微分几何第三次习题课

黄天一
USTC

更新：2023 年 10 月 25 日

目录

1 作业解答

作业 1 证明: 在正则曲面的任一点, 任意两个相互正交的切向量的法曲率之和为常数.

证明. 任取正交单位向量 $v, w \in T_pS$.

(1) 如果两个主曲率都为 κ, 那么 $k_n(v) = k_n(w) = \kappa \Rightarrow k_n(v) + k_n(w) = 2\kappa$ 为常数.

(2) 如果两个主曲率 κ_1, κ_2 不相等, 此时主方向相互正交. 设 v 与 e_1 的夹角为 θ, 那么由 Euler 公式可得

$$k_n(v) = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta,\ k_n(w) = \kappa_2 \cos^2\theta + \kappa_1 \sin^2\theta.$$

这时 $k_n(v) + k_n(w) = \kappa_1 + \kappa_2 = 2H$ 为常数.

注 这个习题其实给出了 H 的另一种平均意义, 即 $H(p) = \frac{1}{2}(k_n(v) + k_n(w))$, 其中 $v, w \in T_pS$ 为任意两个正交的单位切向量. 事实上, 我们还可以推广得到更多的平均意义. 见补充习题 1.

作业 2 设曲面 S 由方程 $x^2 + y^2 - f(z) = 0$ 给定, f 满足 $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$. 证明: S 在点 $(0,0,0)$ 处的法曲率为常数.

评论 第一想法可能是考虑 S 的参数化 $r(\theta,z)=(f(z)\cos\theta, f(z)\sin\theta, z)$, 但具体计算时会发现这个似乎行不通. 本质原因是因为 $f(0)=0$ 导致 r_θ 在 $z=0$ 时是恒为零的, 所以在这个局部坐标下 S 非正则. 故需要考虑其他的参数化.

证明. 由隐函数定理可得在 $z=0$ 附近 f 是局部微分同胚, 设 g 为 f 的反函数, 那么 $g'(w)=\frac{1}{f'(g(w))}\Rightarrow g'(0)=\frac{1}{f'(0)}$. 此时在 $(0,0,0)$ 附近 S 的一个正则参数化为

$$r(x,y)=(x,y,g(x^2+y^2)).$$

计算可得 $r_x=(1,0,2xg'(x^2+y^2))$, $r_y=(0,1,2yg'(x^2+y^2))$, 从而

$$r_x(0,0)=(1,0,0),\ r_y(0,0)=(0,1,0)\Rightarrow n(0,0)=(0,0,1).$$

继续求导可得

$$r_{xx}(0,0)=(0,0,2g'(0)),\ r_{xy}=(0,0,0),\ r_{yy}=(0,0,2g'(0)).$$

由此可得

$$E=G=1,\ F=0,\ L=N=2g'(0)=\frac{2}{f'(0)},\ M=0.$$

任取单位向量 $v=\lambda r_x(0,0)+\mu r_v(0,0)=(\lambda,\mu,0)\in T_{(0,0,0)}S$, 计算可得

$$k_n(v)=L\lambda^2+N\mu^2=\frac{2}{f'(0)}(\lambda^2+\mu^2)=\frac{2}{f'(0)}.$$

作业 3 定义 $\mathrm{III}=\langle \mathrm{d}n,\mathrm{d}n\rangle$ 为曲面的第三基本形式, 证明: $K\,\mathrm{I}-2H\,\mathrm{II}+\mathrm{III}=0$.

证明. 这题固然可以暴力计算, 但利用 Weingarten 变换可以极大地简化我们的证明. 根据 Weingarten 变换 $\mathcal{W}$ 的性质可得

$$\mathrm{III}=\langle -\mathcal{W}(\mathrm{d}r),-\mathcal{W}(\mathrm{d}r)\rangle=\langle \mathrm{d}r,\mathcal{W}^2(\mathrm{d}r)\rangle.$$

注意到 $\mathcal{W}$ 的特征多项式为 $\varphi_W(\lambda)=\lambda^2-2H\lambda+K$, 由 Cayley-Hamilton 定理可得 $\mathcal{W}^2=2H\mathcal{W}-K\mathcal{I}$, 因此

$$\mathrm{III}=\langle \mathrm{d}r,-2H\,\mathrm{d}n-K\,\mathrm{d}r\rangle=2H\,\mathrm{II}-K\,\mathrm{I}.$$

作业 4 设曲面 S_1 和 S_2 的交线 C 的曲率为 κ, 曲线 C 在曲面 S_i 上的法曲率为 $k_i(i=1,2)$. 若沿 C, S_1 和 S_2 的法向夹角为 θ, 证明:

$$\kappa^2\sin^2\theta=k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos\theta.$$

证明. 给定 C 上一点 p. 设 $p = r(s_0)$ 点处曲面 S_i 的单位法向量为 $n_i(i = 1, 2)$, C 的主法向量为 $N = n(s_0)$, 单位切向量为 $t(s_0)$, 那么

$$k_i = \langle \dot{t}(s_0), n_i \rangle = \kappa \langle N, n_i \rangle,\ i = 1, 2.$$

我们记 N, n_i 的夹角为 $\theta_i \in [0, \pi]$, 则有

$$\cos\theta_i = \frac{k_i}{\kappa},\ \sin\theta_i = \sqrt{1 - \frac{k_i^2}{\kappa^2}}.$$

注意到 $\theta_1 - \theta_2$ 与 θ 至多相差一个符号, 所以

$$\cos\theta = \cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{k_1 k_2}{\kappa^2} + \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{\kappa^2}}\sqrt{1 - \frac{k_2^2}{\kappa^2}}.$$

整理可得

$$(\kappa^2\cos\theta - k_1k_2)^2 = (\kappa^2 - k_1^2)(\kappa^2 - k_2^2) \Rightarrow \kappa^2\sin^2\theta = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2\cos\theta.$$

作业 5 求曲面 $z = f(x, y)$ 的平均曲率和 Gauss 曲率.

证明. 该曲面的参数化为 $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$. 计算可得

$$r_u = (1, 0, f_u),\ r_v = (0, 1, f_v).$$

所以曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}(u, v) = (1 + f_u^2)\,\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u + f_uf_v(\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v + \mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}u) + (1 + f_v^2)\,\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v.$$

计算可得单位法向量为

$$n = \frac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|} = \left(-\frac{f_u}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}, -\frac{f_v}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right).$$

又因为 $r_{uu} = (0, 0, f_{uu})$, $r_{uv} = (0, 0, f_{uv})$, $r_{vv} = (0, 0, f_{vv})$, 所以

$$\mathrm{II}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}(f_{uu}\,\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u + f_{uv}(\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v + \mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}u) + f_{vv}\,\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v).$$

所以 Gauss 曲率为

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\det D^2 f}{(1+|\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

平均曲率为

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} = \frac{f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_{uv}f_uf_v + f_{vv}(1 + f_u^2)}{2(1+|\nabla f|^2)}.$$

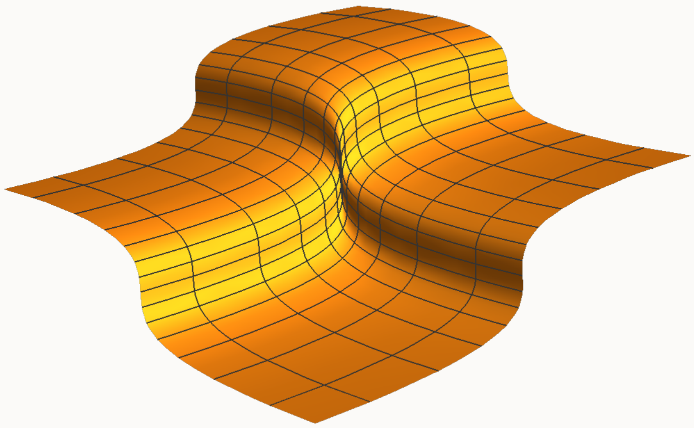


图 1: 曲面 $r(u,v)=(u^3,v^3,u+v)$ 的示意图

作业 6 求曲面 $r(u,v)=(u^3,v^3,u+v)$ 上抛物点的轨迹.

证明. 计算可得 $r_u=(3u^2,0,1)$, $r_v=(0,3v^2,1)$, 所以

$$n=\frac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|}=f(u,v)(-v^2,u^2,3u^2v^2).$$

这里 $f(u,v)>0$ 是用于归一化的函数, 在本题内不需要这个量的具体表达式. 又因为

$$r_{uu}=(6u,0,0),\ r_{uv}=(0,0,0),\ r_{vv}=(0,6v,0),$$

所以 $L=-6f(u,v)uv^2, M=0, N=6f(u,v)u^2v$, 从而 $LN-M^2=-36f(u,v)^2(uv)^3$. 由此可得抛物点对应的参数满足 $u=0$ 或 $v=0$, 曲线轨迹为 $\Gamma_1:\gamma(u)=(u^3,0,u)$ 和 $\Gamma_2:\gamma(v)=(0,v^3,v)$.

作业 7 求曲面 $r(u,v)=(a(u+v),b(u-v),4uv)$ 的 Gauss 曲率、平均曲率、主曲率及对应的主方向.

证明. 计算可得 $r_u=(a,b,4v)$, $r_v=(a,-b,4u)$, 所以

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(u,v)=(a^2+b^2+16v^2)\,\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u+(a^2-b^2+16uv)(\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v+\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}u)\\+(a^2+b^2+16u^2)\,\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

计算可得 $r_{uu}=r_{vv}=(0,0,0)$, $r_{uv}=(0,0,4)$, 并且单位法向量为

$$n=\frac{(2b(u+v),2a(v-u),-ab)}{(4(b^2(u+v)^2+a^2(v-u)^2)+a^2b^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

由此可得

$$\mathrm{II}(u,v)=-\frac{4ab}{(4(b^2(u+v)^2+a^2(v-u)^2)+a^2b^2)^{\frac{1}{2}}}(\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v+\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}u).$$

因此

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=-\frac{4a^2b^2}{(4(b^2(u+v)^2+a^2(v-u)^2)+a^2b^2)^2}.$$

$$H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}=-\frac{ab(a^2-b^2+16uv)}{(4(b^2(u+v)^2+a^2(v-u)^2)+a^2b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

下面我们求主曲率和主方向. 注意到 $L=N=0$, 所以 Weingarten 变换 $\mathcal{W}$ 在基 (r_u,r_v) 下的矩阵表示为

$$W=\begin{pmatrix}0&M\\M&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}^{-1}=\frac{M}{EG-F^2}\begin{pmatrix}-F&E\\G&-F\end{pmatrix}\triangleq\frac{M}{EG-F^2}A.$$

不难求得矩阵 A 的特征值为

$$\lambda_{1,2}=-F\pm\sqrt{EG}=-(a^2-b^2+16uv)\pm\sqrt{(a^2+b^2+16u^2)(a^2+b^2+16v^2)}.$$

所以 W 的特征值, 亦即两个主曲率为

$$\kappa_{1,2}=\frac{M\lambda_{1,2}}{EG-F^2}=\frac{ab((a^2-b^2+16uv)\mp\sqrt{(a^2+b^2+16u^2)(a^2+b^2+16v^2)})}{(4(b^2(u+v)^2+a^2(v-u)^2)+a^2b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

两个主方向即为 A 对应 λ_1,λ_2 的单位特征向量, 计算可得

$$e_{1,2}=\frac{\sqrt{E}r_u\pm\sqrt{G}r_v}{|\sqrt{E}r_u\pm\sqrt{G}r_v|}.$$

作业 8 设曲面 $S: r=r(u,v)$ 上没有抛物点, n 是 S 的法向量. 曲面 $\tilde{S}:\tilde{r}(u,v)=r(u,v)+\lambda n(u,v)$(常数 λ 充分小) 称为 S 的平行曲面.

1. 证明: S 和 $\tilde{S}$ 在对应点的切平面平行.
2. 可以选取 $\tilde{S}$ 的单位法向 $\tilde{n}$, 使得 $\tilde{S}$ 的 Gauss 曲率和平均曲率分别为

$$\tilde{K}=\frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2K},\quad\tilde{H}=\frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}.$$

证明. (1) 求导可得 $\tilde{r}_u=r_u+\lambda n_u,\tilde{r}_v=r_v+\lambda n_v$. 因为 $n_u,n_v\in T_pS$, 所以 $\tilde{r}_u,\tilde{r}_v$ 生成的 $\tilde{S}$ 的切平面与对应点处 S 的切平面平行.

(2) $\tilde{S}$ 的单位法向只能是 n 或 $-n$, 我们不妨先取 $\tilde{n}=n$, 如果 $\tilde{H}$ 与待求结果相差一个符号, 则取 $-n$ 即可. 设 T_pS 上的 Weingarten 变换为 $\mathcal{W}$, 在基 $\{r_u,r_v\}$ 下的矩阵表示为 W; 再设 $T_q\tilde{S}$ 上的 Weingarten 变换为 $\tilde{\mathcal{W}}$, 在基 $\{\tilde{r}_u,\tilde{r}_v\}$ 下的矩阵表示为 $\tilde{W}$. 此时有

$$\tilde{W}\begin{pmatrix}\tilde{r}_u\\\tilde{r}_v\end{pmatrix}=W\begin{pmatrix}r_u\\r_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-n_u\\-n_v\end{pmatrix}.$$

由于 $\tilde{r}_u = (\mathcal{I} - \lambda\mathcal{W})r_u, \tilde{r}_v = (\mathcal{I} - \lambda\mathcal{W})r_v$, 所以

$$\begin{pmatrix}\tilde{r}_u \\ \tilde{r}_v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\mathcal{I} - \lambda\mathcal{W})r_u \\ (\mathcal{I} - \lambda\mathcal{W})r_v\end{pmatrix} = (I - \lambda W)\begin{pmatrix}r_u \\ r_v\end{pmatrix}.$$

代回第一式即可得

$$\tilde{W} = W(I - \lambda W)^{-1}.$$

设 $W = (w_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$, 那么 $I - \lambda W = (\delta_{ij} - \lambda w_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$, 结合 $\det W = K, \operatorname{tr} W = 2H$ 可得

$$\det(I - \lambda W) = (1 - \lambda w_{11})(1 - \lambda w_{22}) - \lambda^2 w_{12}w_{21} = 1 - 2\lambda H + \lambda^2 K.$$

这说明

$$\tilde{K} = \frac{\det W}{\det(I - \lambda W)} = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}.$$

又因为

$$\begin{aligned} W(I - \lambda W)^{-1} &= \frac{1}{\det(I - \lambda W)}\begin{pmatrix}w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 - \lambda w_{22} & \lambda w_{12} \\ \lambda w_{21} & 1 - \lambda w_{11}\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(I - \lambda W)}\begin{pmatrix}w_{11} - \lambda \det W & * \\ * & w_{22} - \lambda \det W\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\operatorname{tr} W(I - \lambda W)^{-1} = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{tr} W - \lambda \det W}{\det(I - \lambda W)} = \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}.$$

作业 9 证明: 曲面 $S : r = r(u, v)$ 的参数曲线是曲率线的充要条件是 $F = M = 0$.

证明. 若 S 的参数曲线是曲率线, 则每点 $r(u, v)$ 处 $e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{E}}, e_2 = \frac{r_v}{\sqrt{G}}$ 都是 S 在该点处的两个正交主方向. 由此首先可得

$$0 = \langle e_1, e_2\rangle = \frac{\langle r_u, r_v\rangle}{\sqrt{EG}} = \frac{F}{\sqrt{EG}} \Rightarrow F = 0.$$

另一方面, 也有

$$\mathcal{W}e_1 = \kappa e_1 \Rightarrow -n_u = \kappa_1 r_u.$$

所以 $M = -\langle r_v, n_u\rangle = \sqrt{EG}\kappa_1\langle e_1, e_2\rangle = 0$.

如果 $F = M = 0$, 那么 $\mathcal{W}$ 在 (r_u, r_v) 下的矩阵表示是对角阵, 所以 r_u, r_v 均为特征向量, 故参数曲线是曲率线.

作业 10 曲面 S 上的一个切向称之为渐近方向, 是指沿该方向的法曲率为 0. S 上的一条曲线 C 为渐近线, 是指它的切向总为渐近方向. 证明: 曲面 $S : r = r(u, v)$ 的参数曲线是渐近线当且仅当 $L = N = 0$.

证明. 计算可得 r_u, r_v 方向的法曲率分别为

$$k_n\left(\frac{r_u}{\sqrt{E}}\right)=\left\langle\mathcal{W}\left(\frac{r_u}{\sqrt{E}}\right),\frac{r_u}{\sqrt{E}}\right\rangle=\frac{1}{E}\langle -n_u,r_u\rangle=\frac{L}{E},$$

$$k_n=\left(\frac{r_v}{\sqrt{G}}\right)=\left\langle\mathcal{W}\left(\frac{r_v}{\sqrt{G}}\right),\frac{r_v}{\sqrt{G}}\right\rangle=\frac{1}{G}\langle -n_v,r_v\rangle=\frac{N}{G}.$$

这就说明参数曲线为渐近线当且仅当 $L=N=0$.

作业 11 证明: 若曲面的切平面过定点, 则该曲面是锥面.

注 这题的叙述不太严谨, 事实上我们只需要给出局部的刻画即可. 如果学过微分流形, 会意识到我们其实是在找曲面的局部坐标 (u,v), 使得曲面的局部表示为锥面的参数表示. 换言之, 我们要证明这个曲面在每一点附近都是某个锥面的子曲面.

证明. 任取曲面 S 上一点 p, 则在 p 附近曲面可以视为光滑函数 $F(x,y,z)$ 的水平集, 即 $F(x,y,z)=0$ 的解集. 不妨设曲面的切平面所过的定点为原点, 由于 ∇F 为曲面的法向量, 所以 $\langle\nabla F,(x,y,z)\rangle=0$, 即 $xF_x+yF_y+zF_z=0$. 由此可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(tx,ty,tz)\equiv 0\Rightarrow F(tx,ty,tz)=F(x,y,z),\ \forall t,x,y,z.$$

这说明如果 $(x,y,z)\in S$, 则对于 1 附近的实数 t, 总有 $(tx,ty,tz)\in S$[1]. 现在我们选取 $p=(x_0,y_0,z_0)$ 附近的参数获得 S 的锥面参数化. 不妨设 $F_z\neq 0$, 以及 $x_0\neq 0$[2], 这时我们固定 x_0, 则 $(x_0,y,z)\in S\Leftrightarrow F(x_0,y,z)=0$, 结合 $F_z\neq 0$ 可由隐函数定理局部解出 $z=f(y)$. 这时我们断言 p 点附近 S 可参数化为 $r(u,v)=v(x_0,u,f(u))$, 从而为锥面. 事实上, 任取 $(x,y,z)\in S$ 为 p 附近一点, 其中 $x\neq 0$, 那么 $(x_0,\frac{x_0y}{x},\frac{x_0z}{x})$ 也是 S 上一点, 这时 $\frac{x_0z}{x}=f(\frac{x_0y}{x})$. 因此

$$(x,y,z)=\left(\frac{x}{x_0}\cdot x,\frac{x}{x_0}\cdot\frac{x_0y}{x},\frac{x}{x_0}f\left(\frac{x_0y}{x}\right)\right)=r\left(\frac{x_0y}{x},\frac{x}{x_0}\right).$$

由此即证.

作业 12 证明: 直纹面是可展曲面当且仅当沿直母线, 曲面的法向不变.

证明. 考虑直纹面 $S:r(u,v)=a(u)+vb(u)$, 我们只需证 S 可展当且仅当 n_v 恒为零.

如果 S 可展, 那么 $K=-\frac{M^2}{EG-F^2}$ 恒为零, 所以 $\langle r_u,n_v\rangle=-M=0$. 另一方面, 由于 $r_{vv}=0$, 所以 $\langle r_v,n_v\rangle=-\langle r_{vv},n\rangle=0$. 由此即可得 n_v 恒为零.

如果 n_v 恒为零, 则 $M=-\langle r_u,n_v\rangle$ 恒为零, 从而 $K=0$, 即 S 可展.

[1]直观上来看, 这个结论说明 S 在局部由一簇过定点的直线 (上的线段) 构成, 所以大致就是锥面了.

[2]如果 $x_0=0$, 那么曲面 S 在 p 附近就是平面的一部分.

作业 13 若曲面 $z=f(x)+g(y)$ 是极小曲面, 证明: 除相差一个常数外, 它可以写成

$$z=\frac{1}{a}\log\frac{\cos ay}{\cos ax}.$$

这个曲面称为 Scherk 曲面.

评论 这里所指的“相差一个常数”还指变量 x,y 可以变化任意常数. 另外不考虑平面情形.

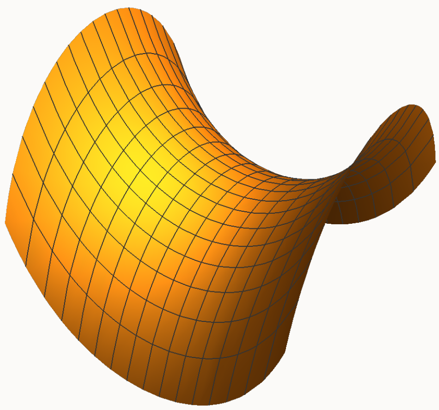


图 2: Scherk 曲面 $z=\log\frac{\cos y}{\cos x}$

证明. 根据作业 5, 或者根据极小曲面方程可得 $F(x,y)=f(x)+g(y)$ 是

$$F_{xx}(1+F_y^2)-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}(1+F_x^2)=0$$

的分离解. 代入整理可得

$$f''(x)(1+g'(y)^2)+g''(y)(1+f'(x)^2)=0\Rightarrow\frac{f''(x)}{1+f'(x)^2}=-\frac{g''(y)}{1+g'(y)^2}=a.$$

这里 a 为非零常数 ($a=0$ 对应平面情形). 由于允许相差一个常数, 下面的积分我们都略去积分常数. 对于 f 所满足的方程, 我们令 $h(x)=f'(x)$, 则有 $h'(x)+a(1+h(x)^2)=0$, 求解可得 $h(x)=\tan ax$. 所以 $f(x)=\int h(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\log|\cos ax|$. 类似地, 可以求解得到 $g(y)=-\frac{1}{a}\log|\cos ay|$, 所以

$$z=f(x)+g(y)=\frac{1}{a}\log\left|\frac{\cos ax}{\cos ay}\right|.$$

注 这个绝对值其实也是可以去掉的，例如我们在 $(x,y)=(0,0)$ 附近讨论. 回忆选取曲面的参数表示时总要求局部坐标 (x,y) 定义在区域 (连通开集) 上, 所以只需考虑区域

$$\left\{(x,y):|x|<\frac{\pi}{2|a|},|y|<\frac{\pi}{2|a|}\right\}$$

上的参数表示 (尽管我们求出的表达式在其他区域上也定义了曲面片, 但与上述区域上的曲面片是 "断开" 的). 这也是题干不标明绝对值的原因.

2 补充习题

习题 1 设 S 为 $\mathbb{E}^3$ 中的正则曲面, $p\in S$. H 为 S 的平均曲率.

(1) 设 $v_0,\cdots,v_{m-1}\in T_pS$ 为单位向量, 使得 v_j 与主方向 e_1 的夹角为 $j\frac{2\pi}{n}$. 那么

$$H(p)=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}k_n(v_j).$$

(2) 设 $v(\theta)$ 为 T_pS 中与主方向 e_1 成 θ 夹角的单位向量. 那么

$$H(p)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k_n(v(\theta))\,\mathrm{d}\theta.$$

证明. (1) 由 Euler 公式可得

$$k_n(v_j)=\kappa_1\cos^2\frac{2j\pi}{m}+\kappa_2\sin^2\frac{2j\pi}{m}.$$

注意到

$$\sum_{j=0}^{m-1}\cos^2\frac{2j\pi}{m}=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1+\cos\frac{4j\pi}{m}}{2}=\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\mathrm{e}^{\frac{4j\pi}{m}\mathrm{i}}\right)=\frac{m}{2}.$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\sin^2\frac{2j\pi}{m}=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1-\cos\frac{4j\pi}{m}}{2}=\frac{m}{2}.$$

所以 $\frac{1}{m}\sum_0^{m-1}k_n(v_j)=\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}=H$.

(2) 由 Euler 公式可得

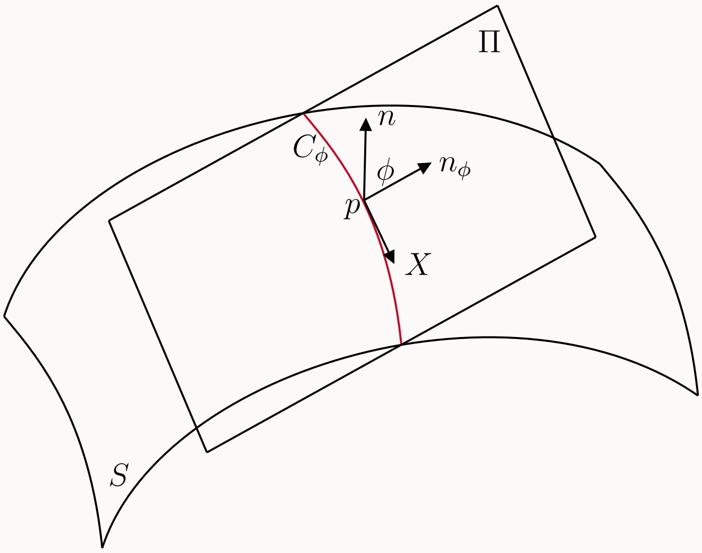
$$k_n(v(\theta))=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta.$$

积分可得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}k_n(v(\theta))\,\mathrm{d}\theta&=\kappa_1\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta+\kappa_2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\\&=\pi(\kappa_1+\kappa_2)=2\pi H.\end{aligned}$$

习题 2 (2017 刘世平班) 设 $S: r = r(u,v)$ 正则曲面片. 任意给定 $p \in M$, 设 n 为 p 点处 S 的单位法向量, 并任意选定单位切向量 $X \in T_pS$. 设 n_ϕ 为 p 点处的单位向量, 满足 $\langle n_\phi, X\rangle = 0$, 且与 n 的夹角为 $\phi \in (0,\pi]$. 记 Π 为 X, n_ϕ 张成的平面, Π 与 S 相截得到曲线 C_ϕ. 如果在平面上取定 $\{X, n_\phi\}$ 给出的定向, 此时设 C_ϕ 的曲率为 κ_ϕ. 证明: $k_n(X) = \kappa_\phi \cos\phi$.

注 这题还应要求 $n_\phi \notin T_pS$, 不然 Π 即为切平面 T_pS, 这时 Π 与 S 有可能仅仅交于 p 点.



证明. 我们设 $C_\phi : r = r(s)$ 为弧长参数表示, 且 $p = r(s_0)$. 由于 C_ϕ 的单位切向量 $t(s_0) \in \Pi \cap T_pS$, 所以 $t(s_0) = X$(因为 Π 与 T_pS 的交集即为过 p 沿 X 方向的直线). 设 $N(s_0)$ 为 C_ϕ 在 p 处的主法向量, 那么 $N(s_0) = n_\phi$. 由 Frenet 方程可得 $\ddot{r}(s_0) = \kappa_\phi n_\phi$, 因此

$$k_n(X) = \langle \ddot{r}(s_0), n\rangle = \langle \kappa_\phi n_\phi, n\rangle = \kappa_\phi \cos\phi.$$

习题 3 (20 张希班) 设 C 为正则曲线 S 上的一条正则曲线, 如果由 C 上每点处曲面法线生成的直纹面的 Gauss 曲率恒为零, 求证: C 为曲率线.

证明. 设 S 的参数表示为 $r = r(u,v)$, $C: r(s) = r(u(s), v(s))$ 为弧长参数表示. 这时所述的直纹面参数表示为

$$\Sigma : \tilde{r}(s,\lambda) = r(s) + \lambda n(s),$$

这里 $n(s) = n(u(s), v(s))$ 表示 $r(s)$ 处 S 的单位法向量. 注意到 $\mathcal{W}(\dot{r}(s)) = -\dot{n}(s)$, 要证明 C 是曲率线, 只需证明 $\dot{r}(s)$ 总为主方向, 只需证明 $\dot{n}(s)$ 总与 $\dot{r}(s)$ 共线.

计算可得 $\tilde{r}_s = \dot{r}(s) + \lambda\dot{n}(s)$, $\tilde{r}_\lambda = n(s)$, 所以 Σ 的单位法向量为

$$\tilde{n} = \frac{(\dot{r}(s) + \lambda\dot{n}(s)) \wedge n(s)}{|\tilde{r}_s \wedge \tilde{r}_\lambda|},$$

又因为 $\tilde{r}_{s\lambda} = \dot{n}(s), \tilde{r}_{\lambda\lambda} = 0$, 所以 Σ 的 Gauss 曲率为

$$\tilde{K} = \frac{-M^2}{|\tilde{r}_s \wedge \tilde{r}_\lambda|^2} = -\frac{\langle \dot{n}(s), (\dot{r}(s) + \lambda\dot{n}(s)) \wedge n(s)\rangle}{|\tilde{r}_s \wedge \tilde{r}_\lambda|^3} = -\frac{(\dot{n}(s), \dot{r}(s), n(s))}{|\tilde{r}_s \wedge \tilde{r}_\lambda|^3}.$$

$\tilde{K}$ 恒为零说明 $\dot{n}(s), \dot{r}(s), n(s)$ 三者共面. 而 $\dot{n}(s), \dot{r}(s)$ 都与 $n(s)$ 正交, 所以 $\dot{n}(s)$ 与 $\dot{r}(s)$ 共线.

习题 4 (do Carmo, 20 韦勇班) 设 $S: r = r(u,v)$ 为 $\mathbb{E}^3$ 中的无脐点曲面, $\alpha(s) = r(u(s), v(s))$ 是 S 上的一条弧长参数正则曲线, $p = \alpha(s_0) \in S$. 设 $t = \dot{\alpha}(s_0) \in T_pS$ 为曲线在 p 处的切向量, $h \in T_pS$ 为曲面在 p 点处与 t 正交的单位切向量, 使得 $\{t, h\}$ 与曲面的定向相同, 即 $t \wedge h = n$, 其中 n 为 S 的单位法向量. 定义曲线 $\alpha(s)$ 在 p 点处的测地挠率为

$$\tau_g = \left\langle \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}(s_0), h \right\rangle.$$

1. 设 $e_1, e_2 \in T_pS$ 为 S 在 p 点处的主方向, 使得 $\{e_1, e_2, n\}$ 构成右手系, 并且对应的主曲率分别为 κ_1, κ_2. 设 e_1 与 t 的夹角为 φ, 证明: $\tau_g = (\kappa_1 - \kappa_2)\cos\varphi \sin\varphi$.
2. 证明: C 是 S 上的一条曲率线当且仅当 τ_g 恒为零.
3. 设 τ 为 C 的挠率, $\tilde{n}$ 为 C 的单位主法向量. 设 $\tilde{n}$ 和 n 的夹角为 θ, 证明: $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \tau - \tau_g$.

证明. (1) 由于 $\{e_1, e_2, n\}$ 和 $\{t, h, n\}$ 都构成右手系, 所以

$$t = \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2, \quad h = -\sin\varphi e_1 + \cos\varphi e_2.$$

结合 Weingarten 变换可得

$$\begin{aligned}
\tau_g &= \langle -(\mathcal{W}t)(s_0), h\rangle \\
&= \langle -\kappa_1 \cos\varphi e_1 - \kappa_2 \sin\varphi e_2, -\sin\varphi e_1 + \cos\varphi e_2\rangle \\
&= (\kappa_1 - \kappa_2)\cos\varphi \sin\varphi.
\end{aligned}$$

由此即证.

(2) 如果 C 是 S 的曲率线, 那么 $t(s)$ 恒为主方向 e_1 或 e_2, 亦即 φ 恒为 0 或 $\frac{\pi}{2}$. 由 (1) 中结论可得 τ_g 恒为零. 反之, 如果 τ_g 恒为零, 则 $\varphi = 0$ 或 $\frac{\pi}{2}$, 所以 C 为 S 的曲率线.

(3) 设曲线 C 的副法向量为 b, 由于 $\{t, h, n\}$ 和 $\{t, \tilde{n}, b\}$ 构成右手系, 所以

$$\tilde{n} = \cos\theta n + \sin\theta h, \quad b = -\sin\theta n + \cos\theta h.$$

注意到 $\cos\theta = \langle \tilde{n}, n\rangle$, 两边关于 s 求导可得

$$\begin{aligned}
-\sin\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} &= \left\langle \frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}s}, n \right\rangle + \left\langle \tilde{n}, \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s} \right\rangle \\
&= \langle -\kappa t + \tau b, n\rangle + \langle \tilde{n}, f(s)t + \tau_g h\rangle \\
&= (\tau_g - \tau)\sin\theta.
\end{aligned}$$

由此即证.

习题 5 (20 韦勇班) 考虑 Ennerper 曲面

$$r(u,v)=(3u(1+v^2)-u^3, 3v(1+u^2)-v^3, 3(u^2-v^2)).$$

1. 证明: Ennerper 曲面是极小曲面.
2. 证明: Ennerper 曲面的曲率线都是平面曲线.
3. 求 Ennerper 曲面上的渐近线, 并证明渐近曲线处处正交.

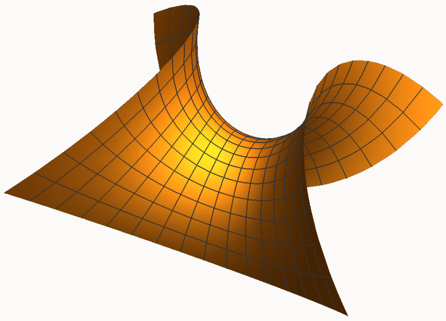


图 3: Ennerper 曲面示意图

证明. (1) 计算可得

$$r_u=(3(1+v^2)-3u^2, 6uv, 6u),\ r_v=(6uv, 3(1+u^2)-3v^2, -6v).$$

由此可得 Ennerper 曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}(u,v)=9(1+u^2+v^2)^2(\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u+\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v).$$

又因为单位法向量为

$$n=\frac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|}=\left(-\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}\right),$$

并且 $r_{uu}=(-6u,6v,6)$, $r_{uv}=(6v,6u,0)$, $r_{vv}=(6u,-6v,-6)$, 所以 Ennerper 曲面的第二基本形式为

$$\mathrm{II}(u,v)=6(\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u-\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v).$$

综合 I, II 的表达式即可得 Ennerper 曲面的平均曲率恒为零, 从而是极小曲面.

(2) 注意到 $F=M=0$, 所以 Ennerper 曲面的曲率线即为参数曲线. u-参数曲线形如 $r(u)=(3u(1+v_0^2)-u^2, 3v_0(1+u^2)-v_0^3, 3(u^2-v_0^2))$, 计算可得

$$r'(u)=3((1+v_0^2-u^2), 2v_0u, 2u),\ r''(u)=6(-u,v_0,1),\ r'''(u)=6(-1,0,0),$$

所以

$$(r', r'', r''') = 108 \begin{vmatrix} 1+v_0^2-u^2 & 2v_0u & 2u \\ -u & v_0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

这说明 u-参数曲线的挠率恒为零, 所以为平面曲线. 类似可证 v-参数曲线也是平面曲线.

(3) 设 $C: r(s) = r(u(s), v(s))$ 是 Ennerper 曲面上的弧长参数曲线, 那么 $\dot{r}(s) = r_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + r_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ 为曲面的单位切向量, 所以 $\dot{r}(s)$ 的法曲率为

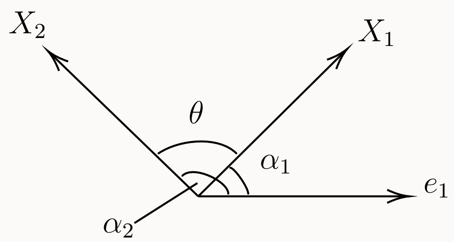
$$L\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2 + 2M\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} + N\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 6\frac{\mathrm{d}(u+v)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}(u-v)}{\mathrm{d}s}.$$

由此可得, Ennerper 曲面上的渐近曲线为直线 $u \pm v = \mathrm{const}$ 的像. 在一点 $p = r(u_0, v_0)$ 处, 两条渐近曲线为 $u \pm v = u_0 + v_0$ 的像, 它们在 p 点处的切向量分别为 $r_u - r_v$ 和 $r_u + r_v$, 由 $E = G$ 且 $F = 0$ 即可得渐近曲线正交.

习题 6 (21 韦勇班) 设 $S: r = r(u, v)$ 为正则曲面, K 为 S 的 Gauss 曲率, H 为 S 的平均曲率.

1. 若 θ 为双曲点 $p \in S$ 处两个渐近方向的夹角, 证明: $\tan\theta = \frac{\sqrt{-K(p)}}{H(p)}$.
2. 若 S 的 Gauss 曲率恒负, 则对于 S 上任一渐近曲线 C, 其挠率 τ 满足 $|\tau| = \sqrt{-K}$.

证明. (1) 设 $X \in T_pS$ 为单位渐近方向, 与主方向 e_1 的夹角为 $\alpha \in [0, \pi]$, 这里我们设 $\kappa_1 > 0, \kappa_2 < 0$. 则由 Euler 公式可得 $0 = k_n(X) = \kappa_1\cos^2\alpha + \kappa_2\sin^2\alpha$, 由此可以确定两个渐近方向 X_1, X_2, 对应的夹角 α_1, α_2 满足 $\tan\alpha_1 = -\tan\alpha_2 = \sqrt{-\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}$.



如图所示, 注意到 $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$[3], 所以计算可得

$$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2\tan\alpha_1} = \frac{-2\sqrt{-\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}}{1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}} = \frac{\sqrt{-K}}{H}.$$

最后一步成立是因为我们初始选取 $\kappa_2 < 0$.

[3]从图中可以看到 $-X_2$ 也是渐近方向, 这时 X_1 与 $-X_2$ 夹角的正切值要多一个负号, 所以原题结论多一个 $\pm$ 会更严谨些.

(2) 我们设 $C: r = r(u(s),v(s)) = r(s)$, $t(s),\tilde{n}(s),b(s)$ 分别为单位切向量、单位主法向量、单位副法向量, $n(s)$ 为曲面 S 沿 C 的单位法向. 因为 C 是渐近曲线, 所以 $0 = \langle \ddot{r}(s), n(s)\rangle = \langle \kappa(s)\tilde{n}(s), n(s)\rangle$, 这说明 $n(s)$ 与 $t(s),\tilde{n}(s)$ 均正交, 所以 $b(s) = \pm n(s)$. 设 $t(s)$ 与主方向 e_1 的夹角为 α, 则 $t(s) = \cos\alpha e_1 + \sin\alpha e_2$, 从而

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s} = \pm\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s} = \mp\mathcal{W}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right) = \mp(\kappa_1\cos\alpha e_1 + \kappa_2\sin\alpha e_2).$$

由 (1) 可得 $\tan\alpha = \pm\sqrt{-\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}$, 所以

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{\kappa_2}{\kappa_2-\kappa_1},\ \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2-\kappa_1}.$$

因此由 Frenet 方程可得

$$|\tau|^2 = \left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s}\right|^2 = \kappa_1^2\cos^2\alpha + \kappa_2^2\sin^2\alpha = -\kappa_1\kappa_2 = -K.$$

习题 7 讨论直纹极小曲面的分类.

证明. 考虑直纹面 $S: r(u,v) = a(u) + vb(u)$. 为了简化我们之后的计算, 需要挑选一些"方便"的参数.

(1) 首先, 我们可以设 $|a'(u)| = 1$, 不然选取 $\tilde{u} = \int_{u_0}^{u}|a'(\xi)|\,\mathrm{d}\xi$ 为 a 的弧长参数即可.

(2) 其次, 我们可以设 $|b(u)| = 1$. 如若不然, 则选取 $\tilde{v} = v|b(u)|$, 此时 $r = a(u) + \tilde{v}\tilde{b}(u)$, 其中 $\tilde{b}(u) = \frac{b(u)}{|b(u)|}$ 的模长为 1.

(3) 最后, 我们可以设 a' 与 b 正交. 如若不然, 考虑 $\tilde{a}(u) = a(u) - \lambda(u)b(u)$, 其中 $\lambda(u)$ 为待定的光滑函数. 这时

$$\langle\tilde{a}', b\rangle = \langle a', b\rangle - \lambda\langle b', b\rangle - \lambda'\langle b, b\rangle = \langle a', b\rangle - \lambda'.$$

我们取 $\lambda(u) = \int_{u_0}^{u}\langle a'(\xi), b(\xi)\rangle\,\mathrm{d}\xi$, 以及 $\tilde{v} = v + b(u)$, 此时 $r = \tilde{a}(u) + \tilde{v}b(u)$, 这里 $\langle\tilde{a}', b\rangle = 0$.

综上所述, 我们可以设 S 满足: (1) $|a'| = |b| = 1$, (2) $\langle a', b\rangle = 0$. 计算可得

$$r_u = a' + vb',\ r_v = b,\ n = \frac{(a'+vb')\wedge b}{|(a'+vb')\wedge b|},$$

$$r_{uu} = a'' + vb'',\ r_{uv} = b',\ r_{vv} = 0.$$

结合初始假设计算可得

$$E = |a' + vb'|^2,\ F = 0,\ G = 1,$$

$$L=\frac{(a''+vb'',a'+vb',b)}{|(a'+vb')\wedge b|},\ M=\frac{(b',a'+vb',b)}{|(a'+vb')\wedge b|},\ N=0.$$

由此可得, S 是直纹面当且仅当

$$0=H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}=\frac{L}{2(EG-F^2)}\Leftrightarrow L=0.$$

这又可以化简为

$$0=(a''+vb'',a'+vb',b)=(a'',a',b)+v((b'',a',b)+(a'',b',b))+v^2(b'',b',b).$$

然后又等价于

$$\begin{cases}(a'',a',b)=0, & (1)\\ (b'',a',b)+(a'',b',b)=0, & (2)\\ (b'',b',b)=0. & (3)\end{cases}$$

现在我们通过上述运动方程及初始假设确定曲线 $a(u)$ 和 $b(u)$ 即可. 设 $a(u)$ 的单位切向量、单位主法向量、单位副法向量分别为 T,N,B, 曲率和挠率分别为 κ 和 τ. 由于 u 是 $a(u)$ 的弧长参数, 方程 (1) 即为

$$\kappa(N,T,b)=0.$$

(I) 如果 $\kappa=0$, 这时 $a(u)$ 表示一条直线.

(i) $b'=0$, 这时 b 是常向量, 从而 S 为平面的一部分.

(ii) $b'\neq 0$, 这时由 $|b(u)|=1$ 可得 $b(u)$ 表示一段圆弧, 从而 S 是正螺面的一部分.

注 一般螺面是某个曲线 C 绕某直线 L 匀速旋转, 同时朝 L 的方向匀速平移形成的曲面. 如果 C 是与 L 正交的直线, 则称此时的螺面为正螺面. 经一个合同变换, 正螺面的参数表示可写为

$$r(u,v)=(v\cos u,v\sin u,bu).$$

(II) 如果 $\kappa\neq 0$, 那么 $(N,T,b)=0$, 从而 N,T,b 共面. 又因为 b 与 $a'=T$ 正交, 所以 $b=\pm N$. 不妨设 $b=N$, 则

$$b'=-\kappa T+\tau B,\ b''=-\dot{\kappa}T+\dot{\tau}B-(\kappa^2+\tau^2)N.$$

代入 (2) 可得

$$0=(-\dot{\kappa}T+\dot{\tau}B-(\kappa^2+\tau^2)N,T,N)+(\kappa N,-\kappa T+\tau B,N)=\dot{\tau}.$$

所以挠率 τ 是常数. 再代入 (3) 可得

$$0=(-\dot{\kappa}+\dot{\tau}B-(\kappa^2+\tau^2)N,-\kappa T+\tau B,N)=\dot{\kappa}\tau-\kappa\dot{\tau}.$$

再分两种情况讨论.

(a) $\tau = 0$, 此时 $a(u)$ 是平面曲线, $b = N$ 与 $a(u)$ 共面. 所以这时 S 是平面的一部分.

(b) $\tau \neq 0$, 那么 $\dot{\kappa} - \kappa\dot{\tau} = \tau^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\frac{\kappa}{\tau}) = 0$, 这时 κ, τ 均为常数, 由曲线论基本定理可得 $a(u)$ 是圆柱螺线, 在一个合同变换下可以写为

$$a(u) = (a\cos u, a\sin u, bu).$$

对应地 $b(u) = N(u) = (-\cos u, -\sin u, 0)$, 所以

$$r(u, v) = ((a - v)\cos u, (a - v)\sin u, bu),$$

令 $\tilde{v} = a - v$ 可知此时 S 是正螺面的一部分.

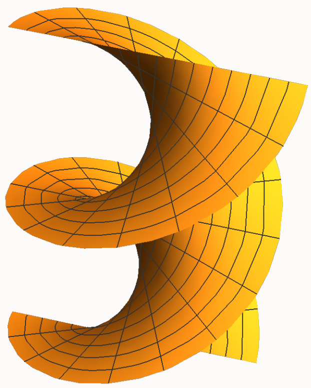


图 4: 正螺面 $r(u, v) = (v\cos u, v\sin u, u)$ 示意图

习题 8 设无脐点曲面 S 的 Gauss 曲率恒为零. 证明:

1. (20 张希班) S 上局部存在参数 (u, v), 使得曲面的两个基本形式为

$$\mathrm{I} = E\,\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + \mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v, \quad \mathrm{II} = L\,\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u.$$

2. S 在每点附近都是可展直纹曲面.

证明. (1) 任取 $p \in S$, 由于 p 非脐点, 所以可以在 p 附近取出正交的单位主方向场 e_1, e_2, 并由 $K = 0$ 可以不妨设 κ_2 恒为零. 根据上次作业中的习题三 12 题, 我们可以选取局部参数 (ζ, ξ), 使得 r_ζ, r_ξ 分别和 e_1, e_2 共线, 从而 (ζ, ξ) 是曲率线网. 这样就有 $F = M = 0$. 另一方面, 由于 $n_\xi = -\mathcal{W}r_\xi = -\kappa_2 r_\xi = 0$, 所以 $N = \langle r_\xi, n_\xi \rangle = 0$. 下面我们先说明 $|r_\xi|_\zeta = 0$.

注意到 $r_\xi = |r_\xi| e_2$, 所以 $r_{\xi\zeta} = |r_\xi|_\zeta e_2 + |r_\xi| e_{2,\zeta}$. 两边与 e_2 作内积可得只需证 $|r_\xi|_\zeta = \langle r_{\xi\zeta}, e_2\rangle$ 为零. 首先整理可得

$$\langle r_{\xi\zeta}, e_2\rangle = \partial_\xi \langle r_\zeta, e_2\rangle - \langle r_\zeta, e_{2,\xi}\rangle = -\langle r_\zeta, e_{2,\xi}\rangle.$$

由于 S 无脐点, 所以在 p 附近 κ_1 总不为零. 因此 $r_\zeta = -\frac{1}{\kappa_1} n_\zeta$, 所以只需证 $\langle n_\zeta, e_{2,\xi}\rangle$ 为零. 注意到 $n_\xi = 0$, 我们有

$$\langle n_\zeta, e_{2,\xi}\rangle = \partial_\xi \langle -\kappa_1 r_\zeta, e_2\rangle - \langle n_{\zeta\xi}, e_2\rangle = 0,$$

由此即证, 所以 $G = G(\xi)$ 只依赖于参数 ξ. 我们作局部参数变换

$$u = \zeta,\ v = \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{G(s)}\, \mathrm{d}s,$$

可以看到 r_u 和 r_v 分别与 r_ζ, r_ξ 平行, 所以 (u, v) 仍为曲率线网, 并且类似 $n_v = 0$. 此外, 还有 $|r_v| = \frac{|r_\xi|}{|v_\xi|} = 1$, 即证.

(2) 首先由 $n_v = -\kappa_2 r_v = 0$ 可得 $\langle r_{vv}, n\rangle = -\langle r_v, n_v\rangle = 0$. 另一方面, 由 $|r_v| = 1$ 可得 $\langle r_{vv}, r_v\rangle = 0$, 且

$$\langle r_{vv}, r_u\rangle = \partial_v \langle r_v, r_u\rangle - \langle r_v, r_{uv}\rangle = -\frac{1}{2}\partial_u \langle r_v, r_v\rangle = 0.$$

综上所述, 有 $r_{vv} = 0$, 积分两次可得 $r(u, v) = a(u) + v b(u)$, 所以 S 局部为直纹面, 结合 $K = 0$ 可得 S 局部为可展直纹曲面.

3 补充内容: 高斯绝妙定理, Theorema Egregium!

本节我们来探讨 "内蕴" 与 "外蕴" 的问题. 如果几何对象 M 一个几何量 "只依赖于 M 自身的结构, 而与 M 外界的全空间无关", 则称这个几何量是内蕴 (intrinsic) 的. 例如, 我们在中学学过的平面几何, 以及球面几何都是内蕴几何[4]. 对于 $\mathbb{E}^3$ 中的正则曲面, 每点处的切平面 T_pS 就是内蕴的[5]. 这就说明曲面的第一基本形式其实是内蕴几何量.

另一方面, 如果某个几何量与 M 嵌入外界空间的方式有关, 就称这个几何量是外蕴 (extrinsic) 的. 还是以 $\mathbb{E}^3$ 中的正则曲面为例, 曲面的法向量场就是外蕴的, 类似地第二基本形式, 以及平均曲率也是外蕴量.

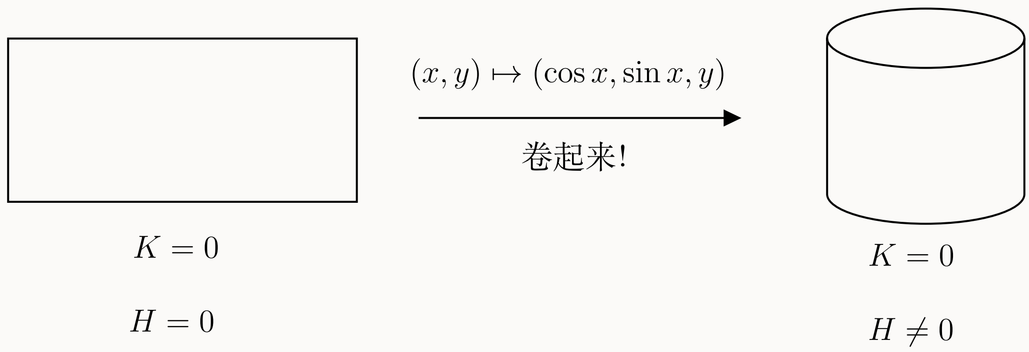
从直观上来看, 我们在定义 Gauss 曲率时, 借助了曲面的第二基本形式, 这似乎说明 Gauss 曲率也是外蕴的. 但是, Gauss 通过具体的计算发现: Gauss 曲率可以写成第一基本形式系数 E, F, G 的表达式, 它其实是内蕴的几何量 (即 **Gauss 绝妙定理**)! 也就是说,

[4]球面几何量都只依赖于球面自身的黎曼度量结构.

[5]定义一个正则曲面 (或者更一般的光滑流形) 的切向量, 可以通过取过 p 点的曲线切向量、或者定义导子的方式, 这两类方式都与曲面 (流形) 外部的背景空间是无关的.

Gauss 曲率刻画了曲面内在的弯曲程度, 而平均曲率刻画了曲面嵌入到空间中的弯曲程度.

我们可以以一个简单的例子来说明上述结论. 考虑一个二维的长方形 $[0,2\pi]\times[0,1]$, 它自然是平坦的, Gauss 曲率和平均曲率都为零, 并且第一基本形式为 $\mathrm{I}=\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y$, 第二基本形式为零. 现在我们把这个长方形弯曲成一个圆柱面, 即进行了变换 $(x,y)\mapsto(\cos x,\sin x,y)$. 这时计算可得圆柱面的第一基本形式仍然为 $\mathrm{I}=\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y$, 但是第二基本形式却为 $\mathrm{II}=-\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x$, 不再为零! 事实上, 将长方形 “卷成” 圆柱面这个操作没有影响每点附近的内蕴结构, 但改变了曲面嵌入外界空间的方式. 所以第一基本形式没有改变, 而第二基本形式改变了. 此时, 圆柱面的平均曲率为 $H=-\frac{1}{2}$, 不再为零. 这说明, 圆柱面是内蕴平坦的 ($K=0$), 但嵌入到 $\mathbb{E}^3$ 中不再是平坦的 ($H\neq 0$).



这也说明内蕴和外蕴的弯曲是不同的. 在 Gauss 绝妙定理之后, 内蕴几何发展为黎曼几何 (Riemann geometry), 而外蕴几何发展为子流形几何 (submanifold geometry). 现在, 让我们回到对 Gauss 绝妙定理的讨论.

定理 3.1 (高斯绝妙定理, Theorema Egregium) *正则曲面 S 的 Gauss 曲率 K 是内蕴量.*

Gauss 绝妙定理是古典微分几何历史上的伟大丰碑. 它的证明方法很多, 同学们将会在第四/五章学习利用幺正标架和联络形式的证明, 即 Gauss 方程 $\mathrm{d}\omega_{12}=-K\omega_1\wedge\omega_2$. 这里, 我们介绍 Gauss 的原始证明, 这也是最初等、最直接的证法.

为了进一步整理 Gauss 曲率 K 的表达式, 我们首先要整理第二基本形式系数 L,M,N. 根据定义可得

$$L=\langle r_{uu},n\rangle=\left\langle r_{uu},\frac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|}\right\rangle=\frac{1}{|r_u\wedge r_v|}\det\begin{pmatrix}r_{uu}\\ r_u\\ r_v\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\det\begin{pmatrix}r_{uu}\\ r_u\\ r_v\end{pmatrix}.$$

类似地, 我们可以得到

$$M=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\det\begin{pmatrix}r_{uv}\\ r_u\\ r_v\end{pmatrix},\quad N=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\det\begin{pmatrix}r_{vv}\\ r_u\\ r_v\end{pmatrix}.$$

注意到取转置的操作不改变行列式, 所以有

$$\begin{aligned}
K &= \frac{LN-M^2}{EG-F^2} \\
&= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[\det\begin{pmatrix} r_{uu} \\ r_u \\ r_v \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} r_{vv}^T & r_u^T & r_v^T \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} r_{uv} \\ r_u \\ r_v \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} r_{uv}^T & r_u^T & r_v^T \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[\begin{vmatrix} \langle r_{uu}, r_{vv}\rangle & \langle r_{uu}, r_u\rangle & \langle r_{uu}, r_v\rangle \\ \langle r_u, r_{vv}\rangle & \langle r_u, r_u\rangle & \langle r_u, r_v\rangle \\ \langle r_v, r_{vv}\rangle & \langle r_v, r_u\rangle & \langle r_v, r_v\rangle \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \langle r_{uv}, r_{uv}\rangle & \langle r_{uv}, r_u\rangle & \langle r_{uv}, r_v\rangle \\ \langle r_u, r_{uv}\rangle & \langle r_u, r_u\rangle & \langle r_u, r_v\rangle \\ \langle r_v, r_{uv}\rangle & \langle r_v, r_u\rangle & \langle r_v, r_v\rangle \end{vmatrix}\right].
\end{aligned}$$

化简暂时停止, 现在我们来看看上面行列式的各项是否是内蕴的. 显然的几项是

$$\langle r_u, r_u\rangle = E,\ \langle r_u, r_v\rangle = \langle r_v, r_u\rangle = F,\ \langle r_v, r_v\rangle = G.$$

然后是比较简单的几项

$$\begin{aligned}
\langle r_{uu}, r_u\rangle = \frac{1}{2}\partial_u\langle r_u, r_u\rangle = \frac{E_u}{2},\ \langle r_v, r_{vv}\rangle = \frac{1}{2}\partial_v\langle r_v, r_v\rangle = \frac{G_v}{2}. \\
\langle r_{uv}, r_u\rangle = \frac{1}{2}\partial_v\langle r_u, r_u\rangle = \frac{E_v}{2},\ \langle r_{uv}, r_v\rangle = \frac{1}{2}\partial_u\langle r_v, r_v\rangle = \frac{G_u}{2}.
\end{aligned}$$

再然后是需要灵机一动的几项

$$\langle r_{uu}, r_v\rangle = \partial_u\langle r_u, r_v\rangle - \langle r_u, r_{uv}\rangle = F_u - \frac{E_v}{2}.$$

$$\langle r_u, r_{vv}\rangle = \partial_v\langle r_u, r_v\rangle - \langle r_{uv}, r_v\rangle = F_v - \frac{G_u}{2}.$$

最后就是令人恼火的两项了: $\langle r_{uu}, r_{vv}\rangle$ 和 $\langle r_{uv}, r_{uv}\rangle$. 如果仍沿用上面的操作, 根本无法把这两项化为 E, F, G 的形式. 但是, 如果我们再灵机一动, 可以尝试把这两项合在一起, 看看它们的和/差是否是内蕴的. 为此, 我们需要用线性代数里的小技巧, 把 K 的表达式化为

$$\begin{aligned}
K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}&\left[\begin{vmatrix} \langle r_{uu}, r_{vv}\rangle - \langle r_{uv}, r_{uv}\rangle & \langle r_{uu}, r_u\rangle & \langle r_{uu}, r_v\rangle \\ \langle r_u, r_{vv}\rangle & \langle r_u, r_u\rangle & \langle r_u, r_v\rangle \\ \langle r_v, r_{vv}\rangle & \langle r_v, r_u\rangle & \langle r_v, r_v\rangle \end{vmatrix}\right. \\
&\left. - \begin{vmatrix} 0 & \langle r_{uv}, r_u\rangle & \langle r_{uv}, r_v\rangle \\ \langle r_u, r_{uv}\rangle & \langle r_u, r_u\rangle & \langle r_u, r_v\rangle \\ \langle r_v, r_{uv}\rangle & \langle r_v, r_u\rangle & \langle r_v, r_v\rangle \end{vmatrix}\right].
\end{aligned}$$

(可以直接用 Laplace 展开验证). 而令人兴奋的是, 我们可以用同样的技巧化简这个差项:

$$\begin{aligned}
\langle r_{uu}, r_{vv}\rangle - \langle r_{uv}, r_{uv}\rangle &= (\partial_u\langle r_u, r_{vv}\rangle) - \langle r_u, r_{uvv}\rangle - (\partial_v\langle r_u, r_{uv}\rangle - \langle r_u, r_{vuv}\rangle) \\
&= \partial_u\left(F_v - \frac{G_u}{2}\right) - \frac{E_{vv}}{2} = F_{uv} - \frac{G_{uu}}{2} - \frac{E_{vv}}{2}.
\end{aligned}$$

这其实就已经得到 K 的内蕴性了! 为了使整个计算完美无瑕, 我们最后来把所有项的表达式代入 K 的计算式中, 就可以得到

$$\begin{aligned}4(EG-F^2)^2K&=4\begin{vmatrix}F_{uv}-\frac{1}{2}G_{uu}-\frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{E_v}{2}\\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F\\ \frac{1}{2}G_v & F & G\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}\\
&=E(E_vG_v-2F_uG_v+G_u^2)+\\
&\quad F(E_uG_v+4F_uF_v-2F_uG_u-2E_vF_v-E_vG_u)+\\
&\quad G(E_uG_u-2E_uF_v+E_v^2)+\\
&\quad 2(EG-F^2)(2F_{uv}-G_{uu}-E_{vv}).\end{aligned}$$

(非常美结论, 爱来自 USTC)