最大模原理(平均值公式的应用)

设$f(z)$在有界域D内解析, 在有界闭域$\bar{D}=D+C$上连续,

其中C是D 的边界，$f(z)$在D内不恒等于常数，则

$|f(z)|$只能在边界C上取到它在 整个闭域$\bar{D}=D+C$上的最大值,

即$\exists a\in C$, 使得$|f(a)|=\max\limits_{z\in D+C}|f(z)|$, 且$\forall z\in D$, $|f(z)|<|f(a)|$.

证明: 首先因$f(z)$在$\bar{D}$上连续, 故实函数$|f(z)|$在闭域$\bar{D}$上连续.

因此$\exists z_0\in D+C$，使得$M\triangleq\max\limits_{z\in D+C}|f(z)|=|f(z_0)|$.

我们只需证明$z_0\notin D$. 用反证法. 假设$z_0\in D$.

(1) 证$|f(z)|$在z_0 的任一含在D 内的邻域内恒为常数M; 用平均值公式.

(2)证明$\forall z\in D$, $|f(z)|=M$. 用圆链法.

(1) 用平均值公式. 因D是开域, $z_0\in D$, 任作一个以z_0 为中心、

R 为半径且完全含在D内的圆域, 其边界圆周K_0: $|z-z_0|=R$.

设$f(z)$在有界域D内解析，在$\bar{D}=D+C$上连续，C是D的边界，$f(z)$不恒为常数，则$|f(z)|$只能在C上取到它在闭域$\bar{D}$上的最大值.

证明：由条件，实函数$|f(z)|$在闭域$\bar{D}$上连续. 因此$\exists z_0\in D+C$，使得$M\triangleq\max\limits_{z\in D+C}|f(z)|=|f(z_0)|$. 只需证$z_0\notin D$. 用反证法. 假设$z_0\in D$.

(1) 证$|f(z)|$在z_0的任一含在D内的邻域内恒为M. 用平均值公式.

因D是开域，$z_0\in D$，任作一个以z_0为中心、R为半径且完全含在D内的圆域，记边界圆周为K_0：$|z-z_0|=R$.

由条件，$f(z)$在K_0及其内部解析.对任意在K_0内且与其同心的圆周$K_r: z=z_0+re^{i\theta}$，$0\le\theta<2\pi$，$0<r\le R$，由平均值公式得，

$$M=|f(z_0)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+re^{i\theta}\right)d\theta\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+re^{i\theta}\right)\right|d\theta$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M\,d\theta=M.$$ 故此式中"$\le$"都应该取"$=$".

由条件, $f(z)$在K_0 及其内部解析.对任意在K_0 内且与其同心的圆周 $K_r: z=z_0+re^{i\theta}$, $0\le\theta<2\pi$, $0<r\le R$, 由平均值公式得,

$$M=|f(z_0)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{i\theta})\right|\mathrm{d}\theta$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\,\mathrm{d}\theta=M.$$ 故此式中"≤"都应该取"=".

故 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{i\theta})\right|\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M\,\mathrm{d}\theta$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{M-\left|f(z_0+re^{i\theta})\right|\right\}\mathrm{d}\theta=0.$

又因 $M-\left|f(z_0+re^{i\theta})\right|\ge 0$, 故 $\left|f(z_0+re^{i\theta})\right|\equiv M$, $0\le\theta<2\pi$.

再由$r\in(0,R]$的任意性, 知 在圆周K_0 及其内部$|f(z)|\equiv M$.

(2) 证明$\forall z\in D$, $|f(z)|=M$. 用圆链法.

$\forall z\in D$,用一条含在D内的逐段光滑曲线L 将z_0 和z 连接.

因为D有界, 故可设L 的长度有限.

(2) $\forall z\in D$,用一条含在D内的逐段光滑曲线L将z_0和z连接. D有界, 故可设L长度有限. 用圆链法证明$|f(z)|=M$.

设$\rho=\min\limits_{z\in L,\ \zeta\in C}|z-\zeta|$, $\rho>0$. 作圆链. 作圆周$K_0:|z-z_0|=\dfrac{\rho}{2}$,

设K_0与L交于点z_1. 再作圆周K_1: $|z-z_1|=\dfrac{\rho}{2}$.

依次类推, 以前一圆周与L的交点为圆心、$\dfrac{\rho}{2}$为半径连续作圆周下去.

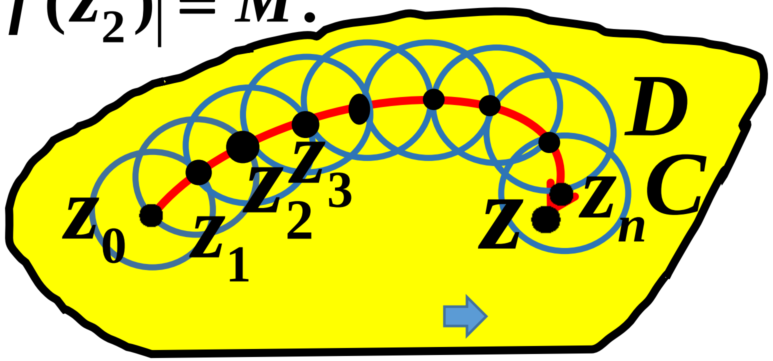
$\exists n\in\mathbb{Z}^+$,使得第n个圆周K_n: $|z-z_n|=\dfrac{\rho}{2}$满足z落在K_n上或其内部.

由(1)得, $|f(z_1)|=M$. 对z_1和K_1利用(1)得 $|f(z_2)|=M$.

依此类推得$|f(z_k)|=M$, $1\le k\le n$.

对z_n和K_n利用(1)得$|f(z)|=M$.

由z任意性知$|f(z)|$在D内恒等于M.



由P47第8(5)题, $f(z)$在D内恒等于复常数. $f(z)$在$D+C$上连续,

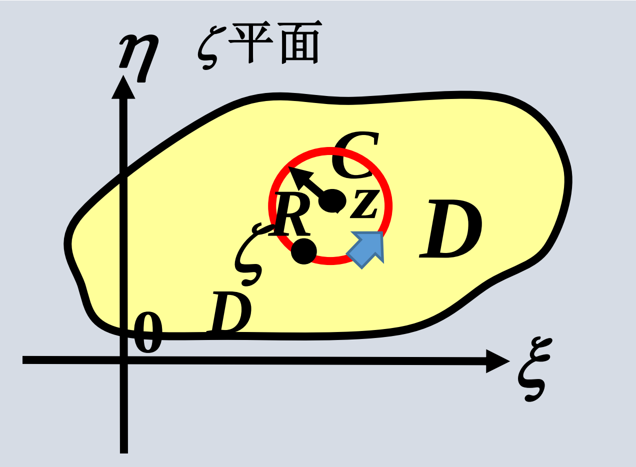
所以$f(z)$在$D+C$上恒等于复常数. 这与条件矛盾. 故$z_0\notin D$, $z_0\in C$. #

解析函数导数模的估计(P64)(由柯西积分公式导出)

柯西(Cauchy)不等式： 设$f(\zeta)$在D内解析, $\forall z\in D$,

以z为圆心任作一个含在D内的圆周$C:|\zeta-z|=R\,(R>0)$, 则

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!M(R)}{R^n},\ n=0,1,2,\cdots,$$



其中$M(R)$是$|f(z)|$在圆周C上的最大值.

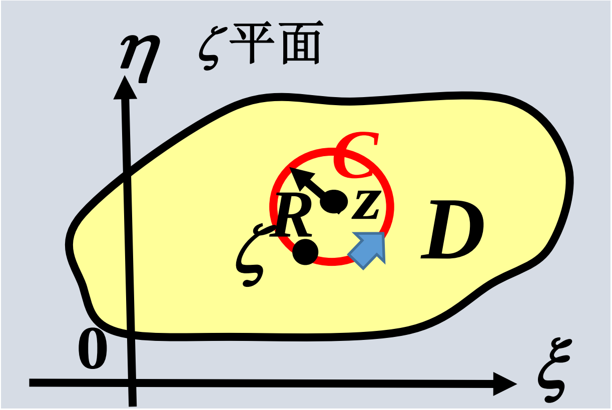
证明：由柯西积分公式(P 59-60定理5和6),

以及长大不等式, 得 $\forall n=0,1,2,\cdots,$

$$\left|f^{(n)}(z)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right|\le\frac{n!}{\cancel{2\pi}}\cdot\frac{M(R)}{R^{\cancel{n+1}}}\cdot\cancel{2\pi}\cancel{R}=\frac{n!M(R)}{R^n}.\quad \#$$

$$\boxed{n=1\text{ 时},\ \left|f'(z)\right|\le\frac{M(R)}{R}.}$$

柯西(Cauchy)不等式：设 $f(\zeta)$在D 内解析, $\forall z\in D$, 在D内 以z为圆心任作圆周$C:|\zeta-z|=R\,(R>0)$, 则



$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!M(R)}{R^n},\quad n=0,1,2,\cdots,\quad M(R)=\max_{z\in C}|f(z)|.$$

证明：利用柯西积分公式(P 59-60定理5和6), 以及长大不等式. $\forall n=0,1,2,\cdots$,

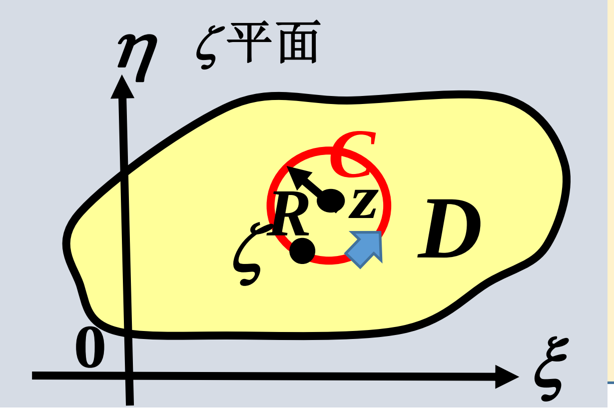
$$\zeta\in C\ \text{时},\ \left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\right|=\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|^{n+1}}=\frac{|f(\zeta)|}{R^{n+1}}\le\frac{M(R)}{R^{n+1}}.$$

$$\left|f^{(n)}(z)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right|\le\frac{n!}{\cancel{2\pi}}\cdot\frac{M(R)}{R^{\cancel{n+1}}}\cdot\cancel{2\pi R}=\frac{n!M(R)}{R^n}.\quad \#$$

注：$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$, 故 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

柯西(Cauchy)不等式：设 $f(\zeta)$在D 内解析, $\forall z \in D$,
在D内以z为圆心任作圆周$C:|\zeta - z| = R\ (R>0)$, 则

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!M(R)}{R^n},\ n=0,1,2,\cdots,\quad M(R)=\max_{\zeta\in C}|f(\zeta)|.$$



定义：称在开复平面(不含∞)上处处解析的函数为**整函数**.

例如, $z^3 - \mathrm{i}z + 1$, e^{az}, $\cos az$, $\sin az$, $\cosh az$, $\sinh az$,
都是整函数，其中a为非0复常数.

又如, $\dfrac{e^{az}}{z^3 - \mathrm{i}z}$, $e^{\frac{2}{z-\mathrm{i}}}$, $\dfrac{1}{\cos az}$, 有奇点, 都不是整函数.

$n=1$ 时柯西不等式: 在解析区域内, $\left|f'(z)\right| \le \dfrac{1}{R}\max\limits_{|\zeta - z|=R}|f(\zeta)|$.

刘维尔定理(P65定理7):

柯西(Cauchy)不等式：设 $f(\zeta)$在D 内解析, $\forall z\in D$,
在D内以z为圆心任作圆周$C:|\zeta-z|=R(R>0)$, 则 $\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!}{R^n}\max\limits_{\zeta\in C}|f(\zeta)|$, $n=0,1,2,\cdots$.

$n=1$ 时柯西不等式：在解析区域内, $|f'(z)|\le\frac{1}{R}\max\limits_{|\zeta-z|=R}|f(\zeta)|$.

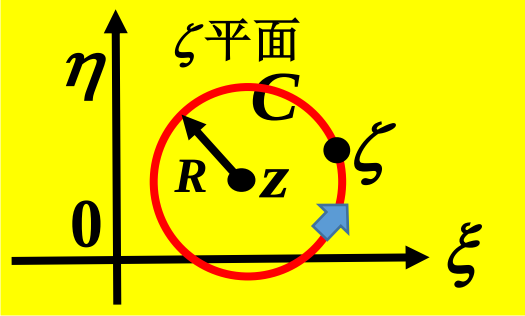
刘维尔定理(P65定理7) 如果 $f(z)$是整函数, 且$\exists M>0$,
使得$\forall z\in\mathbb{C}$, $|f(z)|\le M$, 则 $f(z)$在整个开复平面必是常数.

证明：$\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall R>0$, 作圆周$C_R:|\zeta-z|=R$, 由柯西不等式知

$$|f'(z)|\le\frac{1}{R}\max_{\zeta\in C_R}|f(\zeta)|\le\frac{M}{R}.\quad (M,\ |f'(z)|与R无关.)$$

令$R\to+\infty$, 得 $|f'(z)|=0$，故 $f'(z)=0$.

z 是任意的, 故$\forall z\in\mathbb{C}$，$f'(z)=0$.



由P 47第8(1)题得，$f(z)$必为常数. #

整函数：　在开复平面(不含∞)上处处解析的函数.

刘维尔定理(P65定理7)　如果 $f(z)$是整函数, 且$\exists M>0$, 使得$\forall z\in\mathbb{C}$, $|f(z)|\le M$,　则$f(z)$在整个开复平面必是常数.

- 非恒等于常数的整函数的模在开复平面无界.

比如, $|e^z|$, $|\cos z|$, $|\sin z|$无界(P44).

代数学基本定理(P65)： 任意复多项式

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n,\ n\geq 1,\ a_0\neq 0$$

必有零点，即$f(z)=0$必有根，且有n 个根(重根按重数计数).

证明：先证$f(z)=0$必有根. 若$a_n=0$，则$z=0$是$f(z)=0$的根.

若$a_n\neq 0$，用反证法证明$f(z)=0$必有根.

假设$f(z)=0$没有根，则$\forall z\in\mathbb{C}, f(z)\neq 0.$ $f(z)$在开复平面上解析.

$\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 在开复平面上解析. 由P47第3，$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty.$

$\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{f(z)}=0.$ 故$\exists R>0$，使得当$|z|>R$ 时，$|\varphi(z)|<1.$

又因$\varphi(z)$在有界闭域$|z|\leq R$ 内解析，所以$|\varphi(z)|$在$|z|\leq R$ 内有界.

故$|\varphi(z)|$在开复平面有界. 由刘维尔定理得$\varphi(z)$ 必为常数，

从而$f(z)$也必复常数. 此与$f(z)$定义矛盾. 因此$f(z)=0$必有根.

刘维尔定理(P65定理7) 如果 $f(z)$是整函数，且$\exists M>0$，

使得$\forall z\in\mathbb{C}$，$|f(z)|\leq M$，则 $f(z)$在整个开复平面必是常数.

代数学基本定理(P65)：任意n次复多项式 $f(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}$, $(n\geq 1,\ a_0\neq 0)$必有n个零点，

即$f(z)=0$必有根，且有n 个根 (重根按重数计数).

已证 $f(z)=0$必有根.

列竖式求 $\dfrac{f(z)}{a_0(z-z_1)}$.

下证：$f(z)=0$必有n个根. 设$z=z_1$是$f(z)=0$ 的一个根.

$$
\begin{array}{r l}
 & z^{n-1}+\dfrac{a_1+a_0z_1}{a_0}z^{n-2}+\qquad\qquad \triangleq g(z)\\
a_0(z-z_1) & \overline{\big)\,a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}\\
 & a_0z^n-a_0z_1z^{n-1}\\
\hline
 & (a_1+a_0z_1)z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}z+a_n\\
 & \bullet\ \bullet\ \bullet\\
\hline
\end{array}
$$

$\dfrac{f(z)}{a_0(z-z_1)}$的商是$n-1$次多项式(z^{n-1}的系数为1)，记为$g(z)$，最后余项为复常数，记为C_0，即

$f(z)=a_0(z-z_1)g(z)+C_0$. 因$f(z_1)=0$，故 $C_0=0$.

故 $f(z)=a_0(z-z_1)g(z)$. 若$n-1\geq 1$，则$g(z)$也必有根，记为z_2，

不断重复上述过程得，$f(z)=0$必有n个根$z_1, z_2,\cdots, z_n$，且

$$f(z)=a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n).\ \#$$

莫雷拉(Morera)定理(柯西积分定理的逆定理)

定理8(P66) 若$f(z)$在单连通区域D中连续，

对D内任一闭路C，$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$，则 $f(z)$在D内解析.

证明：由P56定理4的证明，$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 是单值函数，

在D内解析，故 $F'(z)=f(z)$. 由柯西导数积分公式(P60定理6)知，

在D 内解析函数$F(z)$有任意阶导数，$F^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \dfrac{F(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$，$n=1,2,\ldots$.

$F^{(n)}(z)$在D内解析，$n=0,1,2,\cdots$. 故 $f(z)=F'(z)$ 在D内解析. #

综合莫雷拉(Morera)定理和柯西积分定理得：

定理9(P66) $f(z)$在单连通区域D内解析的充要条件是：

$f(z)$在单连通区域D内连续，且对D内任一闭路C，有 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

第四章 调和函数

4.1 解析函数与调和函数的关系

调和函数的定义

定义(P69)：如果实函数 $u=u(x,y)$ 在区域D内有二阶连续偏导数，且在D内满足(二维)Laplace方程:

$$\Delta u \triangleq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\equiv 0, \quad (4.2)$$ ★★

则称 $u(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数.

例如， a, $ax+by$, (a,b为任意实常数), 都是调和函数.

解析函数与调和函数的关系

定理1(P 70): 设$z = x + \mathrm{i}\, y \in D$, $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$ 在 D 内解析，

则$f(z)$的实部$u(x, y)$和虚部$v(x, y)$都是 D 内的调和函数.

证明：需证明$\Delta u = 0, \Delta v = 0$. 因$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$ 在 D 内解析，

故u与 v在D内可微, 满足柯西-黎曼(简称C-R)方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (4.1)$$

又因为解析函数具有任意阶导数(P60定理6-柯西导数积分公式),

故u 与 v具有二阶连续偏导数.对第一式关于x、第二式关于y求偏导得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}. \quad \text{故 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (4.2)$$

同理, 对(3.5.1)中第一式关于y、第二式关于x求偏导得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}. \quad \text{故 } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (4.3) \ \#$$

定理1(P 70): 设$z = x + \mathrm{i}\, y \in D$, $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$ 在 D 内解析，
则$f(z)$的实部$u(x, y)$和虚部$v(x, y)$都是 D 内的调和函数.

定义 设在区域 D 内, $u(x, y)$ 和$v(x, y)$ 都是的调和函数，
且满足柯西-黎曼方程，即 $u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$ 在 D 内解析，
则称u和v为 共轭调和函数.

例1), 因$z^2 = (x + \mathrm{i}\, y)^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2xy\,\mathrm{i}$，解析，

故 $x^2 - y^2$，$2xy$ 都是调和函数，是共轭调和函数.

例2), 因$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\, \mathrm{e}^x \sin y$， 解析，

故$\mathrm{e}^x \cos y$，$\mathrm{e}^x \sin y$ 都是调和函数，是共轭调和函数.

但是 x^2, y^2，$x^2 + y^2$，e^{x+y} 等不满足Laplace方程，故都不是调和函数.

例，$e^{ax}\sin by$ 在什么条件下是调和函数？其中a,b 为实常数.

解：记$u(x,y)=e^{ax}\sin by$，有二阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a e^{ax}\sin by,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2 e^{ax}\sin by,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=b e^{ax}\cos by,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-b^2 e^{ax}\sin by.$$

故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(\underline{a^2-b^2})e^{ax}\underline{\sin by}.\quad e^{ax}\neq 0.$

故当$a^2-b^2=0$，或$\sin by=0,\ \forall y\in\mathbb{R}$ 时，$u(x,y)$是调和函数.

故当$a=\pm b$或$b=0$时，$u(x,y)$是调和函数. #

定义：若$u=u(x,y)$在区域D内有二阶连续偏导数，

且在D内满足Laplace方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，即$\Delta u=0$，

则称 $u(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数.

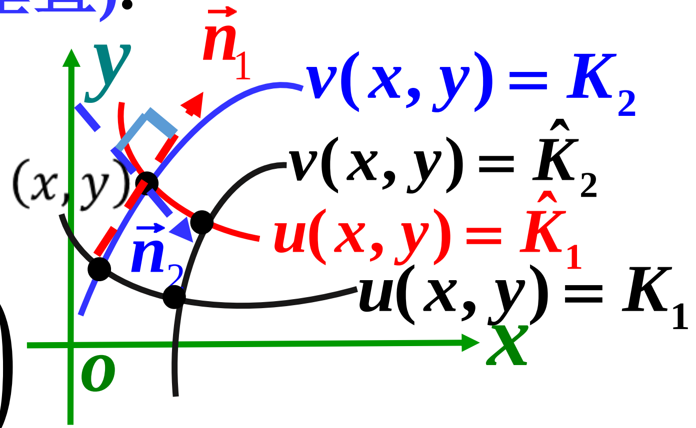
共轭调和函数的一个性质(由柯西-黎曼方程导出)

定理2(P 70) 设 $u(x,y)$ 和$v(x,y)$是共轭调和函数，

即 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是解析函数， 且设$f'(z)\neq 0$，

则等值曲线族 $u(x,y)=K_1$， $v(x,y)=K_2$， $(K_1$和K_2是常数$)$，

在其公共点上永远互相正交(法线互相垂直).



证明 两族曲线法向量分别为

$$\vec{n}_1=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j,\ \left(\text{或记为}\vec{n}_1=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right),\right)$$

$$\vec{n}_2=\frac{\partial v}{\partial x}i+\frac{\partial v}{\partial y}j,\ \left(\text{或记为}\vec{n}_2=\left(\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y}\right).\right)$$

在交点(x,y)处，由柯西−黎曼方程得

$$\vec{n}_1\bullet\vec{n}_2=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

故在交点处 $\vec{n}_1$， $\vec{n}_2$ 正交.#

P75第2(1) 题 设$f(z)$是解析函数, $f(z)\neq 0$, 证明$\ln|f(z)|$ 是调和函数.

证明：设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$. 因为$f(z)$是解析函数，

故u，v是调和函数, 即 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$. (*)

记$w(x,y)=\ln|f(z)|$, 则$w(x,y)=\ln\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(u^2+v^2\right)$.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}}{2\left(u^2+v^2\right)}=\frac{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}}{u^2+v^2}.$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}(u^2+v^2)-2\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}{(u^2+v^2)^2}.$$

类似地, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\cdots$, 故 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\cdots$, 整理化简,

利用(*)和u,v满足C-R方程，推出$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$. #

P75第2(2) 题 设$f(z)$是解析函数, $f(z)\neq 0$, 证明$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$.

证明： 设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$. 因为$f(z)$是解析函数，

故u,v是调和函数, 即 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.\quad (*)$

由P 28(2.7), $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$. $|f(z)|^2=u^2+v^2$.

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2)=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2+v^2)=2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}.$$

类似地, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2+v^2)=2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\}$. 故利用(*)得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u^2+v^2)=2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}+2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}.$$

因为$f(z)$是解析函数， 故u,v满足C-R方程, 故

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2= 2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}+2\left\{\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}$$

$$=4\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}=4|f'(z)|^2.\quad \#$$

P75第3(2) 题 设u是调和函数, 且不恒等于常数, 问:对怎样的f，函数 $f(u)$ 为调和函数?

证明提示：$\dfrac{\partial f(u)}{\partial x}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\quad \dfrac{\partial^2 f(u)}{\partial x^2}=f''(u)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+f'(u)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

依此类推求出$\left(\dfrac{\partial^2 f(u)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f(u)}{\partial y^2}\right)$.

u 不恒等于常数, 故 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$不可能同时为0.

对u灵活应用调和函数定义, 求出f应该满足的常微分方程,

求解此常微分方程得 f. #

作业

P68

18(令$g(z)=1/f(z)$, 对$g(z)$利用最大模原理) ,

P75

1 ,

2(1)(利用调和函数定义、柯西-黎曼方程, 参考此PPT的P18提示),

3(1),

3(2)(选做：参考此PPT的P20提示)