实用随机过程期末复习

赖志鑫

日期：June 5, 2024

目录

1 Chapter 4: Markov Chain (discrete)

1.1 马尔可夫性的定义以及具有马尔可夫性的过程

1.1.1 马尔可夫性的定义

对于一个随机过程 $\{X_n, n \geq 0\}$, 我们往往假设其取值空间为 $\{0, 1, 2, ...\}$, 事件 $\{\omega : X_n(\omega) = i\}$ 称为该过程在时刻 n 处于状态 i 之中。该过程有马尔可夫性是指:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P_{ij}, \quad \forall n \leq 0, \forall i_0, i_1, ..., i_{n-1}, i, j.$$

1.1.2 马尔可夫过程举例

例 1.1. 对一个更新过程进行特定时间点的观察，可以从中得到一条嵌入的马尔科夫链.

1. 对于 M/G/1 模型，记 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为第 n 个顾客离开时，系统中剩余的顾客人数。则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个马尔可夫过程，其转移概率为:
$$P_{0j} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dG(x), j \geq 0$$
$$P_{ij} = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dG(x) & j \geq i-1, i \geq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

2. 对于 G/M/1 模型，记 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为第 n 个顾客到达的时候看到的系统中的顾客数。从而 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是个马尔可夫过程，此时:
$$P_{i,i+1-j} = \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^j}{j!} dG(t), \quad 0 \leq j \leq i.$$
$$P_{i,0} = \int_0^\infty \sum_{k=i+1}^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!} dG(t), \quad i \geq 0.$$

例 1.2. 对于简单随机徘徊 $\{S_n, n \geq 1\}$, 其中 $S_n = \sum\limits_{i=1}^n X_i$，而:
$$X_i \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{bmatrix}, \forall i \geq 1$$
则 $\{S_n, n \geq 1\}$ 具有马尔可夫性。且 $\{|S_n|, n \geq 1\}$ 也具有马尔可夫性，转移概率为:
$$P_{i,i+1} = \frac{p^{i+1} + q^{i+1}}{p^i + q^i} = 1 - P_{i,i-1}, \quad i > 0$$
$$P_{01} = 1.$$

1.2 Chapman-Kolmogorov 方程和状态分类

1.2.1 Chapman-Kolmogorov 方程

记 n 步转移概率 $P_{ij}^n := P(X_{n+m} = j | X_m = i), \forall n \geq 0, i, j \geq 0$，则有如下结论:

1. 我们可以得到 Chapman-Kolmogorov 方程为:

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{n} P_{kj}^{m}, \quad \forall n, m \geq 0, \forall i, j.$$

2. 记 $P^{(n)}$ 为 n 步转移矩阵，则: $P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$.

1.2.2 状态的分类

互达:

1. 状态 j 可以由状态 i 到达，是指: $\exists n \geq 0, P_{ij}^{n} > 0$.

2. 两个状态 i 和 j 可以互达，是指: $\exists n, m \geq 0, P_{ij}^{n} > 0, P_{ji}^{m} > 0$.

3. 互达是个等价关系: 自反，对称，传递.

4. Markov 链不可约，是指: 所有状态都互达。

周期:

1. 状态 i 具有周期 d，是指: $\forall n \geq 1, P_{ii}^{n} > 0 \Rightarrow n \mod d = 0$，且 d 是具有此性质的最大整数. 简练一点可以写为:

$$d(i) := \max_{d: \forall n \geq 1, P_{ii}^{n} > 0 \Rightarrow n \mod d = 0} d$$

2. 如果 i 与 j 互达，$d(i) = d(j)$.

常返:

1. 从 i 出发，在第 n 步后首次到达 j 的概率为:

$$f_{ij}^{n} := P(X_n = j, X_k \neq j, \forall k = 1, ..., n-1 | X_0 = i)$$

2. 从 i 出发，总会到达 j 的概率为:

$$f_{ij} := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{n}$$

3. 对于 $\forall i \neq j$，有: $f_{ij} > 0 \Leftrightarrow \exists n \geq 0, P_{ij}^{n} > 0$.

证明. $"\Rightarrow"$: $f_{ij} > 0 \Rightarrow \exists n$, 使得 $f_{ij}^{n} > 0 \Rightarrow P_{ij}^{n} \geq f_{ij}^{n} > 0$.

$"\Leftarrow"$: $\exists n$. 使得 $P_{ij}^{n} > 0 \Rightarrow f_{ij} \geq P_{ij}^{n} > 0$

4. 关于常返的若干概率结论:

1. 状态 j 是常返的，是指: $f_{jj} = 1$.
2. 状态 j 是常返的，当且仅当: $\mathbb{E}[\text{访问} j \text{ 的次数} | X_0 = j] = \infty$
3. 状态 j 是常返的，当且仅当: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{n} = \infty$
4. 当状态 i 和状态 j 互达时，若 i 常返/零常返/正常返，则 j 常返/零常返/正常返. 这意味着在同一个互达的状态类里面，要么全是暂态，要么全是常返.
5. 简单对称随机徘徊（没有吸收壁）在 $p = \frac{1}{2}$ 时是常返的，在 $p \neq \frac{1}{2}$ 时点点滑过. 这个结论只需要计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n}$ 即可以得到.

6. 当状态 i 和状态 j 互达时，若 $f_{jj}=1$，则 $f_{ij}=1$. 这一结论由设计更新过程来得到，记 $X_0=i$，且 $N_i(t)$ 表示直到时刻 t 为止转移到 i 的次数，i 的常返性保证了这是一个标准更新过程，每次更新发生时总会有一定概率在之后的某一步转移到 j，小概率事件无限重复一定会发生.

1.3 极限定理

马尔可夫链的极限定理需要将其视作为一个更新过程（可能有延迟）来处理. 定义过程：

$$N_j(n) := \sup\{\nu : X_\nu = j, 1 \le \nu \le n\}, \forall n \ge 1$$

表示前 n 步中访问状态 j 的次数. 则我们有如下的结果：

1. j 常返，$X_0=j$，则 $N_j(n), n\ge 1$ 是标准更新，更新间隔定义为 T_{jj}，其服从的分布为 $P(T_{jj}=n)=f_{jj}^n, \forall n\ge 1$.

2. j 常返, i 与 j 互达, $X_0=i\neq j$, 则 $N_j(n), n\ge 1$ 是延迟更新, 首个更新间隔 $X\sim f_{ij}^n, n\ge 1$, 后续的其他更新间隔将会 iid 服从 $\{f_{jj}^n, n\ge 1\}$.

3. j 非常返，即 j 暂态，此时每次到达 j 时一定会有某个正概率 $1-f_{jj}>0$ 再也不会回到 j，此时更新过程总会在某个时候之后不再发生更新.

这意味着我们只对常返时候的 j 感兴趣，当 j 常返时，又分为以下几种情况：

1. j 正常返，是指：$\mu_{jj}<\infty$

2. j 零常返，是指：$\mu_{jj}=\infty$

3. j 遍历，是指：j 正常返且非周期.

总之整个的关系可以总结为：

$$\text{状态}j\begin{cases}\text{常返}\begin{cases}\text{正常返}\begin{cases}\text{非周期(此时正常返非周期，我们也称为遍历)}\\\text{周期}\end{cases}\\\text{零常返}\end{cases}\\\text{暂态}\end{cases}$$

下面给出马尔科夫链的极限性质，这些极限性质都是更新过程的推论：

1. $P\big(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_j(n)}{n}=\frac{1}{\mu_{jj}}\big|X_0=i\big)=1.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}P_{ij}^k=\frac{1}{\mu_{jj}}$

理解：$m_D(n)=\mathbb{E}\big[\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{1}\{X_k=j\}\big|X_0=i\big]=\sum\limits_{k=1}^{n}P_{ij}^k$

3. 在 j 非周期时，$\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^n=\frac{1}{\mu_{jj}}$.

理解：$m_D(n)-m_D(n-1)=P_{ij}^n$

4. 在 j 的周期为 $d>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}P_{jj}^{nd}=\frac{d}{\mu_{jj}}$

理解：$m_D(nd) - m_D(nd-1) = P_{jj}^{nd}$

平稳分布：

1. $\pi_i, i \geq 0$ 是一个马尔科夫链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的平稳分布，是指：

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}, \quad \forall j \geq 0.$$

2. 如果初始时刻状态已然服从了平稳分布，那么后续每个时刻的状态全都服从平稳分布. 即，若 $X_0 \sim \{\pi_i, i \geq 0\}$，那么 $\forall n \geq 1, X_n \sim \{\pi_i, i \geq 0\}$. 此时任意有限个时刻的状态的联合分布都是相同的，该过程变成了一个平稳过程.

一个不可约（这意味着该马氏链只有一个类，所有状态都互达），非周期（这意味着该马氏链的任何状态的周期都为 1）的马氏链必属于以下二者之一：

1. 所有状态都滑过，或者所有状态都零常返，此时 $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = 0, \forall i, j$. 此时该马氏链不存在平稳分布.

2. 所有状态都正常返，记 $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n > 0, \forall i, j$，此时 $\{\pi_j, j \geq 0\}$ 是唯一的平稳分布.

评论.

1. 平稳分布 $\{\pi_i, i \geq 0\}$ 也是方程组：

$$\pi_j := \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

唯一的解. **在实际操作的时候，我们往往通过这一方法来解出平稳分布** $\{\pi_i, i \geq 0\}$

2. 回忆先前的极限定理：$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{\mu_{jj}}$，因此我们可以得到 $\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}$. 值得注意的是，关于这个 π_j，我们其实会有很多的 interpretation:

$$\begin{aligned}\pi_j &= \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n \\ &= \frac{1}{\mu_{jj}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[N_j(n) \middle| X_0 = i\right]}{n} \\ &= P(\text{在无穷远处处于}j \middle| X_0 = i) \\ &= \text{处于状态}j\text{ 的时间长程比例} \\ &= \lim_{n\to\infty} P(X_n = j | X_0 = i)\end{aligned}$$

3. 如果在周期为 $d > 1$ 的情况下，仍然有式子：$\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}$ 成立. 此时 $\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{nd} = \frac{d}{\mu_{jj}} = d\pi_j$.

对于，我们可以给出一个简单的推导来辅助记忆：

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\big[\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{1}\{X_{kd}=j\}\big]}{nd} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\big[\sum\limits_{k=1}^{n} P_{jj}^{kd}\big]}{nd} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d} P_{jj}^{nd}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{nd} = d\pi_j$$

1.4 赌徒输光

在 Chapter 1 中我们讨论的是对称随机游走，在当时得到的结论是：对于 $i>0$，那么从 i 出发：

$$P(\text{到达}N\text{ 之前先到达}0) = \frac{N-i}{N}$$

$$P(\text{到达}0\text{ 之前先到达}N) = \frac{i}{N}$$

现在我们考虑的是非对称随机游走，从 i 出发，以 p 向右，以 $q:=1-p$ 向左，0 和 N 是其吸收壁. 对于这样的一个非对称随机游走，我们将有以下的几点结论：

1. $\{X_n\}$ 记在时刻 n 所处的位置状态，则 $\{X_n\}$ 是一个马氏链，其一步转移矩阵为：

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ q & 0 & p & ... & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 状态分类：$S:=\{0,1,...,N\}$. 其中 $\{0\}$ 和 $\{N\}$ 是常返类这很好理解，值得注意的是 $\{1,2,...,N-1\}$ 必须滑过，因为如果常返类，则必然是闭类，但 10，这与闭性矛盾.

3. 记 $P(\text{到达}0\text{ 之前先到达}N|X_0=i) := P(T_N<T_0|X_0=i) := p_i$. 则我们有：$p_0=0, p_N=1$.
用全概率公式得到：

$$p_{i+1}-p_i = \frac{q}{p}(p_i-p_{i-1})$$

借助 $p_0=0$，我们将这些方程不断向起点归纳，得到：

$$p_{i+1}-p_i = (\frac{q}{p})^i(p_1-p_0) = (\frac{q}{p})^i p_1, \forall i=1,...,N-1 \quad ...(*)$$

把这 $N-1$ 个方程全都加起来，左边的项全都消掉只剩下 p_N-p_1:

$$p_N-p_1 = \big[(\frac{q}{p})^1+...+(\frac{q}{p})^{N-1}\big]p_1$$

从而可以解出 p_1:

$$p_1 = \frac{1}{1+\frac{q}{p}+...+\frac{q^{N-1}}{p^{N-1}}}$$

解出了 p_1 了之后再回到 $(*)$ 式，欲求解任一个 p_i，只需要将 $i-1$ 个方程加起来即可

$$p_i - p_1 = \big[(\frac{q}{p})^1 + ... + (\frac{q}{p})^{i-1}\big]p_1$$

进而：

$$p_i = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^N} & p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N} & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

4. 记 $T :=$ 从i 出发，赌金首次达到0 或N 所需要的赌博次数，来求解 $\mathbb{E}[T]$. 按 T 的定义：

$$T := \min\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i = -i, or, \sum_{i=1}^{n} X_i = n - i\}$$

此时可以验证 T 是一个停时，另一方面我们有：

$$P(\sum_{i=1}^{T} X_i = -i) = P(T_0 < T_N | X_0 = i) = 1 - p_i$$

$$P(\sum_{i=1}^{T} X_i = n - i) = P(T_N < T_0 | X_0 = i) = p_i$$

从而：

$$\text{一方面：}\ \mathbb{E}\big[\sum_{i=1}^{T} X_i\big] = (-i)(1-p_i) + (n-i)p_i = np_i - 1$$

$$\text{另一方面：}\ \mathbb{E}\big[\sum_{i=1}^{T} X_i\big] \overset{Wald}{=} \mathbb{E}[T]\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[T]\big[p - (1-p)\big] = \mathbb{E}[T]\big[2p - 1\big]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[T] = \frac{np_i - 1}{2p - 1}$$

Question：可以通过构造鞅来做吗？

1.5 分支问题

分支问题考虑族群规模的演化：

$$X_0 = 1 \to X_1 \to X_2 \to ...$$

其中 $\{X_n\}$ 为第 n 代的规模，每个个体会产生 Z 个后代：

$$Z \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... \\ p_0 & p_1 & ... \end{pmatrix}$$

，则：$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} \Rightarrow \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_{n-1}]\mathbb{E}[Z] = (\mathbb{E}[Z])^n := \mu^n$

我们有如下的结论：

1. $\pi_0 := P(\text{族群最终消亡}) = P(\exists n, X_n = 0) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 0)$，更进一步地，由于每一支都独立演化，我们有：

$$\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} P(\text{灭绝}|X_1 = j)p_j = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j p_j = \mathbb{E}\big[\pi_0^Z\big]$$

2. $p_0=0$ 时，群体显然不会灭绝. 因为此时 $\{\exists n, X_n=0\}=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\{X_n=0\}$，而 $P(X_n=0)=0$，零测集之并仍然零测.

3. $p_0+p_1=1$ 时，群体必然会灭绝. 因为几何分布告诉我们，反复投一枚硬币，无论出现正面的概率有多小，成功时刻必然会到来.

4. p_0 是以下关于 x 的方程的最小正解：

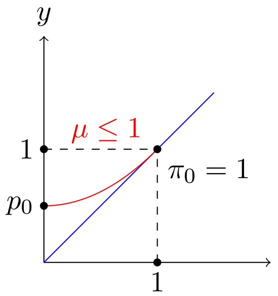
$$x=\sum_{j=0}^{\infty}x^j p_j$$

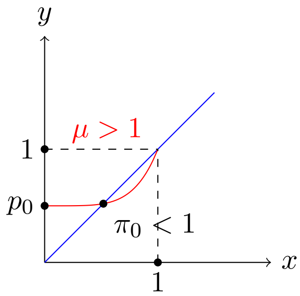
证明. 用归纳法来证明即可. 任取一个该方程的解 π，来证明 $\pi \geq P(X_n=0), \forall n$. 取 $n=0$，此时显然有 $\pi \geq P(X_0=0)$. 假设对于 n 时是成立的，来证明对于 $n+1$ 是成立的：

$$P(X_{n+1}=0)=\sum_{j=0}^{\infty}P(X_{n+1}=0|X_1=j)p_j=\sum_{j=0}^{\infty}\left[P(X_n=0)\right]^j \leq \sum_{j=0}^{\infty}p_j\pi_j=\pi$$

由此即为所欲求.

5. $\pi_0=1 \Leftrightarrow \mu \leq 1$. 直观理解：族群一定会灭绝等价于每个个体平均产生的后代个数 ≤ 1.





总之归纳起来我们有如下的结论：

$$\begin{cases} p_0=0 & \pi_0=0 \\ p_0>0 & \begin{cases} p_0+p_1=1 & \pi_0=1 \\ p_0+p_1<1 & \begin{cases} \mu \leq 1 & \pi_0=1 \\ \mu>1 & 0<\pi_0<1 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

6. 在 $p_0>0, p_0+p_1<1$ 的情形下，我们也可以用状态分类来进行分析. 此时状态空间为 $S=\{0,1,2,...\}$ 一共分为两类：$\{0\}$ 和 $\{1,2,3,...\}$. 注意此时 $\{0\}$ 是常返类，一旦进入 $\{0\}$ 就不再出来，而 $p_0>0$ 导致 $\{1,2,3,...\}$ 不是一个闭类，因为存在一个正概率会进入 $\{0\}$，从而 $\{1,2,3,...\}$ 点点滑过. 因此最终的状态要么被吸收到 $\{0\}$，要么滑向正无穷.

$$\mu \leq 1 \quad \text{只能进入0而无法进入}\infty$$

$$\mu > 1 \quad \text{只能滑向}\infty\text{而无法进入0}$$

1.6 时间可逆

对马氏链的时间可逆性的讨论前提，是该马氏链已处于了平稳状态. 这种平稳状态的达成可能是从 $t_0=-\infty$ 开始演化，且该马氏链不可约（只有一个类）正常返（相邻两次进入同一状态所用时间的期望存在有限），从而其状态分布服从了平稳分布，也可能是该过程的初始状态就是

服从平稳分布，从而导致整个过程在后续都处于平稳分布. **总之，以下均是在观察一个处于平稳状态的马氏链.**

来定义：$P_{ij}^* := P(X_m = j|X_{m+1} = i)$

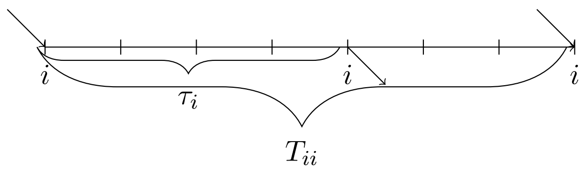
1. $P_{ij}^*\pi_i = P_{ji}\pi_j$. 即：$P(X_m = j|X_{m+1} = i) = P(X_{m+1} = i|X_m = j)$ 且逆向链也是处于平稳状态. 这告诉我们：当我们发现一个马氏链处于平稳状态时，可以利用该等式来求解平稳分布. 如例 4.7(E).

2. 一个处于平稳状态的马氏链时间可逆的等价命题：

$$\begin{aligned}
\text{时间可逆} &\Leftrightarrow P_{ij}^* = P_{ij} \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\pi_i P_{ij}}_{\text{从}i\text{到}j\text{的转移速率}} = \underbrace{\pi_j P_{ji}}_{\text{从}j\text{到}i\text{的转移速率}} \\
&\Leftrightarrow \forall i, i_1, ..., i_K, \quad P_{i,i_1}P_{i_1,i_2}...P_{i_K,i} = P_{i,i_K}P_{i_K,i_{K-1}}...P_{i_1,i} \quad \text{路径可逆}
\end{aligned}$$

1.7 半马过程

半马过程是一个连续时间，离散状态的过程。对于这样一个过程的刻画，我们需要如下这些记号和量，这些记号和量告诉了我们**半马过程的概率结构**.



1. $Z(t)$ 表示在时刻 t 所处的状态. 状态空间为 $S = \{0, 1, 2, ...\}$

2. $P(\text{下一个状态为}j|\text{当前为}i) = P_{ij}$，由此我们定义了一条嵌入马氏链.

3. τ_i：进入 i 后在 i 处滞留的时间.$\mathbb{E}[\tau_i] = \mu_i$

4. T_{ii}：相邻两次进入 i 所用的时间间隔.$\mathbb{E}[T_{ii}] = \mu_{ii}$

5. τ_{ij}：进入 i 后，给定下一个状态为 j，在 i 滞留的时间. $\tau_{ij} \sim F_{ij}(x)$. 即：

$$\left[\tau_i | X_0 = i, X_1 = j\right] \sim F_{ij}$$

从而我们有：

$$P(\tau_i \le x) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}F_{ij}(x)$$

在建立半马过程的极限性质之前，我们需要对更新酬劳定理进行一些回忆，我们要求下面所涉

及的马氏链全都不可约正常返非周期：

$$\begin{cases} P(\text{在无穷远时刻处于状态}j) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{[0,t]\text{处于}j\text{的时间总量}}{t} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\text{一个循环中处于}j\text{的时间总量}\right]}{\mathbb{E}\left[\text{一个循环的长度}\right]} & \text{连续时间，离散状态} \\ P(\text{在无穷远时刻处于状态}j) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{[0,n]\text{访问}j\text{的次数}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\text{一个循环中访问}j\text{的次数}\right]}{\mathbb{E}\left[\text{一个循环的长度}\right]} & \text{离散时间，离散状态} \end{cases}$$

接下来我们一个一个来建立半马过程的极限定理：

1.

$$P_i := \lim_{t\to\infty} P\Big(Z(t) = i|Z(0) = j\Big) = \frac{\mathbb{E}\big[\tau_i\big]}{\mathbb{E}\Big[T_{ii}\Big]} := \frac{\mu_i}{\mu_{ii}} \quad \text{...更新酬劳定理的简单应用}$$

2. 当半马过程的嵌入马氏链不可约正常返非周期的时候，我们有：$P_i = \frac{\pi_i\mu_i}{\sum\limits_{j=0}^{\infty}\pi_j\mu_j}$. 其中，我们记：

$N_i(m) :=$ 前m次状态转移中访问i的次数　...这是在刻画嵌入马氏链的概率结构

$Y_i(j) :=$ 在第j次访问i时，在i停留的时间. 则$Y_i(j) iid \sim \tau_i, \forall j$

并且在不可约正常返非周期的情况下，我们有：

$$(i):\lim_{m\to\infty}\frac{N_i(m)}{m} = \lim_{m\to\infty} P(X_m = i) := \pi_i$$

$$(ii):\lim_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{N_i(m)} Y_i(j)}{N_i(m)} = \lim_{N_i(m)\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{N_i(m)} Y_i(j)}{N_i(m)} \overset{\text{强大数律}}{=} \mathbb{E}\big[Y_i(j)\big] = \mu_i, a.s.$$

进而，我们有：

$$
\begin{aligned}
P_i :=& \lim_{m\to\infty} \frac{\text{前}m\text{次转移中处于}i\text{的时间总量}}{\text{第}m+1\text{次转移所发生的时刻}} \\
=& \lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_i(m)} Y_i(j)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{N_k(m)} Y_k(j)} \\
=& \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{N_i(m)}{m}\frac{\sum\limits_{j=1}^{N_i(m)} Y_i(j)}{N_i(m)}}{\sum\limits_{k}^{\infty}\frac{N_k(m)}{m}\frac{\sum\limits_{j=1}^{N_k(m)} Y_k(j)}{N_k(m)}} \\
=& \frac{\pi_i\mu_i}{\sum\limits_{j=0}^{\infty}\pi_j\mu_j}
\end{aligned}
$$

其中 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$ 与 $\lim\limits_{m\to\infty}$ 可以换序，因为级数绝对收敛.

在下面的这几条极限性质请格外注意，全都是第三章中我们反复强调的直接黎曼可积函数那一套东西的反复运用（或者是设计忙期构造更新区间那一套东西的反复运用）

在讨论之前，我们先约定一些记号：

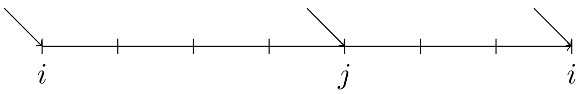
$$Z(t) := \text{时刻}t\text{所处的状态}.$$

$$S(t) := \text{时刻}t\text{之后的首次状态转移所进入的状态}.$$

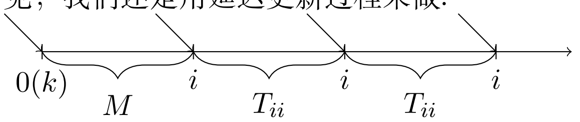
$$Y(t) := \text{时刻}t\text{到下一次状态转移所需要的时间}.$$

3. 半马过程不可约非格点，$\mu_{ii} < \infty$ 时.

$$\lim_{t\to\infty} P\Big(Z(t)=i, Y(t)>x, S(t)=j \,|\, Z(0)=k\Big) = \frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}\int_x^{\infty}\bar{F}_{ij}(y)dy$$



证明. 书上是设计忙期来做的，我们这里用直接黎曼引理来给出证明. 注意到在给定了 $Z(0)=k$ 的时候，以进入状态 i 作为更新点，这个过程会成为一个延迟更新过程，但其实延迟与否并不重要，因为过程演化的起点对于 $t\to\infty$ 时的性态不起作用. 但是为了严谨起见，我们还是用延迟更新过程来做.



其中 $M\sim G,T_{ii}\sim F$. 从而

$$P\Big(S_{N(t)}\le s\Big)=\bar{G}(t)+\int_0^s\bar{F}(t-y)dm_D(y)$$

$$dF_{S_{N(t)}}(s)=\bar{F}(t-s)dm_D(s)$$

进而我们有:

$$\begin{aligned}
&P\Big(Z(t)=i,Y(t)>x,S(t)=j|Z(0)=k\Big)\\
=&P\Big(Z(t)=i,Y(t)>x,S(t)=j|Z(0)=k,S_{N(t)}=0\Big)P\Big(S_{N(t)}=0\Big)\\
&+\int_0^tP\Big(Z(t)=i,Y(t)>x,S(t)=j|Z(0)=k,S_{N(t)}=s\Big)dF_{S_{N(t)}}(s)\\
=&0+\int_0^tP_{ij}P(\tau_{ij}>t+x-s)dm_D(s)
\end{aligned}$$

...(第一次更新在 t 之后才发生时，在时刻 t 不可能处于状态 i，若 $k\neq i$ 的话，这导致第一项为0)

$$\begin{aligned}
=&P_{ij}\Big(\int_0^t\bar{F}_{ij}(t+x-s)dm_D(s)\Big)\\
\to&P_{ij}\frac{\int_0^\infty\bar{F}_{ij}(x+y)dy}{\mu_{ii}}\quad\text{...(直接黎曼可积引理)}\\
=&\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}\int_x^\infty\bar{F}_{ij}(y)dy
\end{aligned}$$

4. 半马过程不可约非格点，$\mu_{ii}<\infty$ 时.

$$\lim_{t\to\infty}P\Big(Z(t)=i,Y(t)>x|Z(0)=k\Big)=\frac{1}{\mu_{ii}}\int_x^\infty\bar{H}_i(y)dy$$

其中 $H_i(x):=P(\tau_i\le x)$ 是 τ_i 的分布函数.

证明. 仍旧取进入状态 i 作为更新点，我们仍然有上面的 $S_{N(t)}$ 的分布，我们有：

$$
\begin{aligned}
&P\Big(Z(t)=i,Y(t)>x|Z(0)=k\Big)\\
=&P\Big(Z(t)=i,Y(t)>x|Z(0)=k,S_{N(t)}=0\Big)P\Big(S_{N(t)}=0\Big)\\
&+\int_0^t P\Big(Z(t)=i,Y(t)>x|Z(0)=k,S_{N(t)}=s\Big)dF_{S_{N(t)}}(s)\\
=&0+\int_0^t P(\tau_i>t+x-s)dm_D(s)\\
=&\Big(\int_0^t \bar{H}_i(t+x-s)dm_D(s)\Big)\\
\to&\frac{\int_0^\infty \bar{H}_i(x+y)dy}{\mu_{ii}} \quad ...(\text{直接黎曼可积引理})\\
=&\frac{1}{\mu_{ii}}\int_x^\infty \bar{H}_i(y)dy\\
=&\frac{\mu_i}{\mu_{ii}}\frac{\int_x^\infty \bar{H}_i(y)dy}{\mu_i}\\
:=&P_i\bar{H}_{i,e}(x)
\end{aligned}
$$

可以有一个直观理解就是等于无穷远时刻处于状态 i 的概率再乘以无穷时刻进入状态 i 后在状态 i 滞留时间大于 x 的概率.（这似乎表征了嵌入链的转移过程和滞留过程的某种独立性?）

5. 求解从 i 到 j 的转移速率，也就是：

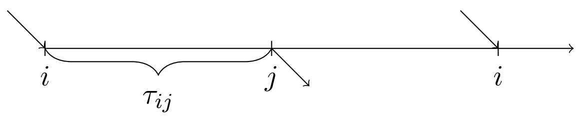
$$\lim_{m\to\infty}\frac{\text{前}m\text{次转移中从}i\to j\text{的次数}}{m}$$

让我们记：$N_i(m)$ 为在前 m 次转移中，进入 i 的次数，$N_{i\to j}(m)$ 为在前 m 次转移中，离开 i 了之后进入 j 的次数. **提问：如何用示性来写呢？**

$$\lim_{m\to\infty}\frac{N_i(m)}{m}\frac{\sum_{k=1}^{N_i(m)}\mathbf{1}\{\text{第}k\text{次进入}i\text{时，离开了之后进入了}j\}}{N_i(m)}\overset{\text{strong law of large number}}{=}\pi_i P_{ij}$$

6. 半马过程不可约非格点，$\mu_{ii}<\infty$ 时. 求解：

$$\lim_{t\to\infty}P\Big(Z(t)=i,S(t)=j|Z(0)=k\Big)=\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}\int_0^\infty \bar{F}_{ij}(y)dy$$



解答. 仍旧取进入状态 i 作为更新点，从而仍然有上面的 $S_{N(t)}$ 的分布，我们有：

$$
\begin{aligned}
&P\Big(Z(t)=i,S(t)=j|Z(0)=k\Big)\\
=&P\Big(Z(t)=i,S(t)=j|Z(0)=k,S_{N(t)}=0\Big)P\Big(S_{N(t)}=0\Big)\\
&+\int_0^t P\Big(Z(t)=i,S(t)=j|Z(0)=k,S_{N(t)}=s\Big)dF_{S_{N(t)}}(s)\\
=&0+\int_0^t P_{ij}P(\tau_{ij}>t-s)dm_D(s)\\
=&P_{ij}\Big(\int_0^t \bar{F}_{ij}(t-s)dm_D(s)\Big)\\
\to&\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}\int_0^\infty \bar{F}_{ij}(y)dy \quad \text{...(直接黎曼可积引理)}
\end{aligned}
$$

□

评论. 至此我们其实可以发现：

$$
\begin{aligned}
P\Big(Z(t)=i,S(t)=j|Z(0)=k\Big)&\to\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}\int_0^\infty \bar{F}_{ij}(y)dy\\
P\Big(Z(t)=i,Y(t)>x,S(t)=j|Z(0)=k\Big)&\to\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}\int_x^\infty \bar{F}_{ij}(y)dy\\
P\Big(Z(t)=i,Y(t)\le x,S(t)=j|Z(0)=k\Big)&\to\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}\int_0^x \bar{F}_{ij}(y)dy
\end{aligned}
$$

---

7. 半马过程不可约非格点，$\mu_{ii}<\infty$ 时. 求解：

$$\lim_{t\to\infty}P\Big(S(t)=j|Z(t)=i\Big)=\frac{P_{ij}}{\mu_i}\int_0^\infty \bar{F}_{ij}(y)dy$$

解答.

$$P\Big(S(t)=j|Z(t)=i\Big)=\frac{P\Big(S(t)=j,Z(t)=i\Big)}{P\Big(Z(t)=i\Big)}\to\frac{\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}\int_0^\infty \bar{F}_{ij}(y)dy}{\frac{\mu_i}{\mu_{ii}}}=\frac{P_{ij}}{\mu_i}\int_0^\infty \bar{F}_{ij}(y)dy$$

□

8. 半马过程不可约非格点，$\mu_{ii}<\infty$ 时. 求解：

$$\lim_{t\to\infty}P\Big(S(t)=j\Big)=\sum_{i\in S}\frac{P_iP_{ij}}{\mu_i}\int_0^\infty \bar{F}_{ij}(y)dy$$

其中 S 是状态空间

解答.

$$P\Big(S(t)=j\Big)=\sum_{i\in S}P\Big(S(t)=j,Z(t)=i\Big)\to\sum_{i\in S}\frac{P_{ij}}{\mu_i}\int_0^\infty\bar{F}_{ij}(y)dy$$

□

1.8 习题

习题 1. 一个商店对某种商品的库存用以下的 (s,S) 订货策略：若在一个时期开始时商店的供应量是 x，则立即订货：

$$\begin{cases}0 & x\geq s\\ S-x & x<s\end{cases}$$

每天的需求以概率 α_j 等于 j，各天的需求是独立的. 而不能立刻满足的需求就会在当天流失. 以 X_n 记载第 n 个时期结束时的存货水平. 论证 $\{X_n,n\geq 1\}$ 是马氏链并计算转移概率.

解答. 为了去计算 $P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n)$，我们先来理解一下这个题目的意思. 首先 i_n 作为昨天结束的时候剩下的存货量，要么 $i_n<s$，要么 $i_n\geq s$.

1. 如果 $i_n<s$. 此时第二天一开始时，存货会立马补充到 S，然后再在 S 的水平下接受需求的冲击，按照题目的意思，如果需求无法被立即满足就会流失，也就是说如果当天的需求为 $\lceil S\rceil$ 及以上，那么这个需求将因为无法被立即满足而流失，由于该需求没有被满足，此时存货水平保留在 S. 而如果当天的需求为 $0,...,\lfloor S\rfloor$, 则这样的需求可以被立即满足，从而存货水平会因此下降.

2. 如果 $i_n\geq s$. 此时第二天一开始时，存货将不会被补充. 继续在 i_n 的水平下接受冲击的到来，按照题目的意思，如果需求无法被立即满足就会被流失，按照先前的分析，对于那些大于等于 $\lceil i_n\rceil$ 的需求，将会因为无法被满足而流失走，从而使得存货水平继续保持在 i_n，而对于那些小于等于 $\lfloor i_n\rfloor$ 的需求，则可以得到满足，从而使得存货水平下降.

按照上述分析，我们可以轻易地写出：

$$P(X_{n+1}=S-j|X_k=i_k,\forall k\leq n)=\alpha_j,\forall j=0,1,...,\lfloor S\rfloor,\quad i_n<s.$$

$$P(X_{n+1}=S|X_k=i_k,\forall k\leq n)=\sum_{j=\lceil S\rceil}^{\infty}\alpha_j\quad i_n<s.$$

$$P(X_{n+1}=i_n-j|X_k=i_k,\forall k\leq n)=\alpha_j,\forall j=0,1,...,\lfloor i_n\rfloor,\quad i_n\geq s.$$

$$P(X_{n+1}=i_n|X_k=i_k,\forall k\leq n)=\sum_{j=\lceil i_n\rceil}^{\infty}\alpha_j\quad i_n\geq s.$$

从而我们发现 $\big[X_{n+1}|X_k=i_k,\forall k=0,...,n\big]$ 的分布与 $i_k,\forall k=0,...,n-1$ 无关，这意味着 $\big[X_{n+1}|X_k=i_k,\forall k=0,...,n\big]$ 与 $\big[X_{n+1}|X_n=i_n\big]$ 是同分布的，从而得到了马尔可夫性. 与此同时我们也得到了 $\{X_n,n\geq 1\}$ 的转移概率. □

习题 2. 对马氏链，来证明：只要 $n_1<n_2<...<n_k<n$，就有

$$P(X_n=j|X_{n_1}=i_1,...,X_{n_k}=i_k)=P(X_n=j|X_{n_k}=i_k)$$

解答. 由于上式对 $n = n_k + 1$ 成立，进而对 $n = n_k + 2$ 成立，归纳可知对 n 也成立. □

习题 3. *若状态数为 n，且从状态 i 可以达到状态 j，证明状态 j 在 n 或更少的步数内可达.*

解答. 由 $i \to j$，则 $\exists m$, 使得：$P_{ij}^m > 0$. 我们希望找到一个 $\tilde{m} \leq n$，使得 $P_{ij}^{\tilde{m}} > 0$.

如果 $m \leq n$，则直接证毕.

如果 $m > n$，则任取一条样本路径 $(i, i_1, ..., i_{m-1}, j)$，有：

$$P_{ij}^m \geq P_{i,i_1} P_{i_1,i_2} ... P_{i_{m-1},j} > 0$$

对于该样本路径：$(i, i_1, ..., i_{m-1}, j)$，总共有 $m + 1 > n$ 个元，从而由抽屉原理必然有两个元是重复的，不妨假设 $i_s = i_t, s < t$. 进而我们可以得到一条更短的样本路径：

$$(i, i_1, ..., i_{s-1}, i_s, i_{t+1}, ..., i_{m-1}, j)$$

此样本路径一共有 $m + 1 - (t - s)$ 个元.

如果 $m+1-(t-s) \leq n$，则 $\tilde{m} = m+1-(t-s)$ 即为所求. 如果 $m+1-(t-s) > n$，继续重复上面的步骤. 这种重复一定会在有限步之后停止，因为每次选择一个 $i_s = i_t$ 时，必然会保证 $t - s \geq 1$，这导致至少在 $m + 1 - n$ 步之后就会得到一个我们想要的 $\tilde{m} \leq n$，使得 $P_{ij}^{\tilde{m}} > 0$. □

习题 4. *证明：*

$$P_{ij}^n = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^k P_{jj}^{n-k}$$

解答. 记 $T_{ij} :=$ 从 i 出发，首次到达 j 的时刻. 则对 $\{T_{ij} = k\}, \forall k = 1, 2, ..., n$ 取条件即可：

$$\begin{aligned}
P_{ij}^n : &= P(X_n = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j | X_0 = i, T_{ij} = k) P(T_{ij} = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j | X_k = j) P(T_{ij} = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P_{jj}^{n-k} f_{ij}^k
\end{aligned}$$

□

习题 5. *对于状态 i, j, k，其中 $k \neq j$，令：*

$$P_{ij/k}^n = P(X_n = j, X_l \neq k, l = 1, 2, ..., n-1 | X_0 = i)$$

(a) 直观解释 $P_{ij/k}^n$

(b) 证明：对于 $i \neq j$ 有 $P_{ij}^n = \sum\limits_{k=0}^{n} P_{ii}^k P_{ij/i}^{n-k}$

解答. (a) 此为：从 i 出发，不经过 k 而在第 n 步后处于 j 的概率.

(b) 记 $T_i = \max\{n : X_n = i\}$，即为：过程在最后一次处于状态 i 的时刻. 则：$\{T_i = k\} = \{X_k = i, X_l \neq i, \forall l = k+1, ..., n\}$

$$
\begin{aligned}
P_{ij}^n &= P(X_n = j|X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_n = j, T_i = k|X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_n = j, X_k = i, X_l \neq i, \forall l = k+1, ..., n|X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_n = j, X_l \neq i, \forall l = k+1, ..., n|X_k = i, X_0 = i)P(X_k = i|X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_{n-k} = j, X_l \neq i, \forall l = k+1-k, ..., n-k|X_0 = i)P(X_k = i|X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P_{ij/i}^{n-k} P_{ii}^k
\end{aligned}
$$

□

习题 6. 对于对称随机游动，证明在二维的情形是常返的，但在三维的情形不是常返的.

解答.

在二维情形下：

由于在二维的情形下，每点都可达，因此只有一个类，是个不可约马氏链，只需要证明状态 0 是常返的即可. 由于 $d(0) = 2$. 来计算：$P_{00}^{2n} = P(\text{粒子在}2n\text{步后回到}0)$.

$$
\begin{aligned}
P_{00}^{2n} &= \sum_{\substack{\{i_1,...,i_n\}\in\{1,2,...,2n\} \\ \{j_1,...,j_n\}\in\{1,2,...,2n\}\backslash\{i_1,...,i_n\}}} P(\substack{\{i_1,...,i_n\}\text{往左或往上} \\ \{j_1,...,j_n\}\text{往右或往下}} \quad \text{维持左右抵消，上下抵消}) \\
&= \binom{2n}{n} P(\substack{\{1,2,...,n\}\text{往左或往上} \\ \{n+1,...,2n\}\text{往右或往下}} \quad \text{维持左右抵消，上下抵消}) \\
&= \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} P(\substack{\{1,2,...,n\}\text{往左或往上，且}k\text{步往左，} \quad n-k\text{步往上} \\ \{n+1,...,2n\}\text{往右或往下，且}k\text{步往右，} \quad n-k\text{步往下}}) \\
&= \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} \frac{1}{4^{2n}} \\
&= \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \frac{1}{4^{2n}} \\
&= \binom{2n}{n}\binom{2n}{n} \frac{1}{4^{2n}} \\
&\sim \frac{1}{2\pi n}.
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{2n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi n} = \infty.
$$

0 状态常返，可见二维情况下点点常返.

在三维情形下：

从 0 出发的每一步，有 6 个移动方向，分别为：$\{x^+, x^-, y^+, y^-, z^+, z^-\}$. 此时仍有 $d(0) = 2$，我们来显示地写出 P_{00}^{2n} 并寻找其控制.

$$\begin{aligned} P_{00}^{2n} &= \sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_n\}\in\{1,2,\dots,2n\} \\ \{j_1,\dots,j_n\}\in\{1,2,\dots,2n\}\setminus\{i_1,\dots,i_n\}}} P\left(\begin{matrix}\{i_1,\dots,i_n\}往x^+,y^+,z^+走 \\ \{j_1,\dots,j_n\}往x^-,y^-,z^-走\end{matrix} \quad 维持正负号全都抵消\right) \\ &= \binom{2n}{n} \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \big(\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}\big)^2 \frac{1}{6^{2n}} \end{aligned}$$

为了寻找 $\sum\limits_{n_1+n_2+n_3=n} \big(\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}\big)^2$ 的一个控制，我们考虑如下的优化问题：

$$\max : \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$$
$$\text{subject to: } n_1 + n_2 + n_3 = n$$

这等价于如下的优化问题：

$$\min : \sum_{i=1}^{n_1} \log i + \sum_{j=1}^{n_2} \log j + \sum_{k=1}^{n_3} \log k$$
$$\text{subject to: } n_1 + n_2 + n_3 = n$$

注意到 $\forall n_1, n_2, n_3$, 有：

$$\sum_{i=1}^{n_1} \log i + \sum_{j=1}^{n_2} \log j + \sum_{k=1}^{n_3} \log k \le \sum_{i=1}^{n_1}(i-1) + \sum_{j=1}^{n_2}(j-1) + \sum_{k=1}^{n_3}(k-1)$$

当 $n = 3m$ 时, 右式的最小值在 $n_1 = n_2 = n_3 = m$ 时取得, 这意味着 $\sum\limits_{i=1}^{n_1} \log i + \sum\limits_{j=1}^{n_2} \log j + \sum\limits_{k=1}^{n_3} \log k$ 的最小值只会比 $n_1 = n_2 = n_3 = m$ 时所取到的值要小. 从而在 $n = 3m$ 时，我们有：

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} \le \frac{(3m)!}{(m!)^3} \sim \mathcal{O}\big(\frac{\sqrt{2\pi 3m}(\frac{3m}{e})^{3m}}{(\sqrt{2\pi m})^3(\frac{m}{e})^{3m}}\big) = \mathcal{O}(\frac{1}{m}3^{3m}) = \mathcal{O}(\frac{1}{n}3^n)$$

而在 $n = 3m+1$ 或者 $n = 3m+2$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n_1} \log i + \sum\limits_{j=1}^{n_2} \log j + \sum\limits_{k=1}^{n_3} \log k$ 的最小值仍然会比在 $n_1 = n_2 = m, n_3 = m+1$ 或者 $n_1 = m, n_2 = n_3 = m+1$ 时取得的值还要小，从而仍然有：

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} \le \mathcal{O}(\frac{1}{n}3^n)$$

因此:

$$\begin{aligned}
P_{00}^{2n} &= \binom{2n}{n}\sum_{n_1+n_2+n_3=n}(\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!})^2\frac{1}{6^{2n}} \\
&= \binom{2n}{n}\sum_{n_1+n_2+n_3=n}(\frac{1}{3^n}\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!})^2\frac{1}{4^n} \\
&\leq \binom{2n}{n}\Big(\sum_{n_1+n_2+n_3=n}\frac{1}{3^n}\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}\Big)\frac{1}{3^n}\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}\frac{1}{4^n} \\
&= \binom{2n}{n}\cdot 1\cdot\frac{1}{3^n}\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}\frac{1}{4^n} \\
&\leq \mathcal{O}(\binom{2n}{n}\cdot\frac{1}{3^n}\frac{1}{n}3^n\frac{1}{4^n}) \\
&= \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\cdot\frac{1}{n}) \\
&= \mathcal{O}(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}P_{00}^{2n}\leq\mathcal{O}(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})=\infty.$$

从而状态 0 是滑过的，因此三维情形下点点滑过. **醉汉游走点点常返，levy 飞行点点滑过** □

习题 7. 令 $X_1,...,X_n,...$ 是独立的随机变量,且满足 $P(X_n=j)=\alpha_j(j\geq 0)$. 若 $X_n>\max\{X_1,...,X_{n-1}\}$，其中 $X_0=-\infty$，则我们称一个纪录发生在时刻 n，而若一个纪录发生在时刻 n，则称 X_n 为纪录值. 令 R_i 为第 i 个纪录值.

(a) 论证 $\{R_n,n\geq 1\}$ 是个马尔科夫链，并计算转移概率.

(b) 以 T_i 记第 i 个纪录和第 $i+1$ 个纪录之间的时间间隔. 请问 $\{T_n,n\geq 1\}$ 是马氏链吗？$\{(R_n,T_n),n\geq 1\}$ 是马氏链吗？在马氏链的情形下计算转移概率.

(c) 令 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}T_i,n\geq 1$. 论证当 X_i 都是连续型随机变量的时候，$\{S_n,n\geq 1\}$ 是马氏链，并计算其转移概率.

解答.

(a). 记第 n 个纪录值发生的时刻为 S_n，当给定 $R_k=i_k,\forall k=1,...,n$ 时，来计算 R_n 的条件分布. 此时 R_n 的取值范围为 $\{j:j>i_n\}$，因此其条件分布为:

$$\begin{aligned}
P(R_{n+1}=j|R_k=i_k,\forall k=1,...,n) &= \sum_{k=1}^{\infty}P(X_{S_n+k}=j,X_{S_n+\nu}\leq i_n,\forall 1\leq\nu<k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}P(X_1=j)P(X_1\leq i_n)^k \\
&= \frac{\alpha_j}{\sum\limits_{\nu=i_n+1}^{\infty}\alpha_\nu}
\end{aligned}$$

此条件分布与 $R_k=i_k,\forall k=1,...,n-1$ 无关，因此 $[R_{n+1}|R_k=i_k,\forall k=1,...,n]$ 与 $[R_{n+1}|R_n=i_n]$ 同分布，这蕴含着马氏性成立，与此同时我们也得到了转移概率.

(b) 下面来严谨地说明为什么 $\{T_i,i\geq 1\}$ 不是一个马氏链. 为了说明马氏性不成立，我们只需要证明如下两个概率不相等即可：

$$P(T_3=1|T_2=1,T_1=1)=\frac{P(X_1<X_2<X_3<X_4)}{P(X_1<X_2<X_3)}$$
$$P(T_3=1|T_2=1,T_1=2)=\frac{P(X_2\leq X_1<X_3<X_4<X_5)}{P(X_2\leq X_1<X_3<X_4)}$$

由于 $\{X_n\}$ 本身的独立性，对于上式的第二式我们可以让 X_1 和 X_2 调换位置，从而我们只需要证明：

$$\frac{P(X_1<X_2<X_3<X_4)}{P(X_1<X_2<X_3)}\neq\frac{P(X_1\leq X_2<X_3<X_4<X_5)}{P(X_1\leq X_2<X_3<X_4)}$$

事实上，我们可以证明出：

$$\frac{P(X_1<X_2<X_3<X_4)}{P(X_1<X_2<X_3)}>\frac{P(X_1\leq X_2<X_3<X_4<X_5)}{P(X_1\leq X_2<X_3<X_4)}$$

为什么这会是一个小于号. 在证明之前我们可以借助糖水不等式来直观地理解一下，由于事件取交的时候会变小，因此右边相当于是把左边的糖水中的糖分去掉得到的结果. 下面我们来严谨地证明这个结果：

$$\frac{P(X_1<X_2<X_3<X_4)}{P(X_1<X_2<X_3)}>\frac{P(X_1\leq X_2<X_3<X_4<X_5)}{P(X_1\leq X_2<X_3<X_4)}$$
$$\Leftrightarrow P(X_1<X_2<X_3<X_4)P(X_1\leq X_2<X_3<X_4)>P(X_1\leq X_2<X_3<X_4<X_5)P(X_1<X_2<X_3)$$
$$\Leftrightarrow P(Z_1<Z_2<Z_3<X_4)P(Z_1\leq Z_2<Z_3<Y_4)>P(Z_1\leq Z_2<Z_3<X_4<X_5)P(Z_1<Z_2<Z_3)$$

$\{Y_n\}\{Z_n\}$是$\{X_n\}$的独立 copy.

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}\Bigg[\mathbf{1}\{Z_1<Z_2<Z_3<X_4\}\Bigg]\mathbb{E}\Bigg[\mathbf{1}\{Z_1\leq Z_2<Z_3<Y_4\}\Bigg]$$
$$>\mathbb{E}\Bigg[\mathbf{1}\{Z_1\leq Z_2<Z_3<X_4<X_5\}\Bigg]\mathbb{E}\Bigg[\mathbf{1}\{Z_1<Z_2<Z_3\}\Bigg]...\quad \text{期望化}$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{E}\Bigg\{\mathbb{E}\Bigg[\mathbf{1}\{Z_1<Z_2<Z_3<X_4\}\Bigg|Z_1,Z_2,Z_3\Bigg]\Bigg\}\mathbb{E}\Bigg\{\mathbb{E}\Bigg[\mathbf{1}\{Z_1\leq Z_2<Z_3<Y_4\}\Bigg|Z_1,Z_2,Z_3\Bigg]\Bigg\}$$
$$>\mathbb{E}\Bigg\{\mathbb{E}\Bigg[\mathbf{1}\{Z_1\leq Z_2<Z_3<X_4<X_5\}\Bigg|Z_1,Z_2,Z_3\Bigg]\Bigg\}\mathbb{E}\Bigg\{\mathbb{E}\Bigg[\mathbf{1}\{Z_1<Z_2<Z_3\}\Bigg|Z_1,Z_2,Z_3\Bigg]\Bigg\}...\quad \text{取条件}$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{E}\Bigg\{\mathbb{E}\Bigg[\mathbf{1}\{Z_1<Z_2<Z_3<X_4\}\Bigg]\mathbb{E}\Bigg[\mathbf{1}\{Z_1\leq Z_2<Z_3<Y_4\}\Bigg]\Bigg|Z_1,Z_2,Z_3\Bigg\}$$
$$>\mathbb{E}\Bigg\{\mathbb{E}\Bigg[\mathbf{1}\{Z_1\leq Z_2<Z_3<X_4<X_5\}\Bigg]\mathbb{E}\Bigg[\mathbf{1}\{Z_1<Z_2<Z_3\}\Bigg]\Bigg|Z_1,Z_2,Z_3\Bigg\}...\quad \text{条件独立性}$$

也就是说，我们只需要证明，当 $Z_1=z_1,Z_2=z_2,Z_3=z_3$ 的时候，有：

$$\mathbb{P}\Bigg(z_3<X_4\Bigg)\mathbb{P}\Bigg(z_3<Y_4\Bigg)>\mathbb{P}\Bigg(z_3<X_4<X_5\Bigg)$$

此时按照定义写开来，就会发现只要证明：

$$\left(\sum_{x_4>z_3}^{\infty}\alpha_{x_4}\right)\left(\sum_{x_5>z_3}^{\infty}\alpha_{x_5}\right)>\sum_{x_5>x_4>z_3}\alpha_{x_4}\alpha_{x_5}$$

在题目中 $\alpha_j>0,\forall j$ 的假设下，上面的严格大于号是成立的.

(以下部分是一个写到一半夭折了的证明) 倘若我们取条件的操作只进行到 Z_1 和 Z_2，则目标会变成以下这个式子：此时不妨设 $d=\lceil z_2\rceil$，将左右两边的概率写开，我们可以得到：

$$\mathbb{P}\Big(z_1<z_2<X_3<X_4\Big)\mathbb{P}\Big(z_1\le z_2<Y_3<Y_4\Big)>\mathbb{P}\Big(z_1\le z_2<X_3<X_4<X_5\Big)\mathbb{P}\Big(z_1<z_2<Y_3\Big)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{x_4>x_3\ge d}\alpha_{x_4}\alpha_{x_3}\sum_{y_4>y_3\ge d}\alpha_{y_4}\alpha_{y_3}>\sum_{x_5>x_4>x_3\ge d}\alpha_{x_5}\alpha_{x_4}\alpha_{x_3}\sum_{y_3\ge d}\alpha_{y_3}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{x_4>x_3\ge d}\alpha_{x_4}\alpha_{x_3}\sum_{x_4>x_3\ge d}\alpha_{x_4}\alpha_{x_3}>\sum_{x_5>x_4>x_3\ge d}\alpha_{x_5}\alpha_{x_4}\alpha_{x_3}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{x_3\ge d}\left(\sum_{x_4>x_3}\alpha_{x_4}\right)\frac{\alpha_{x_3}}{\sum\limits_{x_3\ge d}\alpha_{x_3}}\cdot\sum_{x_3\ge d}\left(\sum_{x_4>x_3}\alpha_{x_4}\right)\frac{\alpha_{x_3}}{\sum\limits_{x_3\ge d}\alpha_{x_3}}>\sum_{x_3\ge d}\left(\sum_{x_5>x_4>x_3}\alpha_{x_5}\alpha_{x_4}\right)\frac{\alpha_{x_3}}{\sum\limits_{x_3\ge d}\alpha_{x_3}}\quad ...(*)$$

假如设随机变量 $M\sim\begin{pmatrix} d & d+1 & \dots \\ \frac{\alpha_d}{\sum\limits_{x_3\ge d}\alpha_{x_3}} & \frac{\alpha_{d+1}}{\sum\limits_{x_3\ge d}\alpha_{x_3}} & \dots \end{pmatrix}$，函数 $f(x):=\sum\limits_{n>x}^{\infty}\alpha_n, g(x):=\sum\limits_{m>n>x}^{\infty}\alpha_n\alpha_m$，则 $(*)$ 式其实就是：

$$\Big(\mathbb{E}\big[f(M)\big]\Big)^2\ge\mathbb{E}\big[g(M)\big]$$

但这个式子目前没想到怎么放缩...

下面再来证明 $\{(R_n,T_n),n\ge 1\}$ 是个马氏链：

$$\begin{aligned}&P(R_n=r_n,T_n=t_n\big|R_k=r_k,T_k=t_k,\forall 1\le k\le n-1)\\=&P(R_n=r_n|R_{n-1}=r_{n-1})\mathbf{1}\{r_n>r_{n-1}\}P(T_n=t_n|R_k=r_k,T_k=t_k,\forall 1\le k\le n-1)\\=&\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{r_n}\Big[P(X\le r_{n-1}\Big]^{k-1}\cdot\mathbf{1}\{r_n>r_{n-1}\}\cdot\Big[P(X\le r_n)\Big]^{t_n-1}P(X>r_n)\\=&\frac{\alpha_{r_n}}{\sum\limits_{k>r_{n-1}}\alpha_k}\cdot\mathbf{1}\{r_n>r_{n-1}\}\cdot\Big[\sum_{k\le r_n}\alpha_k\Big]^{t_n-1}\sum_{k>r_n}\alpha_k\end{aligned}$$

可见该条件分布只和 R_{n-1},T_{n-1} 有关，因此马氏性成立，与此同时也得到了转移概率.

(c) 取示性函数 $I_n:=\mathbf{1}\{X_n\text{是纪录值}\}$，则 I_n 独立同分布，且 $I_n\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$，从而我

们有:

$$
\begin{aligned}
&P(S_{n+1}=s_{n+1}|S_n=s_n,...,S_1=s_1)\\
=&P(I_{S_{n+1}}=1,I_j=0,\forall S_n+1\le j\le S_{n+1}-1\big|I_{S_{k+1}}=1,I_{j_k}=0,\forall S_k+1\le j_k\le S_{k+1}-1,\forall 1\le k\le n)\\
=&P(I_{S_{n+1}}=1,I_j=0,\forall S_n+1\le j\le S_{n+1}-1)\\
=&P(I_{S_n+1}=0)P(I_{S_n+2}=0)...P(I_{S_{n+1}-1}=0)P(I_{S_{n+1}}=1)\\
=&(1-\frac{1}{s_n+1})(1-\frac{1}{s_n+2})...(1-\frac{1}{s_{n+1}-1})\frac{1}{s_{n+1}}\\
=&\frac{s_n}{(s_{n+1}-1)s_{n+1}}
\end{aligned}
$$

□

习题 8. 对马氏链 $\{X_n,n\ge 0\}$，证明:

$$P(X_k=i_k|X_j=i_j,\forall j\ne k)=P(X_k=i_k|X_{k-1}=i_{k-1},X_{k+1}=i_{k+1})$$

解答.

$$
\begin{aligned}
&P(X_k=i_k|X_j=i_j,j\ne k)\\
=&\frac{P(X_k=i_k,X_j=i_j,j\ne k)}{P(X_j=i_j,j\ne k)}\\
=&\frac{P(X_k=i_k,X_j=i_j,j>k|X_j=i_j,j\le k-1)P(X_j=i_j,j\le k-1)}{P(X_j=i_j,j>k|X_j=i_j,j\le k-1)P(X_j=i_j,j\le k-1)}\\
=&\frac{P(X_k=i_k,X_j=i_j,j>k|X_{k-1}=i_{k-1})}{P(X_j=i_j,j>k|X_{k-1}=i_{k-1})}\\
=&\frac{P(X_{k-1}=i_{k-1},X_k=i_k,X_j=i_j,\forall j>k)}{P(X_{k-1}=i_{k-1},X_j=i_j,\forall j>k)}\\
=&\frac{P(X_j=i_j,j>k+1|X_{k-1}=i_{k-1},X_k=i_k,X_{k+1}=i_{k+1})P(X_{k-1}=i_{k-1},X_k=i_k,X_{k+1}=i_{k+1})}{P(X_j=i_j,j>k+1|X_{k-1}=i_{k-1},X_{k+1}=i_{k+1})P(X_{k-1}=i_{k-1},X_{k+1}=i_{k+1})}\\
=&\frac{P(X_j=i_j,j>k+1|X_{k+1}=i_{k+1})P(X_{k-1}=i_{k-1},X_k=i_k,X_{k+1}=i_{k+1})}{P(X_j=i_j,j>k+1|X_{k+1}=i_{k+1})P(X_{k-1}=i_{k-1},X_{k+1}=i_{k+1})}\\
=&\frac{P(X_{k-1}=i_{k-1},X_k=i_k,X_{k+1}=i_{k+1})}{P(X_{k-1}=i_{k-1},X_{k+1}=i_{k+1})}\\
=&P(X_k=i_k|X_{k-1}=i_{k-1},X_{k+1}=i_{k+1})
\end{aligned}
$$

□

习题 9. 若 $f_{ii}<1,f_{jj}<1$，证明:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_{ij}^n<\infty$

(b) $f_{ij}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}P_{ij}^n}{1+\sum_{n=1}^{\infty}P_{jj}^n}$

解答.

(a) 由于 $f_{jj}<1$，因此可以得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_{jj}^n<\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^k P_{jj}^{n-k}=\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^k\sum_{n=k}^{\infty} P_{jj}^{n-k}=f_{ij}(1+\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^n)<1+\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^n<\infty$$

(b) 由 (a) 立得. □

习题 10. 一只蜘蛛在地点 *1* 和地点 *2* 之间抓一只蚊子，蜘蛛从地点 *1* 出发，按转移矩阵为 $\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.3 & 0.7\end{bmatrix}$ 的 *Markov* 链进行移动，并未察觉蜘蛛的蚊子从地点 *2* 出发，按转移概率为 $\begin{bmatrix}0.4 & 0.6\\ 0.6 & 0.4\end{bmatrix}$ 的 *Markov* 链移动，只要他们在同一个地点相遇，那么蜘蛛就会抓住蚊子，从而捕猎结束.

(a) 设计一个新的马尔科夫链，求解这个马尔科夫链的转移矩阵.

(b) 求在时刻 n 时，蜘蛛和蚊子两者都在他们的初始地点的概率.

(c) 求解捕猎的平均持续时间.

解答. 为了更好地解决这个问题，让我们先来明确一些记号 (解答应用概率的问题，记号选得好，相当于题目已经做完了一半)。

记：A_n 为时刻 n 蜘蛛所在的地点，B_n 为时刻 n 蚊子所在的地点，则按照题意，我们有：$A_0=1, B_0=2$. 在此基础上，我们定义一个新的随机变量 C_n 如下，该随机变量只会取三个值：$1,2,3$，用来指定这个新马尔科夫链的状态：

$$C_n=\mathbf{1}\{A_n=B_n\}+2\cdot\mathbf{1}\{A_n=1,B_n=2\}+3\cdot\mathbf{1}\{A_n=2,B_n=1\}.$$

$C_n=1$ 的意思是，蜘蛛和蚊子同处一个地方，这意味着蜘蛛将抓到蚊子，从而捕猎结束.$C_n=2$ 表示蚊子和蜘蛛分处不同地点，$C_n=3$ 也是表示蚊子和蜘蛛分处不同地点. 并且我们注意到这个随机变量 C_n 有这样一个特征：

$$\{C_n=2\}=\{C_n=2, C_k\neq 1, \forall k=1,...,n-1\}$$
$$\{C_n=3\}=\{C_n=3, C_k\neq 1, \forall k=1,...,n-1\}$$

(a) 先来求解这个 C_n 的概率转移矩阵：

$$P(C_n=1|C_{n-1}=1)=1$$
$$P(C_n=2|C_{n-1}=1)=0$$
$$P(C_n=3|C_{n-1}=1)=0$$
$$P(C_n=1|C_{n-1}=2)=0.3\times 0.4+0.7\times 0.6=0.54$$
$$P(C_n=2|C_{n-1}=2)=0.7\times 0.4=0.28$$
$$P(C_n=3|C_{n-1}=2)=0.3\times 0.6=0.18$$
$$P(C_n=1|C_{n-1}=3)=0.3\times 0.4+0.7\times 0.6=0.54$$
$$P(C_n=2|C_{n-1}=3)=0.3\times 0.6=0.18$$
$$P(C_n=3|C_{n-1}=3)=0.7\times 0.4=0.28$$

所以可以得到转移矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.54 & 0.28 & 0.18 \\ 0.54 & 0.18 & 0.28 \end{bmatrix}$$

(b) 题目中所要求解的概率为: $P(A_n = 1, B_n = 2)$, 让我们来求解一下.

$$\begin{aligned}
&P(A_n = 1, B_n = 2) \\
=&P(C_n = 2) \\
=&P(C_n = 2, \forall C_k \neq 1, \forall k = 1, ..., n-1) \\
=&P(C_n = 2, C_{n-1} = 2, \forall C_k \neq 1, \forall k = 1, ..., n-2) \\
+&P(C_n = 2, C_{n-1} = 3, \forall C_k \neq 1, \forall k = 1, ..., n-2) \\
=&P(C_n = 2 | C_{n-1} = 2) P(C_{n-1} = 2, \forall C_k \neq 1, \forall k = 1, ..., n-2) \\
+&P(C_n = 2 | C_{n-1} = 3) P(C_{n-1} = 3, \forall C_k \neq 1, \forall k = 1, ..., n-2) \\
=&0.28 \cdot P(C_{n-1} = 2) + 0.18 \cdot P(C_{n-1} = 3) \\
\Rightarrow&P(C_n = 2) = 0.28 \cdot P(C_{n-1} = 2) + 0.18 \cdot P(C_{n-1} = 3) ...(*.1)
\end{aligned}$$

同样的技巧, 我们也可以得到:

$$P(C_n = 3) = 0.18 \cdot P(C_{n-1} = 2) + 0.28 \cdot P(C_{n-1} = 3) ...(*.2)$$

将 $(*.1)$ 和 $(*.2)$ 相加, 我们会得到:

$$1 - P(C_n = 1) = 0.46(1 - P(C_n = 1))$$

递推并且利用 $P(C_0 \neq 1) = 1$ 可以得到: $P(C_n = 2) + P(C_n = 3) = P(C_n \neq 1) = (0.46)^n, \forall n \geq 0$.

代入 $(*.1)$ 式可以得到:

$P(C_n = 2) = 0.28 \cdot P(C_{n-1} = 2) + 0.18 \cdot (0.46)^{n-1} - 0.18 \cdot P(C_{n-1} = 2) = 0.1 \cdot P(C_{n-1} = 2) + 0.18 \cdot (0.46)^{n-1}$

利用高中知识就可以得到:

$$P(C_n = 2) = \left((\frac{1}{10})^n + (\frac{23}{50})^n \right) \cdot \frac{1}{2}$$

其实这个马尔科夫链 $C_n, n \geq 0$ 的所有时刻的分布都可以求出来了:

$$\begin{aligned}
P(C_n = 1) &= 1 - (\frac{23}{50})^n \\
P(C_n = 2) &= \left((\frac{1}{10})^n + (\frac{23}{50})^n \right) \cdot \frac{1}{2} \\
P(C_n = 3) &= \left((\frac{23}{50})^n - (\frac{1}{10})^n \right) \cdot \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(c) 下面来求解捕猎的平均持续时间. 一般题目里面遇到平均, 就是指期望. 我们要把捕猎的持续时间这个随机变量显式地设出来, 然后求期望就可以了.

记：$N=\min\{n:C_n=1\}$，这个 N 就是蜘蛛抓到蚊子所需要的时间，我们会发现这其实是一个首达时，同时也是一个停时（首达时全都是停时）. 我们会注意到这个 N 其实是一个几何型分布，表示的是以成功概率为 $P(C_n=1|C_{n-1}\neq 1)=0.54$ 进行试验，求首次成功所需要进行的试验次数的期望.$N\sim \text{Geo}^*(0.54)$（在这里带个 * 是表示这个几何分布是从 1 开始取值的，没带 * 是表示从 0 开始取值的），从而我们有 $\mathbb{E}[N]=\frac{1}{0.54}=\frac{50}{27}$.

评论. 化简为繁，这个 $\mathbb{E}[N]$ 是不是可以通过构造鞅或者用 Wald 等式来做呢?

□

习题 11. 考虑在整数点上的一个简单随机徘徊，在每一步质点以概率 p 向正方向移动一步，以概率 p 向负方向移动一步，且以概率 $q=1-2p(0<p<1/2)$ 在原地不动. 假设在原点设置一个吸收壁，即 $P_{00}=1$，且在 N 设置一个反射壁，即 $P_{N,N-1}=1$，而质点由 $n(0<n<N)$ 出发. 证明质点被吸收的概率是 1，并求吸收所需的平均步数.

解答. 记 $p_n=P(\text{从}n\text{出发，最终被0吸收})$，则我们有 $p_0=1,p_N=p_{N-1}$. 由全概率公式，我们有：

$$\begin{aligned}
&p_n=p\cdot p_{n+1}+p\cdot p_{n-1}+(1-2p)\cdot p_n\\
\Rightarrow &p_{n+1}-p_n=p_n-p_{n-1}\\
\Rightarrow &p_N-p_{N-1}=p_1-p_0=0\Rightarrow p_1=1\\
\Rightarrow &p_n-p_{n-1}=p_1-p_0=0\Rightarrow p_n=p_{n-1}=...=p_1=p_0=1
\end{aligned}$$

因此无论从哪个点出发，最终都会被 0 吸收.

评论. 当然我们也可以这样去论证：因为该马氏链总共就两个类 $\{1,2,...,N\}$，$\{0\}$，其中第一个类不可能是一个常返类，因为如果是一个常返类，那么一定是一个闭类，但是我们知道第一个类不是闭类，因为第一个类可以转移到 $\{0\}$ 当中，因此第一个类是非常返类，点点滑过. 从而在足够长的演化时间过后，该质点将不会停留在第一个类里，故必然被 $\{0\}$ 吸收.

记 $\{X_k,k\geq 0\}$, 为第 k 个时刻质点所处的位置，则 $X_0=n$. 记 $T_n:=\min\{k:X_k=0,X_0=$

$n\}$，则 $T_0 = 0, T_N = T_{N-1} + 1$. 记 $M_n := \mathbb{E}[T_n]$，则由全概率公式，我们有：

$$
\begin{aligned}
&M_n = p\cdot(M_{n+1}+1) + p\cdot(M_{n-1}+1) + q\cdot(M_n+1)\\
\Rightarrow &M_{n+1} - M_n = M_n - M_{n-1} - \frac{1}{p} = M_1 - M_0 - n\cdot\frac{1}{p}\\
\Rightarrow &1 = M_N - M_{N-1} = M_1 - M_0 - \frac{N-1}{p} \Rightarrow M_1 = 1 + \frac{N-1}{p}\\
&\Rightarrow \left.\begin{cases} M_n - M_{n-1} & = M_1 - \dfrac{n-1}{p}\\ ... & \\ M_2 - M_1 & = M_1 - \dfrac{1}{p}\end{cases}\right\} \Rightarrow M_n - M_1 = (n-1)M_1 - \frac{1}{p}\big[1+2+...+(n-1)\big]\\
&\Rightarrow M_n = n(1+\frac{N-1}{p}) - \frac{n(n-1)}{2p}
\end{aligned}
$$

由此我们可以得到被吸收所需要的平均步数. □

习题 12. 给定分支过程 $\{X_n, n \geq 0\}$，

（a）论证 X_n 或趋于 *0*，或趋于无穷大.

（b）证明：

$$
Var(X_n|X_0=1) = \begin{cases} \sigma^2\mu^{n-1}\frac{\mu^n-1}{\mu-1} & \mu \neq 1\\ n\sigma^2 & \mu = 1\end{cases}
$$

其中。μ 和 σ^2 是一个个体具有的后代数的均值和方差.

解答. (a) 对于该马氏链，我们以 P_{10} 是否为 0 作为讨论的起点.

如果 $P_{10} \neq 0$，那么该马氏链只能有两类 $\{1,2,3,...,\}$ 和 $\{0\}$，并且此时第一个类可以进入第二个类，这将导致第一个类不是闭类，必然点点滑过，对于任何一个状态 n，在有限多次访问之后不会再被访问，而在足够长的演化之后，该粒子又必须处于某个状态之中，因此此时该粒子要么趋近于 ∞，要么被 $\{0\}$ 吸收.

如果 $P_{10} = 0$，那么此时**该马氏链无法同如第一种情况一样划分为两个类**. 因为此时 $\forall j > i, P_{ji} = 0$，这就导致了该马氏链其实有无穷多个类 $\{1\},\{2\},...,$，而每个类都不是闭类，故而必然不是常返类，这将导致每个类都是暂态的，因此该马氏链在此时必然会滑过每个状态从而滑向 ∞.

评论. 我们需要熟练地记住两个等价的事实：

常返类一定是闭类

不是闭类就一定不是常返类，从而只能是暂态类

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_n|X_0=1) &= \mathbb{E}\Big[\mathrm{Var}(X_n)|X_{n-1},X_0=1\Big]+\mathrm{Var}\Big[\mathbb{E}[X_n|X_{n-1},X_0=1]\Big]\\
&= \sigma^2\mathbb{E}\Big[X_{n-1}|X_0=1\Big]+\mathrm{Var}\Big[\mu X_{n-1}|X_0=1\Big]\\
&= \sigma^2\mu^{n-1}+\mu^2\mathrm{Var}(X_{n-1}|X_0=1)\\
&= \sigma^2\mu^{n-1}+\sigma^2\mu^n+\mu^4\mathrm{Var}(X_{n-2}|X_0=1)\\
&= \ldots\\
&= \sigma^2(\mu^{n-1}+\mu^n+\ldots+\mu^{2n-2})\\
&= \sigma^2\mu^{n-1}(1+\mu+\ldots+\mu^{n-1})\\
&= \begin{cases}\sigma^2\mu^{n-1}\frac{\mu^n-1}{\mu-1} & \mu\neq 1\\ n\sigma^2 & \mu=1\end{cases}
\end{aligned}
$$

□

习题 13. 对于遍历的半马过程:

(a) 计算过程 i 到 j 的转移的速率.

(b) 证明:

$$\Sigma_i P_{ij}/\mu_{ii}=\frac{1}{\mu_{jj}}$$

(c) 证明过程处在状态 i 且前往状态 j 的时间比例是 $P_{ij}\eta_{ij}/\mu_{ii}$，其中 $\eta_{ij}=\int_0^\infty \bar{F}_{ij}(t)dt$.

(d) 证明: 状态是 i 且在时间 x 内的下一个状态是 j 的时间比例是:

$$\frac{P_{ij}\eta_{ij}}{\mu_{ii}}F^e_{i,j}(x)$$

其中 $F^e_{i,j}$ 是 F_{ij} 的平稳分布.

解答. (a) 记: $N_i(m)$ 为在前 m 次转移中，进入 i 的次数，$N_{i\to j}(m)$ 为在前 m 次转移中，离开 i 了之后进入 j 的次数.

$$\lim_{m\to\infty}\frac{N_i(m)}{m}\frac{\sum\limits_{k=1}^{N_i(m)}\mathbf{1}\{\text{第}k\text{次进入}i\text{时，离开了之后进入了}j\}}{N_i(m)}\overset{\text{strong law of large number}}{=}\pi_i P_{ij}$$

(b) 记: $N_j(t)$ 为时刻 t 及其之前进入状态 j 的次数，进入状态 j 则称一次更新发生，因此相邻更新发生的间隔为: μ_{jj}. 则由更新定理，我们有:

$$\frac{N_j(t)}{t}\to\frac{1}{\mu_{jj}}$$

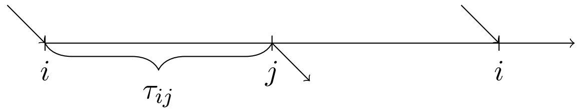
另一方面，$\forall i$，我们也可以选取进入状态 i 作为更新点，并且用更新过程 $N_i(t)$ 来表示 $N_j(t)$.

$$\frac{N_j(t)}{t}=\sum_{i\in S}\frac{N_{i\to j}(t)}{t}=\sum_{i\in S}\frac{N_i(t)}{t}\frac{N_{i\to j}(t)}{N_i(t)}\to\sum_{i\in S}\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}$$

从而: $\frac{1}{\mu_{jj}}=\sum\limits_{i\in S}\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}$

（c）这个时间比例其实就是在求解：

$$\lim_{t\to\infty} P\Big(Z(t)=i, S(t)=j|Z(0)=k\Big)$$



仍旧取进入状态 i 作为更新点，从而仍然有上面的 $S_{N(t)}$ 的分布，我们有：

$$\begin{aligned}
&P\Big(Z(t)=i, S(t)=j|Z(0)=k\Big)\\
=&P\Big(Z(t)=i, S(t)=j|Z(0)=k, S_{N(t)}=0\Big)P\Big(S_{N(t)}=0\Big)\\
&+\int_0^t P\Big(Z(t)=i, S(t)=j|Z(0)=k, S_{N(t)}=s\Big)dF_{S_{N(t)}}(s)\\
=&0+\int_0^t P_{ij}P(\tau_{ij}>t-s)dm_D(s)\\
=&P_{ij}\Big(\int_0^t \bar{F}_{ij}(t-s)dm_D(s)\Big)\\
\to&\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}\int_0^\infty \bar{F}_{ij}(y)dy \quad \text{...(直接黎曼可积引理)}
\end{aligned}$$

（d）这个时间比例其实是在求解：

$$\lim_{t\to\infty} P\Big(Z(t)=i, S(t)=j, Y(t)\le x|Z(0)=k\Big)$$

根据课本上的结论以及（c）中的结论，我们有：

$$\lim_{t\to\infty} P\Big(Z(t)=i, Y(t)>x, S(t)=j|Z(0)=k\Big)=\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}\int_x^\infty \bar{F}_{ij}(y)dy$$

$$\lim_{t\to\infty} P\Big(Z(t)=i, S(t)=j|Z(0)=k\Big)=\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}\int_0^\infty \bar{F}_{ij}(y)dy$$

上下两式做差即可得到：

$$\lim_{t\to\infty} P\Big(Z(t)=i, S(t)=j, Y(t)\le x|Z(0)=k\Big)=\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}\int_0^x \bar{F}_{ij}(y)dy=\frac{P_{ij}\eta_{ij}}{\mu_{ii}}\frac{\int_0^x \bar{F}_{ij}(y)dy}{\eta_{ij}}:=\frac{P_{ij}\eta_{ij}}{\mu_{ij}}F^e_{i,j}(x)$$

评论. 一个非负随机变量的分布函数 F 的平稳分布定义为：

$$F_e(x):=\frac{\int_0^x \bar{F}(y)dy}{\int_0^\infty \bar{F}(y)dy}$$

□

习题 14. 对一个遍历的半马过程，推导在 $t\to\infty$ 时，对给定的 $Z(t)=i$，在时间 t 以后下一个访问的状态时 j 的极限条件概率.

解答. 本题其实是在求解：$\lim\limits_{t\to\infty} P\Big(S(t)=j|Z(t)=i\Big)$

$$P\Big(S(t)=j|Z(t)=i\Big)=\frac{P\Big(S(t)=j,Z(t)=i\Big)}{P\Big(Z(t)=i\Big)}\to\frac{\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}\int_0^\infty \bar{F}_{ij}(y)dy}{\frac{\mu_i}{\mu_{ii}}}=\frac{P_{ij}}{\mu_i}\int_0^\infty \bar{F}_{ij}(y)dy$$

□

习题 15. 一个出租车，交替行驶在三个地点之间，当它到达地点 *1* 时，它下一次等可能地驶向 *2* 或 *3*. 当它到达地点 *2* 时，它下一次以概率 $\frac{1}{3}$ 驶向 *1*，而以概率 $\frac{2}{3}$ 驶向 *3*. 从 *3* 出发时它总是驶向 *1*. 在地点 i 和 j 之间的平均时间是 $t_{12}=t_{21}=20, t_{13}=t_{31}=30, t_{23}=t_{32}=30$

(a) 问出租车最近停在地点 $i(i=1,2,3)$ 的极限概率是多少？

(b) 出租车前往地点 *2* 的极限概率是多少？

(c) 出租车从 *2* 前往 *3* 的行程所占的时间比例是多少？注：在到达一个地点时，出租车立刻离开.

解答. 设 $Z(t)$ 表示出租车在时刻 t 之前最近一个到过的地点，状态空间为 $S=\{1,2,3\}$. 该过程的嵌入链的转移概率矩阵为：$P=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\1&0&0\end{bmatrix}$. 以 τ_{ij} 记从地点 i 前往地点 j 所需要的时间. 由题目可知：$\mathbb{E}[\tau_{12}]=\mathbb{E}[\tau_{21}]=20, \mathbb{E}[\tau_{13}]=\mathbb{E}[\tau_{31}]=30, \mathbb{E}[\tau_{23}]=\mathbb{E}[\tau_{32}]=30$. 注意到此时的 $\mathbb{E}[\tau_{ij}]$ 其实就是我们上文的 η_{ij}.

(a) 这相当于求解

$$\lim_{t\to\infty} P\Big(Z(t)=i\Big)=\frac{\pi_i\mathbb{E}[\tau_i]}{\pi_1\mathbb{E}[\tau_1]+\pi_2\mathbb{E}[\tau_2]+\pi_3\mathbb{E}[\tau_3]}$$

一方面：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\tau_1]&=\mathbb{E}[\tau_{12}]\frac{1}{2}+\mathbb{E}[\tau_{13}]\frac{1}{2}=25\\\mathbb{E}[\tau_2]&=\mathbb{E}[\tau_{21}]\frac{1}{3}+\mathbb{E}[\tau_{23}]\frac{2}{3}=\frac{80}{3}\\\mathbb{E}[\tau_3]&=\mathbb{E}[\tau_{31}]=30\end{aligned}$$

另一方面：

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\1&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(\frac{6}{14},\frac{3}{14},\frac{5}{14})$$

综合起来可以解得：

$$\lim_{t\to\infty} P\Big(Z(t)=1\Big)=\frac{\pi_1\mathbb{E}[\tau_1]}{\pi_1\mathbb{E}[\tau_1]+\pi_2\mathbb{E}[\tau_2]+\pi_3\mathbb{E}[\tau_3]}=\frac{\frac{6}{14}\cdot 25}{\frac{6}{14}\cdot 25+\frac{3}{14}\cdot\frac{80}{3}+\frac{5}{14}\cdot 30}=\frac{15}{38}$$

$$\lim_{t\to\infty} P\Big(Z(t)=2\Big)=\frac{\pi_2\mathbb{E}[\tau_2]}{\pi_1\mathbb{E}[\tau_1]+\pi_2\mathbb{E}[\tau_2]+\pi_3\mathbb{E}[\tau_3]}=\frac{\frac{3}{14}\cdot \frac{80}{3}}{\frac{6}{14}\cdot 25+\frac{3}{14}\cdot\frac{80}{3}+\frac{5}{14}\cdot 30}=\frac{8}{38}=\frac{4}{19}$$

$$\lim_{t\to\infty} P\Big(Z(t)=3\Big)=\frac{\pi_3\mathbb{E}[\tau_3]}{\pi_1\mathbb{E}[\tau_1]+\pi_2\mathbb{E}[\tau_2]+\pi_3\mathbb{E}[\tau_3]}=\frac{\frac{5}{14}\cdot 30}{\frac{6}{14}\cdot 25+\frac{3}{14}\cdot\frac{80}{3}+\frac{5}{14}\cdot 30}=\frac{15}{38}$$

（b）这相当于是在求解：

$$\lim_{t\to\infty} P\Big(S(t)=2\Big)$$

我们可以利用 4.49 并通过取条件来求解.

$$P\Big(S(t)=2\Big)=P\Big(S(t)=2,Z(t)=1\Big)+P\Big(S(t)=2,Z(t)=2\Big)+P\Big(S(t)=2,Z(t)=3\Big)$$

$$=P\big(S(t)=2|Z(t)=1\big)P\big(Z(t)=1\big)+P\big(S(t)=2|Z(t)=2\big)P\big(Z(t)=2\big)+P\big(S(t)=2|Z(t)=3\big)P\big(Z(t)=3\big)$$

$$\to\frac{P_{12}}{\mu_1}\int_0^\infty \bar{F}_{12}(y)dy\cdot P\big(Z(t)=1\big)+\frac{P_{22}}{\mu_2}\int_0^\infty \bar{F}_{22}(y)dy\cdot P\big(Z(t)=2\big)+\frac{P_{32}}{\mu_3}\int_0^\infty \bar{F}_{32}(y)dy\cdot P\big(Z(t)=3\big)$$

$$=\frac{P_{12}}{\mu_1}\int_0^\infty \bar{F}_{12}(y)dy\cdot P\big(Z(t)=1\big)+0+0$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot 20}{25}\cdot\frac{15}{38}$$

$$=\frac{3}{19}$$

（c）这相当于是在求解：

$$\lim_{t\to\infty} P\Big(Z(t)=2,S(t)=3\Big)$$

我们可以利用 4.48 的（c）来求解.

$$P\big(Z(t)=2,S(t)=3\big)=P\big(S(t)=3|Z(t)=2\big)P\big(Z(t)=2\big)\to\frac{P_{23}\eta_{23}}{\mu_2}\cdot P\big(Z(t)=2\big)=\frac{\frac{2}{3}\cdot 30}{\frac{80}{3}}\cdot\frac{4}{19}=\frac{3}{19}$$

□

2 Chapter 5: Markov Chain (continuous)

习题 16 (5.2)**.** 假设一个单细胞生物体可以处在两种状态——状态 *A* 或者状态 *B* 之一. 在状态 *A* 的一个个个体以指数速率 α 转变为状态 *B*, 在状态 *B* 的一个个体以指数速率 β 转变为两个状态 *A* 的个体. 对这个生物群定义一个合适的连续时间马氏链, 并确定此模型的参数.

解答. 定义马尔科夫链为 $\{(A(t), B(t)), t \geq 0\}$, 其中 $A(t)$ 表示在时刻 t 处于状态 A 的个体数目, $B(t)$ 表示时刻 t 处于状态 B 的个体数目. 假设在时刻 t, 有 $(A(t), B(t)) = (n, m)$, 则下一个可能进入的状态为 $(n-1, m+1)$ 或者 $(n+2, m-1)$, 进入第一个状态的速率为 $n\alpha$, 进入第二个状态的速率为 $m\beta$. 即:

$$q_{(n,m)\to(n-1,m+1)} = n\alpha, \quad q_{(n,m)\to(n+2,m-1)}$$

□

习题 17. 证明对连续时间的 *Markov* 链, 若已知:

(a) 对一切 i 有 $\nu_i \leq M < \infty$,

或已知:

(b) 具有转移概率 P_{ij} 的离散时间的 *Markov* 链是不可约的和常返的, 则 *Markov* 链是正则的.

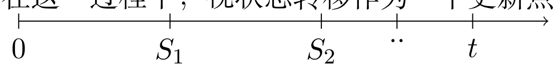
解答. 根据题目的要求, 我们来证明: (a) 与 (b) 任何一者成立都会有:

$$\forall 0 < t < \infty, P(N(t) = \infty) = 0$$

其中 $N(t)$ 表示在 $[0, t]$ 时间段内发生状态转移的计数.

假如 (a) 成立 (法一):

在这一过程中, 视状态转移作为一个更新点, 第 i 次状态转移成为一次更新. 则我们有:



记 $X_1 = S_1$, $S_2 - S_1 = X_2...$, 这些 X_n 独立, 但是不同分布. 记在 S_{i-1} 到 S_i 之间的过程所处的状态为 l_i, 从而导致 $X_i \sim \exp(\nu_{l_i})$ 是某个失效率为 ν_{l_i} 的指数分布, 只是我们不知道这个失效率具体是多少, 因为这个失效率依赖于 X_i 这个持续时间内过程所处的实际状态. 但无论是哪个状态, 其失效率总是有一个上界 M.

构造这样一个 poisson 过程 $N^*(t) \sim$Hpp(M), 相邻两次到达之间的时间间隔 $Y_i \sim \exp(M) iid$.

构造一个新的随机变量为：$Z_i := \frac{M}{\nu_{l_i}} Y_i \sim \exp(\nu_{l_i})$，从而 $Z_i \overset{d}{=} X_i$. 因此：

$$\begin{aligned}
&P(N(t) \geq n) \\
=&P(X_1 + ... + X_n \leq t) \\
=&P\Big(Z_1 + ... + Z_n \leq t\Big) \\
=&\mathbf{E}_{\nu_{l_i}}\left[P\Big(Z_1 + ... + Z_n \leq t \Big| \nu_{l_i}, \forall i = 1, ...n\Big)\right] \\
=&\mathbf{E}_{\nu_{l_i}}\left[P\Big(\frac{M}{\nu_{l_1}} Y_1 + ... + \frac{M}{\nu_{l_n}} Y_n \leq t \Big| \nu_{l_i}, \forall i = 1, ...n\Big)\right] \\
\leq&\mathbf{E}_{\nu_{l_i}}\left[P\Big(Y_1 + ... + Y_n \leq t \Big| \nu_{l_i}, \forall i = 1, ...n\Big)\right] \\
=&P\Big(Y_1 + ... + Y_n \leq t\Big) \\
=&P(N^*(t) \geq n) \\
=&\sum_{j=n}^{\infty} e^{-Mt} \frac{(Mt)^j}{j!} \overset{n \to \infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

假如（a）成立 (法二)：

$$\begin{aligned}
P(N(t) \geq n) =& P(S_n \leq t) && (1) \\
=& P(X_1 + ... + X_n \leq t) && (2) \\
\leq& P(X_i \leq t, \forall i = 1, ...n) && (3) \\
=& \mathbf{E}_{\nu_{l_i}, \forall i=1,..,n}\left[P\Big(X_i \leq t, \forall i = 1, ..., n \Big| \nu_{l_i}, \forall i = 1, ..., n\Big)\right] && (4) \\
=& \mathbf{E}_{\nu_{l_i}, \forall i=1,..,n}\left[\prod_{i=1}^{n}(1 - e^{-\nu_{l_i} t})\right] && (5) \\
\leq& \mathbf{E}_{\nu_{l_i}, \forall i=1,..,n}\left[\prod_{i=1}^{n}(1 - e^{-Mt})\right] && (6) \\
=& (1 - e^{-Mt})^n \overset{n \to \infty}{\to} 0 && (7)
\end{aligned}$$

评论. 这两种方法都通过取条件的方法，让这些状态固定，对于固定的状态放缩成一个常数 M，与这些状态无关，从而最后把条件去掉. **另外**，有的同学可能会直接诉诸直观，认为过程 $N^*(t)$ 的更新速率应该快于 $N(t)$，因此如果后者在时间 t 内发生的计数至少为 n，那么前者在时间 t 内发生的计数至少为 n 的可能性将会更大. 从而直观地直接得到：

$$P(N(t) \geq n) \leq P(N^*(t) \geq n)$$

但这一个概率的不等式的成立**仅仅只有直观，而不是基于事件的包含关系**，$\{N(t) \geq n\} \subset \{N^*(t) \geq n\}$ 并不一定成立. 因此仍然是不严谨的. 这也是我需要构造一个随机变量 Z_i 的原因，因为这使得这个概率的放缩变成事件大小的放缩.

假如（b）成立:

我们还是沿用之前的记号：$N(t)$ 为时刻 t 以及之前发生的全体转移次数，$\{X_n, n \geq 1\}$ 表示第 $n-1$ 次转移到第 n 次转移所需要的时间，记 l_n 表示第 n 次转移所进入的状态，自然 l_0 为过程所处的初始状态.

既然该过程的嵌入链是常返的，那么对于某个特定的状态，比如状态 j，该状态应该是一个常返态，这意味着每次从 j 出发，都将以概率为 1 地再次访问状态 j. 我们记 T_k 为第 $k-1$ 次访问状态 j 和第 k 次访问状态 j 所经历的时间，记第一次访问 j 的时刻为 n_0，第二次访问 j 的时刻为 n_1，第 m 次访问状态 j 的时刻为 n_{m-1}. 因此我们有：

$$
\begin{aligned}
&T_0 = X_1 + ... + X_{n_0} \\
&T_k = X_{n_{k-1}+1} + ... + X_{n_k}, \forall k \geq 1 \\
&\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \sum_{k=0}^{\infty} T_k
\end{aligned}
$$

我们定义如下一个新的更新过程，$\tilde{N}(t)$，以访问 j 为一次更新，请注意这可能是一个延迟更新过程，因为过程开始的时候可能并不处在状态 j 之中. 更新发生的间隔为 $T_k, k \geq 1, iid$，这些 T_k 是独立同分布的. **根据强大数律，我们有：**

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} T_k}{n} = \mathbf{E}T_1, \quad \text{almost surely}
$$

无论 $\mathbf{E}T_1 = \infty$ 还是 $\mathbf{E}T_1 < \infty$ 都这意味着，当 n 趋近无穷大的时候，必须要有 $\sum\limits_{k=1}^{n} T_k$ 也同时趋于无穷大. 严谨写出来就是：

$$
P(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} T_k = \infty) = 1
$$

因此我们有：$P(\sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k = \infty) = 1$. 这意味着 $\forall 0 < t < \infty$，我们有：

$$
0 = P(\sum_{k=0}^{\infty} T_k \leq t) = P(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \leq t) = P(N(t) = \infty)
$$

评论. 这一段证明简单来说就是利用了这样一个结论：

对于一个标准（延迟）更新过程，在有限时间内发生无穷多次更新的概率为 0.

这一结论来自书上的第 60 页，也就是第三章更新理论的最开头的部分.

□

习题 18. 考虑从一个个体开始的 *Yule* 过程，并且假设在时刻 s 出生的个体以概率 *P(s)* 是健康的，计算在 *(0,t)* 中出生的健康个体数的分布.

解答. 这道题考察的是第二章的解题技巧.

设 $X(t)$ 为时刻 t 及其之前出生的个体个数，$Y(t)$ 为时刻 t 及其之前出生的健康的个体个数，则我们有：

$$
\begin{aligned}
&P(Y(t)=k)\\
=&\sum_{n=k}^{\infty}P(Y(t)=k|X(t)=n)P(X(t)=n)\\
=&\sum_{n=k}^{\infty}P(\text{于时刻}S_1,...,S_n\text{出生的个体健康中有}k\text{个是健康的}|X(t)=n)P(X(t)=n)\\
=&\sum_{n=k}^{\infty}P(\text{于时刻}V_1,...,V_n\text{出生的个体健康中有}k\text{个是健康的})P(X(t)=n)\\
=&\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^n
\end{aligned}
$$

其中 $p:=\int_0^t p(s)\frac{\lambda e^{-\lambda(t-s)}}{1-e^{-\lambda t}}ds$. □

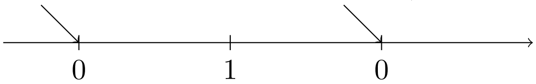
习题 19. 假设系统的状态可以用转移率为 $\nu_0=\lambda,\nu_1=\mu$ 的两状态的连续时间的 *Markov* 链建模. 在系统的状态为 i 时，事件按照速率为 $\alpha_i(i=0,1)$ 的 *Poisson* 过程发生. 记 $N(t)$ 为在 $(0,t)$ 之间发生的事件个数.

(a) 求 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}$

(b) 若初始状态是 0，求 $\mathbf{E}[N(t)]$

解答.（a）

从 $\nu_0=\lambda,\nu_1=\mu$ 可以知道，这个系统要么处在状态 0，要么处在状态 1. 我们以 $X(t)$ 记，系统在时刻 t 所处的状态. 视系统进入状态 0 为一次更新发生，那么这是一个可能有延迟的更新过程. 更新发生的间隔为 $T=X+Y$，其中 $X\sim\exp(\lambda)$，$Y\sim\exp(\mu)$. 图示如下：



在这个更新过程中，我们来构造其酬劳过程. 如果发生了一个事件，那么就给一块钱，以 $R(t)$ 表示在时刻 t 及其之前获得酬劳的总数. 容易知道：$\mathbf{E}T=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$. 我们下面来求解 $\mathbf{E}R$.

在一个更新循环之中，处于 0 状态的时间长度为 X，处于 1 的时间长度为 Y，这导致酬劳发生的计数在一个循环中为 $R=N_0(X)+N_1(Y)$，其中 $N_0(t)\sim Hpp(\alpha_0),N_1(t)\sim Hpp(\alpha_1)$. 所以容易算出 $\mathbf{E}R=\mathbf{E}[\alpha_0X]+\mathbf{E}[\alpha_1Y]=\frac{\alpha_0}{\lambda}+\frac{\alpha_1}{\mu}$. 从而：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{R(t)}{t}=\frac{\mathbf{E}R}{\mathbf{E}T}=\frac{\frac{\alpha_0}{\lambda}+\frac{\alpha_1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}}$$

（b）

以 $X(t)$ 记在时刻 t 系统所处的状态，$X(t)$ 要么取 0，要么取 1. 则记 $S_1(t)=\int_0^t X(s)ds$ 就是直至 t 为止系统处在状态 1 的时间，$S_0(t)=t-S_1(t)$ 是直至时刻 t 为止系统处在状态 0 的时

间. 我们有:

$$\mathbf{E}\big[S_0(t)|X(0)=0\big]=\int_0^t \mathbf{E}\big[1-X(s)\big]=\int_0^t P_{00}(s)ds=\frac{\mu}{\lambda+\mu}t+\frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\big[1-e^{-(\lambda+\mu)t}\big]$$

另一方面:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\big[N(t)\big]\\
=&\mathbf{E}\big[N_1(S_1(t))+N_0(S_0(t))\big]\\
=&\alpha_1\mathbf{E}\big[S_1(t)\big]+\alpha_0\mathbf{E}\big[S_0(t)\big]\\
=&\alpha_1 t+(\alpha_0-\alpha_1)\mathbf{E}\big[S_0(t)\big]\\
=&\alpha_1 t+(\alpha_0-\alpha_1)\Big\{\frac{\mu}{\lambda+\mu}t+\frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\big[1-e^{-(\lambda+\mu)t}\big]\Big\}
\end{aligned}$$

□

习题 20. 理发店里只有一个理发员，有两个座位可以提供给顾客坐。潜在顾客以每小时 *3* 人的 *Poisson* 速率到达，而服务时间是均值为 $\frac{1}{4}$ 小时的独立指数随机变量.

(a) 店中顾客的平均数是多少

(b) 进入店的潜在顾客的比例是多少

(c) 若理发员的工作速度提高一倍，她多做了多少生意

解答. (a):

记该过程的转移概率矩阵为:

$$Q=\begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02}\\ q_{10} & q_{11} & q_{12}\\ q_{20} & q_{21} & q_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0\\ 4 & -7 & 3\\ 0 & 4 & -4\end{bmatrix}$$

由 $(P_0,P_1,P_2)Q=0$ 可以得到: $P_0=\frac{16}{37},P_1=\frac{12}{37},P_2=\frac{9}{37}$.

则:

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\big[X(t)\big]=\lim_{t\to\infty}0\cdot P(X(t)=0)+1\cdot P(X(t)=1)+2\cdot P(X(t)=2)=0\cdot P_0+1\cdot P_1+2\cdot P_2=\frac{30}{37}$$

(b) 进入店中的比例为:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N(t)}\mathbf{1}\{\text{于时刻}S_i\text{到的人进入了店中}\}}{N(t)}\\
=&\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N(t)}\mathbf{1}\{X(S_i)\neq 2\}}{N(t)}\\
=&\lim_{t\to\infty}P(X(t)\neq 2)\\
=&1-P_2=\frac{28}{37}
\end{aligned}$$

（c）在 $\mu = 8$ 时，我们有

$$Q = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 8 & -11 & 3 \\ 0 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

由此可以解得 $P_0 = \frac{64}{97}, P_1 = \frac{24}{97}, P_2 = \frac{9}{97}$. 所以此时进入店中的比例为：

$$1 - P_2 = \frac{88}{97}$$

.

故多服务的顾客人数平均下来为：$\lambda(1-P_2) - \lambda(1-P_2) = 3 \cdot \left(\frac{88}{97} - \frac{28}{37}\right) \approx 0.45$ □

习题 21. 求 *M/M/s* 系统的极限分布，并且确定他们存在需要的条件.

解答. 对于 M/M/s 系统，其生存率和死亡率分别为：

$$\lambda_n = \lambda$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n \le s \\ s\mu & n > s \end{cases}$$

根据生灭过程的极限速率公式，出生的速率应该等于灭亡的速率，从而我们有：

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$
$$P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{1}{2!} P_0$$
$$...$$
$$P_{s-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s-1} \frac{1}{(s-1)!} P_0$$
$$P_s = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{s!} P_0$$
$$P_{s+j} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^j P_0, \forall j \ge 1$$

再根据 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n = 1$，我们有：

$$\sum_{n=0}^{s} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} P_0 + \frac{\lambda^s}{\mu^s s!} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^j P_0 = \left(\sum_{n=0}^{s} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{s!} \frac{\frac{\lambda}{\mu s}}{1 - \frac{\lambda}{\mu s}} \right) P_0$$

只有在 $\lambda < \mu s$ 的时候，P_0 才会存在. 此时

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{s} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{s!} \frac{\frac{\lambda}{\mu s}}{1-\frac{\lambda}{\mu s}}}$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{s} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{s!} \frac{\frac{\lambda}{\mu s}}{1-\frac{\lambda}{\mu s}}}, \forall 0 \le n \le s$$

$$P_{s+j} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^j \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{s} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{s!} \frac{\frac{\lambda}{\mu s}}{1-\frac{\lambda}{\mu s}}}, \forall j \ge 1$$

□

习题 22. 令 $Y_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}, (i = 1, ..., n+1)$，其中 $X_{(0)} = 0, X_{(n+1)} = t$，且 $X_{(1)} \le ... \le X_{(n)}$ 是一组 n 个独立的 $(0, t)$ 均匀随机变量的次序随机变量，论证 $P(Y_i \le y_i, \forall i = 1, ..., n+1)$ 是 $y_1, ..., y_{n+1}$ 的对称函数.

解答. 法一

这道题十分特殊，$\big(Y_1, ..., Y_{n+1}\big)$ 服从**奇异分布**，也就是说该联合分布是不存在概率密度也无法写成分布函数的，原因是他们的取值空间是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的一个 n 维子空间，其密度只会在 $n+1$ 维空间上的一个低维超平面上进行堆积. 这样的低维空间是勒贝格零测的，从而不存在概率密度.

为了证明其分布的对称性，我们只能纯纯从定义出发，来验证下面这个等式：

$$P\big(Y_1 \le y_1, ..., Y_{n+1} \le y_{n+1}\big) = P\big(Y_{i_1} \le y_1, ..., Y_{i_{n+1}} \le y_{n+1}\big)$$

其中 $(i_1, ..., i_{n+1})$ 是 $(1, 2, ..., n = 1)$ 的一个置换.

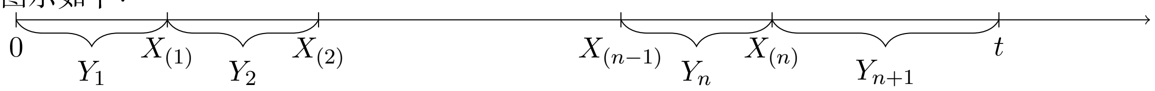
注意，$Y_1, ..., Y_{n+1}$ 是由一组独立同分布的 X_n 通过某个机制产生的，这个机制具体来说是：

step 1: 给定了时刻 t 之前有 n 个事件发生，事件发生的时刻为 $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$ 是 $X_1, ..., X_n iid \sim U(0, t)$ 的次序统计量.

step 2: 记：

$$\begin{aligned}
&Y_1 = X_{(1)} - 0 \\
&Y_2 = X_{(2)} - X_{(1)} \\
&... \\
&Y_n = X_{(n)} - X_{(n-1)} \\
&Y_{n+1} = t - X_{(n)}
\end{aligned}$$

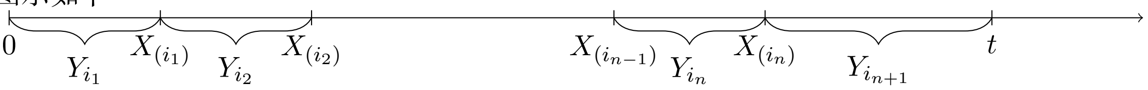
图示如下：



但是由于 $\big(X_{i_1}, ..., X_{i_n}\big)$ 与 $\big(X_1, ..., X_n\big)$ 是同分布的，因此 $\big(X_{(i_1)}, ..., X_{(i_n)}\big)$ 与 $\big(X_{(1)}, ..., X_{(n)}\big)$ 也同分布. 对于这组 $\big(X_{i_1}, ..., X_{i_n}\big)$，我们同样也可以按照与之前完全相同的步骤得到 $Y_{i_1}, ..., Y_{i_{n+1}}$. 从而：

$$\big(X_{i_1}, ..., X_{i_n}\big) \overset{d}{=} \big(X_1, ..., X_n\big) \Rightarrow \big(Y_{i_1}, ..., Y_{i_{n+1}}\big) \overset{d}{=} \big(Y_1, ..., Y_{n+1}\big)$$

图示如下：



法二

这第二种方法可能更有启发性一点，我们考虑这样一个问题：

$$X \sim U(0,1), Y = 1 - X \tag{8}$$
$$\Rightarrow P(X \leq u, Y \leq v) \tag{9}$$
$$= P(X \leq u, X > 1 - v) \tag{10}$$
$$= P(Y \leq u, Y > 1 - v) \tag{11}$$
$$= P(Y \leq u, X \leq v) \tag{12}$$

这是因为 $X \stackrel{d}{=} Y$ 同理，三个也是一样的：

$$X_1, X_2, iid \sim U(0,1), X_3 = 1 - X_2 - X_1 \tag{13}$$
$$\Rightarrow P(X_1 \leq u_1, X_2 \leq u_2, X_3 \leq u_3) \tag{14}$$
$$= P(X_1 \leq u_1, X_2 \leq u_2, 1 - X_1 - X_2 > 1 - u_3) \tag{15}$$
$$= P(X_{i_1} \leq u_1, X_{i_2} \leq u_2, 1 - X_{i_1} - X_{i_2} > 1 - u_3) \tag{16}$$
$$= P(X_{i_1} \leq u_1, X_{i_2} \leq u_2, X_{i_3} \leq u_3) \tag{17}$$

这是因为 $(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (X_{i_1}, X_{i_2})$，其中 (i_1, i_2) 是 (1,2,3) 的置换的前两个元. 从而 n 个也是一样的做法... $\square$

3 Chapter 6: Martingale

习题 23 (6.1)**.** 若 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是鞅，那么 $\forall 1 \leq k \leq n$，有：

$$\mathbf{E}[Z_n|Z_1,...,Z_k] = Z_k \tag{18}$$

解答.

$$\mathbf{E}[Z_n|Z_1,...,Z_k] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[Z_n|Z_1,...,Z_{n-1}]\middle|Z_1,...,Z_k\right] = \mathbf{E}[Z_{n-1}|Z_1,...,Z_k] = ... = Z_k \tag{19}$$

□

习题 24 (6.2)**.** 若 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是鞅，令 $X_i = Z_i - Z_{i-1}, \forall i \geq 1$, 其中 $Z_0 = 0$. 证明：

$$Var(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \tag{20}$$

解答.

$$\mathrm{Var}(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \tag{21}$$

来证明 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ 即可.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_iX_j) =&\mathbf{E}\Big[Z_iZ_j\Big] - \mathbf{E}\Big[Z_{j-1}Z_i\Big] - \mathbf{E}\Big[Z_{i-1}Z_j\Big] + \mathbf{E}\Big[Z_{i-}Z_{j-1}\Big] & (22)\\ & & (23)\end{aligned}$$

注意到：$\mathbf{E}[Z_iZ_j] = \mathbf{E}[Z_iZ_{j-1}]$，且 $\mathbf{E}[Z_{i-1}Z_j] = \mathbf{E}[Z_{i-1}Z_{j-1}]$，上式为 0. □

习题 25 (6.4)**.** 考虑一个随机游走：$\{X_n\}_{n\geq 0} iid \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{bmatrix}$，证明以下是鞅：

$$(\frac{q}{p})^{S_n} \tag{24}$$

解答.

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{S_n}|(\frac{q}{p})^{S_{n-1}},...,(\frac{q}{p})^{S_1}] & (25)\\ =&(\frac{q}{p})^{S_{n-1}} \cdot \mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{X_n}|(\frac{q}{p})^{S_{n-1}},...,(\frac{q}{p})^{S_1}] & (26)\\ =&(\frac{q}{p})^{S_{n-1}}\mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{X_n}] = (\frac{q}{p})^{S_{n-1}} & (27)\end{aligned}$$

□

习题 26 (6.6)**.** $X(n)$ 为一个分支过程第 n 代的规模，π_0 指这个群体迟早消失的概率，求证以下是个鞅:

$$\pi_0^{X_n} \tag{28}$$

解答.

$$\mathbf{E}\left[\pi_0^{X_n}\middle|\pi_0^{X_{n-1}},...,\pi_0^{X_1}\right] \tag{29}$$

$$=\mathbf{E}\left[\pi_0^{\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i}\middle|\pi_0^{X_{n-1}},...,\pi_0^{X_1}\right] \tag{30}$$

$$=\prod_{i=1}^{X_{n-1}} \mathbf{E}[\pi_0^{Z_1}] = \pi_0^{X_{n-1}} \tag{31}$$

□

习题 27. $\{X_n\}$ 均值为 0，方差为 σ^2，再令 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. 证明当 $Z_n = S_n^2 - n\sigma^2$ 是个鞅

解答.

$$\mathbf{E}\left[Z_n\middle|Z_1,...,Z_{n-1}\right] \tag{32}$$

$$=Z_n + \mathbf{E}\left[2S_{n-1}X_n + X_n^2 - \sigma^2\middle|Z_1,...,Z_{n-1}\right] \tag{33}$$

$$=Z_n + \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[2S_{n-1}X_n + X_n^2 - \sigma^2\middle|X_1,...,X_{n-1}\right]Z_1,...,Z_{n-1}\right] \tag{34}$$

$$=Z_n + \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[X_n^2 - \sigma^2\middle|X_1,...,X_{n-1}\right]Z_1,...,Z_{n-1}\right] \tag{35}$$

$$=Z_n + 0 = Z_n \tag{36}$$

□

习题 28. 连续投硬币，正面朝上的概率为 p. 求下面序列首次出现所需要的期望时间：

（a）*HHTTHHT*（b）*HTHTHTH*

解答.（a）

$$X_N = N - 7 - (\frac{1}{p^4q^3} - 1) + 1 + 1 + 1 + (\frac{1}{p^2q} - 1) + 1 + 1, \qquad \mathbf{E}[X_N] = 0 \tag{37}$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{p^4q^3} + \frac{1}{p^2q} \tag{38}$$

（b）

$$X_N = N - 7 - (\frac{1}{p^4q^3} - 1) + 1 - (\frac{1}{p^3q^2} - 1) + 1 - (\frac{1}{p^2q} - 1) + 1 - (\frac{1}{p} - 1), \qquad \mathbf{E}[X_N] = 0 \tag{39}$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{p^4q^3} + \frac{1}{p^3q^2} + \frac{1}{p^2q^1} + \frac{1}{p} \tag{40}$$

□

习题 29. 令 $Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$，其中 $X_i, i \geq 1$ 是独立的随机变量，同分布为：

$$P(X_i = 2) = P(X_i = 0) = \frac{1}{2} \tag{41}$$

令 $N = \min\{n : Z_n = 0\}$，请问鞅停止定理是否可以使用.

解答. 如果鞅停止定理可以使用的话，我们会得到：$\mathbf{E}[Z_1] = \mathbf{E}[Z_N]$. 但前者是 1，后者恒为 0，出现矛盾，说明鞅停止定理不可以使用. 下面我们来说明一下课本上的三个条件全都不成立：

1. $\bar{Z}_n$ 一致有界是不对的. 也就是说不可以存在一个 $M > 0$，使得

$$P\left(\sup_n \bar{Z}_n \leq M\right) = 1 \tag{42}$$

这是因为我们观察到：

$$\bar{Z}_n = \begin{cases} 2^n & n \leq N \\ 0 & n > N \end{cases} \tag{43}$$

从而有：

$$P\left(\sup_n \bar{Z}_n \leq M\right) \tag{44}$$

$$=P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\sup_n \bar{Z}_n \leq M, N = k\}\right) \tag{45}$$

$$=P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{2^k \leq M, N = k\}\right) \tag{46}$$

$$=P\left(2^N \leq M\right) \tag{47}$$

$$=P\left(N \leq \frac{\log M}{\log 2}\right) \neq 1, \forall M > 0 \tag{48}$$

也就是说对于任意一个有限大的 M，我们总是有 $P\left(\sup_n \bar{Z}_n \leq M\right) < 1$, 因此是无法一致有界的.

2. N 有界，也是不对的. 因为 N 作为几何型随机变量总是有一定的概率可以取到任意大的值.

3. 存在一个 M，使得

$$\mathbf{E}\left[|Z_{n+1} - Z_n| Z_1, ..., Z_n\right] \leq M, \forall n \tag{49}$$

这也是不对的. 因为：

$$\mathbf{E}\left[|Z_{n+1} - Z_n| Z_1, ..., Z_n\right] \tag{50}$$

$$=\mathbf{E}\left[|Z_n X_{n+1} - Z_n|\middle| Z_1, ..., Z_n\right] \tag{51}$$

$$=\mathbf{E}\left[|Z_n \cdot 2 - Z_n|\middle| Z_1, ..., Z_n\right]\frac{1}{2} + \mathbf{E}\left[|Z_n \cdot 0 - Z_n|\middle| Z_1, ..., Z_n\right]\frac{1}{2} \tag{52}$$

$$=\mathbf{E}\left[|Z_n|\middle| Z_1, ..., Z_n\right] \tag{53}$$

$$=\mathbf{E}\left[Z_n\middle| Z_1, ..., Z_n\right] \tag{54}$$

$$=Z_n \tag{55}$$

对于一个给定的 $M > 0$，总是可以存在一个 $\tilde{n}$，使得 $2^{\tilde{n}} > M$，从而：

$$P(Z_k > M) \geq \frac{1}{2^{\tilde{n}}}, \forall k > \tilde{n} \tag{56}$$

因此:

$$P\left(\sup_n \mathbf{E}\left[|Z_{n+1}-Z_n|Z_1,...,Z_n\right]\leq M\right)=1 \tag{57}$$

是不可能的.

□

习题 30. 盒子里面一开始一白一黑,每一步从中抽取一个球且将它和一个与它同色的球放回盒子中,以 Z_n 记在第 n 次取放后盒子中白球的比例:

(a) 证明 $\{Z_n\}$ 是鞅.

(b) 证明在盒子中的白球曾经大于 *3/4* 的比例至多是 *2/3*.

解答. (a)

以 X_n 记,在第 n 次取放之后,盒子中白球的个数. 从而黑球的个数为: $n+2-X_n$, $Z_n=\frac{X_n}{n+2}$. 注意到:

$$X_n|X_{n-1}\sim\begin{bmatrix} X_{n-1}+1 & X_{n-1}\\ \frac{X_{n-1}}{n+1} & 1-\frac{X_{n-1}}{n+1}\end{bmatrix} \tag{58}$$

从而:

$$\mathbf{E}\left[Z_n\middle|Z_1,...,Z_{n-1}\right] \tag{59}$$

$$=\mathbf{E}\left[\frac{X_n}{n+2}\middle|X_1,...,X_{n-1}\right] \tag{60}$$

$$=\frac{X_{n-1}}{n+1}\cdot\frac{X_{n-1}+1}{n+2}+(1-\frac{X_{n-1}}{n+1})\frac{X_{n-1}}{n+2} \tag{61}$$

$$=\frac{X_{n-1}}{n+1}=Z_{n-1} \tag{62}$$

是鞅.

(b)

$$\mathbf{E}[Z_n]=\mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left[\frac{X_n}{n+3}\right]\middle|X_{n-1}\right\} \tag{63}$$

$$=\mathbf{E}\left\{\frac{X_{n-1}}{n+1}\cdot\frac{X_{n-1}+1}{n+2}+(1-\frac{X_{n-1}}{n+1})\frac{X_{n-1}}{n+2}\right\} \tag{64}$$

$$=\mathbf{E}\left\{Z_{n-1}\right\}=...=\mathbf{E}Z_1=\frac{1}{2} \tag{65}$$

从而:

$$P\left(\max\{Z_1,...,Z_n\}>\frac{3}{4}\right)\leq\frac{\mathbf{E}Z_n}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3} \tag{66}$$

则:

$$P\left(\sup_n Z_n>\frac{3}{4}\right)\leq\frac{2}{3} \tag{67}$$

□

习题 31. 考虑独立丢硬币,而令 $P(\text{正面})$ 是每次投掷出正面的概率.

$$A=\{P(\text{正面})=a\} \tag{68}$$

$$B=\{P(\text{正面})=b\} \tag{69}$$

以 X_i 记第 i 次投掷的结果，并令：

$$Z_n = \frac{P(X_1, ..., X_n|A)}{P(X_1, ..., X_n|B)} \tag{70}$$

证明：若 B 正确，则：

（a）Z_n 是个鞅，而且

（b）$\lim_{n\to\infty} Z_n$ 以概率为 1 存在.

（c）若 $b \neq a$，则 $\lim_{n\to\infty} Z_n$ 是什么？

解答.（a）

$$\mathbf{E}\left[Z_n|Z_1, ..., Z_{n-1}\right] \tag{71}$$

$$=\mathbf{E}\left[\frac{P_a(X_1, ..., X_n)}{P_b(X_1, ..., X_n)}\middle|Z_1, ..., Z_{n-1}\right] \tag{72}$$

$$=\mathbf{E}\left[Z_{n-1}\cdot(\frac{a}{b})^{X_n}(\frac{(1-a)}{(1-b)})^{1-X_n}\middle|Z_1, ..., Z_{n-1}\right] \tag{73}$$

$$=Z_{n-1} \tag{74}$$

（b）由于这是一个非负的鞅，因此以概率为 1 地存在收敛极限.

（c）如果 $b \neq a$，则：$\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$

$$Z_n = \prod_{i=1}^{n}(\frac{a}{b})^{X_i}(\frac{1-a}{1-b})^{1-X_i} \tag{75}$$

$$\Rightarrow \log Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i(\log\frac{a}{b} - \log\frac{1-a}{1-b}) + n\log\frac{1-a}{1-b} \tag{76}$$

$$\Rightarrow \frac{\log Z_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}(\log\frac{a}{b} - \log\frac{1-a}{1-b}) + \log\frac{1-a}{1-b} \overset{a.s}{\to} b\log\frac{a}{b} + (1-b)\log\frac{1-a}{1-b} \tag{77}$$

$$<\log(b\cdot\frac{a}{b} + (1-b)\frac{1-a}{1-b}) = 0 \tag{78}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\log Z_n = -\infty, \quad \text{almost surely} \tag{79}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} Z_n = 0, \quad \text{almost surely} \tag{80}$$

□

4 Chapter 8: Brownian process

习题 32 (8.1)**.** 令 $Y(t)=tX(\frac{1}{t})$，则：

（a）$Y(t)$ 的分布是什么？

（b）计算 $Cov(Y(s),Y(t))$.

（c）论证 $Y(t)$ 也是布朗运动.

（d）利用（c）来证明

$$P(T=0)=1 \tag{81}$$

解答.（a）$Y(t)$ 的分布是什么?

$$Y(t)=tX(\frac{1}{t})\sim\mathcal{N}(0,t^2\frac{1}{t})=\mathcal{N}(0,t) \tag{82}$$

（b）计算 $\mathrm{Cov}(Y(s),Y(t))$.

$$\mathrm{Cov}(Y(s),Y(t))=\mathrm{Cov}(sX(\frac{1}{s}),tX(\frac{1}{t}))=\mathrm{Cov}(sX(\frac{1}{s})-tX(\frac{1}{t}),tX(\frac{1}{t}))+\mathrm{Cov}(tX(\frac{1}{t}),tX(\frac{1}{t}))=\min\{s,t\} \tag{83}$$

（c）论证 $Y(t)$ 也是布朗运动，来验证独立增量和平稳增量. 任取 $0<s_1<s_2<t_1<t_2$，计算 $\mathrm{Cov}(Y(t_2)-Y(t_1),Y(s_2)-Y(s_1))=0$，在由于联合分布是正态分布时，不相关就是独立，因此可得独立增量性. 为了得到平稳增量性，我们取 $0<h<t<t+h$，来证明 $Y(t+h)-Y(t)$ 和 $Y(h)$ 是同分布的，首先他们都是正态分布，因此只要证明其均值和方差都相等即可. 而均值均为 0，为了验证方差只需要取验证：$\mathrm{Var}(Y(t+h)-Y(t))=h$ 即可.

（d）利用（c），我们有：

$$T=\inf_{\{t:X(t)=0\}}t \tag{84}$$

$$T^{-1}=\sup_{\{t:X(t)=0\}}t^{-1} \tag{85}$$

$$T^{-1}=\sup_{\{t:X(t)=0\}}t^{-1} \tag{86}$$

$$T^{-1}=\sup_{\{s:Y(s)=0\}}s \tag{87}$$

我们断言，其实必须要有：

$$P(T^{-1}=\infty)=1 \tag{88}$$

这是因为对于任意一个 $M>0$:

$$P\big(\sup_{\{s:Y(s)=0\}}s<M\big) \tag{89}$$

$$=P\big(Y(t)\text{不再变号},\forall t>s\big) \tag{90}$$

$$=P\big(Y(t)\text{不再变号},\forall t>0\big) \tag{91}$$

$$=1-P\big(Y(t)\text{会碰到 }0,\exists t>0\big)=0 \tag{92}$$

从而：$P(T=0)=1$ □

习题 33 (8.4). 以 $Z(t)$ 记一个布朗桥过程，证明以下是个布朗运动.

$$X(t)=(t+1)Z(\frac{t}{t+1}) \tag{93}$$

解答. $X(0)=0$ 和 $X(t)\sim\mathcal{N}(0,t)$ 以及 $\text{Cov}(X(s),X(t))=\min\{s,t\}$ 都很好验证，下面来说明独立平稳增量性：

$$\forall 0<s_1<t_1<s_2<t_2 \tag{94}$$

$$\begin{bmatrix} X(t_1)-X(s_1)\\ X(t_2)-X(s_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X(s_1)\\X(t_1)\\X(s_2)\\X(t_2)\end{bmatrix} \tag{95}$$

$$\sim\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1 & s_1 & s_1 & s_1\\ s_1 & t_1 & t_1 & t_1\\ s_1 & t_1 & s_2 & s_2\\ s_1 & t_1 & s_2 & t_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) \tag{96}$$

$$\sim\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}t_1-s_1 & 0\\ 0 & t_2-s_2\end{bmatrix}\right) \tag{97}$$

从中可以看出独立增量性和平稳增量性. □

习题 34 (8.5). 随机过程 $X(t)$，如果：$\forall n,a,t_1,...,t_n$，都有：

$$\Big(X(t_1),...,X(t_n)\Big)\overset{d}{=}\Big(X(t_1+a),...,X(t_n+a)\Big)$$

，则称这个过程是平稳的.

(a) 证明高斯过程是平稳的等价于 *Cov*$(X(s),X(t))$ 只依赖于 $t-s$，并且 $\mathbf{E}X(t)=c$ 是个常数.

(b) 令 $X(t)$ 是个布朗运动，证明：

$$V(t)=e^{-\frac{\alpha t}{2}}X(\alpha e^{\alpha t})$$

是平稳的高斯过程.

解答. (a)

若平稳，则：$\text{Cov}(X(s),X(t))=\text{Cov}(X(0),X(t-s))$，从而只依赖于 $t-s$，且 $\mathbf{E}X(t)=\mathbf{E}X(0)=c$

若 $\text{Cov}(X(s),X(t))$ 只依赖于 $t-s$，并且 $\mathbf{E}X(t)=c$ 是个常数，则 $\Big(X(t_1),...,X(t_n)\Big)$ 与 $\Big(X(t_1+a),...,X(t_n+a)\Big)$ 的均值向量和协方差矩阵都相同，从而同分布.

(b) 只要计算：

$$\text{Cov}(V(s),V(s))=\alpha e^{-\frac{\alpha}{2}(t-s)} \tag{98}$$

即可. □

习题 35 (8.7). 求三个分布：

$$|X(t)| \tag{99}$$

$$|\min_{0\le s\le t} X(s)| \tag{100}$$

$$\max_{0\le s\le t} X(s) - X(t) \tag{101}$$

解答. 其实这三个是同分布的.

（a）

$$P(|X(t)| > y) = P(X(t) \ge y) + P(X(t) \le -y) = 2P(X(t) \ge y) \tag{102}$$

（b）

$$P(|\min_{0\le s\le t} X(s)| \ge y) = P(\min_{0\le s\le t} X(s) \ge y) + P(\min_{0\le s\le t} X(s) \le -y) = 0 + P(\max_{0\le s\le t} X(s) \ge y) = 2P(X(t) \ge y) \tag{103}$$

（c）

$$P(\max_{0\le s\le t} X(s) - X(t) \ge y) = P(\max_{0\le s\le t} X(s) \ge y) = 2P(X(t) \ge y) \tag{104}$$

□

习题 36 (8.9). 记 $M(t) = \max_{0\le s\le t} X(s), Y(t) = M(t) - X(t)$，证明：

$$P(M(t) > a|Y(t) = 0) = e^{-\frac{a^2}{2t}}, \forall t > 0 \tag{105}$$

解答. 由于：

$$P(M(t) \le m, X(t) \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{x-2m}^{x} e^{-\frac{u^2}{2t}} du \tag{106}$$

先来计算其 pdf：$f_{(M(t),X(t))}(m, x)$，为此，任取 h, l 足够小，记 $\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{u^2}{2t}}$

$$P(x \le X(t) \le x + l, m \le M(t) \le m + h) \tag{107}$$

$$= \int_{x+l-2m-2h}^{x+l} \phi(u)du - \int_{x-2m-2h}^{x} \phi(u)du - \left[\int_{x+l-2m}^{x+l} \phi(u)du - \int_{x-2m}^{x} \phi(u)du\right] \tag{108}$$

$$= \phi(x + l - 2m - 2h)(2m + 2h) - \phi(x - 2m - 2h)(2m + 2h) + o((2m + 2h)) \tag{109}$$

$$- \left[\phi(x + l - 2m)2m - \phi(x - 2m)2m + o((2m))\right] \tag{110}$$

$$= \phi'(x - 2m - 2h)(2m + 2h)l + o(hl) - \phi'(x - 2m)2ml + o(l) \tag{111}$$

$$= 2hl\phi'(x - 2m) + o(hl) \tag{112}$$

$$\Rightarrow f_{(M(t),X(t))}(m, x) = 2\phi'(x - 2m) \tag{113}$$

再来计算 $f_{(M(t),Y(t))}(m, y)$：

$$f_{(M(t),Y(t))}(m, y) = f_{(M(t),X(t))}(m(m, y), x(m, y)) \left|\frac{\partial(m, x)}{\partial(m, y)}\right| = 2\phi'(-y - m)\mathbf{1}\{y \ge 0, m \ge 0\} \tag{114}$$

而另一方面，可以从 [8.7] 中的 $P(Y(t) \ge y) = 2P(X(t) \ge y)$ 来获得 $f_{Y(t)}(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} \mathbf{1}\{y \ge$

0}，当然直接对联合分布中将 m 积分积掉也可以，但是会比较复杂. 从而我们得到了：

$$f_{[M(t)|Y(t)=0]}(m) = \frac{f_{(M(t),Y(t))}(m,0)}{f_{Y(t)}(0)} = e^{-\frac{m^2}{2t}} \cdot \frac{m}{t}\mathbf{1}\{m \geq 0\} \tag{115}$$

$$\Rightarrow P(M(t) > a|Y(t) = 0) = \int_a^\infty f_{[M(t)|Y(t)=0]}(m)dm = \int_a^\infty e^{-\frac{m^2}{2t}} \cdot \frac{m}{t}dm = e^{-\frac{a^2}{2t}} \tag{116}$$

□

习题 37. 计算直至布朗运动击中 x 为止的时刻 T_x 的密度函数.

$$P(T_x \leq y) = 2P(X(y) \geq x) = 2(1 - \Phi(x/\sqrt{y})) \tag{117}$$

$$\Rightarrow f_{T_x}(y) = y^{-\frac{3}{2}}\phi(\frac{x}{\sqrt{y}})\mathbf{1}\{y \geq 0\} \tag{118}$$

习题 38. 计算

$$P(T_1 < T_{-1} < T_2) \tag{119}$$

$$P(T_1 < T_{-1} < T_2) = P(T_1 < T_{-1}, T_{-1} < T_2) \tag{120}$$

$$= P(T_{-1} < T_2|T_1 < T_{-1})P(T_1 < T_{-1}) \tag{121}$$

$$= P(T_{-2} < T_1)P(T_1 < T_{-1}) \tag{122}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \tag{123}$$

参考文献

[1] Geoffrey Grimmett and David Stirzaker. *Probability and random processes*. Oxford; New York: Oxford University Press, 2001. ISBN: 0198572239 9780198572237 0198572220 9780198572220. URL: http://www.worldcat.org/search?qt=worldcat_org_all&q=9780198572220.