数理方程备课本

授课老师：许雷叶;邮箱：leoasa@mail.ustc.edu.cn

第一章、数学物理方程

0.1 三类方程的推导

一、弦振动方程（一维波动方程）。

理想化假设：

(1) 理想弦：细、柔软且线密度$\rho(x)$，躺在x轴上，处于xu平面内，运动方向垂直于x轴，$u = u(t,x)$为状态函数；

(2) 弦处于紧绷状态，张力很大，张力满足胡克定律（例如：一根橡皮筋拉长使其处于紧绷状态，则张力来源于无振动时的长度变化以及弦震动产生的附加，后者相比前者可以忽略不计）；

(3) 弦做微小上下震动，$|u| \ll 1, u_x \ll 1$；

(4) 所受外力非常小，合力为竖直方向，力密度为$g(t,x)$。

取一段弧线$[x, x + \triangle x]$做受力分解，其竖直方向合力

$$= T_1(t, x + \triangle x)u_x(t, x + \triangle x) - T_1(t,x)u_x(t,x) + \int_x^{x+\triangle x} g(t,s)ds.$$

其中$T_1(t,s)$为t时刻张力在s点的分量，因为弦只在竖直方向有运动，该值与s无关，为$T_1(t)$。竖直方向合力

$$= T_1(t)u_x(t, x + \triangle x) - T_1(t)u_x(t,x) + \int_x^{x+\triangle x} g(t,s)ds.$$

利用牛顿-莱布尼兹公式，竖直方向合力为

$$\int_x^{x+\triangle x} T_1(t)u_{xx}(t,s) + g(t,s)ds.$$

由牛顿第二定律$F = ma$，上式等于

$$\int_x^{x+\triangle x} \rho(s)u_{tt}(t,s)ds.$$

由所取弧线的任意性，我们得到

$$u_{tt} = \frac{T_1(t)}{\rho}u_{xx} + \frac{g}{\rho}.$$

最后$T_1(t)$ 近似于弦本身的张力T。得到近似公式

$$u_{tt} = \frac{T}{\rho}u_{xx} + \frac{g}{\rho}.$$

设$a = a(x) = \sqrt{T/\rho}, f(t,x) = g/\rho$，我们得到

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f.$$

一般来说，我们总是会假定ρ为常数，因而a为常数。

二、热传导方程。

理想化假设：

(1) 介质各向同性且均匀分布（比热c，密度ρ，热传导系数k）；

(2) $dQ=-k(x,y,z)\cdot\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}dSdt$，其中$\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}=(u_x,u_y,u_z)\cdot\vec{n}$，$u$为温度；

(3) 内部热源，设为$g(t,x,y,z)$（产生热量密度）。

取一个方体$(x,x+\triangle x)\times(y,y+\triangle y)\times(z,z+\triangle z)$以及时间段$[t,t+\triangle t]$，先计算从方体的左边一个面$\{x\}\times(y,y+\triangle y)\times(z,z+\triangle z)$ 流入方体的热量，法向为$(1,0,0)$，因而左边一个面流入方体的热量为

$$Q_{\text{左}}=\int_t^{t+\triangle t}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}-ku_x(s,x,v,w)dvdwds.$$

再计算从方体的右边一个面$\{x+\triangle x\}\times(y,y+\triangle y)\times(z,z+\triangle z)$流入方体的热量，法向为$(-1,0,0)$，因而右边一个面流入方体的热量为

$$Q_{\text{右}}=\int_t^{t+\triangle t}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}ku_x(s,x+\triangle x,v,w)dvdwds.$$

从而左右两个面合计流入热量为

$$\begin{aligned}Q_{\text{左}}+Q_{\text{右}}&=\int_t^{t+\triangle t}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}ku_x(s,x+\triangle x,v,w)-ku_x(s,x,v,w)dvdwds\\&=\int_t^{t+\triangle t}\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}ku_{xx}(s,u,v,w)dudvdwds.\end{aligned}$$

同理

$$Q_{\text{前}}+Q_{\text{后}}=\int_t^{t+\triangle t}\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}ku_{yy}(s,u,v,w)dudvdwds.$$

$$Q_{\text{上}}+Q_{\text{下}}=\int_t^{t+\triangle t}\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}ku_{zz}(s,u,v,w)dudvdwds.$$

总计方体内热量变化

$$\int_t^{t+\triangle t}\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})(s,u,v,w)+g(s,u,v,w)dudvdwds.$$

由热力学定律所需热量，即上式等于

$$\begin{aligned}&\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}c\rho(u(t+\triangle t,u,v,w)-u(t,u,v,w))dudvdw\\=&\int_t^{t+\triangle t}\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}c\rho u_t(s,u,v,w)dudvdwds.\end{aligned}$$

既然我们所取方体是任意的，我们有

$$u_t = \frac{k}{c\rho}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{g}{c\rho}.$$

设$a = \sqrt{k/c\rho}, f = g/c\rho$，热传导方程为

$$u_t = \frac{k}{c\rho}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{g}{c\rho} = a^2\Delta_3 u + f.$$

三、泊松方程（静电场的场势方程）。

理想化假设：

(1) 介质各向同性且均匀分布（介电常数设为ε）；

(2) 电荷密度，设为$\rho(x, y, z)$。

设$\vec{E}$ 为电场，则与电势有关系$\nabla_3\varphi = -\vec{E}$。推导依赖高斯定律：通过封闭曲面的电通量=封闭曲面内部载荷除以介电常数。任意封闭曲面S，有

$$\int \nabla_3 \cdot \vec{E} dV \overset{\text{高斯公式}}{=} \int \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int \frac{\rho}{\varepsilon} dV.$$

从而由封闭曲面选取的任意性，

$$-\Delta_3\varphi = \nabla_3 \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Leftrightarrow \Delta_3\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

我们也可以用推导热方程的办法推导泊松方程。取一个方体$(x, x + \triangle x) \times (y, y + \triangle y) \times (z, z + \triangle z)$，设$\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$。计算方体的左边一个面$\{x\} \times (y, y + \triangle y) \times (z, z + \triangle z)$的电场通量为

$$\Phi_{左} = \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} E_1(x, v, w) dv dw.$$

再计算从方体的右边一个面$\{x + \triangle x\} \times (y, y + \triangle y) \times (z, z + \triangle z)$的电场通量

$$\Phi_{右} = \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} E_1(x + \triangle x, v, w) dv dw.$$

从而左右两个面跑出方体的通量为

$$\begin{aligned}\Phi_{右} - \Phi_{左} &= \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} E_1(x + \triangle x, v, w) - E_1(x, v, w) dv dw \\ &= \int_x^{x+\triangle x} \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} (E_1)_x(u, v, w) du dv dw.\end{aligned}$$

同理

$$\Phi_{后} - \Phi_{前} = \int_x^{x+\triangle x} \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} (E_2)_y(u, v, w) du dv dw.$$

$$\Phi_{上} - \Phi_{下} = \int_x^{x+\triangle x} \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} (E_3)_z(u, v, w) du dv dw.$$

总计离开方体的电通量为

$$\begin{aligned}&\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}\left((E_1)_x+(E_2)_y+(E_3)_z\right)(u,v,w)dudvdw\\=&\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}\nabla_3\cdot\vec{E}(u,v,w)dudvdw.\end{aligned}$$

由高斯定律，上式等于

$$\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}\frac{\rho}{\varepsilon}dudvdw$$

既然我们所取方体是任意的，我们有

$$\nabla_3\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

代入关系式$\nabla_3\varphi=-\vec{E}$。得到

$$\Delta_3\varphi=-\nabla_3\cdot\vec{E}=-\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

除此之外，泊松方程也可以描述某些平衡态，比如处于热平衡的方程。

0.2 定解条件

一般来说，哪怕是最最简单的偏微分方程，其解都有无数个，而且通常包含着任意函数。例如：求$u_t=0$的通解，其中$u=u(t,x)$，答案为

$$u=f(x)$$

f为任意函数。为了让解唯一，我们必须加限制条件，称为定解条件。合起来称为定解问题

$$\begin{cases}\text{泛定方程：描述一般物理规律的数学物理方程}\\\text{定解条件：使方程有唯一解的各种条件}\end{cases}$$

(1) 泛定方程：波动方程，热方程，泊松方程，其他方程(KDV方程，冲击波方程等)；

(2) 定解条件：

  (a) 初始条件:系统的初始状态；

  (b) 边界条件:系统的边界状态，分为Dirichlet条件(I类)，Neumann条件(II 类)，混合边界条件(Robin条件,III 类)，自然边界条件，周期边界条件等。

  I 类 给出了状态函数在边界的取值，可以和时间有关；

  II 类 给出了状态函数在边界法向(垂直于边界，远离区域)导数的取值，可以和时间有关；

   关于状态函数u 在边界法向$\vec{n}$ 导数$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=\nabla u\cdot\vec{n}=(u_x,u_y,u_z)\cdot\vec{n}$，

   一维: $\pm u_x$，取决于$\vec{n}$ 选取；

   二维: $(u_x,u_y)\cdot(n_1,n_2)=n_1u_x+n_2u_y$;

   三维: $(u_x,u_y,n_z)\cdot(n_1,n_2,n_3)=n_1u_x+n_2u_y+n_3u_z$。

  III 类 上述两的线性组合；

自然边界条件 自然满足的边界条件，例如状态函数取值必须有界等；

周期边界条件 状态函数取值周期性发生变化，往往出现在柱坐标系和球坐标系中。

在这一节中，我们只考虑初始条件和I，II，III类边界条件。

只有初始条件的叫初始问题；只有边界条件的叫边界问题；既有初始条件又有边界条件的称为混合问题。

弦振动方程，热方程和泊松方程的定解条件。

(1) 弦振动方程：$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f$.

(a) 初始条件（初始问题）：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, t > 0, -\infty < x < \infty \\ u\mid_{t=0}(x) = g_1(x), u_t\mid_{t=0}(x) = g_2(x) \end{cases}$$

(b) 边界条件（混合问题）：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, 0 < x < l, t > 0 \\ u(t,0) = A(t), u_x(t,l) = B(t) \Longleftarrow \text{(边界条件)} \\ u\mid_{t=0}(x) = g_1(x), u_t\mid_{t=0}(x) = g_2(x) \Longleftarrow \text{(初始条件)} \end{cases}$$

例子：常见边界条件

(I) Dirichlet边界条件：端点运动状态：$u(t,0) = A(t)$；特别地，端点固定在零点：$u(t,0) = 0$；

(II) Neumann边界条件：端点竖直方向自由运动，受竖直方向力$F(t)$：则由受力分解，$Tu_x\mid_{x=0} + F(t) = 0$，即$u_x(t,0) = -\frac{F(t)}{T}$；特别地，$F(t) = 0$时，$u_x(t,0) = 0$；

(III) 混合边界条件：端点接了一个竖直的弹簧，弹性系数为k：由受力分解，$Tu_x\mid_{x=0} - ku = 0$，即$u_x(t,0) - \frac{k}{T}u(t,0) = 0$。

例子1. *一根长为l的理想弦躺在x轴上，张力为T，一端固定$x = 0$处，另一端$x = l$端点接了一个竖直的弹簧，弹性系数为k。初始位置为$g_1(x)$，初始速度$g_2(x)$。写出定解问题。*

解.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0 \\ u(t,0) = 0, u_x(t,0) + \frac{k}{T}u(t,0) = 0 \Longleftarrow \text{(边界条件)} \\ u\mid_{t=0}(x) = g_1(x), u_t\mid_{t=0}(x) = g_2(x) \Longleftarrow \text{(初始条件)} \end{cases}$$

(2) 一维细杆热方程：我们认为与x垂直的界面上的温度是一样的，热源也是一样的，因而$u_{yy} = u_{zz} = 0$，可以在热传导方程中无视y与z。即：$u_t = a^2 u_{xx} + f$.（二维类似）

(a) 初始条件（初始问题）：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f, t > 0, -\infty < x < +\infty \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

(b) 热方程边界条件（混合问题）：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f, \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u(t,0) = A(t), u_x(t,l) = B(t) \Longleftarrow \text{(边界条件)} \\ u\mid_{t=0}(t,x) = g(x) \Longleftarrow \text{(初始条件)} \end{cases}$$

例子：常见边界条件（记住一点，热量都是从高温往低温流，这样就不会搞错正负号了!）

(I) Dirichlet条件：$u(t,0) = g(t)$，特别地，恒温：$u(t,0) = T$；

(II) Neumann条件：

(α) 绝热：$u_x(t,0) = 0$；

(β) 左端有热量$q(t)$ 流入：$\frac{dQ}{dSdt} = -ku_x\mid_{x=0}(t,x)$，即：$u_x\mid_{x=0} = -\frac{q(t)}{k}$；

(γ) 右端有热量$q(t)$ 流入：$\frac{dQ}{dSdt} = ku_x\mid_{x=l}(t,x)$，即：$u_x\mid_{x=l} = \frac{q(t)}{k}$。

(III) 混合边界条件：边界与介质接触，热流交换满足$h\times$温度差：

(α) 左端与温度为$T(t)$ 的介质接触：$h(u|_{x=0} - T) = ku_x\mid_{x=0}(t,x)$，即：$(u - \frac{k}{h}u_x)\mid_{x=0} = T$；

(β) 右端与温度为$T(t)$的介质接触：$h(u|_{x=l} - T) = -ku_x\mid_{x=l}(t,x)$，即：$(u + \frac{k}{h}u_x)\mid_{x=l} = T$。

例子2. 一根长为l的由理想介质组成的细杆(两端点分别为$0,l$)，$k = c = \rho = 1$，侧面绝热，内部无热源，初始温度为x。两端分别与温度0,1的介质接触，热交换系数为2。写出定解问题。

解.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,x) = x \\ u(t,0) - \frac{1}{2}u_x(t,0) = 0, u(t,l) + \frac{1}{2}u_x(t,l) = 1 \end{cases}$$

(3) 一般热方程边界问题：我们省略了二维的情形，反正都差不多。例子：常见边界条件（记住一点，热量都是从高温往低温流，这样就不会搞错正负号了!）我们用V表示区域，S表示V的边界。

(I) Dirichlet条件：$u(t,x,y,z) = g(t,x,y,z)$；

(II) Neumann条件：

(α) 绝热：$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S = 0$；

(β) 有热量$q(t,x,y,z)$ 流出：$-k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S = q$，即：$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S = -\frac{q}{k}$；

(γ) 有热量$q(t,x,y,z)$ 流入：$k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S = q$，即：$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S = \frac{q}{k}$。

(III) 混合边界条件：边界与介质接触，热流交换满足$h\times$温度差：

(α) 边界与温度为$\theta(t,x,y,z)$ 的介质接触：$h(u - \theta) = -k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S$，即：$(u + \frac{k}{h}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_S = \theta$。

（需要注意的是，并不是所有边界都取一样的边界条件，可以不同。）

例子3. 有一块$[0,1]\times[0,1]$的正方形金属片，内部无热源，有初始温度xy，上下面绝热，$x=0$绝热，$x=1$恒温$=1$，$y=1$与温度为0的介质接触，热交换系数=热传导系数$=1$，$y=0$有热流密度$q(t)$流出，写出定解问题。

解.

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+u_{yy}, 0<x,y<1, t>0 \\ u(0,x,y)=xy \\ u_x(t,0,y)=0, u(t,l,y)=1 \\ u_y(t,x,0)=q(t), u(t,x,1)+u_y(t,x,1)=0 \end{cases}$$

(4) 泊松方程没有初始条件只有边界条件（边界问题）：$\Delta_3 u=f$.

$$\begin{cases} \Delta_3 u=f, \quad (x,y,z)\in\Omega \\ u\mid_{\partial\Omega}=A(x,y,z) \Longleftarrow \text{(边界条件)} \end{cases}$$

注记. 在上述定解问题中，如果$f=0$，则称方程齐次，如果边界条件中不含u,u_x项为0，则称边界条件齐次，一般我们总是希望方程和边界条件都是齐次，齐次化的过程需要叠加原理和冲量原理，详情见下一节。

例子4. 一个圆柱体，顶端恒温T_0，底端绝热，侧面与温度为T的介质接触，内部无热源，初始温度$\psi(x,y,z)$，写出定解问题。

解. （要特别注意正负号，记住热流总是从高温到低温，这样就不会搞错了。）

$$\begin{cases} u_t=a^2\Delta u, \quad x^2+y^2<R^2, 0<z<H, t>0 \\ u_z\mid_{z=0}=0, u\mid_{z=H}=T_0 \\ u(0,x,y,z)=\psi(x,y,z) \\ (u+\frac{k}{h}u_r)\mid_{r=R}=T \end{cases}$$

例子5. 一个圆柱体，顶端恒温T_0，底端绝热，侧面与温度为T的介质接触，内部无热源，处于热平衡，写出定解问题。

解.

$$\begin{cases} \Delta u=0, \quad x^2+y^2<R^2, 0<z<H, t>0 \\ u_z\mid_{z=0}=0, u\mid_{z=H}=T_0 \\ (u+\frac{k}{h}u_r)\mid_{r=R}=T \end{cases}$$

0.3 达朗贝尔公式

我们先求弦振动方程的初始问题。

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ u(0,x)=g_1(x), u_t(0,x)=g_2(x) \end{cases}$$

为此，我们先要求泛定方程$u_{tt}=a^2u_{xx}$的通解，做变量替换$\xi=x+at,\eta=x-at$，则有

$$u_t=u_\xi\xi_t+u_\eta\eta_t=au_\xi-au_\eta, u_{tt}=a^2u_{\xi\xi}+a^2u_{\eta\eta}-2a^2u_{\xi\eta}.$$

同理，$u_{xx}=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta}$，带入泛定方程得

$$u_{\xi\eta}=0.$$

从而$u=h_1(\xi)+h_2(\eta)$。即

$$u(t,x)=h_1(x+at)+h_2(x-at).$$

与初始条件结合有

$$\begin{cases} h_1(x)+h_2(x)=g_1(x) \\ h_1'(x)-h_2'(x)=\frac{g_2(x)}{a} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} h_1(x)=\frac{1}{2}g_1(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x g_2(s)ds+C \\ h_2(x)=\frac{1}{2}g_1(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x g_2(s)ds-C \end{cases}$$

带入通解，得到达朗贝尔公式

$$u(t,x)=\frac{g_1(x+at)+g_1(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g_2(s)ds$$

对于非齐次一维波动方程的初始问题。

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f,-\infty<x<+\infty,t>0 \\ u(0,x)=g_1(x),u_t(0,x)=g_2(x) \end{cases}$$

解题步骤如下：

(1) 先找泛定方程$v_{tt}=a^2v_{xx}+f$的一个特解$v(t,x)$；

(2) 用$\tilde{u}=u-v$建立新的初始问题：

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}=a^2\tilde{u}_{xx},-\infty<x<+\infty,t>0 \\ \tilde{u}(0,x)=g_1(x)-v(0,x),\tilde{u}_t(0,x)=g_2(x)-v_t(0,x) \end{cases}$$

(3) 用达朗贝尔公式解出$\tilde{u}$ 并求出$u=\tilde{u}+v$。

例子6. 求解以下非齐次定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+x^2e^{-t},-\infty<x<+\infty,t>0 \\ u(0,x)=x,u_t(0,x)=\sin x \end{cases}$$

解. 泛定方程$v_{tt}=v_{xx}+x^2e^{-t}$一个特解为

$$v(t,x)=x^2e^{-t}+2e^{-t}.$$

令$\tilde{u}=u-v$，得到

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}=\tilde{u}_{xx},-\infty<x<+\infty,t>0 \\ \tilde{u}(0,x)=x-x^2-2,\tilde{u}_t(0,x)=\sin x+x^2+2. \end{cases}$$

由达朗贝尔公式，得

$$\tilde{u}(t,x)=\frac{x+t-(x+t)^2-2+x-t-(x-t)^2-2}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin s+s^2+2ds.$$

整理得，

$$\tilde{u}(t,x)=-x^2+x-2-t^2+\sin x\sin t+x^2t+\frac{t^3}{3}+2t.$$

从而

$$u(t,x)=\tilde{u}(t,x)+v(t,x)=-x^2+x-2-t^2+\sin x\sin t+x^2t+\frac{t^3}{3}+x^2e^{-t}+2e^{-t}+2t.$$

达朗贝尔公式的其他应用：

例子7. 求解一端固定的半弦齐次波动方程：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, 0<x<+\infty, t>0 \\ u(0,x)=g_1(x), u_t(0,x)=g_2(x) \\ u(t,0)=0. \end{cases}$$

解. 我们可以把半弦扩为完整的弦，但是要求解在$x=0$点取值始终为0，为此我们做奇扩充：

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}=a^2\tilde{u}_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ \tilde{u}(0,x)=\tilde{g}_1(x), u_t(0,x)=\tilde{g}_2(x) \end{cases}$$

其中，$\tilde{g}_1(x)=sign(x)g_1(|x|)$，$\tilde{g}_2(x)=sign(x)g_2(|x|)$. 用达朗贝尔公式解该方程，得：

$$\tilde{u}(t,x)=\frac{\tilde{g}_1(x+at)+\tilde{g}_1(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{g}_2(s)ds.$$

整理得

$$u(t,x)=\begin{cases} \frac{g_1(x+at)+g_1(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g_2(s)ds & x-at\geq 0 \\ \frac{g_1(x+at)-g_1(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\left(\int_0^{x+at}\tilde{g}_2(s)ds-\int_0^{at-x}\tilde{g}_2(s)ds\right) & x-at<0 \end{cases}$$

例子8. 求解一端上下自由运动的半弦齐次波动方程：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, 0<x<+\infty, t>0 \\ u(0,x)=g_1(x), u_t(0,x)=g_2(x), 0\leq x<+\infty \\ u_x(t,0)=0. \end{cases}$$

解. 我们可以把半弦扩为完整的弦，要求解在$x=0$点导数取值始终为0，为此我们做偶扩充：

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}=a^2\tilde{u}_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ \tilde{u}(0,x)=\tilde{g}_1(x), u_t(0,x)=\tilde{g}_2(x) \end{cases}$$

其中，$\tilde{g}_1(x)=g_1(|x|)$，$\tilde{g}_2(x)=g_2(|x|)$. 用达朗贝尔公式解该方程，得：

$$\tilde{u}(t,x)=\frac{\tilde{g}_1(x+at)+\tilde{g}_1(x-at)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{g}_2(s)ds.$$

整理得

$$u(t,x)=\begin{cases} \frac{g_1(x+at)+g_1(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g_2(s)ds, & x-at\geq 0 \\ \frac{g_1(x+at)+g_1(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\left(\int_0^{x+at}g_2(s)ds+\int_0^{at-x}g_2(s)ds\right), & x-at<0. \end{cases}$$

总结例子7和例子8的方法，就是$u(t,a)=0$就以$x=a$中心对称，$u_x(t,a)=0$就以$x=a$对称。

0.4 叠加原理和冲量原理

我们希望定解问题是其次的，叠加原理和冲量原理可以消除非齐次项，这往往是解数学物理方程的第一步。

0.4.1 叠加原理

对于一个复杂问题，我们试图用叠加原理将其分解成几个简单的问题（边界条件齐次，方程齐次）。设$\mathcal{L}$为线性微分算子，则有叠加原理

(1) 有限叠加$\mathcal{L}u_i = f_i, i = 1, 2, \cdots, n \Rightarrow \mathcal{L}(\sum_i u_i) = \sum_i f_i$；

(2) 可数叠加$\mathcal{L}u_i = f_i, i = 1, 2, \cdots \Rightarrow \mathcal{L}(\sum_i u_i) = \sum_i f_i$；

(3) 积分叠加$\mathcal{L}u_i(M; m) = f(M; m), m \in M_0 \Rightarrow \mathcal{L}(\int_{M_0} u(M; m)dm) = \int_{M_0} f(M; m)dm$。

叠加原理最大的用处就是把一个复杂问题分解成若干简单问题（方程齐次，边界条件齐次），例如：找特解本身就表示我们使用了叠加原理，我们还是用例子说明：

例子9. 将下面弦振动方程做分解：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x), 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, x) = g_1(x), u_t(0, x) = g_2(x) \\ u(t, 0) = \psi_1(t), u_x(t, l) = \psi_2(t). \end{cases}$$

解. 该方程本身非齐次，并且边界条件也是非齐次。我们先想办法将边界条件齐次化，一个办法是设

$$v(t, x) = \psi_1(t) + x\psi_2(t).$$

令$\tilde{u} = u - v$，则得到一个边界条件齐次的定解问题：

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = a^2 \tilde{u}_{xx} + \tilde{f}(t, x), 0 < x < l, t > 0 \\ \tilde{u}(0, x) = \tilde{g}_1(x), \tilde{u}_t(0, x) = \tilde{g}_2(x) \\ \tilde{u}(t, 0) = 0, \tilde{u}_x(t, l) = 0 \end{cases}$$

其中$\tilde{f} = f - \psi_1''(t) - x\psi_2''(t), \tilde{g}_1 = g_1 - \psi_1(0) - x\psi_2(0), \tilde{g}_2 = g_2 - \psi_1'(0) - x\psi_2'(0)$. 设$\tilde{v}$ 是定解问题

$$\begin{cases} \tilde{v}_{tt} = a^2 \tilde{v}_{xx} + \tilde{f}(t, x), 0 < x < l, t > 0 \\ \tilde{v}(0, x) = 0, \tilde{v}_t(0, x) = 0 \\ \tilde{v}(t, 0) = 0, \tilde{v}_x(t, l) = 0 \end{cases}$$

的解。设$\bar{v}$ 是定解问题

$$\begin{cases} \bar{v}_{tt} = a^2 \bar{v}_{xx}, 0 < x < l, t > 0 \\ \bar{v}(0, x) = \tilde{g}_1(x), \bar{v}_t(0, x) = \tilde{g}_2(x) \\ \bar{v}(t, 0) = 0, \bar{v}_x(t, l) = 0 \end{cases}$$

的解。则$\tilde{u} = \tilde{v} + \bar{v}$，从而$u = \tilde{u} + v = v + \tilde{v} + \bar{v}$。因而仅需解出$\tilde{v}$和$\bar{v}$。$\bar{v}$ 的求法需要用下一章的分离变量法。$\tilde{v}$的解法可以使用冲量原理化为$\bar{v}$ 的情形。

思考. 上述例子中，v的选取是否唯一？如果边界条件为$u_x(t, 0) = \psi_1(t), u(t, l) = \psi_2(t)$，该如何选择$v$？如果出现混合边界条件呢？对于热方程，我们是否可以做同样的操作？

0.4.2 冲量原理

冲量原理适用范围：非齐次波动方程或热方程（可以高维）+平凡初始条件+齐次边界条件（可以没有边界条件）。推导冲量原理依赖一个求导公式

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t p(t,s)ds = p(t,t) + \int_0^t p_t(t,s)ds.$$

弦振动方程的冲量原理：如果定解问题

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, 0 < x < l, t > \tau \\ w(\tau, x) = 0, w_t(\tau, x) = f(\tau, x) \\ w(t, 0) = 0, w_x(t, l) = 0 \end{cases}$$

的解为$w(t,x;\tau)$。则定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = 0 \\ u(t,0) = 0, u_x(t,l) = 0 \end{cases}$$

的解为

$$u(t,x) = \int_0^t w(t,x;\tau)d\tau.$$

证明. 边界条件和初始条件上述表达式显然满足。我们仅需说明上述表达式满足泛定方程。

$$u_t = w(t,x;t) + \int_0^t w_t(t,x;\tau)d\tau = \int_0^t w_t(t,x;\tau)d\tau.$$

从而

$$u_{tt} = w_t(t,x;t) + \int_0^t w_{tt}(t,x;\tau)d\tau = f(t,x) + a^2\int_0^t w_{xx}(t,x;\tau)d\tau = a^2 u_{xx} + f.$$

热方程的冲量原理： 如果定解问题

$$\begin{cases} w_t = a^2 \Delta_3 w, -\infty < x, y, z < +\infty, t > \tau \\ w(\tau, x, y, z) = f(\tau, x, y, z) \end{cases}$$

的解为$w(t,x,y,z;\tau)$。则定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta_3 u + f(t,x,y,z), -\infty < x, y, z < +\infty, t > \tau \\ u(0,x,y,z) = 0 \end{cases}$$

的解为

$$u(t,x,y,z) = \int_0^t w(t,x,y,z;\tau)d\tau.$$

证明. 初始条件上述表达式显然满足。我们仅需说明上述表达式满足泛定方程。

$$\begin{aligned} u_t &= w(t,x,y,z;t) + \int_0^t w_t(t,x,y,z;\tau)d\tau = f + a^2\int_0^t \Delta w(t,x,y,z;\tau)d\tau \\ &= f + a^2\Delta u. \end{aligned}$$

例子10 (例子6). 求解以下非齐次定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x^2 e^{-t}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(0,x) = x, u_t(0,x) = \sin x \end{cases}$$

解. 注意到初始条件非平凡，我们设

$$v(t,x) = t\sin x + x.$$

设$\tilde{u} = u - v$，则有

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx} + x^2 e^{-t} - t\sin x, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ \tilde{u}(0,x) = 0, \tilde{u}_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

解以下定解问题

$$\begin{cases} w_{tt} = w_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > \tau \\ w(\tau, x; \tau) = 0, w_t(\tau, x; \tau) = x^2 e^{-\tau} - \tau\sin x \end{cases}$$

得

$$w(t,x;\tau) = \frac{1}{2}\int_{x+\tau-t}^{x+t-\tau} s^2 e^{-\tau} - \tau\sin s ds = x^2(t-\tau)e^{-\tau} + \frac{1}{3}(t-\tau)^3 e^{-\tau} - \tau\sin x\sin(t-\tau).$$

由冲量原理

$$\tilde{u}(t,x) = \int_0^t w(t,x;\tau)d\tau = x^2(e^{-t} + t - 1) + 2e^{-t} + \frac{t^3}{3} - t^2 + 2t - 2 - t\sin x + \sin x\sin t.$$

从而

$$u(t,x) = u(t,x) + v(t,x) = -x^2 + x - 2 - t^2 - \sin x\sin t + x^2 t + \frac{t^3}{3} + x^2 e^{-t} + 2e^{-t} + 2t.$$

注记. 并不是一定要用冲量原理消除方程的非齐次项，如果能直接找到泛定方程的满足要求（一般是边界条件的要求）的特解是最好的。例如

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t\sin x, 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(t,0) = 0, u(t,\pi) = 0 \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

我们可以取泛定方程的特解$v = t\sin x$，然后令$\tilde{u} = u - v$，得到

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx}, 0 < x < \pi, t > 0 \\ \tilde{u}(t,0) = 0, \tilde{u}(t,\pi) = 0 \\ \tilde{u}(0,x) = 0, \tilde{u}_t(0,x) = -\sin x \end{cases}$$

在下一章后半段将详细讲述。

在本章的最后，我们简要介绍下特征线法。特阵线法主要求一阶偏微分方程和波动方程的通解。我们从例子出发

例子11. 设$u=u(x,y)$，求$u_x+e^y u_y=e^{-y}$ 的通解。

解. 特征方程为

$$\frac{1}{dx}=\frac{e^y}{dy}.$$

这是个常微分方程，解得：$x+e^{-y}=C$。令$\xi=x+e^{-y}$，$\eta=x$，得到

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=u_\xi+u+\eta$$

$$u_y=-e^{-y}u_\xi.$$

带入原方程，得到$u_\eta=\xi-\eta$。从而

$$\begin{aligned}u(\xi,\eta)&=u(\xi,0)+\int_0^\eta u_\eta(\xi,s)ds=u(\xi,0)+\int_0^\eta \xi-sds\\&=f(\xi)+\xi\eta-\frac{\eta^2}{2}.\end{aligned}$$

从而

$$u=f(x+e^{-y})+xe^{-y}+\frac{x^2}{2}.$$

方法总结：设$u=u(x_1,\cdots,x_k$，则$\sum a_iu_{x_i}=f$ 的特征方程为

$$\frac{a_1}{dx_1}=\frac{a_2}{dx_2}=\cdots.$$

解之，做相应的变量替换，不足的补上。最后一步带入原方程，化解并求解。

二阶情形：

例子12. 设$u=u(x,y)$，求$u_{xx}+3u_{xy}+2u_{yy}=x$ 的通解。

解. 特征方程为

$$\frac{1}{(dx)^2}-\frac{3}{dxdy}+\frac{2}{(dy)^2}=0.$$

即

$$(\frac{1}{dx}-\frac{1}{dy})(\frac{1}{dx}-\frac{2}{dy})=0.$$

$\frac{1}{dx}-\frac{1}{dy}=0$ 或者$\frac{1}{dx}-\frac{2}{dy}=0$。分别解得

$$x-y=C,\qquad 2x-y=\tilde{C}.$$

设$\xi=x-y$ 和$\eta=2x-y$，则

$$u_x=u_\xi+2u_\eta,u_{xx}=u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta},u_{xy}=-u_{\xi\xi}-3u_{\xi\eta}-2u_{\eta\eta},$$

$$u_y=-u_\xi-u_\eta,u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}.$$

带入原方程，得到$u_{\xi\eta}=\xi-\eta$，解得$u_\xi=\xi\eta-\frac{\eta^2}{2}+f(\xi)$，得到

$$u=\frac{\xi^2\eta}{2}-\frac{\xi\eta^2}{2}+f(\xi)+g(\eta).$$

从而

$$u=\frac{3x^2y-2x^3-xy^2}{2}+f(x-y)+g(2x-y).$$

例子13. 设$u = u(x, y)$，求$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ 的通解。

解. 特征方程为

$$\frac{1}{(dx)^2} - \frac{2}{dxdy} + \frac{1}{(dy)^2} = 0.$$

即

$$(\frac{1}{dx} - \frac{1}{dy})^2 = 0.$$

$\frac{1}{dx} - \frac{1}{dy} = 0$ 解得

$$x - y = C.$$

设$\xi = x - y$ 和$\eta = x$，则

$$u_x = u_\xi + u_\eta, u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, u_{xy} = -u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta},$$

$$u_y = -u_\xi, u_{yy} = u_{\xi\xi}.$$

带入原方程，得到$u_{\eta\eta} = 0$，解得$u_\eta = f(\xi)$，得到

$$u = \eta f(\xi) + g(\xi).$$

从而

$$u = xf(x - y) + g(x - y).$$