§7.4 级数的应用

7.4.1 用幂级数计算特殊级数的值

例 1 计算 $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, $B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $C=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的值.

解 先求 $y=\arcsin x$ 在零点的高阶导数值. 因为 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 即, $y'\sqrt{1-x^2}=1$. 再求导, 得

$$y''\sqrt{1-x^2}-y'\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

故,

$$(1-x^2)y''-xy'=0.$$

再利用求高阶导数的 Leibniz 公式, 可得递推公式:

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0. \tag{1}$$

将 $x = 0$ 代入, 得

$$y^{(n+2)}(0) - n^2 y^{(n)}(0) = 0. \tag{2}$$

从 $y(0) = 0, y'(0) = 1$, 经递推公式得

$$y^{(2n)}(0) = 0,\ y^{(2n+1)}(0) = ((2n-1)!!)^2.$$

这样就得到 $\arcsin x$ 的幂级数展开

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} \cdot x^{2n+1},\ (x \in [-1, 1]). \tag{3}$$

在上式中令 $x = \sin t$, 得

$$t = \sin t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} \sin^{2n+1} t,\ (-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}).$$

上式两端对 t 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 积分, 并对右端逐项积分, 得

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\, dt$$

利用已知的积分

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\, dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

即得

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

因为

$$B = A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = A + \frac{1}{4}B,$$

所以

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}A = \frac{\pi^2}{6}.$$

因为 $B + C = 2A$, 所以 $C = \frac{\pi^2}{12}$.

注 此方法是由 Euler 发现的(发表于 1743 年).

7.4.2 用幂级数计算积分的值

例 2 计算积分 $A = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

解 根据幂级数展开式:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad (x \in (-1, 1])$$

对于 $x \in (0, 1]$ 有

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n+1}.$$

根据幂级数的逐项积分性质, 有

$$A = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

7.4.3 微分方程幂级数解

设二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 的邻域内可以展开成幂级数, 则可以假设方程在 x_0 的邻域有幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

给定初始条件 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$, 将上式代入方程, 利用待定系数法可以求出 $a_0, a_1, \cdots$, 从而得出方程的一个特解 $y_1(x)$. 给定另一组初始条件 $y(x_0) = \bar{y}_0, y'(x_0) = \bar{y}_1$, 它与 (y_0, y_1) 线性无关, 则可以得出与 $y_1(x)$ 线性无关的特解 $y_2(x)$, 从而得出方程的通解:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

例 3 求 Airy 方程

$$y'' - xy = 0$$

的幂级数解.

解 设 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是 Airy 方程的幂级数解, 则

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

代入方程, 得

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

即,

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \big((n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1}\big) x^n = 0.$$

因此, 有

$$a_2 = 0, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \ (n \geqslant 1).$$

令 $a_0 = 1, a_1 = 0$, 得 $a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0$,

$$a_{3k} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3k-1) \cdot 3k} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!}.$$

因此, 一个特解是

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k}.$$

令 $a_0 = 0, a_1 = 1$, 得 $a_{3k} = a_{3k+2} = 0$,

$$a_{3k+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!},$$

因此, 另一个特解是

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} x^{3k+1}.$$

7.4.4 Stirling 公式

现在, 我们要讨论一个很有趣的问题. 大家知道, 当我们比较无穷大量的阶时, 有一个体会:

$$\ln n, \quad n^{\alpha}\ (\alpha > 0), \quad a^{n}\ (a > 1), \quad n!, \quad n^{n}$$

这些量随 $n \to +\infty$ 时, 发散到 $+\infty$ 的速度一个比一个快.

Stirling 公式, 就是给出 $n!$ 和 n^n 之间的一种关系. 为了给出这个关系, 我们先证明下面的引理.

引理 1 (Wallis) 记 $(2n)!!$ 与 $(2n-1)!!$ 分别表示前 n 个偶数和前 n 个奇数的连续乘积, 则

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2.$$

证明 因为当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时有

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x,$$

积分得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,dx,$$

所以

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

由此可得

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n}.$$

若令

$$a_n=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1},\quad b_n=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n}.$$

则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2\cdot\frac{2n+1}{2n+3}=\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+8n+3}>1.$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2\cdot\frac{2n}{2n+2}=\frac{4n^2+4n}{4n^2+4n+1}<1.$$

因而 $\{a_n\}$ 是递增数列, $\{b_n\}$ 是递减数列, 且

$$b_n-a_n=\frac{1}{2n(2n+1)}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2n}.$$

当 $n\to\infty$ 时, 这个差值趋于零, 由此得 Wallis 公式.

定理 1 (Stirling)

$$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

证明 将幂级数展开式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

相减, 可得

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \cdots + \frac{1}{2m+1}x^{2m} + \cdots\right) \qquad (-1 < x < 1).$$

令 $x = \frac{1}{2n+1}$, 就得到

$$\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right]$$

或写成

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots$$

这个级数的和显然大于 1, 而小于把各项分母上的数 $5, 7, \cdots$ 代之以 3 后所得的级数之和

$$1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]=1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

所以有不等式

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)}$$

即

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<\exp\left(1+\frac{1}{12n(n+1)}\right).$$

再考察数列 $\{a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\}$, 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e},$$

故得

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < \exp\left(\frac{1}{12n(n+1)}\right).$$

从上面左边不等式推知 a_n 是递减数列, 并以 0 为其下界, 所以 $\{a_n\}$ 收敛, 设其极限为 a; 从右边不等式推知

$$a_n \exp(-\frac{1}{12n}) < a_{n+1} \exp(-\frac{1}{12(n+1)})$$

即 $\{a_n \exp(-\frac{1}{12n})\}$ 是递增数列, 且仍以 a 为其极限. 如此上面两个单调数列的共同极限 a 必介于这两个数列的通项 $a_n \exp(-\frac{1}{12n})$ 与 a_n 之间,

$$a_n \exp(-\frac{1}{12n}) < a < a_n.$$

若取 $\theta_n = 12n \ln \frac{a_n}{a}$, 则 $0 < \theta_n < 1$, 并且将

$$a_n = a \exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right)$$

代入 a_n 的表达式就得到

$$n! = a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right).$$

于是余下的问题就是要确定常数 a. 由于

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n!!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!},$$

但

$$n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n a_n, \quad (2n)! = \sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} a_{2n},$$

代入上式的右边, 得

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \sqrt{\frac{n}{2}\frac{a_n^2}{a_{2n}}},$$

两边平方后利用 Wallis 公式, 得

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a^2}{4}$$

从而 $a = \sqrt{2\pi}$. 这样就得到 Stirling 公式.

例 4 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$.

解

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot((2n)!!)^{1/n}}{((2n)!)^{1/n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(2^n\cdot n!)^{1/n}}{((2n)!)^{1/n}}\\
&= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{2^n\cdot(\frac{n}{e})^n\cdot\sqrt{2n\pi}}{(\frac{2n}{e})^{2n}\cdot\sqrt{4n\pi}}\right)^{1/n}\\
&= \frac{e}{2}.
\end{aligned}$$