中国科学技术大学2024－2025学年第一学期
数学分析A3　期中试卷

姓名：________　　学号：________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

2024.11.5 9:45-11:45

一(每题6分，共计36分)、讨论级数或无穷乘积的敛散性。

得分	

(1). $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n\sin\frac{1}{n^2}$;

(2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n}$;

(3). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3\sqrt{n}}$;

(4). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

(5). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1+n)^n}{n^{n+1}}$;

(6). $\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$.

二(14分)、讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\beta}\cos n$$

的条件收敛性和绝对收敛性，其中$\beta\in\mathbb{R}$。

得分	

得分	

三(12分)、 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n^2-1}$的收敛区域与和函数。

得分	

四(8分)、 求函数 $f(x)=\ln^2(1+x)$在$x=0$处的幂级数展开式。

得分	

五(10分)、 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

则$f(x) = 0$。

得分	

六 (10分)、试证：存在$\xi \in (0,1)$ 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{n-1}}{n+1} = 1.$

七 (10分)、设连续函数列$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛于$f(x)$. 试证：对于$\forall\epsilon > 0$，$\exists\delta = \delta(\epsilon) > 0$，使得只要 $|x_1 - x_2| < \delta$且x_1, $x_2 \in [0,1]$时，均有

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \epsilon$$

对所有的$n = 0, 1, 2, \cdots$都成立。

得分	