实用随机过程期中习题课

赖志鑫

日期：April 11, 2024

目录

1 第一章节的若干概率模型

1.1 取帽

n 个人的帽子混在一起，随机取帽。$X_n :=$ 人和帽子正确匹配的个数。则有如下结论：

- $\mathbb{E}(X_n) = 1, \mathrm{Var}(X_n) = 1$
- 记 L 表示第一个人未取到自己的帽子，则 $\mathbb{E}[X_n|L] = \frac{n-2}{n-1}$
- 记 E_n 表示事件：n 个人取完帽子之后没有一个人和帽子是匹配的。则 $P(E_n) = \sum\limits_{j=2}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$
- 记 R_n 表示：使得 n 个人全取到自己的帽子所需要进行的取帽子轮数。则 $\mathbb{E}[R_n] = n$
- 记 A_k 表示事件：仅有 k 个人和帽子是匹配的，其他的全都不匹配。则 $P(A_k) = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!}P(E_{n-k})$

1.2 唱票

得票锁定：已知 A 得了 n 张票，B 得了 m 张票（锁定的意思是说，样本空间应该只剩下所有这些得票组合的全排列路径，除此之外不可以再有别的随机成分在）。

得票排列等可能：每一种票型的排列路径出现的概率都会是相同的。严格来说就是：$\forall 1 \le j_1 < j_2 < ... < j_n \le n+m$, $P($于$j_1, ..., j_n$ 时刻所唱的票是A 的$) = \frac{1}{\binom{n+m}{n}}$

对于唱票模型我们有如下结论：

- $p_{n,m}$:=P(A 得票始终领先于 B 得票) =$\frac{n-m}{n+m}$
- $\tilde{p}_{n,m}$:=P(A 得票始终不少于 B 得票) =$1 - \frac{m}{n+1}$

习题 1 (1.26)**.** *求解 $\tilde{p}_{n,m}$:=P(A 得票始终不少于 B 得票 |A 总共 n 张票，B 总共 m 张票，得票锁定，排列等可能)*

解答. 法一：

$$
\begin{aligned}
p_{n,m} &= \tilde{p}_{n-1,m} \cdot P(\text{首票为}A) + 0 \cdot P(\text{首票为 B}) \\
\Rightarrow \tilde{p}_{n-1,m} &= \frac{p_{n,m}}{P(\text{首票为}A)} = \frac{\frac{n-m}{n+m}}{\frac{n}{n+m}} = 1 - \frac{m}{n} \\
\Rightarrow \tilde{p}_{n,m} &= 1 - \frac{m}{n+1}
\end{aligned}
$$

法二：

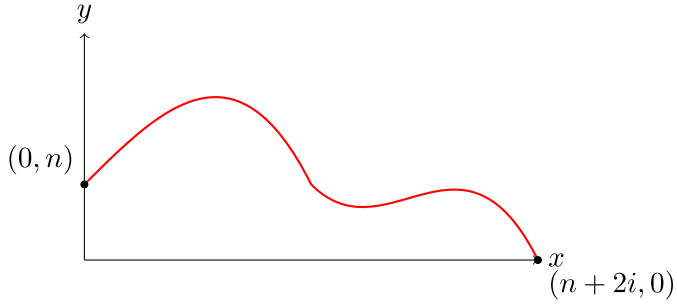
$$\tilde{p}_{n-1,m} = P(A\text{ 有}n\text{ 张票}B\text{ 有}m\text{ 张票}A\text{ 始终领先于}B|\text{ 首张票是}A\text{ 的}) = \frac{p_{n,m}}{\frac{n}{n+m}} = 1 - \frac{m}{n}$$

$$\Rightarrow \tilde{p}_{n,m} = 1 - \frac{m}{n+1}$$

□

习题 2 (1.27)**.** *考虑一个赌徒，每次赌博他分别以概率 p 赢一个单位或以概率 $1-p$ 输一个单位，他以 n 个单位开始赌博，求解：$P($他在破产前恰好赌了$n+2i$ 次$)$*

解答. 这里之所以要取条件，是因为 $E := \{$他在破产前恰好赌了$n+2i$ 次$\}$ 这个事件所处的概率空间，其构成并非全体票型的等可能排列路径（比如路径 $AABBA$ 和 $AABAA$ 的排列概率是不一样的），选票问题不可以直接套用。



我们可以倒着来看这个过程：

当倒过来看这个过程时，我们设想共有 A 和 B 两个候选人，当赌徒的钱变多一个单位时，我们归票给 A，当赌徒的钱变少一个单位的时候，我们归票给 B，由于在整个赌博过程中，题目所求的赌金路径不可以碰到 x 轴，这相当于要求 A 的选票始终领先于 B 的选票，于是我们得到：

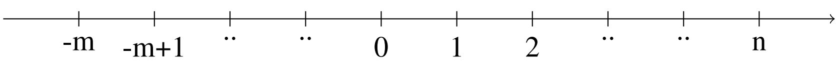
$$P(E) = p_{n,m}\binom{n+2i}{n+i}q^{n+i}p^i = \frac{n}{n+2i}\binom{n+2i}{n+i}q^{n+i}p^i$$

于是完成了本题的证明。

□

1.3 对称随机游动的首达时

一个粒子位于实数轴上的原点，其每一步都以相等的概率往左或者往右移动一个单位，记 $T_k =$ 从 0 出发首次到达 k 的时刻。则 $P(T_n < T_{-m}) = \frac{m}{n+m}$。



对于事件 $\{T_n < T_{-m}\}$ 我们可以做出如下的解释：

$$\begin{aligned}\{T_n < T_{-m}\} &= \{\text{粒子从0 出发，首次游到}m\text{ 之前曾游到过}n\}\\ &= \{\text{赌徒的赌金从0 出发，首次减少}m\text{ 元之前曾经增加过}n\text{ 元}\}\end{aligned}$$

习题 3 (1.25)**.** *考虑一个赌徒，他每次等可能地赢一个单位或者输一个单位。从 i 出发，证明赌徒的财富到达 0 或者 k 之一的期望时间是 $i(k-i)$.*

解答. 以 X_i 记从 i 出发，赌徒的财富首次到达 0 或者 k 所需要的期望时间，我们来证明 $M_i := \mathbb{E}(X_i) = i(k-i)$，由全概率公式以及两个边界条件，我们有：

$$\begin{aligned}&M_i = \frac{1}{2}(M_{i-1}+1) + \frac{1}{2}(M_{i+1}+1), \forall i = 1, ..., k-1\\ &M_0 = M_k = 0\end{aligned}$$

对全概率公式进行变形，我们有：

$$M_i = M_{i+1} - M_1 + 2i(*)\forall i = 1, ..., k-2$$
$$M_{k-1} = M_k - M_1 + 2(k-1)$$

将上面这些式子全都加起来，我们会得到：

$$M_1 = -(k-1)M_1 + 2(1+2+...+k-1)$$

从而解出 $M_1 = k-1$. 再将 $M_1 = k-1$ 代入 (*) 式, 我们会得到: $M_i = M_{i+1}-(k-1)+2i, \forall i = 1, ..., k-2$. 再对这些式子进行求和，我们会得到 $M_{i+1} = (i+1)(k-1-i), \forall i = 1, ..., k-2$

□

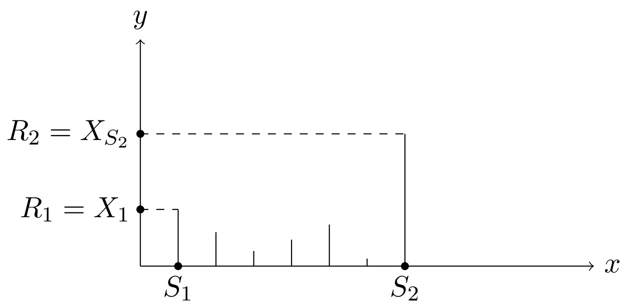
习题 4 (1.38)**.** 记 $T :=$ 所有状态都被访问过所需要的步数。求解 $\mathbb{E}(T)$

解答. 记 $X_i :=$ 从状态 0 出发，在已经访问过了 $\{1, 2, 3, ..., m\}$ 中 i 个不同的状态了之后，再访问第 $i+1$ 个新的状态所需要的附加步数。则：$T = \sum_{i=0}^{m-1} X_i$。现在来求解 $\mathbb{E}(X_i)$：

因为 X_i 相当于：一个赌徒从 1 块钱开始进入赌局，在他破产之前曾经赢到过 $\boldsymbol{i+2}$ 块钱时所需要的额外步数。因此套用 1.25 的结论，我们可以得到：$\mathbb{E}(X_i) = (i+2-1)\cdot 1 = i+1$，因此可以求解得到：$\mathbb{E}(T) = \frac{m(m+1)}{2}$. 从而完成了求解。 □

1.4 纪录值过程

记 $\{X_n\} iid \sim F$，于 $\{S_n\}$ 时刻产生纪录，即 $S_n := \min\{n : X_n > X_i, \forall i = 1, ..., n-1\}$。记纪录值的大小为 $\{R_n\}$.



则我们有如下的结论：

- $R_1 \sim F$,$P(R_n - R_{n-1} > t | R_{n-1} = s) = \frac{\bar{F}(t+s)}{\bar{F}(s)}$.

- $\tau_i := S_i - S_{i-1}$ 的分布与 F 无关.

- 记 $Y_n = -\log \bar{F}(X_n)$, 则 $\{Y_n\} iid \sim \exp(1)$, 进而记 $\{R_n^*\}$ 为 $\{Y_n\}$ 过程所对应的纪录值, 从而我们有：$R_n^* = -\log \bar{F}(R_n)$ (这是单调变换带来的)，并且，$R_1^*, R_2^* - R_1^*, ..., iid \sim \exp(1)$.

- 如果我们记 $m(t) = -\log \bar{F}(t)$，可以发现 $m(R_1), m(R_2) - m(R_1), ..., iid \sim \exp(1)$，从而纪录值过程其实是一个均值函数为 $m(t) = -\log \bar{F}(t)$ 的非齐次 poisson 过程.

- 纪录值过程中 R_n 的分布的求解：$P(R_n \le t) = \frac{1}{\Gamma(n)}(m(t))^{n-1}e^{-m(t)}\lambda(t)$. 可以用两种方法

来求解该分布。法一：利用 $R_n^* \sim \Gamma(n,1)$，且 $R_n = m^{-1}(R_n^*)$ 的事实来导出其分布。法二：设计一个非齐次 poisson 过程 $N(t) = \#\{n : R_n \le t\}$，可以得到均值函数 $m(t) = -\log \bar{F}(t)$，利用 $\{R_n \le t\} = \{N(t) \ge n\}$ 来导出其分布.

2 第二章部分知识点和结论

第二章我们关心这样的过程：$N(t) := \#\{n : S_n \le t\}$.

2.1 齐次泊松，非齐次泊松，复合泊松，条件泊松的定义

[齐次泊松] $N(t) := \#\{n : S_n \le t\}$ 被称为速率为 λ 的齐次泊松 (HPP)，若：

1. $N(0) = 0$.
2. $\forall t_1 < t_2 < s_1 < s_2, \{N(t_2) - N(t_1)\}$ 与$\{N(s_2) - N(s_1)\}$ 独立.
3. $N(t+s) - N(s) \sim poi(\lambda t)$.

这等价于：

1. $N(0) = 0$
2. $\forall 0 < t_1 < t_2 < s_1 < s_2, \{N(t_2) - N(t_1)\}$ 与$\{N(s_2) - N(s_1)\}$ 独立
3. $\forall 0 < t_1 < t_2, s \ge 0, N(t_2+s) - N(t_1+s) \overset{d}{=} N(t_2) - N(t_1)$
4. $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
5. $P(N(h) \ge 2) = o(h)$

还等价于：

1. $\{X_n\} iid \sim \exp(\lambda)$

[非齐次泊松] $N(t) := \#\{n : S_n \le t\}$ 被称为速率为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松 (HPP)，若：

1. $N(0) = 0$.
2. $\forall t_1 < t_2 < s_1 < s_2, \{N(t_2) - N(t_1)\}$ 与$\{N(s_2) - N(s_1)\}$ 独立.
3. $N(t+s) - N(s) \sim poi(m(t+s) - m(s)), m(t) := \int_0^t \lambda(s) ds$.

这等价于

1. $N(0) = 0$
2. $\forall 0 < t_1 < t_2 < s_1 < s_2, \{N(t_2) - N(t_1)\}$ 与$\{N(s_2) - N(s_1)\}$ 独立
3. $\forall t > 0, h > 0, P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$
4. $P(N(h) \ge 2) = o(h)$

[复合泊松] 若 $\{X_n\} iid$ 且该序列与 $N \sim poi(\lambda)$ 独立，则称 $W = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ 是个复合泊松过程。

[条件泊松] 若 $\Lambda \sim G$ 是个正值随机变量，且 $\left[N(t) \middle| \Lambda = \lambda\right] \sim HPP(\lambda)$，则称 $N(t)$ 是个条件泊松过程。

2.2 泊松过程的若干性质

2.2.1 泊松过程的独立增量性

很多情况下，泊松过程的独立增量性可以简化目标矩或者分布的计算，我们要学会**创造**可以使用独立增量性的形式。

习题 5 (2.4)**.** 令 $N(t)$ 是速率为 λ 的泊松过程，计算 $\mathbb{E}N(t)N(t+s)$

解答.

$\mathbb{E}N(t)N(t+s) = \mathbb{E}(N(t)(N(t+s)-N(t)) + \mathbb{E}\mathbb{N}^{\not\succeq}(\approx) = \mathbb{E}N(t)\mathbb{E}[N(t+s)-N(t)] + \mathbb{E}N^2(t) = \lambda t \cdot \lambda s + \lambda t + (\lambda t)^2$

□

习题 6 (2.39)**.** 对于复合 *poisson* 过程，计算 $Cov(X(s), X(t))$.

解答. 不妨设 $s \le t$，则:

$$
\begin{aligned}
& Cov(X(s), X(t)) \\
=& Cov(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \sum_{i=1}^{N(t)} X_i) \\
=& Cov(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \sum_{i=1}^{N(s)} X_i + \sum_{i=N(s)+1}^{N(t)} X_i) \\
=& Var(\sum_{i=1}^{N(s)} X_i) + 0 \\
=& Var(\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N(s)} X_i \big| N(s)]) + \mathbb{E}[Var(\sum_{i=1}^{N(s)} X_i \big| N(s))] \\
=& Var(N(s)\mathbb{E}X_1) + \mathbb{E}(N(s)Var(X_1)) \\
=& (\mathbb{E}X_1)^2 \lambda s + \lambda s Var(X_1) \\
=& \mathbb{E}[X_1^2]\lambda s
\end{aligned}
$$

□

2.2.2 泊松过程冲击到达时刻的条件分布

对于齐次泊松过程：$N(t) \sim HPP(\lambda)$，则:

$$
\begin{aligned}
\big[(S_1, ..., S_n) \big| N(t) = n\big] &\overset{d}{=} \big(U_{(1)}, U_{(2)}, ..., U_{(n)}\big) \\
\big[(S_1, ..., S_n) \big| S_{n+1} = t\big] &\overset{d}{=} \big(U_{(1)}, U_{(2)}, ..., U_{(n)}\big)
\end{aligned}
$$

其中 $U_1, ..., U_n iid \sim$ Uniform$(0, t)$，而 $U_{(i)}, \forall i = 1, ..., n$ 是其次序统计量。

对于非齐次泊松过程：$N(t) \sim NHPP(\lambda(t))$，则：

$$\big[(S_1,...,S_n)\big|N(t)=n\big] \overset{d}{=} \big(U_{(1)},U_{(2)},...,U_{(n)}\big)$$

其中 $U_1,...,U_n iid \sim f(x)=\frac{\lambda(x)}{m(t)}, \forall x \in (0,t)$，而 $U_{(i)}, \forall i=1,...,n$ 是其次序统计量。

习题 7 (命题 2.3.2 的另一个证明)**.** $N(t) \sim HPP(\lambda)$，在时刻 s 发生的事件以概率 $p(s)$ 被划入 I 型而成为 I 型事件，记 $N_i(t)$ 为时刻 t 及时刻 t 之前被划入 I 型事件的事件个数。求解 $N_i(t)$ 的分布。

解答.

$$
\begin{aligned}
N_i(t) := &\sum_{i=1}^{N(t)} \mathbf{1}\{\text{于}S_i\text{ 发生的事件被划入了}I\text{型}\}\\
\Rightarrow &P(N_i(t)=m)\\
=&\sum_{n=m}^{\infty} P(N_i(t)=m\big|N(t)=n)P(N(t)=n)\\
=&\sum_{n=m}^{\infty} P(\sum_{i=1}^{N(t)} \mathbf{1}\{\text{于}S_i\text{ 发生的事件被划入了}I\text{型}\}=m\big|N(t)=n)P(N(t)=n)\\
=&\sum_{n=m}^{\infty} P(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{\text{于}U_{(i)}\text{ 发生的事件被划入了}I\text{型}\}=m)P(N(t)=n)\\
=&\sum_{n=m}^{\infty} P(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{\text{于}U_i\text{ 发生的事件被划入了}I\text{型}\}=m)P(N(t)=n)\\
=&\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} p^m(1-p)^{n-m}P(N(t)=n)...p:=P(\text{于}U_1\text{ 发生的事件被划入了}I\text{型})\\
=&\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} p^m(1-p)^{n-m}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}\\
=&\sum_{n-m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t(1-p))^{n-m}}{(n-m)!}\frac{e^{-\lambda t}p^m}{m!}\\
=&e^{\lambda t(1-p)}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda tp)^m}{m!}\\
=&\frac{e^{-\lambda tp}(\lambda tp)^m}{m!}
\end{aligned}
$$

□

这一解答的过程可以用来处理很多第二章的课后习题。

习题 8 (2.32(b))**.** 假设工人按平均值为 $m(t)$ 的非时齐 *Poisson* 过程遭遇事故，又假设每个伤员在具有分布 F 的随机事件内无工作，令 $X(t)$ 是在时刻 t 无工作的工人数，计算 $\mathbb{E}[X(t)]$ 和 $Var[X(t)]$

解答.

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\mathbf{1}\{\text{在时刻}S_i\text{ 出事的工人在时刻}t\text{ 仍无工作}\}=\sum_{i=1}^{N(t)}\mathbf{1}\{Y_i\geq t-S_i\}$$

其中 Y_i 是第 i 个出事的工人处于无工作状态的持续事件，则 $Y_1,...,Y_n iid\sim F$.

$$[X(t)|N(t)=n]=[\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}\{Y_i\geq t-S_i\}\big|N(t)=n]=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}\{Y_i\geq t-U_i\}$$

其中 $U_1,...,U_n iid$with pdf: $f_{U_1}(x)=\frac{\lambda(x)}{m(t)}\mathbf{1}\{0<x<t\}$，记 $p=P(Y_1\geq t-U_1)$，则 $[X(t)|N(t)=n]\sim \text{Binom}(n,p)$，所以：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t)]&=\mathbb{E}N(t)\cdot p=m(t)\cdot p\\
Var[X(t)]&=\mathbb{E}\big[Var(X(t)\big|N(t))\big]+Var\big[\mathbb{E}(X(t)\big|N(t))\big]\\
&=\mathbb{E}\big[N(t)\cdot pq\big]+Var\big[N(t)\cdot p\big]\\
&=m(t)pq+p^2m(t)=m(t)\cdot p
\end{aligned}$$

其中

$$p=P(Y_1\geq t-U_1)=\int_0^t P(Y_1\geq t-u_1)\frac{\lambda(u_1)}{m(t)}du_1=1-\int_0^t F(t-s)\frac{\lambda(s)}{m(t)}ds=\int_0^t \bar{F}(t-s)\frac{\lambda(s)}{m(t)}ds$$

□

习题 9 (2.22). *假设汽车以 Poisson 速率 λ 进入单向行驶的无限长高速公路，第 i 辆车选一个速度 V_i 且按此速度行驶，假定这些 V_i 是具有相同分布 F 的独立的正值随机变量。推导在时刻 t 位于区间 (a,b) 中的汽车数的分布。*

解答.

$$\begin{aligned}
M(t)&=\text{在时刻}t\text{ 位于区间}(a,b)\text{ 的汽车数目}\\
&=\sum_{i=1}^{N(t)}\mathbf{1}\{\text{第}i\text{辆车在时刻}t\text{ 位于区间}(a,b)\}\\
&=\sum_{i=1}^{N(t)}\mathbf{1}\{a<(t-S_i)V_i<b\}
\end{aligned}$$

同样如法炮制上面的做法：

$$
\begin{aligned}
&P(M(t)=s)\\
=&P(\sum_{i=1}^{N(t)}\mathbf{1}\{a<(t-S_i)V_i<b\}=s)\\
=&\sum_{n=s}^{\infty}P(\sum_{i=1}^{N(t)}\mathbf{1}\{a<(t-S_i)V_i<b\}=s\big|N(t)=n)P(N(t)=n)\\
=&\sum_{n=s}^{\infty}P(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}\{a<(t-U_(i))V_i<b\}=s)P(N(t)=n)\\
=&\sum_{n=s}^{\infty}P(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}\{a<(t-U_i)V_i<b\}=s)P(N(t)=n)\\
=&\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}P(N(t)=n)...p:=P(a<(t-U_1)V_1<b)=\int_0^t\big[F(\frac{b}{t-u_1})-F(\frac{a}{t-u_1})\big]\frac{1}{t}du_1\\
=&\frac{(\lambda tp)^se^{-\lambda tp}}{s!}
\end{aligned}
$$

□

习题 10 (2.19)**.** 载顾客的公交车以速率为 λ 的 *Poisson* 过程到达一个有无穷条服务线的排队系统，以 G 记服务分布，一辆公交车以概率 $\alpha_j, j=1,2...$ 载有 j 个顾客，以 $X(t)$ 记在时刻 t 前完成服务的顾客数. 求 $\mathbb{E}[X(t)]$

解答. 记 M 为每趟公交车到站时，车上载的人数，这是个随机变量. 公交车每一次到站都是一次冲击，这些冲击可以按照公交车到站时车上的人数进行分类。记 $N(t)$ 记录时刻 t 及之前到达的公交车数目，我们有 $N(t)\sim poi(\lambda t)$，而 $N_j(t)$ 记在时刻 t 及之前到了几次载有 j 个人的公交车，由 poisson 分类性质，可以得到 $N_j(t)\sim poi(\lambda\alpha_j t)$，以 Y 记每个人的服务时间，则 $Y\sim G$，$S_m^{(j)}$ 是 $N_j(t)$ 的第 m 个冲击到达时刻。我们有：

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \mathbb{E}[X(t)]=\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{E}\Bigg[\sum_{m=1}^{N_j(t)}\sum_{i=1}^{j}\mathbf{1}\{Y_i\le t-S_m^{(j)}\}\Bigg]\\
=&\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{E}\Bigg\{\mathbb{E}\big[\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\mathbf{1}\{Y_i\le t-S_m^{(j)}\}\Bigg|N_j(t)=n\big]\Big|_{n=N_j(t)}\Bigg\}\\
=&\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{E}\Bigg\{\mathbb{E}\big[\sum_{m=1}^{n}j\mathbf{1}\{Y_1\le t-S_m^{(j)}\}\Bigg|N_j(t)=n\big]\Big|_{n=N_j(t)}\Bigg\}\\
&\text{...因为这些}\mathbf{1}\{Y_i\le t-S_m^{(j)}\}\forall i=1,...,j\text{ 都是独立同分布的}\\
=&\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{E}\Bigg\{j\cdot\mathbb{E}\big[\sum_{m=1}^{n}\mathbf{1}\{Y_1\le t-U_{(m)}\}\big]\Big|_{n=N_j(t)}\Bigg\}\\
=&\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{E}\Bigg\{j\cdot\mathbb{E}\big[\sum_{m=1}^{n}\mathbf{1}\{Y_1\le t-U_m\}\big]\Big|_{n=N_j(t)}\Bigg\}\\
=&\sum_{j=1}^{\infty}j\cdot\mathbb{E}\big[N_j(t)\big]\cdot P(Y_1\le t-U_1)\\
=&\sum_{j=1}^{\infty}j\cdot\lambda\alpha_j t\cdot\int_0^t G(t-u)\tfrac{1}{t}du
\end{aligned}
$$

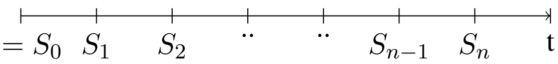
$= \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \lambda\alpha_j \cdot \int_0^t G(s)ds.$

于是我们得到了想要的结果。 □

3 第三章部分知识点和结论

3.1 更新过程的定义

对于一个标准的更新过程，其更新间隔为 $\{X_n\} iid \sim F$，我们要求 $F(0-) = P(X_1 < 0) = 0$（这表明更新间隔不可能为负），且 $F(0) = P(X = 0) < 1$（这使得该过程可以往前演化不会停住），记 $N(t) = \sup\{n : S_n \leq t, n \geq 0\}$.



对于更新过程我们有如下的 insights:

1. $F(0) < 1 \Rightarrow \mu := \mathbb{E}\big[X_n\big] > 0$
2. $\{X_n\} iid \Rightarrow$ 无论站在哪个更新点，等待下次更新所需要的时间分布都相同。
3. $\{N(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}$，$\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t\} \setminus \{S_{n+1} \leq t\}$
4. $\frac{S_n}{n} \to \mu > 0, a.s.$ 这个式子告诉我们，任意有限时间中不会有无穷多次更新发生

3.2 更新函数以及更新方程

对于更新函数 $m(t) := \mathbb{E}\big[N(t)\big]$，我们有如下的理解和结论：

1. 直观：在 $[0, t]$ 内发生的更新个数平均起来有多少个.
2. $m(t) = \mathbb{E}\big[N(t)\big] = \sum_{n=1}^{\infty} P(N(t) \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t).$ 其中 $F^{(n)}(t) := P(S_n \leq t)$
3. $m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)dF(x), \forall t \geq 0.$
4. $m'(t) = f(t) + \int_0^t m'(t-x)f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$. 直观来看，$m'(t)$ 是在刻画于时刻 t 有更新发生的概率堆积强度. 也就是说：
$$P\big((t, t+\Delta t) \text{ 中有更新发生}\big) = dm(t) = m'(t)\delta t + o(\Delta t)$$
5. $m(t) < \infty$. 也就是说，在有限的时间里，更新发生的期望个数是有限的.

3.3 停时

假设 $\{\mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ 是一列单调上升的 $\sigma - field$，即 $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}, \forall n \geq 1$（从而这是一个 **Filtration**）。而 T 是一个随机变量。若：$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \geq 1$，则称 T 是关于该 Filtration 的停

时。

在这门课中，该 $\mathcal{F}_n=\sigma(\{X_1,...,X_n\})$，其中 $\{X_n,n\ge 1\}iid$，即这一个 $\mathcal{F}_n$ 的意思是，随机变量 $X_1,...,X_n$ 所包含的所有信息。因此我们称 T 为关于 $\{X_n,n\ge 1\}$ 的停时，是指 $\{T=n\}$ 完全由 $\{X_1,...,X_n\}$ 决定。

停时（Stopping time）是随机过程这一领域中一个非常重要而且深奥的概念，我们这门课目前对停时的接触还比较简单：

1. 在更新过程中，$N(t)+1$ 是 $\{X_n\}$ 的停时.
2. 如果 T 是关于 $\{X_n,n\ge 1\}iid$ 的停时，则 $\mathbb{E}\big[\sum\limits_{i=1}^{T}X_i\big]=\mathbb{E}T\cdot\mathbb{E}X_1$

3.4 一些极限定理

以下是一些本章关键的极限定理的罗列：

1. $\lim\limits_{t\to\infty}N(t)=+\infty$
2. $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$（用 $S_{N(t)+1}$ 和 $S_{N(t)}$ 夹出来的）。其中 $\frac{1}{\mu}$ 是更新发生的速率，也就是说单位时间内大概平均有 $\frac{1}{\mu}$ 个更新发生.
3. $\lim\limits_{t\to\infty}m(t)=+\infty$
4. $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$（这个结论很不简单，需要用停时 + 分上下极限来夹着做）
5. **[Blackwell]**

$$\{X_n,n\ge 1\}iid\sim F,F\text{非格点，则：}\lim_{t\to}\big[m(t+a)-m(t)\big]=\frac{a}{\mu},\forall a>0.$$
$$\{X_n,n\ge 1\}iid\sim F,F\text{格点，则：}\lim_{n\to}\mathbb{E}\big[N(nd)-N(nd-)\big]=\frac{d}{\mu}$$

对 Blackwell 定理的直观理解：非格点的情形下，在 t 很大时，在长度为 a 的区间上更新发生个数的期望为 $\frac{a}{\mu}$；在格点的情形下，在 n 很大时，在 nd 这个格点上更新发生个数的期望为 $\frac{d}{\mu}$.

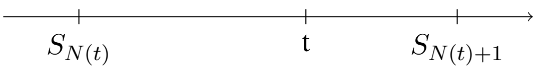
6. **[关键更新定理]** 假如 $\{X_n,n\ge 1\}iid\sim F$ 非格点，而 $h(x)$ 直接黎曼可积（$h(x)\ge 0$，单减，$\int_0^\infty h(x)dx<\infty$），则：

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)dm(x)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(s)ds$$

应用场景：对首次更新取条件，导出：$g(t)=h(t)+\int_0^t g(t-x)dF(x)$；又或者对 $S_{N(t)}$ 取条件，导出：$g(t)=h(t)+\int_0^t h(t-x)dm(x)$，最后令 $t\to\infty$，最终得到 $\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(s)ds$.

3.5 与 $S_{N(t)}$ 有关的结论

$S_{N(t)}$ 的意思是，时刻 t 之前最后一次更新发生的时刻点，这是一个带有随机下标的随机变量。记 $Y(t) := S_{N(t)+1} - t$，$A(t) = t - S_{N(t)}$：



则我们有如下的结论（**下面这些极限结论的导出，全部都是关键更新定理的练习!!!**）：

1. $\{A(t) > x\} = \{[t-x, t]$, 没有更新发生$\}$.
2. $\{Y(t) > x\} = \{(t, t+x]$, 没有更新发生$\}$
3. $S_{N(t)}$ 的分布：

   $F_{S_{N(t)}}(s) := P(S_{N(t)} \le s) = \bar{F}(t) + \int_0^s \bar{F}(t-y)dm(y), \forall 0 \le s \le t$

   $dF_{S_{N(t)}}(y) = \bar{F}(t-y)dm(y) = P($有更新发生于$(y, y+dy)$, 且其后一个更新间隔大于$t-y)$

   其中 $dF_{S_{N(t)}}(y)$ 表达了 t 之前最后一次更新于 y 处发生的概率堆积强度.
4. $\mathbb{E}\big[S_{N(t)+1}\big] = \mu(m(t)+1)$
5. 关于 $Y(t)$，我们有：
$$\lim_{t\to} P(Y(t) \le x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \bar{F}(y)dy$$
$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\big[Y^r(t)\big] = \frac{\mathbb{E}\big[X_1^{r+1}\big]}{\mu(r+1)}, \forall r = 1, 2, ...$$
6. 关于 $A(t)$，我们有：
$$\lim_{t\to} P(A(t) \le x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \bar{F}(y)dy$$
$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\big[A^r(t)\big] = \frac{\mathbb{E}\big[X_1^{r+1}\big]}{\mu(r+1)}, \forall r = 1, 2, ...$$
7. 关于 $X_{N(t)+1}$，我们有：
$$\lim_{t\to} P(X_{N(t)+1} \le x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x ydF(y)$$
$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\big[X^r_{N(t)+1}(t)\big] = \frac{\mathbb{E}\big[X_1^{r+1}\big]}{\mu}, \forall r = 1, 2, ...$$

习题 11 (3.3)**.** 证明：$P(X_{N(t)+1} \ge x) \ge \bar{F}(x)$，并在 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ 的时候算出来 $X_{N(t)+1}$ 的分布。

解答.

$$
\begin{aligned}
P(X_{N(t)+1} > x) =& P(X_{N(t)+1} > x | S_{N(t)} = 0) P(S_{N(t)} = 0) + \int_{(0,t]} P(X_{N(t)+1} > x | S_{N(t)} = y) dF_{S_{N(t)}}(y) \\
=& P(X_1 > x | X_1 > t) P(X_1 > t) + \int_{(0,t]} P(X > x | X > t - y) P(X > t - y) dm(y) \\
=& P(X_1 > x \vee t) + \int_{(0,t]} P(X > x \vee (t - y)) dm(y) \\
\geq& P(X_1 > x \vee t) \\
\geq& P(X_1 > x) \quad ...\{X_1 > x \vee t\} \subset \{X_1 > x\} \\
=& \bar{F}(x)
\end{aligned}
$$

在 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ 时，有:

$$
\begin{aligned}
P(X_{N(t)+1} > x) =& P(X_1 > x \vee t) + \int_{(0,t]} P(X > x \vee (t - y)) dm(y) \\
=& e^{-\lambda(x \vee t)} + \int_{(0,t]} e^{-\lambda(x \vee y)} \lambda dy \\
=& \begin{cases} e^{-\lambda t} + \int_{(0,x]} e^{-\lambda x} \lambda dy + \int_{(x,t]} e^{-\lambda y} \lambda dy, & x \leq t \\ e^{-\lambda x} + \int_0^t e^{-\lambda x} \lambda dy, & x > t \end{cases} \\
=& \begin{cases} (1 + \lambda x) e^{-\lambda x}, & x \leq t \\ (1 + \lambda t) e^{-\lambda x}, & x > t \end{cases} \\
=& \big[1 + \lambda(x \wedge t)\big] e^{-\lambda x}
\end{aligned}
$$

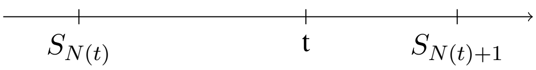
从而我们有: $P(X_{N(t)+1} \leq x) = 1 - P(X_{N(t)+1} > x) = 1 - \big[1 + \lambda(x \wedge t)\big] e^{-\lambda x}$.

□

习题 12 (3.14)**.** 说明为何:

$$\{A(t) > x\} = \{[t - x, t], \text{没有更新发生}\}$$
$$\{Y(t) > x\} = \{(t, t + x], \text{没有更新发生}\}$$

(注意区间端点的开闭)



解答. $\{A(t) > x\} \subset \{[t - x, t], \text{没有更新发生}\}$ 的说明:

如果寿命严格大于 x, 此时在 $t - x$ 和 t 都不可以有事件发生, 因为前者将会导致 $A(t) = x$, 后者也会导致 $A(t) = 0$.

$\{[t - x, t], \text{没有更新发生}\} \subset \{A(t) > x\}$ 的说明:

如果 $[t-x,t]$ 都没有事件发生，说明时刻 t 以及时刻 t 之前最后一次更新发生的时刻必须处于该闭区间之外，这意味着 $\{A(t)>x\}$.

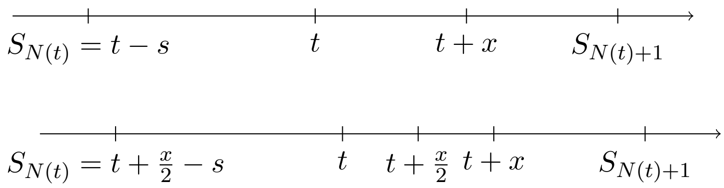
$\{Y(t)>x\}\subset\{(t,t+x]$, 没有更新发生$\}$ 的说明：

如果剩余寿命 $t-S_{N(t)+1}>x$, 这意味着 $t+x$ 不可以有更新发生, 否则将会导致 $Y(t)=x$, 然而在时刻 t 却可以有更新发生，此时虽然会导致 $S_{N(t)}=t$，但是只要在这之后的一次更新发生在时刻点 $t+x$ 之后，就可以满足 $Y(t)>x$ 的条件。

$\{(t,t+x]$, 没有更新发生$\}\subset\{Y(t)>x\}$ 的说明：

如果在这一区间上都没有更新发生, 这将迫使时刻 t 之后的首次更新在时刻点 $t+x$ 之外, 这自然会导致 $\{Y(t)>x\}$. 由此我们就说明了这个结论。 □

习题 13 (3.15)**.** 求解：$P(Y(t)>x|A(t)=s)$ 与 $P(Y(t)>x|A(t+\frac{x}{2})=s)$



解答.

$$P(Y(t)>x|A(t)=s)=P(X-s>x|X>s)=\frac{\bar{F}(s+x)}{\bar{F}(s)},\quad\forall 0<s<t$$

$$P(Y(t)>x|A(t+\frac{x}{2})=s)=P(Y(t+\frac{x}{2})>\frac{x}{2}|A(t+\frac{x}{2}))=\frac{\bar{F}(s+\frac{x}{2})}{\bar{F}(\frac{x}{2})},\quad\forall\frac{x}{2}<s$$

如果这题是书上的版本：$P(Y(t)>s|A(t+\frac{x}{2})=s)$，算出来应该是：$\frac{\bar{F}(2s-\frac{x}{2})}{\bar{F}(s)}$, $\quad\forall\frac{x}{2}<s$. □

3.6 关键更新定理的应用例子

3.26 3.27 关键更新定理的应用关键是构造和识别直接黎曼函数 $h(x)$。下面我们来看几个使用关键更新定理的例子：

习题 14 (10.2.3[1])**.** 对于更新过程 $N(t)$，证明：

$$\lim_{t\to}P(Y(t)\le x)=\frac{1}{\mu}\int_0^x\bar{F}(y)dy$$

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\big[Y^r(t)\big]=\frac{\mathbb{E}\big[X_1^{r+1}\big]}{\mu(r+1)},\forall r=1,2,...$$

解答. (a)

$$
\begin{aligned}
P(Y(t)>x) &= P(Y(t)>x|S_{N(t)}=0)P(S_{N(t)}=0)+\int_{(0,t]}P(Y(t)>x|S_{N(t)}=y)dF_{S_{N(t)}}(y)\\
&= P(X>t+x|X>t)P(X>t)+\int_{(0,t]}P(X>t-y+x|X>y)\bar F(t-y)dm(y)\\
&= P(X>t+x)+\int_{(0,t]}P(X>t+x-y)dm(y)\\
&= h(t)+\int_{(0,t]}h(t-y)dm(y)\quad ...h(t):=P(X>t+x)\text{ 考试的时候要验证其直接黎曼可积性}\\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(s)ds=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty P(X>s+x)ds\\
&\overset{s+x=l}{=} \frac{1}{\mu}\int_x^\infty P(X>l)dl\\
&= \frac{1}{\mu}\int_x^\infty \bar F(y)dy.
\end{aligned}
$$

所以：$\lim\limits_{t\to} P(Y(t)\le x)=\frac{1}{\mu}\int_0^x\bar F(y)dy$. 接下来我们来做 (b)：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[Y^r(t)\big] &= \mathbb{E}\big[Y^r(t)|S_{N(t)}=0\big]P(S_{N(t)}=0)+\int_{(0,t]}\mathbb{E}\big[(X-t+x)^r|X>t-x\big]dF_{S_{N(t)}}(y)\\
&= \mathbb{E}\big[(X_1-t)^r|X_1>t\big]P(X_1>t)+\int_{(0,t]}\mathbb{E}\big[(X-t+x)^r|X>t-x\big]\bar F(t-x)dm(x)\\
&= \mathbb{E}\big[(X_1-t)^r\mathbf{1}\{X_1>t\}\big]+\int_{(0,t]}\mathbb{E}\big[(X-t+x)^r\mathbf{1}\{X>t-x\}\big]dm(x)\\
&= h(t)+\int_0^t h(t-x)dm(x)\quad ...h(s):=\mathbb{E}\big[(X_1-s)^r\mathbf{1}\{X_1>s\}\big]\\
&\overset{t\to\infty}{\to} 0+\frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(s)ds\\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty\mathbb{E}\big[(X-s)^r\mathbf{1}\{X>s\}\big]ds\\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty\int_s^\infty(x-s)^rdF(x)ds\\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty\int_0^x(x-s)^rdsdF(x)\\
&= \frac{\mathbb{E}\big[X_1^{r+1}\big]}{\mu(r+1)}
\end{aligned}
$$

□

习题 15. 对于更新过程 $N(t)$，证明：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to} P(X_{N(t)+1}\le x)=\frac{1}{\mu}\int_0^x ydF(y)\\
&\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\big[X^r_{N(t)+1}(t)\big]=\frac{\mathbb{E}\big[X_1^{r+1}\big]}{\mu},\forall r=1,2,...
\end{aligned}
$$

解答. (a)

$$
\begin{aligned}
P(X_{N(t)+1} > x) =& P(X_{N(t)+1} > x | S_{N(t)} = 0) P(S_{N(t)} = 0) + \int_{(0,t]} P(X_{N(t)+1} > x | S_{N(t)} = y) dF_{S_{N(t)}}(y) \\
=& P(X_1 > x | X_1 > t) P(X_1 > t) + \int_{(0,t]} P(X > x | X > t-y) P(X > t-y) dm(y) \\
=& P(X_1 > x \vee t) + \int_{(0,t]} P(X > x \vee (t-y)) dm(y) \\
=& h(t) + \int_{(0,t]} h(t-y) dm(y) \\
\overset{t\to\infty}{\to}& \frac{1}{\mu} \int_0^\infty h(s) ds \\
=& \frac{1}{\mu} \int_0^\infty P(X > x \vee s) ds \\
=& \frac{1}{\mu} \int_0^x P(X > x) ds + \frac{1}{\mu} \int_x^\infty P(X > s) ds \\
=& \frac{1}{\mu} x \bar{F}(x) + \frac{1}{\mu} \int_x^\infty \int_s^\infty dF(y) ds \\
=& \frac{1}{\mu} x \bar{F}(x) + \frac{1}{\mu} \int_x^\infty \int_x^y ds dF(y) \\
=& \frac{1}{\mu} x \bar{F}(x) + \frac{1}{\mu} \int_x^\infty (y-x) dF(y) \\
=& \frac{1}{\mu} \int_x^\infty y dF(y)
\end{aligned}
$$

所以可以得到：$\lim\limits_{t\to} P(X_{N(t)+1} \le x) = 1 - P(X_{N(t)+1} > x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x y dF(y)$

接下来我们来做 (b)：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[X^r_{N(t)+1}(t)\big] =&\mathbb{E}\big[X^r_{N(t)+1}|S_{N(t)}=0\big]P(S_{N(t)}=0)+\int_{(0,t]}\mathbb{E}\big[X^r_{N(t)+1}|S_{N(t)}=y\big]dF_{S_{N(t)}}(y)\\
=&\mathbb{E}\big[X_1^r|X_1>t\big]P(X_1>t)+\int_{(0,t]}\mathbb{E}\big[X^r|X>t-y\big]\bar{F}(t-y)dm(y)\\
=&\mathbb{E}\big[X_1^r\mathbf{1}\{X_1>t\}\big]+\int_{(0,t]}\mathbb{E}\big[X^r\mathbf{1}\{X>t-y\}\big]dm(y)\\
=&h(t)+\int_{(0,t]}h(t-y)dm(y)\quad ...h(s):=\mathbb{E}\big[X_1^r\mathbf{1}\{X_1>s\}\big]\\
\overset{t\to\infty}{\to}&\frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(s)ds\\
=&\frac{1}{\mu}\int_0^\infty\int_s^\infty x^r dF(x)ds\\
=&\frac{1}{\mu}\int_0^\infty\int_0^x x^r ds dF(x)\\
=&\frac{1}{\mu}\int_0^\infty x^{r+1}dF(x)\\
=&\frac{\mathbb{E}\big[X_1^{r+1}\big]}{\mu}
\end{aligned}$$

于是我们就完成了证明。

□

3.7 更新酬劳定理及其应用

设 $\{(X_n,R_n,n\geq 1)iid\}$，其中 $\{X_n,n\geq 1\}$ 是更新过程 $N(t)$ 的间隔，而 $\{R_n\}$ 表示在第 n 个更新发生时得到的酬劳。记 $R(t):=\sum\limits_{j=1}^{N(t)}R_j$，则称 $R(t)$ 为更新酬劳过程。更新酬劳过程通过特定的酬劳设计，使得离散和连续的过程都可以套用，对于更新酬劳过程，我们有如下几个有用的结论：

1. $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{R(t)}{t}=\frac{\mathbb{E}\big[R_1\big]}{\mathbb{E}\big[X_1\big]},a.s.$（强大数律得到）
2. $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{E}\big[R_{N(t)+1}\big]=\frac{\mathbb{E}\big[R_1X_1\big]}{\mathbb{E}\big[X_1\big]}$
3. $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}\big[R(t)\big]}{t}=\frac{\mathbb{E}\big[R_1\big]}{\mathbb{E}\big[X_1\big]}$
4. $\forall a>0,\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{E}\big[R(t+a)-R(t)\big]=a\frac{\mathbb{E}\big[R_1\big]}{\mathbb{E}\big[X_1\big]}$

习题 16 (3.27)**.** 对于更新酬劳过程，我们假设 $\{X_n,n\geq 1\}iid\sim F$ 非格点，且任何函数都直接黎曼可积，求证：$\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{E}\big[R_{N(t)+1}\big]=\frac{\mathbb{E}\big[R_1X_1\big]}{\mathbb{E}\big[X_1\big]}$

解答.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[R_{N(t)+1}\big]\\
=&\mathbb{E}\big[R_{N(t)+1}|S_{N(t)}=0\big]P(S_{N(t)}=0)+\int_{(0,t]}\mathbb{E}\big[R_{N(t)+1}|S_{N(t)}=y\big]P(S_{N(t)}=y)dF_{S_{N(t)}}(y)\\
=&\mathbb{E}\big[R_1|X_1>t\big]P(X_1>t)+\int_{(0,t]}\mathbb{E}\big[R|X>t-y\big]\bar{F}(t-y)dm(y)\\
=&\mathbb{E}\big[R_1\mathbf{1}\{X_1>t\}\big]+\int_{(0,t]}\mathbb{E}\big[R\mathbf{1}\{X>t-y\}\big]dm(y)\\
=&h(t)+\int_{(0,t]}h(t-y)dm(y)\quad ...h(s):=\mathbb{E}\big[R_1\mathbf{1}\{X_1>s\}\big]\\
\overset{t\to\infty}{\to}&\frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(s)ds\\
=&\frac{1}{\mu}\int_0^\infty\mathbb{E}\big[R\mathbf{1}\{X>s\}\big]ds\\
=&\frac{1}{\mu}\int_0^\infty\left[\int_{\{(r,x):x>s,r\geq 0\}}rdF_{(R,x)}(r,x)\right]ds\\
=&\frac{1}{\mu}\int_{\{(r,x):x\geq 0,r\geq 0\}}r\left[\int_0^x ds\right]dF_{(R,x)}(r,x)\\
=&\frac{1}{\mu}\int_{\{(r,x):x\geq 0,r\geq 0\}}rxdF_{(R,x)}(r,x)\\
=&\frac{\mathbb{E}\big[R_1X_1\big]}{\mathbb{E}\big[X_1\big]}
\end{aligned}
$$

于是我们完成了证明。 □

习题 17 (3.26)**.** 证明：$\forall a>0,\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{E}\big[R(t+a)-R(t)\big]=a\frac{\mathbb{E}[R_1]}{\mathbb{E}[X_1]}$

解答. 注意到：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[R(t+a)\big]=&\mathbb{E}\big[\sum_{i=1}^{N(t+a)}R_i\big]\\
=&\mathbb{E}\big[\sum_{i=1}^{N(t+a)+1}R_i\big]-\mathbb{E}\big[R_{N(t+a)+1}\big]\quad \text{...使得}Wald\text{ 等式可以使用}\\
=&\mathbb{E}\big[N(t+a)+1\big]\mathbb{E}\big[R_1\big]-\mathbb{E}\big[R_{N(t+a)+1}\big]\\
=&\big[m(t+a)+1\big]\mathbb{E}\big[R_1\big]-\mathbb{E}\big[R_{N(t+a)+1}\big]
\end{aligned}
$$

同理可以得到：

$$
\mathbb{E}\big[R(t)\big]=\big[m(t)+1\big]\mathbb{E}\big[R_1\big]-\mathbb{E}\big[R_{N(t)+1}\big]
$$

因此：

$$\mathbb{E}\big[R(t+a)-R(t)\big]=\big[m(t+a)-m(t)\big]\mathbb{E}\big[R_1\big]-\mathbb{E}\big[R_{N(t+a)+1}+\mathbb{E}\big[R_{N(t)+1}\big]$$

令 $t\to\infty$，利用 Blackwell 定理以及 3.27 立得结论. $\square$

3.7.1 使用更新酬劳做花样问题

习题 18 (3.24)**.** *从 52 张扑克牌中每次有放回地抽一张出来，求直到连续出现四张同花色的牌时所抽牌的期望数.*

解答. 设计这样一个更新过程，视："不借助前面任何花样而自己独立产生了一个花样出来"为一个更新点，记 $\{T_n,n\geq 1\}$ 表示更新间隔，此时 $\mathbb{E}\big[T_1\big]$ 就是我们要求解的目标.

再设计这一个给钱过程，在任何一个时刻点，若产生了一个花样出来，我们就给这个过程一块钱. 由于过程的演化是离散时刻点演化的，离散版本的更新酬劳定理为：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}\big[R(n)\big]}{n}=\frac{\mathbb{E}\big[R\big]}{\mathbb{E}\big[T\big]}$$

一方面：

$$\mathbb{E}\big[R(n)\big]=\sum_{i=1}^{n}P(\text{在时刻}n\text{ 出现了一个花样出来})=0+0+0+\sum_{i=4}^{n}4\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$$

另一方面：

$$\mathbb{E}\big[R\big]=1+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4^2}\cdot 1+\frac{1}{4^3}\cdot 1.$$

因此代入立得：$\mathbb{E}\big[T\big]=85$. $\square$

4 补充题

习题 19 (10.3.4[1])**.** *求解：*$\mathbb{E}\big[Y(t)|A(t)=x\big]$

解答. 由于：$P(Y(t)>y|A(t)=x)=P(X>x+y|X>x)=\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)}$ 从而：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[Y(t)|A(t)=x\big]\\
=&\int_0^\infty P(Y(t)>y|A(t)=x)dy\\
=&\int_0^\infty \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)}dy\\
=&\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_0^\infty \big[\int_{x+y}^\infty dF(t)\big]dy\\
=&\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty \int_0^{t-x} dydF(t)\\
=&\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty (t-x)dF(x)\\
=&\frac{1}{\bar{F}(x)}\mathbb{E}\big[(X_1-x)\mathbf{1}\{X_1>x\}\big]\\
=&\frac{1}{\bar{F}(x)}\mathbb{E}\big[(X_1-x)^+\big]
\end{aligned}$$

□

习题 20 (10.3.5)**.** 对于更新过程 $N(t)$，记 $\mathbb{E}X_1=\mu<\infty, Var(X_1)=\sigma^2<\infty$，证明：

(a) $Var(S_{N(t)+1}-\mu(N(t)+1))=\sigma^2(m(t)+1)$

(b) $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{Var(N(t)+1)}{t}=\frac{\sigma^2}{\mu^3}$

解答. (a)

$$\begin{aligned}
&Var(S_{N(t)+1}-\mu(N(t)+1)|N(t)=n)=(n+1)\sigma^2\\
&\mathbb{E}\big[S_{N(t)+1}-\mu(N(t)+1)|N(t)=n\big]=0\\
\Rightarrow &Var(S_{N(t)+1}-\mu(N(t)+1))=\sigma^2(m(t)+1)=\mathbb{E}\big[(N(t)+1)\sigma^2\big]+0=\sigma^2(m(t)+1).
\end{aligned}$$

(b) 注意到：

$$\begin{aligned}
\mu(N(t)+1)=&-\big[S_{N(t)+1}-\mu(N(t)+1)\big]+S_{N(t)+1}\\
=&Y(t)+t-\big[S_{N(t)+1}-\mu(N(t)+1)\big]
\end{aligned}$$

两边同时取方差，我们可以得到：

$$\begin{aligned}
&\mu^2Var(N(t)+1)\\
=&VarY(t)+Var\big[S_{N(t)+1}-\mu(N(t)+1)\big]-Cov\big(Y(t),S_{N(t)+1}-\mu(N(t)+1)\big)\\
=&VarY(t)+\sigma^2(m(t)+1)-Cov\big(Y(t),S_{N(t)+1}-\mu(N(t)+1)\big)
\end{aligned}$$

一方面，我们有：

$$0\le\frac{VarY(t)}{t}\le\frac{\mathbb{E}\big[Y^2(t)\big]+\mathbb{E}\big[Y(t)\big]^2}{t}\overset{t\to\infty}{\to}0.$$

另一方面，我们有：

$$0 \leq \frac{|Cov\big(Y(t), S_{N(t)+1} - \mu(N(t)+1)\big)|}{t} \leq \frac{\sqrt{Var(Y(t)Var\big(S_{N(t)+1} - \mu(N(t)+1)\big)}}{t} \overset{t\to\infty}{\to} 0.$$

综合起来，就可以得到：$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{Var(N(t)+1)}{t} = \frac{\sigma^2}{\mu^3}$ □