ	移动极限
η	阻尼因子
C	柔度矩阵

四、拓扑优化问题建模及求解算法

4.1 均匀化法

4.1.1 均匀化理论

在均匀化理论中，复合材料模型通常可看作微结构胞元在空间的组合与重复，微观胞元结构如下图所示。每个胞元结构（Base cell）由不同的材料构成，这种带空洞的胞元在空间的重复造成了材料宏观特性的各向异性特征 (Heterogeneity)。

如果单纯用有限元方法来求解这样一个各向异性问题是非常困难的，因为如果将微观材料在空间进行离散的话，离散问题将非常巨大，实际上变得无法实现，因此必须引入均匀化方法，均匀化的目的是通过对复合材料微结构的研究得到复合材料宏观上的特性，进而反映微结构的性能。均化理论包含三个互不耦合的问题：两个微观 (Microscopic level) 上的问题和一个宏观 (Macroscopic level) 上的问题。微观上主要是计算均化系数 (Homogenized coefficients) 和残余应力 (Residual stresses)；宏观问题主要是计算全局位移和应力场。这三个问题求解用的数值方法都是有限单元法，通过一种自适应的有限元法来提高求解的精度。

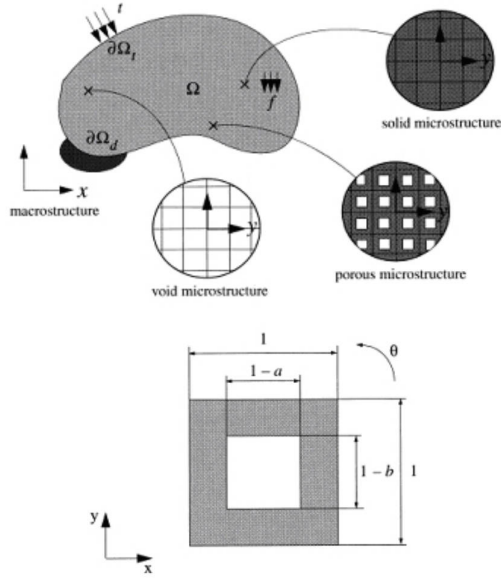


图 4 均匀化方法中的材料微结构示意图

在均匀化方法中，通过在材料中引入带空洞的胞元模型来求解材料的宏观特性参数，寻求一种用宏观量来表达材料微观量变化特征的方法。

设 y 为复合材料微观胞元度量, $y = x/\varepsilon$, x 为宏观度量。微元体受体力 f_i^ε 、面力 p_i^ε 、外部作用力 t_i 作用。微元体在平衡条件下满足如下虚功方程:

$$\int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma + \int_{S^\varepsilon} p_i^\varepsilon v_i dS \quad (1)$$

应力应变关系为: $\sigma_{ij}^\varepsilon = E_{ijkl}^\varepsilon e_{kl}^\varepsilon$, 应变位移关系为: $e_{kl}^\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^\varepsilon}{\partial x_k} \right)$ 。由弹性张量的对称性有:

$$E_{ijkl}^\varepsilon = E_{jikl}^\varepsilon = E_{ijlk}^\varepsilon = E_{klij}^\varepsilon \quad (2)$$

u^ε 依赖于宏观量 x 和微观量 $y = x/\varepsilon$, 因此可将 u^ε 展开为 ε 的渐近展开式:

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \dots \quad (3)$$

u^0 、 u^1 、 u^2 …… 可用 Φ 统一表达为:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\Phi(x, y = x/\varepsilon)) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \quad (4)$$

在复合材料中, 对于一个 Y 周期函数 $\Psi(y)$ 有 (5) 和 (6) 式存在:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega^\varepsilon} \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d\Omega = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y \Psi(y) dY d\Omega \quad (5)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \int_{S^\varepsilon} \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dS = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_S \Psi(y) dS d\Omega \quad (6)$$

其中 $|Y|$ 代表胞元体积, 式 (5) 为胞元上体积分的转换式, 式 (6) 为胞元上面积分的转换式, 上两式将宏观量 x 在微观域上的积分转换为微观量 y 先在微观域上积分, 然后再在宏观域上的积分。将 (3)、(4) 带入 (1) 中有下式:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^2} E_{ijkl}^\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] + \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] \right) \\
&= \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma + \int_{S^\varepsilon} p_i^\varepsilon v_i dS
\end{aligned}$$

将上式按 ε 的权值可分解为下三式:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} d\Omega = 0 \\
& \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl}^\varepsilon \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] d\Omega = \int_{S^\varepsilon} p_i^\varepsilon v_i dS \quad (7) \\
& \int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl}^\varepsilon \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] d\Omega = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma
\end{aligned}$$

将 (7) 第一个式子乘以 ε^2 并利用 (5) 式性质有:

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY d\Omega = 0 \quad (8)$$

分部积分 (8) 式有:

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \left\{ \int_Y \left[-\frac{\partial}{\partial y_i} \left(E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \right) \right] v_i dY + \int_s E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} n_j v_i ds \right\} d\Omega = 0 \quad (9)$$

v_i 为任意量, 由上式可得:

$$-\frac{\partial}{\partial y_i} \left(E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \right) = 0 \quad (10)$$

$$E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} n_j = 0 \quad (11)$$

由 (10)、(11) 式可知: $u^0 = u^0(x)$, 即 u^ε 扩展的第一项 u^0 仅依靠宏观变量 x , 是 x 的函数, 代表材料宏观特性。由 (7) 式第二个式子, 并利用 (5)、(6) 式的性质可得:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dY \right\} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|Y|} \int_S p_i v_i dS \right) d\Omega
\end{aligned} \quad (12)$$

由于 (12) 式对任意 v 均满足, 不妨取 $v = v(y)$, 则可得下式:

$$\int_Y E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY = \int_S p_i v_i(y) dS \quad (13)$$

(13) 式即为微观平衡方程。由 (7) 第三个式子, 并利用 (5)、(6) 式的性质可得:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y E_{ijkl} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] dY \right\} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|Y|} \int_Y f_i v_i dY \right) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma
\end{aligned} \quad (14)$$

当取 $v = v(x)$ 时, 由 (14) 式可得:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) dY \right] \frac{\partial v_i(x)}{\partial y_j} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY \right) v_i(x) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i(x) d\Gamma \quad (15)$$

式 (15) 称为宏观平衡方程。考察 (13), 该等式为 u_k^0 、 p_i 的线性关系式。由下式可求出特征变形量 χ^{kl}

$$\int_Y E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY = \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY \quad (16)$$

由式 (17) 可求得 ψ_k

$$\int_Y E_{ijkl} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_l} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY = \int_S p_i v_i(y) dY \quad (17)$$

由于等式 (13) 为线性, u^1 可表示为:

$$u_i^1 = -\chi_i^{kl}(x, y) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} - \psi_i(x, y) + \tilde{u}_i(x) \quad (18)$$

这里 u^1 表征材料微观特性, $\tilde{u}_i(x)$ 为余项。将式 (18) 带入式 (15) 可得:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{ijkl} - E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \right) dY \right] \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} d\Omega \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_l} dY \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} d\Omega + \int_Y f_i dY_i(x) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i(x) d\Gamma \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{令: } E_{ijkl}^H(x) &= \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{ijkl} - E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \right) dY \\ \tau_{ij}(x) &= \frac{1}{|Y|} \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_l} dY \\ b_i(x) &= \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY \end{aligned} \quad (20)$$

则方程 (15) 可重新表示为

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}^H(x) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \tau_{ij}(x) \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i(x) v_i(x) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i(x) v_i(x) d\Gamma \quad (21)$$

当由 (16)、(17) 式计算出 χ^{kl} 、 ψ_k 后, 用 (20a) 计算均匀化弹性张量 E_{ijkl}^H , 用 (20 b) 计算残余应力 τ_{ij} , 用 (20c) 计算体力项 b_i 。计算出上述微观问题量后, 然后由 (21) 式可求得宏观位移量 u_k^0 。

综上所述, 复合材料均匀化求解方法可归结为三个非耦合问题: 其中两个是微观层问题, 即 (20a) 式中的均匀化弹性张量的求解和 (20b) 式中残余应力的求解。另一个是宏观层的问题, 即 (21) 式中的宏观位移场的求解。

4.1.2 基于均匀化理论的二维拓扑优化算法

设连续体在设计域 Ω 内受到体力 \mathbf{f} 、外部作用力 \mathbf{t} 作用。为了计算方便和简化,在拓扑优化过程中,将连续体离散为带长方形孔洞的正方形单元结构,如下图所示,单元外边长为 1,长方形孔洞边长为 a 、 b ,其取值范围为: a 、 $b \in [0, 1]$ 。

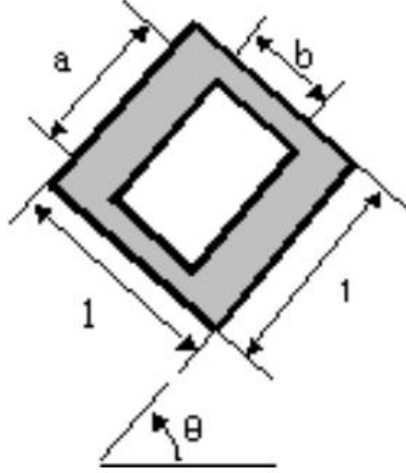


图5 带方形孔洞的单元结构

这样就可以将困难的拓扑优化问题转换为相对简单的尺寸优化问题。而这种单元结构可看作为复合材料的一种微观结构形式,其均匀化弹性张量等材料特性参数可由上述复合材料的均匀化求解方法求得。以最小柔度为目标函数的优化问题可表述为:

$$\begin{aligned} & \text{Find: } a^e, b^e, \theta^e, \quad e = 1, \dots, N \\ & \text{Minimize: } L(\mathbf{u}) \\ & \text{Subject to: } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \int_{\Omega} (1 - a^e b^e) d\Omega \leq \Omega_m \end{aligned} \quad (22)$$

定义结构柔度为 $L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_T} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ds$, 其中 a^e 、 b^e 、 θ^e 为单元设计变量, N 为有限单元的数目。

$$\begin{aligned} a_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} E_{ijkl}^H \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega, \\ E_{ijkl}^H(a^e, b^e, \theta^e) &= \mathbf{R}^T(\theta^e) E_{ijkl}^H(a^e, b^e) \mathbf{R}(\theta^e), \\ E_{ijkl}^H(a^e, b^e) &= f(\chi) g(E_{ijkl}) \end{aligned}$$

将均匀化方法应用于拓扑优化中时,结构胞元中一般不存在内力边界。此时,控制方程只剩下(16)、(20a)。因为无内力边界时, $\psi_k = 0$, $\tau_{ij} = 0$, 所以可略去(17)、(20b)式不予考虑。当不考虑体力项的影响时,宏观平衡方程(21)可写为:

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}^H(x) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma_t} t_i(x) v_i(x) d\Gamma \quad (23)$$

在计算域中通过离散方法, 可求得均匀化弹性张量 $E^H(a^e, b^e)$, 当考虑单元角度变化时, 均匀化弹性张量可进一步表示为:

$$\mathbf{E}^H(a^e, b^e, c^e) = \mathbf{R}^T(\theta^e) \mathbf{E}^H(a^e, b^e) \mathbf{R}(\theta^e) \quad (24)$$

$\mathbf{R}(\theta^e)$ 定义为旋转矩阵:

$$\mathbf{R}(\theta^e) = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta^e & \sin^2 \theta^e & \cos \theta^e \sin \theta^e \\ \sin^2 \theta^e & \cos^2 \theta^e & -\cos \theta^e \sin \theta^e \\ -2 \cos \theta^e \sin \theta^e & 2 \cos \theta^e \sin \theta^e & \cos^2 \theta^e - \sin^2 \theta^e \end{bmatrix} \quad (25)$$

由上述方法求得单元均匀化弹性张量后, 进一步可求得结构整体位移场和应力场, 完成二维拓扑优化问题的一个迭代步计算。拓扑优化问题计算中还涉及到一个优化迭代问题, 即采用什么样的寻优方法进行设计变量更新。优化方法应能保证在满足约束条件情况下使目标函数值不断下降, 并保证计算的收敛性和稳定性。在基于均匀化理论的拓扑优化中一般采用优化准则法。优化准则法通常由目标和约束构成的拉格朗日函数取极值时需满足 Kuhn -Tucker 条件推得。结构总势能可定义为:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \quad (26)$$

$$= -\frac{1}{2} L(\mathbf{u}) \quad (27)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \mathbf{E}_e^H \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega - \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^e} \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega - \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (28)$$

最小柔度问题等价于最大化总势能问题, 对应于设计变量约束和体积约束, 分别引入拉格朗日乘子 $\lambda_{a0}^e, \lambda_{a1}^e, \lambda_{b0}^e, \lambda_{b1}^e$ 和 Λ , 可得到对应于优化问题 (22)、(28) 式的拉格朗日函数 L 可构造为:

$$L = \Pi(\mathbf{u}) - \Lambda \left[\sum_{e=1}^N (1 - a^e b^e) \Omega^e - \bar{\Omega} \right] - \sum_{e=1}^N \lambda_{a0}^e (-a^e) - \sum_{e=1}^N \lambda_{a1}^e (a^e - 1) - \sum_{e=1}^N \lambda_{b0}^e (-b^e) - \sum_{e=1}^N \lambda_{b1}^e (b^e - 1)$$

拉格朗日函数取极值时应满足 K-T 条件。由 K-T 条件, 拉格朗日函数 L 对拉格朗日乘子 $\lambda_{a0}^e, \lambda_{a1}^e, \lambda_{b0}^e, \lambda_{b1}^e$ 、设计变量 a^e, b^e, θ^e 、体积约束因子 Λ 的偏导数为零, 详细展开并求解方程组即可求得未知量。然而求解这样一个方程组非常复杂, 通常的做法是将方程组转换为一系列优化准则, 然后用这些优化准则来更新设计变量, 采用迭代求解的方式

使设计变量逐步逼近最优解。Kikuchi 等给出的一个优化准则更新算法如下:

$$a_{k+1}^e = \begin{cases} (1) \min \{(1 + \zeta)a_k^e, 1\}, & \text{if } a_k^e (E_a^e)_k \leq \max \{(1 - \zeta)a_k^e, 0\} \\ (2) a_k^e [(E_a^e)_k]^\eta, & \text{if } \max \{(1 - \zeta)a_k^e, 0\} < a_k^e (E_a^e)_k < \min \{(1 + \zeta)a_k^e, 1\} \\ (3) \max \{(1 - \zeta)a_k^e, 0\}, & \text{if } \min \{(1 + \zeta)a_k^e, 1\} \leq a_k^e (E_a^e)_k \end{cases}$$

$$b_{k+1}^e = \begin{cases} (1) \min \{(1 + \zeta)b_k^e, 1\}, & \text{if } b_k^e (E_b^e)_k \leq \max \{(1 - \zeta)b_k^e, 0\} \\ (2) b_k^e [(E_b^e)_k]^\eta, & \text{if } \max \{(1 - \zeta)b_k^e, 0\} < b_k^e (E_b^e)_k < \min \{(1 + \zeta)b_k^e, 1\} \\ (3) \max \{(1 - \zeta)b_k^e, 0\} & \text{if } \min \{(1 + \zeta)b_k^e, 1\} \leq b_k^e (E_b^e)_k \end{cases}$$

其中定义:

$$E_a^e = \frac{\frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \varepsilon(\mathbf{u})^T \frac{\partial \mathbf{E}^H}{\partial a^e} \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega^e} \mathbf{u}^T \frac{\partial f}{\partial a^e} d\Omega}{-\Lambda b^e \Omega^e}, E_b^e = \frac{\frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \varepsilon(\mathbf{u})^T \frac{\partial \mathbf{E}^H}{\partial b^e} \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega^e} \mathbf{u}^T \frac{\partial f}{\partial b^e} d\Omega}{-\Lambda a^e \Omega^e}$$

ζ 为移动极限, η 为阻尼因子, k 为迭代步数。用基于应力的优化准则方法更新方位角 θ^e 。由 $\partial L / \partial \theta^e = 0$ 即 $\frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \varepsilon(\mathbf{u})^T \frac{\partial \mathbf{E}^H}{\partial \theta^e} \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega = 0$ 可进一步推得:

$$\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma}^T \frac{\partial \mathbf{C}^e}{\partial \theta^e} \boldsymbol{\sigma} d\Omega = 0$$

其中 \mathbf{C} 为柔度矩阵, $\mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1}$, 由上式可推得 θ^e 的更新公式为:

$$\beta_1^e \cos 2\theta^e - \beta_2^e \sin 2\theta^e + \beta_3^e \cos 4\theta^e - \beta_4^e \sin 4\theta^e = 0$$

其中:

$$\beta_1^e = \frac{1}{2} (C_{11} - C_{22}) \int_{\Omega^e} \sigma_{12} (\sigma_{11} + \sigma_{12}) d\Omega,$$

$$\beta_2^e = \frac{1}{2} (C_{11} - C_{22}) \int_{\Omega^e} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2) d\Omega,$$

$$\beta_3^e = \frac{1}{2} (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{66}) \int_{\Omega^e} \sigma_{12} (\sigma_{11} + \sigma_{12}) d\Omega$$

$$\beta_4^e = \frac{1}{4} (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{66}) \int_{\Omega^e} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 - \sigma_{12}^2] d\Omega$$

求得更新设计变量 a_{k+1}^e 、 b_{k+1}^e 和 θ_{k+1}^e 后, 利用前述有关公式可进一步求得 $\mathbf{E}^H(a_{k+1}^e, b_{k+1}^e)$ 及 $\mathbf{E}^H(a_{k+1}^e, b_{k+1}^e, \theta_{k+1}^e)$

因此, 基于均匀化理论和优化准则法的结构拓扑优化计算流程可归纳如下:

- 1) 定义设计域、非设计域, 定义载荷及约束。
- 2) 对结构进行有限元网格剖分。
- 3) 初始化设计变量 $a^e(0)$ 、 $b^e(0)$ 和 $\theta^e(0)$ 。
- 4) 用均匀化理论计算特征变形量 χ , 计算均匀化弹性张量 E^H 。
- 5) 计算单元刚度矩阵, 组装结构总刚度阵, 求解位移场 u_k 和应力分布 σ_k 。
- 6) 计算目标函数值及约束值。

7) 结果收敛, 则转 9), 否则转 8), 继续循环迭代。

8) 用优化准则法更新设计变量, 得到 $a^e(k+1)$ 、 $b^e(k+1)$ 和 $\theta^e(k+1)$, 转 4)。

9) 计算材料在计算域中的最优分布, 由材料的最优分布确定结构的拓扑构成。

由上述可知: 均匀化方法理论严谨, 但计算复杂, 特别是均匀化弹性张量的求解非常麻烦。因此均匀化方法目前很少用于宏观结构拓扑优化问题的求解, 一般用于拓扑优化的理论分析方面和均匀化拓扑优化反问题的求解, 后者一般用于解决材料的微观设计问题, 如材料微观胞元结构设计、压电材料结构设计等。

4.2 插值法

4.2.1 基于均匀化理论的拓扑优化算法的不足之处

由 4.1 节分析可知: 均匀化方法求解拓扑优化问题分为三个步骤: (1) 以复合材料力学为基础, 由最小势能原理出发并结合均匀化理论的微元体假设, 求得结构的均匀化弹性张量 $E_{ijkl}^H(x)$ 。(2) 采用一定的优化方法更新设计变量, 并保证计算过程的收敛性和稳定性。(3) 用有限元方法求解结构位移场和其他性能指标。其中尤以均匀化弹性张量的求解最为复杂。

在以均匀化方法为基础的拓扑优化中, 无论是均匀化弹性张量 $E_{ijkl}^H(x)$ 的求解还是中间密度指示变量 χ^{kl} 和场变量 \mathbf{u} 的求解都需要求解一系列偏微分方程, 这些偏微分方程通常并无理论解析解, 而需借用数值求解方法来完成, 求解过程非常复杂。

关于设计变量的更新与优化方面, Kikuchi 给出的一个基于优化准则法的优化求解策略, 在均匀化假设前提下, 设计变量数目非常庞大, 二维情况时达到结构单元数目的三倍之多, 并且涉及到微单元角度变量的更新。计算过程中容易出现难以消除的棋盘格和多孔材料等数值计算问题。

由上所述, 基于均匀化理论的拓扑优化算法有如下缺点: (1) 均匀化弹性张量的求解麻烦费时。(2) 内部微结构的形状和方向难以确定。(3) 计算结果容易产生棋盘格和多孔材料等数值计算不稳定性现象, 计算结果可制造性差。

因此, 目前在工程拓扑优化问题的求解中很少采用均匀化方法, 而采用密度法材料插值模型。

4.2.2 几种不同的密度插值方法

不同插值模式会导致不同的计算模型, 目前拓扑优化中的密度插值模型有: SIMP (solid isotropic material with penalization) 材料插值模型、Hashin-Shtrikman 上边界材料插值模型以及 RAMP (Rational Approximation of Material Properties) 插值模型。

(1) SIMP 材料插值模型

通过在离散模型中引入连续变量 ρ 和权系数 p , 并且令 $0 \leq \rho \leq 1$, 在优化前和优化后的材料弹性张量之间引入关系式: $C_{ijkl}(\rho) = \rho^p C_{ijkl}^0$

在 SIMP 模型中假设材料的弹性张量 $C_{ijkl}(\rho)$ 是各向同性的, 泊松比为常量, 且与密度 ρ 无关, 而杨氏模量随 ρ 变化而变化。如果复合材料由两相材料组成, 即一相为空洞材料和另一相密度为 ρ 的材料, 则弹性张量 $C_{ijkl}(\rho)$ 中的体积弹性模量 k 和剪切弹性模量 μ 对于二维平面弹性问题应满足 Hashin-Shtrikman 边界条件如下式所示:

$$0 \leq k \leq \frac{\rho k^0 \mu^0}{(1-\rho)k^0 + \mu^0}, \quad 0 \leq \mu \leq \frac{\rho k^0 \mu^0}{(1-\rho)(k^0 + 2\mu^0) + k^0}$$

其中, k^0 、 μ^0 分别为密度为 ρ 的单相材料的体积弹性模量和剪切弹性模量。二维平面弹性问题中, 满足 Hashin-Shtrikman 边界条件的复合材料的杨氏模量同时应满足:

$$0 \leq E \leq E^* = \frac{\rho E^0}{3-2\rho}$$

由 Hashin-Shtrikman 边界条件式和上式约束可推得二维平面弹性问题中的 SIMP 模型应满足:

$$\rho^p E^0 \leq \frac{\rho E^0}{3-2\rho}, \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

当 $p \geq 3$ 时 (2.36) 式恒成立, 由于在 SIMP 模型中, 泊松比独立于材料密度, 这里泊松比用 v^0 表示, 二维平面弹性问题中存在下式:

$$k^0 = \frac{E^0}{2(1-v^0)}, \quad \mu^0 = \frac{E^0}{2(1+v^0)}$$

将该式代入 Hashin-Shtrikman 边界条件式中, 可得对于 $0 \leq \rho \leq 1$ 的 SIMP 材料模型应满足如下条件:

$$0 \leq \frac{\rho^p E^0}{2(1-v^0)} \leq \frac{\rho E^0}{4-2(1+v^0)\rho}, \quad (29)$$

$$0 \leq \frac{\rho^p E^0}{2(1+v^0)} \leq \frac{\rho E^0}{2(1-\rho)(3-v^0) + 2(1+v^0)} \quad (30)$$

由式 (29)、(30) 经过不等式运算, 可得出权系数 p 需满足如下条件:

$$p \geq p^*(v^0) = \max \left\{ \frac{2}{1-v^0}, \frac{4}{1+v^0} \right\}$$

当 v^0 取不同数值时可得到 p 的不同取值有:

$$p^*\left(v^0 = \frac{1}{3}\right) = 3; \quad p^*\left(v^0 = \frac{1}{2}\right) = 4; \quad p^*(v^0 = 0) = 4; \quad p^*(v^0 = 1) = \infty; \quad p^*(v^0 = -1) = \infty$$

仅当 $v^0 = 1/3$ 时, p^* 取最小值 = 3。由上述推导可知: 在二维平面弹性问题中, 取 $p \geq 3$ 时的 SIMP 模型能够恒满足 Hashin-Shtrikman 边界条件, 得到的拓扑优化结果在理论上满足一般的力学原理, 得到的解在理论上是可行解。

SIMP 材料插值模型中对结构单元弹性模量等属性的控制参数为 ρ 和 p , 当取不同的 p 值时, 不同的中间材料密度单元 ρ 导致单元弹性模量等性能参数逼近 0 或 E^0 的趋势如图 6 所示。

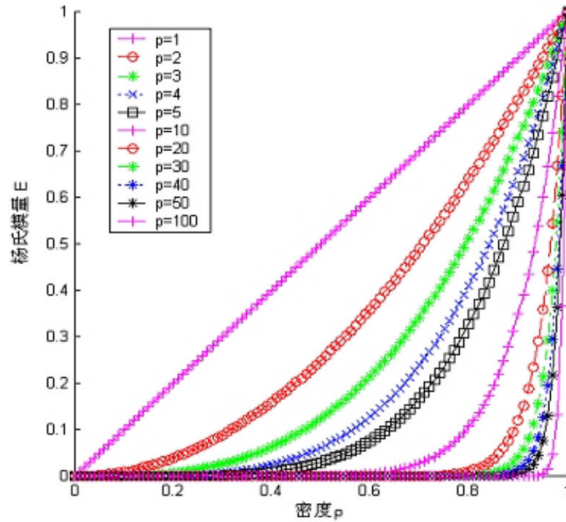


图 6 SIMP 材料模型中不同惩罚因子对中间密度的惩罚效果

(2) Hashin-Shtrikman 上边界条件材料插值模型

当对 Hashin-Shtrikman 边界条件采取同 SIMP 模型一样的中间密度惩罚方式时, 也可用于拓扑优化设计, 可以推出杨氏模量和泊松比的如下插值形式:

$$E(\rho) = \frac{\rho E^0}{3 - 2\rho}, \quad v(\rho) = \frac{1 - \rho(1 - v^0)}{3 - 2\rho}$$

在 Hashin-Shtrikman 边界条件材料模型中, 杨氏模量和泊松比都是密度的函数, 这种插值模型对应于中复合材料的体积弹性模量和剪切弹性模量同时取 Hashin-Shtrikman 上边界条件时的情况。

(3) RAMP 材料插值模型

Stolpe 和 Svanberg 提出了一种用有理函数形式来近似材料 E 值关系的模型, 定义密度为 ρ 的材料和空材料组成的复合材料的弹性模量为:

$$E(\rho) = \frac{\rho}{1 + p(1 - \rho)} E^0$$

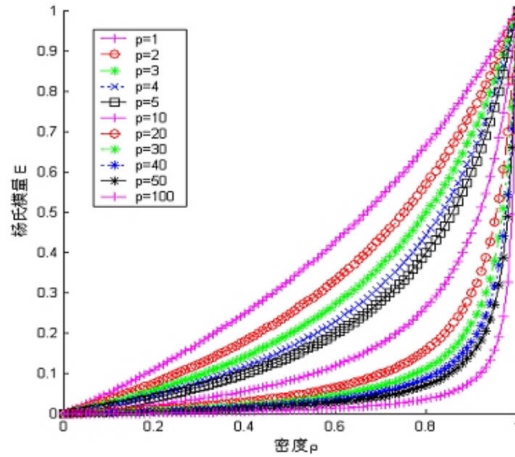


图7 RAMP 材料模型中不同惩罚因子对中间密度的惩罚结果

其中 E^0 为密度为 ρ 的材料弹性模量, $E(\rho)$ 为复合材料的弹性模量。RAMP 材料插值模型中对结构单元弹性模量的控制参数为 ρ 和 p , 当取不同的 p 值时, 不同的中间材料密度单元 ρ 导致单元弹性模量等性能参数逼近 0 或 E^0 的趋势如图 7 所示。

4.2.3 基于 SIMP 插值法的拓扑优化模型

由前面介绍的几种插值模型可知, SIMP 模型对中间密度单元的惩罚效果较好, 当取一定的惩罚因子 p 时, 中间材料密度单元的属性系数能够尽可能趋近于 0 或 1, 因此能够尽可能地减少中间密度单元的数目, 从而能够避免多孔介质等现象。

结构的拓扑优化问题实际上是一个单元集合的有无和增减问题, 通过不断的优化迭代计算, 保留对结构传力路径有利的结构单元, 而删除对结构传力路径作用不大的单元。因此从本质上来说, 结构的拓扑优化问题是一个包含单元增删的离散型优化问题。体积约束情况下离散结构的拓扑优化问题可表达为:

$$\begin{aligned} \text{Find:} \quad & \boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i\}^T \in \mathbf{R}^n \\ \text{Minimize:} \quad & f(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{Subject to:} \quad & V = \sum_{i=1}^N \rho_i v_i \leq V^*, \\ & \rho_i = 0 \text{ or } 1, i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

该问题是一个 0-1 离散变量优化问题, 在大规模情况下, 由于缺乏一种有效的大规模离散变量优化算法, 离散变量优化设计往往失败, 通常都得不到问题的确切解。因此必须将离散变量优化问题转换为连续变量优化问题, 以充分利用一些现有的有效数学规划算法。不同的材料插值方法就起到了这样一个关键作用。除了材料密度为 0 和 1 的单元外, 通过引入中间连续型材料密度单元, 对设计变量进行放松, 将设计变量变化域由 $\rho = 0$ 或 1 转换为 $0 \leq \rho \leq 1$, 并且采用不同的插值方法建立中间密度单元与其单元性能属性之间的数学关系式。这样通过引入中间密度单元, 就将离散型优化问题转换为连续型优化问

题, 而实际上中间密度单元是无法存在和制造的, 因此又要尽量避免中间密度单元的产生, 减少中间密度单元的数目, 这时就需要对设计变量中出现的中间密度值进行限制的惩罚项。主要有两种不同的惩罚方法:

第一种方法通过对目标函数进行改造, 将 $f(\rho)$ 变化为 $f(\rho) + c \int \rho(1 - \rho) dx$, 其中 c 为惩罚因子, 通过选取一个较大的惩罚因子, 来对中间密度的影响进行惩罚。

第二种方法就是采用密度法材料插值方法, 如 SIMP 方法。SIMP 方法的思想 and 前提是: (1) 在离散单元内部的材料属性定义为常数, 设计变量定义为离散单元的相对密度, 用 x_e 来表达, 设原始设计单元密度为 ρ_0 , 优化后单元密度为 ρ_i , 则存在关系式: $\rho_i = x_e \cdot \rho_0$ 。(2) 单元材料属性随着单元相对密度的变化而变化, 并且是与单元相对密度成指数变化关系。设 E_0 和 E 分别为单元初始弹性模量和优化后弹性模量, 则存在关系式: $E = (x_e)^p E_0$, 同样设 \mathbf{k}_0 和 \mathbf{k}_e 分别是结构初始单元刚度矩阵和优化后的单元刚度矩阵, 则可推得关系式: $\mathbf{k}_e = (x_e)^p \mathbf{k}_0$, 设 \mathbf{K}_0 、 \mathbf{K} 分别为优化前和优化后的结构总刚度矩阵, 则可推得关系式: $\mathbf{K} = (x_e)^p \mathbf{K}_0$ 。 p 为惩罚权因子, 选择惩罚因子的目的是: 通过设定 $p > 1$, 对中间密度单元项进行惩罚, 以尽量减少结构中间密度单元的数目, 使结构单元密度尽可能为 0 或 1, 从而用连续优化设计方法来近似离散优化设计。

在上述假设前提下每个单元只包含一个设计变量, 相对于均匀化方法而言, 减少了设计变量的数目, 同时单元相对密度变化后, 对应的材料属性可表示为初始材料属性和单元相对密度的指数函数关系, 简化了计算求解过程。

Bendsoe 和 Sigmund 进一步从理论上证明了这种属性随单元相对密度变化而变化的材料在理论上是允许存在的, 基于 SIMP 材料插值方法的拓扑优化模型能够准确表达现实结构的优化设计过程。

基于 SIMP 方法的拓扑优化模型可广泛应用于各种性质的目标函数和约束条件的场合, 如最小柔度问题, 最小特征值问题, 最小重量问题等。以结构的最小柔度问题为例, 在 SIMP 材料插值方法基础上, 上面的离散优化问题就可变化为如下的连续型拓扑优化问题:

$$\begin{aligned}
 \text{Find:} \quad & \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}^T \in \mathbf{R}^n, \quad i = 1, \dots, N \\
 \text{Minimize:} \quad & C = \mathbf{F}^T \mathbf{U} \\
 \text{Subject to:} \quad & V = f \cdot V_0 \leq V^* \\
 & \mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{U} \\
 & 0 \leq x_i \leq 1
 \end{aligned} \tag{31}$$

式中, 目标函数 C 定义为结构的总体柔度, \mathbf{F} 为力向量, \mathbf{U} 为位移列阵, \mathbf{K} 为优化前的结构总刚度矩阵, V_0 为整个设计域的初始体积, V 是优化后的结构体积, f 为优化体积比。设计约束包括: 体积约束和结构平衡方程约束。在离散的有限元结构中存在:

$V = f \cdot V_0 = \sum_{e=1}^N x_e v_e$, 则结构的总体柔度可写为:

$$C = \mathbf{F}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e = \sum_{e=1}^N (x_e)^p \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e \quad (32)$$

在选用一些优化算法进行求解时, 常需要求解目标函数及约束函数的敏度值, 可容易推得上述结构总体柔度 C 的敏度方程为:

$$\frac{\partial C}{\partial x_e} = -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{U} = -\sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \frac{\partial \mathbf{k}_e}{\partial x_e} \mathbf{u}_e = -p(x_e)^{p-1} \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e \quad (33)$$

体积约束的敏度方程可写为:

$$\frac{\partial C}{\partial x_e} = -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{U} = -\sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \frac{\partial \mathbf{k}_e}{\partial x_e} \mathbf{u}_e = -p(x_e)^{p-1} \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e \quad (34)$$

其中 \mathbf{u}_e 是单元位移列矢量, \mathbf{u}_e 可以通过求解结构有限元平衡方程 $\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{U}$ 得到。将这些关系式代入 (31) 式中, 可得到在体积约束下, 以结构柔度为目标函数时, 基于 SIMP 方法的连续体结构拓扑优化模型为:

$$\begin{aligned} \text{Find: } & \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_e\}^T \in \mathbf{R}^n, \quad e = 1, \dots, N \\ \text{Minimize: } & C = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e = \sum_{e=1}^N (x_e)^p \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e \\ \text{Subject to: } & V = f \cdot V_0 = \sum_{e=1}^N x_e v_e \leq V^* \\ & \mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{U} \\ & 0 < x_{\min} \leq x_e \leq x_{\max} \leq 1 \end{aligned} \quad (35)$$

x_{\min} 和 x_{\max} 分别是单元相对密度的最小极限值和最大极限值, 引入 x_{\min} 的目的是防止单元刚度矩阵的奇异; v_e 为优化后的单元体积。 N 为结构离散单元总数目。这样设计变量就由离散变量变成连续变量, 相应的就将一个离散结构的拓扑优化问题变成了连续体结构拓扑优化问题, 而连续性拓扑优化问题就可以使用一些现有的优化求解数值算法, 如优化准则法 (包括 OC、COC、DCOC 等)、数学规划算法 (包括 SLP、SQP、SCP、CONLIN、MMA、GCMMA 等) 来进行求解, 我们选用其中两种算法在后文进行求解。

4.2.4 求解算法 I-优化准则法

优化准则法从工程上有一定依据的假设出发, 建立优化设计的准则和迭代公式, 然后进行迭代求解。此法最大的特点是收敛速度快, 迭代次数少, 要求重分析的次数一般同结构变量多少和复杂程度无关, 这对于大、中型结构的优化设计具有实际意义, 特别是需要利用有限元法进行结构性能约束及其导数计算时较为合适。其不足之处是不同类

型的优化问题需要推导其各自不同的优化准则，另外优化准则法需要正确区分起作用约束集和不起作用约束集。因此优化准则法多用于约束条件不多的单约束优化问题。

拓扑优化问题的设计变量多，求解多采用有限元法，每次重分析都要重新组装结构刚度矩阵，求解多元方程组，计算工作量大，因此采用优化准则方法是一种很好的选择。本节针对 SIMP 材料插值理论，介绍拓扑优化问题的优化准则算法。

由目标函数和约束条件构成的拉格朗日函数可推导出相应的优化准则法公式。对应于 4.2.3 节中拓扑优化问题式 (35) 的 Lagrangian 函数为：

$$L = C + \lambda_1 (V - f \cdot V_0) + \lambda_2^T (\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F}) + \lambda_4 (x_{\min} - \mathbf{x} + b_i^2) + \lambda_5 (\mathbf{x} - x_{\max} + c_i^2)$$

式中， λ_1 、 λ_2 、 λ_4 、 λ_5 为 lagrangian 乘子， λ_1 为标量， λ_2 、 λ_4 、 λ_5 为向量， b_i 、 c_i 是松弛因子， \mathbf{x} 是由 x_e 组成的列矢量，当 x_e 取极值 x_e^* 时上述 Lagrangian 函数应满足 Kuhn-Tucker 必要条件如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_e} = \frac{\partial C}{\partial x_e} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_e} + \lambda_2^T \frac{\partial (\mathbf{K}\mathbf{U})}{\partial x_e} - \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\ V = f \cdot V_0 \\ \mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U} \\ \lambda_4 (x_{\min} - \mathbf{x}) = 0 \\ \lambda_5 (\mathbf{x} - x_{\max}) = 0 \\ \lambda_4^e > 0 \quad \lambda_5^e > 0 \quad e = 1, \dots, N \\ x_{\min} \leq x_e \leq x_{\max} \end{cases}$$

其中， λ_4 是由 λ_4^e 组成的列向量， λ_5 是由 λ_5^e 组成的列向量。当 $x_{\min} < x_e < x_{\max}$ 时，设计变量的上下限约束均不起作用，有 $\lambda_4^e = \lambda_5^e = 0$ ；当 $x_e = x_{\min}$ 时，设计变量的下限约束起作用，有 $\lambda_4^e \geq 0$ ， $\lambda_5^e = 0$ ；当 $x_e = x_{\max}$ 时，设计变量的上限约束起作用，有 $\lambda_4^e = 0$ ， $\lambda_5^e \geq 0$ 。故上述 K-T 条件等价于下式：

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial x_e} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_e} + \lambda_2^T \frac{\partial (\mathbf{K}\mathbf{U})}{\partial x_e} = 0 & \text{if } x_{\min} < x_e < x_{\max} \\ \frac{\partial C}{\partial x_e} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_e} + \lambda_2^T \frac{\partial (\mathbf{K}\mathbf{U})}{\partial x_e} \geq 0 & \text{if } x_e = x_{\min} \\ \frac{\partial C}{\partial x_e} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_e} + \lambda_2^T \frac{\partial (\mathbf{K}\mathbf{U})}{\partial x_e} \leq 0 & \text{if } x_e = x_{\max} \\ V = f \cdot V_0 \\ \mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U} \\ \lambda_4^e > 0, \quad \lambda_5^e > 0, \quad e = 1, \dots, N \end{cases} \quad (36)$$

考虑式 (36) 等于 0 的情况，并且考虑 $C = \mathbf{U}^T \mathbf{K}\mathbf{U}$ 有：

$$\frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial x_e} \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_e} + \lambda_2^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{U} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e} \right) = 0 \quad (37)$$

在基于人工材料密度的模型中存在: $\mathbf{k}_e = (x_e)^p \mathbf{k}_0$, $V = x^T V = \sum_{e=1}^N x_e v_e$, 代入式 (37) 中, 并且利用结构刚阵的对称性可得:

$$\frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial x_e} (2\mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{K}\lambda_2) + \lambda_2^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{U} + p(x_e)^{p-1} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e + \lambda_1 v_e = 0 \quad (38)$$

λ_2 为列矢量, 其取值无限制, 不妨取 $\lambda_2 = -2\mathbf{U}$ 代入式 (38) 中可得

$$-p(x_e)^{p-1} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e + \lambda_1 v_e = 0 \quad (39)$$

由式 (39) 可得:

$$C_e^k = \frac{p(x_e)^{p-1} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e}{\lambda_1 v_e} = 1 \quad (40)$$

可将式 (40) 作为优化设计准则。考虑式 (40) 及设计变量的上下限, 可得到基于优化准则法的迭代公式为:

$$\begin{aligned} x_e^{k+1} &= (C_e^k)^\eta x_e^k & \text{if } x_{\min} < (C_e^k)^\eta x_e^k < x_{\max} \\ x_e^{k+1} &= x_{\min} & \text{if } (C_e^k)^\eta x_e^k \leq x_{\min} \\ x_e^{k+1} &= x_{\max} & \text{if } (C_e^k)^\eta x_e^k \geq x_{\max} \end{aligned} \quad (41)$$

式中 η - 阻尼系数, 引入 η 的目的是为了确保数值计算的稳定性和收敛性。

用式 (41) 进行设计变量的更新需求解 C_e^k , 而求解 C_e^k 需先求得拉格朗日乘子 λ_1 , 具体求解过程如下。

拉格朗日乘子和设计变量的取值应满足系统约束, 即 x_e 、 λ_1 的取值应满足体积约束 $V = f \cdot V_0$ 。假设当设计变量由第 k 步 x_e^k 更新到第 $k+1$ 步 x_e^{k+1} 时, 结构体积由 V^k 变化到 $V^{(k+1)}$ 且有 $V^{(k+1)} = f \cdot V_0 = \tilde{V}_0$, $V^{(k+1)}$ 在 V^k 邻域内泰勒展开, 并略去二阶及高阶项有:

$$V^{k+1} - V^k = \tilde{V}_0 - V^k = \sum_{e=1}^N \frac{\partial V}{\partial x_e^k} (x_e^{k+1} - x_e^k) = \sum_{e=1}^N v_e (x_e^{k+1} - x_e^k) \quad (42)$$

记 $(C_e^k)^\eta x_e^k \leq x_{\min}$ 为集合 A , $(C_e^k)^\eta x_e^k \geq x_{\max}$ 为集合 B , $x_{\min} < (C_e^k)^\eta x_e^k < x_{\max}$ 为集合 C 。则式 (42) 可写为:

$$\tilde{V}_0 - V^k = \sum_A v_e (x_{\min} - x_e^k) + \sum_B v_e (x_{\max} - x_e^k) + \sum_C v_e (C_e^k x_e^k - x_e^k) \quad (43)$$

将式 (39) 代入式 (43) 可得:

$$\tilde{V}_0 - V^k - \sum_A v_e (x_{\min} - x_e^k) - \sum_B v_e (x_{\max} - x_e^k) = \sum_C \frac{p(x_e)^{p-1} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e - \lambda_1 v_e}{\lambda_1} x_e^k \quad (44)$$

求解方程式 (44), 可得到 λ_1 的值。

于是, 在 SIMP 材料插值模式基础上, 我们可以得到基于优化准则法的结构拓扑优化求解过程:

- (1) 定义设计域和非设计域, 定义设计约束、载荷等边界条件。设计域内的单元相对密度可随迭代过程变化, 非设计域内的单元相对密度固定不变, 为定值 0 或 1。
- (2) 将结构离散为有限元网格, 计算优化前的单元刚度矩阵。
- (3) 初始化单元设计变量, 即给定设计域内的每个单元一个初始单元相对密度。
- (4) 计算各离散单元的材料特性参数, 计算单元刚度矩阵, 组装结构总刚度矩阵, 计算结点位移。
- (5) 计算总体结构的柔度值及其敏度值, 求解拉格朗日乘子。
- (6) 用优化准则方法进行设计变量更新。
- (7) 检查结果的收敛性, 如未收敛则转 (4) 循环迭代, 如收敛则转 (8)。

收敛性检查可用如下方法: 分别取两次邻近设计变量的最大分量, 用两个分量的绝对差值式作为评判标准, 也可用两次邻近设计目标函数的绝对差值式作为评判标准。

$$\left| \frac{\max(x^{k+1}) - \max(x^k)}{\max(x^k)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{C^{k+1} - C^k}{C^k} \right| < \varepsilon$$

- (8) 输出目标函数值及设计变量值, 结束计算。

4.2.5 求解算法 II-MMA 算法

MMA 算法最初由瑞典数学家 Svanberg 于 1987 年提出。其方法和思想是: 对结构响应函数在当前设计点处进行一阶倒变量泰勒展开, 进行凸线性显式化近似, 用一系列凸显式化子问题来近似原问题, 然后用对偶方法或初始对偶内点算法求解凸线性显式化子问题, 用移动近似子问题的解来不断逼近原问题的解。

移动近似算法的数学存在性基础是: 由目标函数和约束条件组成的拉格朗日函数出发, 依据 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件得到优化问题解的存在性。一般非线性优化问题可表示为:

$$\begin{aligned} \text{Find: } \mathbf{x} &= \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T \in \mathbf{R}^n, \\ \mathbf{y} &= \{y_1, y_2, \dots, y_m\}^T \in \mathbf{R}^m, \quad z \in \mathbf{R} \\ \text{Minimize: } & f_0(\mathbf{x}) + a_0 z + \sum_{i=1}^M \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) \\ \text{Subject to: } & f_i(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, \quad j = 1, \dots, n \\ & y_i \geq 0, \quad z \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (45)$$

其中: \mathbf{x} 为设计变量, \mathbf{y}, z 为附加设计变量。 f_0, f_1, \dots, f_m 为连续可微实函数, x_j^{\min}, x_j^{\max} 为实数, 且有 $x_j^{\min} \leq x_j^{\max}$, a_0, a_i 为实数, $a_0 > 0, a_i \geq 0, c_0, d_i$ 为实数, $c_i \geq 0, d_i \geq 0$,

$c_i + d_i \geq 0$, m 为设计约束数目, n 为设计变量数目。一般的非线性规划问题可看作上述优化问题的一种特例, 如当优化问题 (45) 式中取 $a_i = 0$ 、 $d_i = 0$ 、 $c_i = 0$ 时即可得到下面的标准优化问题:

$$\begin{aligned} \text{Minimize: } & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{Subject to: } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (46)$$

拓扑优化问题式也可看作是优化问题 (45) 式的一种简化形式。建立对应于问题 (45) 的 Lagrange 函数为:

$$\begin{aligned} L = f_0(\mathbf{x}) + a_0 z + \sum_{i=1}^m \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (f_i(\mathbf{x}) - a_i z - y_i) + \\ \sum_{j=1}^n \xi_j (x_j^{\min} - x_j) + \sum_{j=1}^n \eta_j (x_j - x_j^{\max}) - \sum_{i=1}^m \mu_i y_i - \zeta z \end{aligned}$$

其中: $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)^T$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T$, ζ 为非负 Lagrange 乘子。对应的 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \xi_j + \eta_j &= 0 \\ c_i + d_i y_i - \lambda_i - \mu_i &= 0 \\ a_0 - \zeta - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i &= 0 \\ f_i(x) - a_i z - y_i + s_i &= 0 \\ x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max} \\ z \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad s_i \geq 0 \\ \xi_j \geq 0, \eta_j \geq 0 \\ \zeta \geq 0, \mu_i \geq 0, \lambda_i \geq 0 \\ \lambda_i s_i &= 0 \\ \xi_j (x_j - x_j^{\min}) &= 0 \\ \eta_j (x_j^{\max} - x_j) &= 0 \\ \mu_i y_i = 0, \zeta^2 &= 0 \end{aligned}$$

如果 (x_0, y_0, z_0) 为问题 (45) 的一个局部最优解或全局最优解, 则存在相应的拉格朗日乘子 $\lambda, \xi, \eta, \mu, \zeta$ 和松弛因子 s 满足上式。

上述优化问题中, 目标函数和约束函数常常是设计变量的隐式非线性函数, 这使得优化问题的直接求解常常难以进行。因此, 必须采用数值方法来求解问题 (45) 的解, 常

用的方法是通过一阶或二次凸近似, 将问题 (45) 转化为易于求解的凸性可分离子问题 (又称为移动近似子问题), 然后建立对应于移动近似子问题的拉格朗日函数, 并将拉格朗日函数转换为对偶问题, 由于对偶变量的数目依赖于起作用约束的数目, 因此对于设计约束不是太多的结构优化问题, 对偶设计变量空间相对于原始设计变量空间将大大缩减, 有利于优化问题的求解。然后求解对偶问题, 近似得到原问题的解。

在 MMA 算法中, 一般将目标函数和约束函数在倒变量 $1/(u_j - x_j)$ 或 $1/(x_j - l_j)$ 上线性展开, 构造移动近似子问题, 然后求解移动近似子问题, 得到一个原问题的近似解。问题 (45) 的移动近似子问题可构造为:

$$\begin{aligned}
& \text{Find: } \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T \in \mathbf{R}^n, \\
& \quad \mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}^T \in \mathbf{R}^m, \quad z \in \mathbf{R} \\
& \text{Minimize: } \tilde{f}_0^{(k)}(\mathbf{x}) + a_0 z + \sum_{i=1}^M \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) \\
& \text{Subject to: } \tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
& \quad \alpha_j^{(k)} \leq x_j \leq \beta_j^{(k)}, \quad j = 1, \dots, n \\
& \quad y_i \geq 0, \quad z \geq 0, \quad i = 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{47}$$

其中:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}) &= f_i(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{u_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - l_j^{(k)}} \right) \\
&- \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{u_j^{(k)} - x_j^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j^{(k)} - l_j^{(k)}} \right), \quad i = 0, 1, \dots, m \\
p_{ij}^{(k)} &= \left(u_j^{(k)} - x_j^{(k)} \right)^2 \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^+ + k_{ij}^{(k)} \right) \\
q_{ij}^{(k)} &= \left(x_j^{(k)} - l_j^{(k)} \right)^2 \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^- + k_{ij}^{(k)} \right) \\
\alpha_j^{(k)} &= \max \left\{ x_j^{\min}, 0.9l_j^{(k)} + 0.1x_j^{(k)} \right\} \\
\beta_j^{(k)} &= \min \left\{ x_j^{\max}, 0.9u_j^{(k)} + 0.1x_j^{(k)} \right\} \\
\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^+ &= \max \left\{ 0, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right\} \\
\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^- &= \max \left\{ 0, -\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right\}
\end{aligned}$$

上界近似 $u_j^{(k)}$ 和下界近似 $l_j^{(k)}$ 也随着迭代过程而更新。 $k = 1, 2$ 时有:

$$\begin{aligned}
l_j^{(k)} &= x_j^{(k)} - 0.5 (x_j^{\max} - x_j^{\min}) \\
u_j^{(k)} &= x_j^{(k)} + 0.5 (x_j^{\max} - x_j^{\min})
\end{aligned}$$

$k \geq 3$ 时有:

$$\begin{aligned} l_j^{(k)} &= x_j^{(k)} - \gamma_j^{(k)} \left(x_j^{(k-1)} - l_j^{(k-1)} \right) \\ u_j^{(k)} &= x_j^{(k)} + \gamma_j^{(k)} \left(u_j^{(k-1)} - x_j^{(k-1)} \right) \end{aligned}$$

其中变量 $\gamma_j^{(k)}$ 的更新采用经验化的更新策略为:

$$\begin{aligned} \gamma_j^{(k)} &= 0.7 & \text{if } \left(x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right) \left(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)} \right) < 0 \\ \gamma_j^{(k)} &= 1.2 & \text{if } \left(x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right) \left(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)} \right) > 0 \\ \gamma_j^{(k)} &= 1 & \text{if } \left(x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right) \left(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)} \right) = 0 \end{aligned}$$

参数 $k_{ij}^{(k)}$ 的缺省值采用经验化的更新策略为:

$$\begin{aligned} k_{ij}^{(k)} &= 0, \quad \text{if } i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \\ k_{0j}^{(k)} &= 10^{-3} \times \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \left(\mathbf{x}^{(k)} \right) \right| + 10^{-6} \times \frac{1}{u_j^{(k)} - l_j^{(k)}}, \quad \text{if } i = 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

建立移动近似子问题 (3.18) 的拉格朗日函数, 并建立初始设计变量与对偶设计变量间的关系, 得到对偶设计问题的目标函数为:

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_j(\boldsymbol{\lambda})}{u_j - x_j} + \frac{q_j(\boldsymbol{\lambda})}{x_j - l_j} \right) + a_0 z(\boldsymbol{\lambda}) + \sum_{i=1}^m \left(c_i y_i(\boldsymbol{\lambda}) + \frac{1}{2} d_i y_i^2(\boldsymbol{\lambda}) \right)$$

其中, $p_j(\boldsymbol{\lambda}) = p_{0j} + \sum_{i=1}^m (\lambda_i p_{ij})$, $q_j(\boldsymbol{\lambda}) = q_{0j} + \sum_{i=1}^m (\lambda_i q_{ij})$, 这时拉格朗日乘子 λ 变为对偶设计空间中的对偶设计变量。这样就将移动近似子问题转换为相应的对偶问题:

$$\begin{aligned} \text{Maximize: } & \varphi(\boldsymbol{\lambda}) \\ \text{Subject to: } & \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

上述对偶问题可方便地用一些经典的非约束最大化算法求解。

综上所述, 用 MMA 算法求解优化问题的步骤可归纳为:

- 1) 选择初始计算点 $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}, z^{(1)})$
- 2) 计算该迭代点处的目标函数和约束函数各自的函数值 $f_i(\mathbf{x}^{(k)})$ 和梯度值 $\nabla f_i(\mathbf{x}^{(k)})$, $i = 1, \dots, m$
- 3) 构造移动近似子问题 (47) 来近似问题 (45), 并随着迭代步的变化而更新设计变量的上下界 $u_j^{(k)}$ 和 $l_j^{(k)}$
- 4) 用初始对偶算法求解子问题, 得到问题 (45) 的近似解。由上述过程可看出: 移动近似子问题实际上是在 $(x^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}, z^{(k)})$ 处将隐函数 $f_i(\mathbf{x})$ 用一阶显式近似凸函数 $\tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x})$ 代替。当 $u_j^{(k)} \rightarrow +\infty, l_j^{(k)} \rightarrow -\infty$ 时, 移动近似子问题等价于序列线性规划中的线性近似, 当 $u_j^{(k)} \rightarrow +\infty, l_j^{(k)} \rightarrow 0$ 时, 移动近似子问题等价于 CONLIN 优化近似方法。由于 $\tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x})$ 为凸函数, $\tilde{f}_0^{(k)}(\mathbf{x})$ 为严格凸函数, 所以移动近似子问题有唯一最优解, 这样用一系列满足

KKT 条件的移动近似子问题的解就可以逐步逼近原问题的解。根据 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)})$ 的符号, $p_{ij}^{(k)}$ 和 $q_{ij}^{(k)}$ 同时只有一个不为零, 这样移动近似子问题对原函数的近似就成为单调近似。

当每一个设计变量 x_i 在每一个函数 $f_i(\mathbf{x})$ 上都产生合适的移动限, 即 $l_j^{(k)}$ 、 $u_j^{(k)}$ 变为 $l_{ji}^{(k)}$ 、 $u_{ji}^{(k)}$ 时, MMA 算法就变形为 GMMA (generalized method of moving asymptotes) 算法。但本质上而言, 他们都是对原函数的单调近似, 只是通过移动限的变化调整了对原函数的近似程度, 因此可统一归类为 MMA 系列算法

五、高分辨率拓扑优化设计

上面对于结构拓扑优化的介绍都是较为经典的模型或算法, 随着研究的深入, 我们发现拓扑优化框架要求在消耗尽可能小的计算成本下获得高分辨率的优化结果。接下来的这节将对 NGUYEN 等提出的高分辨率拓扑优化方法 (Multiresolution Topology Optimization, MTOP) 进行简要介绍。它采用多层次网格优化建模策略, 即利用粗糙网格完成有限元分析, 精细的重叠网格描述设计变量和密度变量空间, 从而形成高分辨率的拓扑优化结果。

5.1 多分辨率方案和刚度矩阵积分

首先, 我们针对拓扑优化问题采用三种不同的网格: 用于执行分析的位移网格、用于执行优化的设计变量网格以及用于表示材料分布并计算刚度矩阵的密度网格。设计变量定义为密度元素中心的材料密度, 单元密度是通过投影函数根据设计变量密度计算的。具体的数学关系式如下:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \quad & C(\rho, \mathbf{u}) = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ \text{s.t.} \quad & \rho = f(\mathbf{d}) \\ & \mathbf{K}(\rho) \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ & V(\rho) = \int_{\Omega} \rho dV \leq V_s \end{aligned} \quad (48)$$

这里 \mathbf{d} 是设计变量构成的向量, $f(\cdot)$ 是投影函数

为了获得高分辨率设计, 我们采用比位移网格更细密的密度网格, 使得每个位移单元包含多个密度单元 (子单元)。在每个密度单元内, 材料密度被假设为均匀的。此外, 我们引入了一种集成刚度矩阵的方案, 其中位移单元由多个不同密度单元组成。例如, 图 8a 显示了一个 Q4 位移单元, 图 8b 展示了多个网格, 图 8c 显示了每个 Q4 位移中的 25 个密度单元 (也是 25 个设计变量) 的密度网格。在 MTOP 方法中, 我们将此元素表示为 Q4/n25, 其中 “n25” 指的是每个 Q4 中的密度单元数目 n 为 25。刚度矩阵通过在 25 个积分点上评估刚度积分函数来计算, 这些积分点是 25 个密度单元的中心。积分函

数的相应权重是密度单元的面积。刚度矩阵集成的公式如下所示：

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \simeq \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \Big|_i A_i \quad (49)$$

其中， N_n 是位移单元域中的积分点数量（ N_n 也等于每个位移单元的密度单元数量）， A_i 是密度单元 i 对积分的贡献（ A_i 表示 2D/3D 问题中密度单元的面积/体积）。

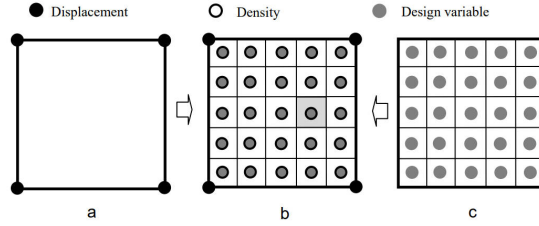


图 8 MTOP Q4/n25 单元：a 位移网格、b 叠加网格、c 设计可变网格

采用 SIMP 插值模型来计算公式中的刚度矩阵，如下所示：

$$\mathbf{K}_e \simeq \sum_{i=1}^{N_n} (\rho_i)^p \mathbf{B}^T \mathbf{D}^0 \mathbf{B} \Big|_i A_i = \sum_{i=1}^{N_n} (\rho_i)^p \mathbf{I}_i \quad (50)$$

其中，

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{B}^T \mathbf{D}^0 \mathbf{B} \Big|_i A_i \quad (51)$$

对于刚度矩阵的灵敏度分析，需要计算相对于设计变量的刚度矩阵的灵敏度，可以计算如下：

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial d_n} = \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial d_n} = \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^{N_n} (\rho_j)^p \mathbf{I}_j \right)}{\partial \rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial d_n} = (\rho_i)^{p-1} \mathbf{I}_i \frac{\partial \rho_i}{\partial d_n} \quad (52)$$

这里， d_n 和 ρ_i 分别表示设计变量和单元密度。约束条件的灵敏度分析可以如下计算：

$$\frac{\partial V}{\partial d_n} = \frac{\partial V}{\partial \rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial d_n} \quad (53)$$

关于 $\frac{\partial \rho_i}{\partial d_n}$ 的灵敏度分析在 5.3 节中给出。

5.2 一般单元类型和等参单元

除了在 5.1 节讨论的四边形单元 Q4/n25 之外，MTOP 方法还适用于其他单元类型。对于 2D 情况，图 3a 展示了每个位移单元有 24 个密度单元的 Wachspress 六边形单元 (Talischi et al. 2009)，图 3b 展示了每个位移单元有 16 个密度单元的三角形单元 (T3/n16)。对于 3D 情况，图 3c 展示了每个 B8 单元有 125 个密度单元的 B8 单元 (B8/n125)，图 3d 展示了每个四面体单元有 64 个密度单元的四面体单元 (TET4/n64)。

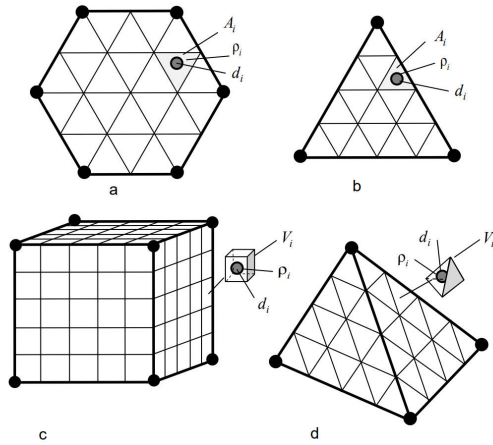


图9 部分 MTOP 元件类型: a H6/n24、b T3/n16、c B8/n125、d TET4/n64

式 (48) 中的积分技巧也适用于等参数元素。例如, 对于图 10 中单位厚度的 Q4 单元, 在参考 (父) 域中计算刚度矩阵的公式如下:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} J d\xi d\eta \quad (54)$$

其中, (ξ, η) 表示区间 $[-1, 1]$ 内的本征坐标, \mathbf{J} 为雅可比矩阵, \mathbf{B} 为参考 (父级) 域中的应变-位移矩阵。。式 (54) 在参考域中的积分计算如下所示:

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} J d\xi d\eta = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega_0 \simeq \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} J \Big|_i A_i^0$$

这里的 Ω_0 是参考域, A_i^0 是参考域中每个密度元素 i 的面积/体积, 如图 10 所示。

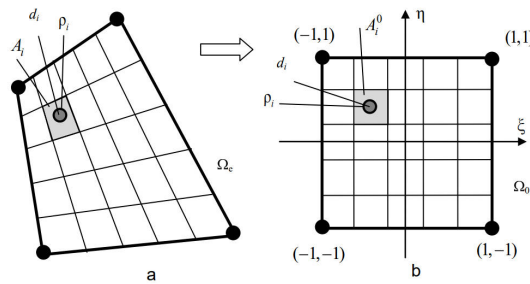


图 10

5.3 基于最小长度尺度的投影方法

不进行投影时, 上述 MTOP 方案无法实现网格无关性, 这可能导致数值不稳定。而高分辨率设计一直是研究的一个目标。在本节中, 我们使用投影方法的变体来实现最小长度尺度和网格无关性。我们的投影方法使用设计变量来计算网格的元素密度。

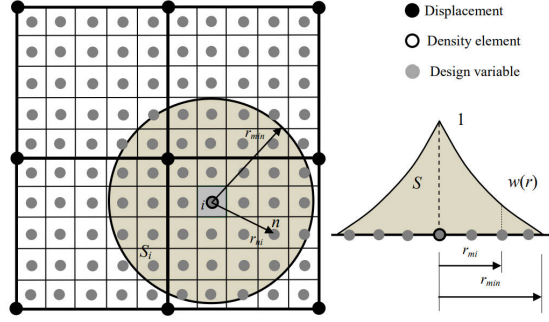


图 11 从设计变量到密度元素的投影函数

设 d_n 表示与设计变量网格相关的设计变量，而 ρ_i 表示与密度元素网格相关的元素 i 的密度。假设材料密度的变化在最小长度 r_{min} 上发生，如图 11 所示。元素密度 ρ_i 可由设计变量 d_n 计算得到，具体计算方式如下：

$$\rho_i = f(d_n)$$

$f(\cdot)$ 为投影函数。例如，如果采用线性投影，则密度元素的均匀密度可以计算为相邻设计变量的加权平均值，计算公式如下：

$$\rho_i = \frac{\sum_{n \in S_i} d_n w(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_i)}{\sum_{n \in S_i} w(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_i)}$$

S_i 是与密度元素 i 对应的子域， \mathbf{x}_n 是与设计变量 d_n 关联的点的位置。对应的权重函数定义如下：

$$w(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_i) = \begin{cases} \frac{r_{min} - r_{ni}}{r_{min}} & \text{如果 } r_{ni} \leq r_{min} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

这里 r_{ni} 是与设计变量 d_n 关联的点到密度元素 i 的质心的距离，物理半径 r_{min} （见图 12）与网格无关。对于公式中的元素密度与设计变量的灵敏度，可以推导如下：

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial d_n} = \frac{w(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_i)}{\sum_{m \in S_i} w(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_i)}$$

使用具有最小长度尺度的投影函数，可以得到网格无关的解。

5.4 减少积分点的数量

在优化过程中，我们可能会遇到具有均匀材料分布的区域，例如空区域或实体区域。对于这些区域，元素内部的材料分布是均匀的，因此可以使用常规积分来进一步减少计算成本。例如，可以只使用 4 个或 9 个高斯点等较少的积分点进行积分，而不是使用 25 个积分点。图 12 显示了具有平滑密度变化的典型位移元素内的密度情况。由于刚度矩阵的被积函数在高斯点处求值，因此这些高斯点处的密度可以直接从设计变量中使用投影函数计算得到。

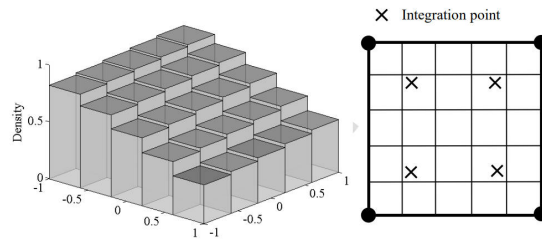


图 12

5.5 参数的选择

我们在前面介绍的 MTOP 方法泛化了一些拓扑优化方法，例如，如图 8b 所示的基于单元的方法可以通过使用 Q4/n1 单元的 MTOP 方法实现，其中每个单元密度由一个设计变量表示。此外，当选择了特殊的位移、密度单元和设计变量网格（如图 13 所示），我们的 MTOP 方法可以表示超单元。这种网格组合将形成 Q4 超单元，该超单元由几个相邻的位移单元组成，具有相同的材料密度/设计变量。

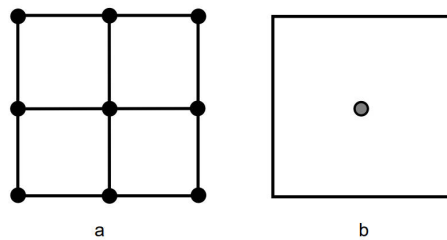


图 13

六、总结与展望

拓扑优化设计是结构优化领域的难点，同时也是较为热门的研究领域，其理论和应用的研究将对传统的优化设计产生深远的影响。本文也是从发展了几十年的拓扑优化领域着手，先是介绍了拓扑优化的概念，然后重点介绍以两种方法对拓扑优化问题进行建模，并调研了相关算法对问题进行解决。近年来，高分辨率拓扑优化的研究也比较火热，因此我们也对高分辨率拓扑优化领域的经典方法（MTOP）进行了一定的介绍。

拓扑优化有着深厚的数理基础和研究背景，本文仅对拓扑优化的几个关键理论和算法部分进行了探讨，随着拓扑优化理论和应用研究的不断进展，还需投入大量的人力和物力对拓扑优化的理论和应用方面进行深入研究。其中，本文未涵盖到的但仍有较大研究潜力的可能有以下几个方面：

- (1) 本文主要研究了二维拓扑优化算法，下一步应该将二维优化算法推广到三维问题中，进行三维结构的拓扑优化理论和算法研究，并对优化求解单元进一步扩展，如扩展到四

面体单元、六面体单元、等参元等。相对于二维算法而言，三维问题对计算求解规模、计算收敛性和稳定性等都有更高的要求。

(2) 拓扑优化在热力学方面的应用还需进一步研究。目前只考虑了稳态热传导及其第一类边界条件情况下的散热结构拓扑优化问题。对于实际工程问题，还需扩展到：有热对流、热辐射等复杂边界条件以及瞬态热传导等复杂情况下的优化问题。

(3) 研究非线性因素在拓扑优化计算中的作用和影响，研究基于非线性理论的拓扑优化设计方法。

(4) 近年来，基于降阶模型的动力拓扑优化也是拓扑优化方向的热门问题，虽已有相关的模型或算法，但仍有改进的空间。

参考文献

- [1] Niels Aage, Ole Sigmund. etc. Giga-voxel computational morphogenesis for structural design, *Nature*, 2017.
- [2] NGUYEN T H, PAULINO G H, SONG J, et al. A computational paradigm for multiresolution topology optimization (MTOPT) [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 41(4): 525-539.
- [3] NGUYEN-HOANG S, NGUYEN-XUAN H. A polytree based adaptive polygonal finite element method for topology optimization [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017, 110(10): 1-48.
- [4] Zhang Zeyu, Li Yu, Zhou Weien, Chen Xiaoqian, Yao Wen, Zhao YongTONR. An exploration for a novel way combining neural network with topology optimization [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, 386.
- [5] ZHAO J, WANG C. Topology optimization for minimizing the maximum dynamic response in the time domain using aggregation functional method [J]. *Computers & Structures*, 2017, 190: 41-60.
- [6] 左孔天. 连续体结构拓扑优化理论与应用研究 [D]. 武汉：华中科技大学，2004.
- [7] 牛飞. 结构拓扑优化设计若干问题的建模、求解及解读 [D]. 大连：大连理工大学，2013.
- [8] VANTYGHM G, BOEL V, STEEMAN M, et al. Multi-material topology optimization involving simultaneous structural and thermal analyses [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, 59: 731-743.