目录

符号表

$I_A(x)$	集合 A 的示性函数, $I_A(x) = 1,$ 当 $x \in A$; $I_A(x) = 0,$ 当 $x \notin A$
$B(n, p)$	二项分布, $0 < p < 1$
$P(\lambda)$	参数为 λ 的泊松分布
$U(a, b)$	区间 (a, b) $(-\infty < a < b < \infty)$ 上的均匀分布, 概率密度函数 $f(x) = \frac{1}{(b-a)} I(a < x < b)$
$N(\mu, \sigma^2)$	均值为 μ, 方差为 σ^2 的正态分布
$Exp(\lambda)$	指数分布, 均值为 $1/\lambda$. 概率密度函数为 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I(0 < x < \infty)$

第一章　事件的概率

1. 写出下列随机试验的样本空间:

   (1) 随机抽查 10 户居民, 记录家中有计算机的户数.

   (2) 统计某本书中印刷错误的字数.

   (3) 同时掷 n 枚硬币, 观察国徽向上的个数.

   (4) 以原点为圆心的单位圆内随机抽取一点.

2. 设有 A, B, C 三个事件, 试用集合运算表示下列事件.

   (1) 只有 B 发生.　(2) A, B 发生, 但 C 不发生.

   (3) 至少一个事件发生.　(4) 至少两个事件发生.

   (5) 仅有两个事件发生.　(6) 至多一个事件发生.

   (7) 至多两个事件发生.

3. 设 X 为随机变量, 其样本空间 $[0,2]$, 记事件 $A = \{1/2 < x \leq 1\}$, $B = \{1/4 < x \leq 3/2\}$, 写出下列各事件

   (1) $\overline{A}B$　(2) $\overline{A} \cup B$　(3) $\overline{AB}$　(4) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$.

4. 证明: 若 A, B 为两事件, 则

   (1) $A + B = A + (B - A)$, 右边两事件互斥.

   (2) $A + B = (A - B) + (B - A) + AB$, 右边三事件互斥.

5. 试把任意 n 个事件 $A_1, \cdots, A_n$ 之和表示为 n 个互斥事件之和.

6. 根据英国某地区居民调查的材料知: 父子都是黑眼睛 (AB) 的人数占调查人数的比例为 5%, 父亲是黑眼睛但儿子为浅色眼睛 $(A\bar{B})$ 的比例为 7.9%, 父亲是浅色眼睛而儿子为黑眼睛 $(\bar{A}B)$ 的比例为 8.9%, 父子都是浅色眼睛 $(\bar{A}\bar{B})$ 的比例为 79.2%. 试问这一调查材料是否有误?

7. 一种彩票游戏规则如下: 每张彩票可以从 1 - 33 中不重复的任选 7 个数字, 开奖时由摇奖机在 1 - 33 中开出 7 个基本号和 1 个特别号 (均不重复). 彩票号码如果与基本

号全部对上 (不计次序), 为一等奖; 对上 6 个基本号和特别号, 为二等奖; 对上 6 个基本号, 为三等奖; 对上 5 个基本号和特别号, 为四等奖. 试分别求一、二、三、四等奖的获奖概率.

8. 考虑上题彩票游戏的一个变种: 开奖方式不变, 每张彩票只填两个不重复的号码, 如果这两个号码出现在基本号中即为中奖. 问此时中奖的概率是多少? 如果每张彩票可以填三个不同的号码, 中奖的概率又是多少?

9. 一间宿舍内住有 6 位同学, 其中至少有 2 个人生日在同一个月份的概率.

10. 现投掷三枚均匀骰子, 试求恰好有两枚出现相同点数的概率.

11. 盒子中放有 10 个分别标有号码 $1, 2, \cdots, 10$ 的小球, 从中随机抽取 3 个球. 试对有放回和无放回两种抽取方式分别求
(1) 三个球的号码都不大于 7 的概率.
(2) 球上的最大号码为 7 的概率.

12. * 设有 n 个人随机地坐到礼堂第一排的 N 个座位上, 试求下列事件的概率:
(1) 任何人都没有邻座.
(2) 每人恰有一个邻座.
(3) 关于中央对称的两个座位至少有一个空着.

13. 考虑一元二次方程 $x^2 + Bx + C = 0$, 其中 B, C 分别是将一枚均匀骰子连掷两次先后出现的点数. 求该方程有实根的概率和有重根的概率.

14. * 抛掷一枚均匀硬币 $2n + 1$ 次, 试求正面出现的次数多于反面的概率.

15. 甲投掷 $n + 1$ 枚均匀硬币, 乙投掷 n 枚均匀硬币. 试求甲的正面比乙的正面多这一事件的概率.

16. * 设两个赌徒的赌技相同, 每赌一局都可分出胜负. 现在两人各出 500 元赌资, 事先约定谁先赢得一定的局数就获得全部赌本. 但赌博在中途被打断了, 此时第一个赌徒还需赢得 m 局才能获胜, 第二个赌徒还需赢得 n 局才能获胜, 问此时应如何划分赌本才比较合理.

17. 父亲为了鼓励儿子打网球, 宣称如果儿子能够赢得与父亲和教练的三场比赛中的连续两场, 就可获得一笔奖金. 儿子可以选择比赛的顺序为: 父亲 – 教练 – 父亲, 或者 教练 – 父亲 – 教练. 已知教练比父亲打得好. 为了增加获得奖金的机会, 儿子应该选择哪个顺序?

18. 甲乙两选手进行乒乓球单打比赛, 已知在每局中甲胜的概率为 0.6, 乙胜的概率为 0.4. 比赛可采用三局两胜制或五局三胜制, 问哪一种比赛制度对甲更有利?

19. 一栋 20 层楼中的一架电梯在底层 (第一层) 上来 8 位乘客. 电梯在每一层都停, 设每位乘客在每层离开是等可能的, 求没有两位乘客在同一层离开的概率.

20. 某路公共汽车共有 11 个停车站, 由始发站开车时车上共有 8 名乘客. 假设每人在各站 (始发站除外) 下车的概率相同. 试求下列各事件的概率:
(1) 8 人在不同的车站下车.
(2) 8 人在同一车站下车.
(3) 8 人中恰有 3 人在终点站下车.

21. 在一种双骰子博弈中, 玩家投两枚骰子, 如果其和是 7 或 11, 则玩家赢; 如果其和是 2, 3 或者 12, 玩家输; 若是其他结果时就继续玩, 直到玩家输或者赢为止. 计算玩家赢的概率.

22. 掷三枚硬币, 已知其中有一枚出现了正面, 求至少出现一枚反面的概率.

23. 掷三颗骰子, 已知所得三个数都不相同, 求含有 1 点的概率.

24. 投掷两枚骰子, 问至少有一个是 6 的概率是多少? 若这两个面不一样, 求至少有一个是 6 的概率.

25. 在某个社区, 60% 的家庭拥有汽车, 30% 的家庭拥有房产, 而 20% 的家庭既有汽车又有房产, 随机选取一个家庭, 求此家庭或有汽车或有房产但不是两者都有的概率.

26. 甲和乙两人同时独立地射击同一目标. 假设甲射中目标的概率是 0.7, 乙射中目标的概率是 0.4. 已知恰有一个子弹射中目标, 求它是甲射中的概率.

27. 对于三个事件 A, B, C, 若

$$P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$$

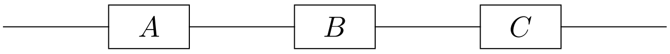
成立, 则称 A 与 B 关于 C 条件独立. 若已知 A 与 B 关于 C 与 $\bar{C}$ 条件独立, 且 $P(C) = 0.5$, $P(A|C) = P(B|C) = 0.9$, $P(A|\bar{C}) = 0.2$, $P(B|\bar{C}) = 0.1$, 试求 $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$ 并证明 A 与 B 不独立.

28. 证明 $P(A|B) = P(A|\overline{B})$ 成立的充分必要条件是 $P(AB) = P(A)P(B)$. 试对此结论给出直观的解释.

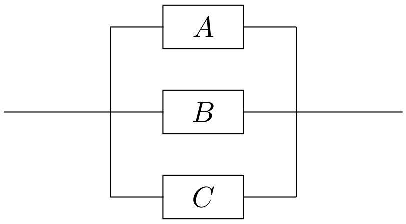
29. 如果 B 的发生使得 A 更可能发生, 那么 A 的发生是否使得 B 更可能发生?

30. 求下列各系统能正常工作的概率, 其中框图中的字母代表元件, 字母相同但下标不同的都是同一种元件, 只是装配在不同的位置上, A, B, C, D 类元件能正常工作的概率分别为 p_A, p_B, p_C, p_D.

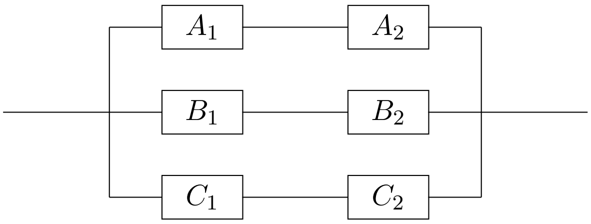
(1)



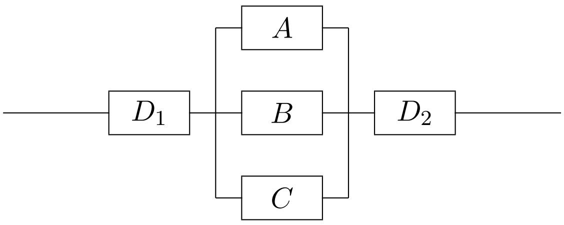
(2)



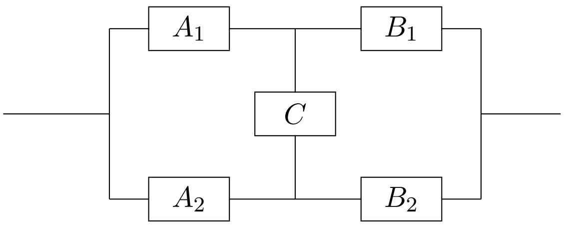
(3)



(4)



(5)*



31. 有 4 个一年级男生, 6 个一年级女生, 6 个二年级男生共上一门课, 为了使在随机选取一个学生时性别与班级独立, 在这个班还需要出现多少个二年级女生?

32. 设敌机俯冲时被步枪击落的概率是 0.008, 求当 25 只步枪同时开火时, 击落敌机的概率.

33. 对同一目标进行三次独立射击, 第一、二、三次射击的命中率分别为 0.5, 0.6 和 0.8, 试求:
(1) 在这三次射击中, 恰好有一次射中的概率.
(2) 在这三次射击中, 至少射中一次的概率.

34. 设事件 $A_1, \cdots, A_n$ 相互独立, 记 $P(A_i) = p_i > 0, i = 1, 2, \cdots n$, 假设 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. 求
(1) 这些事件至少有一件不发生的概率.
(2) 这些事件均不发生的概率.
(3) 这些事件恰好发生一件的概率.

35. 假设某厂家生产的每台仪器以概率 0.7 可以直接出厂, 以概率 0.3 需进一步调试. 经调试后的仪器以概率 0.8 可以出厂, 以概率 0.2 被定为不合格品不能出厂. 假设该厂生产了 n $(n > 2)$ 台仪器 (各台生产过程相互独立). 试求下列事件的概率:
(1) 全部能出厂.
(2) 恰有两件不能出厂.
(3) 至少有两件不能出厂.

36. 要验收一批乐器, 共 100 件, 从中随机地抽取 3 件进行测试 (设 3 件乐器的测试相互独立), 如果 3 件中任意一件音色不纯, 就拒绝接收这批乐器. 设一件音色不纯的乐器经测试查出的概率为 0.95, 而一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为 0.01. 如果这 100 件乐器中有 4 件是音色不纯的. 问这批乐器被接收的概率是多少?

37. 有甲、乙两只口袋, 甲袋中有 5 只白球 2 只黑球, 乙袋中有 4 只白球 5 只黑球. 先从甲袋中任取两球放入乙袋, 然后再从乙袋中任取一球, 求此球是白球的概率.

38. 某工厂的第一、二、三号车间生产同一种产品, 产量各占总产量的 1/2, 1/3, 1/6, 次品率分别为 1%, 1% 和 2%. 现从该厂产品中随机抽取一件产品
(1) 求该产品是次品的概率.
(2) 若发现该产品是次品, 求它是一号车间生产的概率.

39. 考卷中的某选择题有四个答案, 其中只有一个是正确的. 某考生可能知道哪个是正确的, 也可能是乱猜一个. 假设此考生知道正确答案的概率为 p , 而且在不知答案的情况时是随机地选择一个答案. 如果已知他答对了这道题, 问他确实知道正确答案的概率是多少?

40. 设有来自三个地区的考生报名表共 50 份, 三个地区分别有 10 , 15 和 25 份, 其中女生的报名表分别为 3 份, 7 份和 5 份, 现随机地选一个地区, 从该地区的报名表中先后抽出 2 份.

(1) 求先抽到的 1 份是女生报名表的概率.

(2) 已知后抽到的 1 份是男生报名表, 求先抽到的 1 份是女生报名表的概率.

41. 装有 m $(m > 3)$ 个白球和 n 个黑球的罐子中失去一球, 但不知是什么颜色的球. 为猜测它是什么颜色, 随机地从罐中摸出两个球, 结果都得到的是白球, 试求失去的球是白球的概率.

42. 假设患乙肝的人通过检查能被诊断出来的概率为 0.98, 而正常人经检查被误诊为有乙肝的概率为 0.05, 设某城市乙肝患病率为 0.05. 现从该城市居民中随机抽出一人进行检查, 如果其被诊断为乙肝患者, 求该人确实患有乙肝的概率.

43. 盒中有三枚硬币, 一枚是双正面的硬币, 另外两枚是正反面硬币 (其中一枚是均匀的硬币, 一枚是正面出现概率为 75% 的不均匀硬币). 当从这三枚硬币中随机选取一枚抛掷时, 它出现正面. 问它是双正面硬币的概率是多少?

44. 假定某种病菌在群体中的带菌率为 10%. 在检测时, 带菌者和不带菌者被检测出阳性的概率分别为 0.95 和 0.01 .

(a) 现有某人被测出呈阳性反应, 该人确为带菌者的概率是多少?

(b)* 该人又独立地做了一次检测, 检测结果依然是阳性, 问在两次检测均呈阳性的情况下, 该人确为带菌者的概率是多少?

计算机模拟题

45. 从区间 $[0,1]$ 中任取两个数, 由理论计算知此两数的积小于 $\frac{1}{4}$ 的概率为 $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$, 试利用此结论与概率的统计定义, 通过计算机模拟对 $\ln 2$ 进行估计, 比较模拟次数 $n = 1000, 5000, 10000, 100000$ 时与实际值的误差, 从这个比较中你是否可以在误差与模拟次数之间建立一个关系?

46. (Buffon 试验) 平面上划有间隔为 d 的等距离平行线, 向平面上任意投一个长度为 $l\,(l < d)$ 的针, 由理论计算知针与平行线相交的概率为 $\frac{2l}{\pi d}$, 试利用此结论与概率的统计定义, 通过计算机模拟对 π 进行估计.

第二章　随机变量及其分布

1. 一个罐子装有 m 个白球和 n 个黑球, 无放回地抽取 r 个球 $(r \leq m+n)$, 记抽到的白球的个数为 X , 试求 X 的概率分布.

2. 一台设备由三大部件构成, 假设各部件的状态相互独立, 在设备运转过程中各部件需要调整的概率分别为 0.10, 0.20, 0.30. 令 X 表示同时需要调整的部件数. 试求 X 的分布律和至少有一个部件需要调整的概率.

3. 袋子中有 a 个白球, b 个黑球. 现不放回地每次从袋子中取出一球, 直到取出黑球为止, 设此时已经取出了 ξ 个白球, 求 ξ 的概率分布.

4. 将一颗骰子连掷两次, 以 ξ 表示掷出的最小数, 求 ξ 的概率分布.

5. 一射手的命中率为 p, 现其不断地向一目标射击, 假设各次射击相互独立.
(1) 以 ξ 表示第一次命中目标所需的次数, 求 ξ 的概率分布.
(2) 以 ξ_r 表示第 r 次命中目标所需的次数, 求 ξ_r 的概率分布.
(3) 设共射击了 n 次, 且第 n 次射击是命中的, 以 η 表示这 n 次射击中命中的次数, 求 η 的概率分布.

6. 同时掷两枚均匀骰子直到至少出现一个 6 点为止, 求所掷次数 ξ 的概率分布.

7. 某旅馆服务部统计旅客住宿的天数 X 及其概率分布如下:

X	1	2	3	4
P	0.34	0.25	0.25	0.16

试计算 X 的分布函数, $P(X \leq 3)$, $P(X > 1)$, $P(1 < X \leq 4)$ 和 $P(X = 2)$.

8. 试确定下列 $p(x)$ 能否成为概率分布

(1) $p(x) = \dfrac{1}{3}$, $\quad x = 0, 1, 2, 3.$

(2) $p(x) = \dfrac{x-5}{10}$, $\quad x = 0, 5, 10, 15.$

(3) $p(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$, $\quad x = 1, 2, \cdots.$

(4) $p(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(u)du$, $\quad x = 0, 1, \cdots,$ 其中 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(u)du = 1.$

9. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数. 为使 $F(x) = aF_1(x) + bF_2(x) + c$ 是某一随机变量的分布函数, 在下列给定的各组数值中可取

(A) $a = \dfrac{3}{5},\ b = -\dfrac{2}{5}, c = \dfrac{4}{5}.$ (B) $a = 1,\ b = 1,\ c = -1.$

(C) $a = -\dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{3}{2},\ c = 0.$ (D) $a = \dfrac{2}{3},\ b = \dfrac{2}{3},\ c = \dfrac{1}{3}.$

10. 假定 X 服从参数为 n 和 p 的二项分布, 即 $X \sim B(n, p)$. 在下述情形证明当 k 取值从 0 到 n 时, $P(X = k)$ 先是单调递增, 然后单调递减, 且最大值点 k 满足:

(1) 在 $(n+1)p$ 是整数的情形, k 等于 $(n+1)p - 1$ 或者 $(n+1)p$.

(2) 在 $(n+1)p$ 是非整数的情形, k 满足 $(n+1)p - 1 < k < (n+1)p$.

11. 设 $X \sim \mathrm{B}(2, p)$, $Y \sim \mathrm{B}(3, p)$, 若 $P(X \geq 1) = \dfrac{5}{9}$. 试求 $P(Y \geq 1)$.

12. 设昆虫产卵个数服从参数为 λ 的泊松分布, 而每个卵孵化成幼虫的概率为 p, 试求一个昆虫产生 m 个后代的概率.

13. 假定 X 服从参数 λ 的泊松分布, 证明当 i 增加时, $P(X = i)$ 先是单调递增, 然后单调递减, 当 i 取不超过 λ 的最大整数时得到其最大值.

14. 有一繁忙的车站, 每天有大量的汽车通过, 设在一天的某段时间内汽车事故发生率为 0.001. 若某天的该段时间内有 1000 辆汽车通过, 问发生事故的次数不少于 2 的概率是多少?

15. 航空公司知道预定航班的人有 5% 的人最终不来搭乘航班, 因此他们的政策是对于一个能容纳 50 个顾客的航班预售 52 张票, 问每个出现的旅客都有位置的概率是多少?

16. * 设 ξ 为取非负整数值的随机变量, 试证明它服从几何分布的充分必要条件是, 对任意非负整数 m 和 n 有

$$P(\xi = m + n | \xi \geq n) = P(\xi = m).$$

17. 试确定下列各式中的常数 c, 使这些函数成为概率密度函数:

(1) $f(x) = ce^{-|x|}, -\infty < x < \infty.$

(2) $f(x) = \begin{cases} c|x-a|, & b \le x \le d \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases} cx^2 e^{-x^2/\alpha}, & x > 0, \alpha > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$

18. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求常数 c.

(2) 求 $P(1/2 < X < 3/2)$.

19. 设随机变量 X 只在 $(0,1)$ 中取值, 其累积分布函数 $F(x)$ 满足: 对任意 $0 < a < b < 1$, $F(b) - F(a)$ 仅与 $b - a$ 有关. 试证明 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布.

20. 设随机变量 ξ 服从参数为 1 的指数分布, 求方程

$$4x^2 + 4\xi x + \xi + 2 = 0$$

有实根的概率.

21. (1) 设随机变量 $\xi \sim N(0,1)$, 试求 $P(\xi < 2),\ P(|\xi| \le 2)$.

(2) 设随机变量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 试求 $P(|\xi - \mu| \le \sigma),\ P(|\xi - \mu| \le 2\sigma)$.

(3) 设随机变量 $\xi \sim N(3,4)$, 试求 $P(2 < \xi \le 5),\ P(\xi > 3)$, 并确定常数 c 使得 $P(|\xi - c| < c) = 0.01$.

22. 设随机变量 $\xi \sim N(60, 9)$, 试求分点 x_1, x_2, x_3, 使得 ξ 落在 $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, \infty)$ 内的概率之比为 $3:2:2:3$.

23. * 设 ξ 为取正值的连续型随机变量, 试证明它服从指数分布的充分必要条件是: 对任意 $t>0$ 和 $x>0$, 有

$$P(\xi \le t+x|\xi>t)=P(\xi\le x).$$

24. * 若分布函数 $F(x)$ 的密度函数 $f(x)$ 满足微分方程:

$$\frac{df}{dx}=\frac{(x-a)f(x)}{b_0+b_1x+b_2x^2}$$

则称 $F(x)$ 为 Pearson 型分布. 证明正态分布及 Γ 分布均为 Pearson 型分布.

25. 设随机变量 ξ 的概率分布律为

ξ	-2	-1	0	1	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

试求随机变量 $\eta=\xi^2$ 的概率分布律.

26. 设圆的直径服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布, 求圆的面积的密度函数.

27. 设随机变量 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布.
(1) 求 $Y=e^X$ 的概率密度.
(2) 求 $Y=-2\ln X$ 的概率密度函数.

28. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度函数.

29. 设随机变量 ξ 服从参数为 2 的指数分布, 试求 $\eta=1-\mathrm{e}^{-2\xi}$ 的概率密度函数.

30. 设随机变量 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$, 试求 $\eta=\mathrm{e}^{\xi}$ 的概率密度函数.

31. 在电炉上安装了 4 个温控器, 其显示温度的误差是随机变量. 在使用过程中, 只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0, 电炉就断电. 以 E 表示事件 "电炉断电", 而 $T_{(1)}\le T_{(2)}\le T_{(3)}\le T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值, 则事件 E 等于 (选择其一)
(A) $\{T_{(1)}\ge t_0\}$. (B) $\{T_{(2)}\ge t_0\}$.
(C) $\{T_{(3)}\ge t_0\}$. (D) $\{T_{(4)}\ge t_0\}$.

32. 设 $P(X \geq 0, Y \geq 0) = \dfrac{3}{8}$, $P(X \geq 0) = P(Y \geq 0) = \dfrac{1}{2}$. 求 $P\big(\max(X,Y) \geq 0\big)$.

33. 在一个袋中装有 n 个球, 其中有 n_1 个红球和 n_2 个白球, 且 $n_1 + n_2 \leq n$, 现从中任意取出 r 个球 ($r \leq \min\{n_1, n_2\}$), 设取出的红球数为 X, 取出的白球数为 Y, 试求 (X,Y) 的联合分布及其边际分布.

34. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 下表列出了二维随机变量 (X,Y) 的联合分布及关于 X 和关于 Y 的边缘分布中的部分数值, 试将其余数值填入表中的空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X = x_i\} = p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y = y_j\} = p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

35. 设随机向量 (X,Y,Z) 的概率密度函数为

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{8\pi}(1 - \sin x \sin y \sin z), & 0 \leq x, y, z \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

证明 X, Y, Z 两两独立但不相互独立.

36. 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} ke^{-(3x+4y)}, & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求常数 k.
(2) 求 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$.
(3) 求 $P(0 < X \leq 1,\ 0 < Y \leq 2)$.

37. 设随机变量 X, Y 的联合概率密度函数为:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求:　(1) X 与 Y 的边缘概率密度函数.

　　　(2) $X=0.4$ 时 Y 的条件概率密度函数.

　　　(3) $P(\xi<\eta)$, $P(\xi=\eta)$, 及 $P(0<\xi<0.5, 0.25<\eta<1)$.

38. 设二维连续随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y, & x^2\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求条件概率 $P(Y\ge 0.75|X=0.5)$.

39. 设随机变量 X 服从 $(1,2)$ 上的均匀分布, 在 $X=x$ 的条件下, 随机变量 Y 的条件分布是参数为 x 的指数分布, 证明: XY 服从参数为 1 的指数分布.

40. 从一副扑克牌 (共 52 张) 中任取 13 张牌, 以 ξ 记其中的黑桃张数, η 记其中的红桃张数. 试求

(1) (ξ,η) 的联合概率分布函数.

(2) 已知取出的牌中只有 1 张黑桃, 求此时 η 的条件概率分布.

41. 设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 λ $(\lambda>0)$ 的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为 p $(0<p<1)$, 且中途下车与否相互独立. 以 Y 表示中途下车的人数, 求

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下, 中途有 m 个人下车的概率.

(2) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

42. 设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布, 定义随机变量 $X_k, k=1,2$ 如下

$$X_k=\begin{cases}0, & Y\le k\\ 1, & Y>k\end{cases}$$

求 X_1 与 X_2 的联合概率分布函数.

43. 设 ξ, η 各有概率分布律

ξ	-1	0	1
P	0.25	0.5	0.25

η	0	1
P	0.5	0.5

已知 $P(\xi\eta=0)=1$. 试求:

(1) (ξ,η) 的联合概率函数.

(2) $(\xi+\eta,\ \xi-\eta)$ 的联合概率函数.

(3) $Z=\max(\xi,\eta)$ 的概率分布函数.

44. 设二元离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布为:

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0.15	0.05	0.20
2	0.11	0.07	0.22
3	0.07	0.04	0.09

(1) 求 $\xi = \max(X, Y)$ 的概率分布.

(2) 求 $\eta = \min(X, Y)$ 的概率分布.

(3) 求 (ξ, η) 的联合概率分布.

45. 设随机变量 ξ 和 η 的联合分布是正方形 $G = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3\}$ 上的均匀分布, 试求随机变量 $\zeta = |\xi - \eta|$ 的概率密度 $f(z)$.

46. 设 X 与 Y 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 $U = (X + Y)/2$ 和 $V = Y - X$ 概率密度函数.

47. 设 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + y)e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) X 与 Y 是否独立?

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度函数.

48. * 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = 3(x-1)^2 I_{(1,2)}(x)$, 其中

$$I_{(1,2)}(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

随机变量 Y 的概率函数是

$$P(Y = -1) = 1/6, P(Y = 0) = 1/3, P(Y = 1) = 1/2,$$

并且 X 与 Y 独立. 设 $Z = X + Y$, 问 Z 是否为连续随机变量? 若是, 请给出概率密度函数; 若否, 请说明理由.

49. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 试在以下情况下求 $Z = X + Y$ 的密度函数:
(1) $X \sim U(0,1)$, $Y \sim U(0,1)$.
(2) $X \sim U(0,1)$, $Y \sim Exp(1)$.

50. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 都服从 $(\theta - 1/2,\ \theta + 1/2)$ 上的均匀分布, 试证 $X - Y$ 的分布与 θ 无关.

51. * 设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立, 且 $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, 记 $X_{(1)} = \min(X_1, \cdots, X_n)$. 试证明
(1) $X_{(1)} \sim Exp(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.
(2) $P(X_i = X_{(1)}) = \lambda_i / (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

52. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布,
(1) 求 $U = X + Y$ 与 $V = X/(X + Y)$ 的联合概率密度函数.
(2) 以上的 U 和 V 独立吗?

53. 假设随机变量 X 和 Y 的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} c(2x+y), & 2 < x < 6, 0 < y < 5 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求
(1) 常数 c.
(2) X 和 Y 的边缘密度函数.
(3) $P(3 < X < 4, Y > 2)$.
(4) $P(X + Y > 4)$.
(5) X 和 Y 是否独立?

54. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0, 2^2)$ 的简单随机样本, 令 $T = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$. 试求 a, b 使统计量 T 服从 χ^2 分布.

55. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为独立同分布的正态随机变量, 记

$$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \cdots + X_6), \quad Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9), \quad S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2.$$

试求 $Z=\dfrac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$ 的分布.

56. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 是独立同分布的随机变量, 服从正态分布 $N(0,2^2)$. 试求

$$Y=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}$$

的概率分布.

第三章　随机变量的数字特征

1. 下面列出了三个随机变量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 的概率分布

ξ_1	0	10	20	30
P	1/4	1/4	1/4	1/4

ξ_2	0	10	20	30
P	1/8	1/8	3/8	3/8

ξ_3	0	30
P	1/2	1/2

试分别求 ξ_1, ξ_2, ξ_3 的数学期望.

2. 设离散型随机变量 X 的概率函数为

$$P\left(X = (-1)^k \frac{2^k}{k}\right) = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

问 X 是否有数学期望?

3. 用天平称某种物品的重量 (砝码仅容许放在一个秤盘中) , 物品的重量为 1 克、2 克、$\cdots$、10 克的概率是等可能的. 现有三组砝码 (单位: 克) : (A) 1, 2, 2, 5, 10. (B) 1, 2, 3, 4, 10. (C) 1, 1, 2, 5, 10. 称时只可以使用一组砝码. 试计算使用哪一组砝码时所需的平均砝码数最少.

4. * 设 ξ 为只取非负整数值的随机变量, 证明:

$$\mathrm{E}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi > n).$$

5. 分别求服从下列概率密度函数之随机变量的数学期望:

(1) $f(x) = \dfrac{1}{2a} \exp\left\{-\dfrac{|x-b|}{a}\right\}, \quad -\infty < x < \infty,$其中参数 $a > 0, -\infty < b < \infty$.

(2) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1; \\ 2 - x, & 1 < x < 2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & |x|<\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & |x|\geq\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

6. 有 N 个人, 每个人都将自己的帽子放入同一个箱子中, 经充分混合后, 每人再随机从中选取一顶. 求选中自己帽子的人数的期望.

7. 一共有 300 个白球和 100 个黑球, 现在将这 400 个球随机分到 200 个盒子中, 每个盒子放两个球. 记 X 为恰有一个黑球与白球的盒子数目, 求 EX.

8. 设 ξ 服从参数为 λ 的指数分布, 试计算其中位数 m 以及 $\mathrm{E}|\xi-m|$.

9. * 设 ξ 有概率密度函数 $f(x)$, 令 $h(a)=\mathrm{E}|\xi-a|$. 证明当 a 等于 ξ 的中位数 m 时, $h(a)$ 达到最小 (注: 这是中位数的一个重要性质).

10. 某路公共汽车在相距 100 公里的甲乙两城之间行驶. 如果公共汽车出故障地点到甲城的距离服从 $(0,100)$ 上的均匀分布, 现在甲城, 乙城和甲乙两城间路线的中点各有一个修车站. 有人建议将这三个修车站分别改设在距离甲城 25 公里, 50 公里及 75 公里处将更有效, 你赞成这一建议吗? 为什么?

11. 已知分子的运动速度 V 服从马克斯威尔分布, 其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{a^2}\right), & x>0\\ 0, & x\leq 0,\end{cases}$$

其中 $a>0$ 是常数, 试求分子的平均速度和平均动能 (分子的质量为 m).

12. 假设国际市场每年对我国某种出口产品的需求量 X (单位: 吨) 服从区间 $(2000,4000)$ 上的均匀分布. 设每售出商品 1 吨, 可为国家挣得外汇 3 万元, 但是若销售不出而囤积在仓库中, 则每吨需花保养费 1 万元. 问要组织多少货源, 才能使国家受益最大?

13. 某工厂生产的钢珠直径 D (单位: 厘米) 服从 $[9.9,10.1]$ 上的均匀分布, 试求钢珠的表面积 S 和钢珠重量 W 的数学期望 (设钢的比重为 7.8 $\mathrm{g/cm^3}$).

14. * 设随机变量 ξ 具有概率密度函数:

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

求 $\mathrm{E}[\min(|\xi|,1)]$.

15. 试求第 1 题中随机变量 ξ_1,ξ_2,ξ_3 的方差.

16. 试求第 5 题中各随机变量的方差.

17. 某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p\ (0 < p < 1)$, 各产品合格与否相互独立, 当出现一个不合格产品时即停机检修. 设第一次停机时已生产了 X 个产品. 求 X 的数学期望和方差.

18. 一商店经销某种商品, 每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量, 且都服从区间 $[10, 20]$ 上的均匀分布. 商店每售出一件商品可得利润 1000 元. 若需求量超过进货量, 商店可从其他商店调剂供应, 这时每件商品获利润为 500 元. 试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

19. 设二元离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布为:

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	5
0	0.01	0.05	0.12	0.02	0	0.01
1	0.02	0	0.01	0.05	0.02	0.02
2	0	0.05	0.1	0	0.3	0.05
3	0.01	0	0.02	0.01	0.03	0.1

(1) 求 X, Y 的数学期望与方差.

(2) 求 $X+Y$, $X-Y$, XY 的数学期望与方差.

(3) 求 X 与 Y 之间的协方差与相关系数.

(4) 求 $\mathrm{E}(X^2|Y=1)$.

20. 设随机变量 ξ 与 η 独立, 对任何给定的非负整数 $k \le m$, 在下列各情形下分别求 $P(\xi = k \mid \xi + \eta = m)$ 及 $\mathrm{E}(\xi \mid \xi + \eta = m)$.

(1) ξ 与 η 服从泊松分布, 参数分别为 λ 与 μ.

(2) ξ 与 η 都服从二项分布 $B(n, p)$.

(3) ξ 与 η 都服从参数为 p 的几何分布.

21. * 设随机变量 ξ 与 η 独立, 且服从相同的分布. 试在以下各情形求 $\mathrm{E}(\xi \mid \xi + \eta = z)$.

(1) ξ 为离散型随机变量.

(2) ξ 为连续型随机变量.

22. 设二元离散型随机变量 (ξ,η) 的联合分布如右表, 试验证 ξ 与 η 不相关, 且 ξ 与 η 也不独立.

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/8$	$1/8$
0	$1/8$	0	$1/8$
1	$1/8$	$1/8$	$1/8$

23. 在长为 a 的线段上任取两点 A 和 B, 试求线段 AB 长度的数学期望.

24. 设二元随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & |y|\le x, 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求: (1) $f_X(x), f_Y(y)$; (2) EX, EY, $Var(X)$, $Var(Y)$; (3) Cov(X, Y).

25. 设两个随机变量 X、Y 相互独立, 且都服从均值为 0, 方差为 0.5 的正态分布, 求随机变量 $|X-Y|$ 的方差.

26. 掷两颗均匀骰子, 以 ξ 表示第一颗骰子掷出的点数, η 表示两颗骰子所掷出的点数中的最大值.
(1) 求 ξ, η 的数学期望与方差.
(2) 求 $\mathrm{Cov}(\xi,\eta)$.

27. 设随机变量 ξ,η 相互独立, 具有共同分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 设 α,β 为两个常数.
(1) 求 $\mathrm{Cov}(\alpha\xi+\beta\eta,\alpha\xi-\beta\eta)$.
(2) 当 α, β 取何值时, $\alpha\xi+\beta\eta$ 与 $\alpha\xi-\beta\eta$ 相互独立.

28. 投资组合是将总资本按一定比例分配于各种投资, 以分散和降低风险, 所谓风险通常以方差来度量. 现假设某两种投资的回报率 X,Y 都是随机变量, 投资的风险 (即方差) 为 $Var(X)=Var(Y)=\sigma^2$. 假设 $\rho_{XY}=-0.5$, 即两种投资呈负相关. 记投资组合中两种投资的比例分别为 π 和 $1-\pi$, 则投资组合的回报率为 $Z=\pi X+(1-\pi)Y$.
(1) 试证明该投资组合 Z 的风险小于将所有资本投资于其中一个的风险.
(2) 求使得投资组合风险最小的分配比例 π.

29. 设 (X,Y) 服从二维正态分布, 且有 $Var(X)=\sigma_1^2, Var(Y)=\sigma_2^2$. 证明当 $a^2=\sigma_1^2/\sigma_2^2$ 时随机变量 $W=X-aY$ 与 $V=X+aY$ 相互独立.

30. 设二元随机向量 (ξ,η) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)\right]$$

其中 $\varphi_1(x,y)$、$\varphi_2(x,y)$ 分别是二元正态 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 与 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,-\rho)$ 的概率密度函数, 其中 $0<\rho<1$

(1) 试分别计算 ξ, η 的边缘分布.

(2) 试计算 ξ, η 之间的相关系数.

(3) 试确定 ξ, η 之间是否独立?

31. 设随机变量 (ξ,η) 服从区域 $A=\{(x,y):|x|+|y|\le 1\}$ 中的均匀分布.

(1) 求 $\mathrm{Cov}(\xi,\eta)$.

(2) ξ 与 η 是否独立?

32. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(1+xy), & |x|<1,|y|<1\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求证 X 与 Y 不独立但 X^2 与 Y^2 相互独立.

33. 假设二维随机变量 (X,Y) 服从矩形 $G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$ 上的均匀分布. 记

$$U=\begin{cases}0, & \text{若 } X\le Y\\ 1, & \text{若 } X>Y\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & \text{若 } X\le 2Y\\ 1, & \text{若 } X>2Y.\end{cases}$$

(1) 求 U 和 V 的联合分布.

(2) 求 U 和 V 的相关系数.

34. 设 A,B 是两个随机事件, 且 $P(A)=1/4, P(B|A)=1/3, P(A|B)=1/2$, 令

$$X=\begin{cases}1, & \text{若}A\text{发生}\\ 0, & \text{若}A\text{不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若}B\text{发生}\\ 0, & \text{若}B\text{不发生},\end{cases}$$

试求 (1) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布, (2) X 与 Y 的相关系数.

35. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ 相互独立 $(n\ge 2)$, 皆服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 其中 $\sigma>0$, 定义

$$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$$

其中 $\overline{X}=\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{i=1}^{2n}X_i$. 试求 Y 的数学期望 $E(Y)$.

36. * 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 为正的、独立同分布的随机变量, 证明当 $1 \le k \le n$ 时

$$\mathrm{E}\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_k}{\xi_1 + \cdots + \xi_n}\right) = \frac{k}{n}.$$

37. 设随机变量 X、Y 的期望分别为 -2 和 2, 方差分别为 1 和 4, 相关系数为 -0.5, 试根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X+Y| \ge 6\}$.

38. 某保险公司多年的统计资料表明, 在索赔户中被盗索赔户占 20%, 以 X 表示随机抽查 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数. 求被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值.

39. 某电子计算机主机有 100 个终端, 每个终端有 15% 的可能处于闲置状态, 若各终端被使用与否是相互独立的, 试求至少有 15 个终端空闲的概率.

40. 某餐厅每天接待 400 名顾客, 设每位顾客的消费额 (元) 服从 (300, 1500) 上的均匀分布, 且顾客的消费额是相互独立的. 试求
(1) 该餐厅每天的平均营业额.
(2) 该餐厅每天的营业额在平均营业额 ±400 元内的概率.

41. (1) 一个复杂的系统由 100 个相互独立起作用的部件所组成. 在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10. 为了使整个系统起作用, 至少必须有 85 个部件正常工作, 求整个系统起作用的概率.
(2) 一个复杂的系统由 n 个相互独立起作用的部件所组成, 且必须至少有 80% 的部件工作才能使整个系统正常工作. 每个部件的可靠性为 0.90. 问 n 至少为多大才能使系统的可靠性不低于 0.95?

42. 一生产线生产的产品成箱包装, 每箱的重量是随机的. 假定每箱平均重 50 千克, 标准差为 5 千克. 若用最大载重量为 5 吨的汽车承运, 试利用中心极限定理计算每辆车最多可以装多少箱, 才能保障不超载的概率大于 0.977?

43. 设各零件的重量都是随机变量, 它们相互独立, 且服从相同的分布, 其数学期望为 0.5kg, 标准差为 0.1kg, 问 5000 只零件的总重量超过 2510kg 的概率是多少?

44. 某种计算机在进行加法时, 要对每个加数进行取整. 设每次取整的误差相互独立且服从 $(-0.5, 0.5)$ 上的均匀分布.
(1) 若现要进行 1500 次加法运算, 求误差总和的绝对值超过 15 的概率.
(2) 若要保证误差总和的绝对值不超过 10 的概率不小 于 0.90, 至多只能进行多少次加法运算?

45. 进行 1000 次独立重复试验, 每次试验中事件 A 发生的概率为 0.25. 试问能以 95% 的把握保证 1000 次试验中事件 A 发生的频率与概率相差不超过多少? 此时 A 发生的次数在什么范围内?

46. 设某生产线上组装每件产品的时间服从指数分布, 平均需要 10 分钟, 且各产品的组装时间是相互独立的.
(1) 试求组装 100 件产品需要 15 小时至 20 小时的概率.
(2) 保证有 95% 的可能性, 问 16 小时内最多可以组装多少件产品.

47. 一家有 500 间客房的旅馆的每间客房装有一台 2kw (千瓦) 的空调. 若开房率为 80%, 需要多少 kw 的电力才能有 99% 的可能性保证有足够的电力使用空调机.

48. 为调查某城市人口中的吸烟率 p, 独立调查了 n 个人, 其中 n_0 个人抽烟. 现用频率 n_0/n 来估计 p. 问至少需要调查多少人, 才能以 95% 的把握保证误差不超过 0.01? (提示: $p(1-p) \leq 1/4$)

第四章　参数估计

1. 随机地取 8 只活塞环, 测得它们的直径为 (以 mm 计)

$$74.001,\quad 74.005,\quad 74.003,\quad 74.000,\quad 73.908,\quad 74.006,\quad 74.002.$$

试求总体均值 μ 和方差 σ^2 的矩估计值, 并求样本方差 S^2.

2. 设总体 X 的概率分布如右表, 其中 $p>0$ 为未知参数. 现从此总体中抽出一样本量为 n 的简单随机样本, 其中 1 出现了 n_1 次, 2 出现了 n_2 次, 3 出现了 n_3 次. 试求 p_1, p_2 的矩估计.

X	1	2	3
P	p_1	p_2	$1-p_1-p_2$

3. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是总体 X 的一个简单随机样本, 试求在 X 具有下列概率分布时参数 θ 的矩估计.

(1) $p(x;\theta)=\dfrac{1}{\theta},\quad x=0,1,2,\cdots,\theta-1$, 其中 θ (正整数) 是未知参数.

(2) $p(x;\theta,n)=\dbinom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x},\quad x=0,1,\cdots,n.$

(3) $p(x;\theta)=(x-1)\theta^2(1-\theta)^{x-2},\quad x=2,3,\cdots;0<\theta<1.$

(4) $p(x;\theta)=-\dfrac{1}{\ln(1-\theta)}\dfrac{\theta^x}{x},\quad x=1,2\cdots.$

(5) $p(x;\theta)=\dfrac{\theta^x}{x!}e^{-\theta},\quad x=0,1,2,\cdots.$

4. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是总体 X 的一个简单随机样本, 试求在 X 具有下列概率密度时参数 θ 的矩估计.

(1) $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x), & 0<x<\theta\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$

(2) $f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^\theta, & 0<x<1,\theta>0\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$

(3) $f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0<x<1,\theta>0\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$

(4) $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)} & x>c\,(c>0\text{已知}),\theta>1\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$

5. 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{\theta^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}\,, & x\geq 0\\ 0 & \text{其他}\ .\end{cases}$$

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$.

(2) 求 $\hat{\theta}$ 的方差.

6. (1) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, 且 X 服从参数为 λ 的泊松分布. 求 $P(X=0)$ 的极大似然估计.

(2) 下表统计了某铁路局 122 个扳道员五年内由于操作失误引起的严重事故情况, 其中 r 表示一扳道员某五年内引起严重事故的次数, s 表示扳道员人数. 假设扳道员由于操作失误在五年内所引起的严重事故的次数服从泊松分布. 求一个扳道员在五年内未引起严重事故的概率 p 的极大似然估计.

r	0	1	2	3	4	5	≥ 6
s	44	42	21	9	4	2	0

7. 试求第 3 题各情形下参数的极大似然估计.

8. 试求第 4 题各情形下参数的极大似然估计.

9. 人体中某个基因的形态有三种, 分别是 AA, Aa, aa, 每个人的基因型只可能为这三种形态之一. 设总体中该基因的基因型概率分布律如下表, 其中 $\theta>0$ 为未知参数. 现从总体中随机抽取 n 个人, 其中 n_1 个人具有基因型 AA, n_2 个人为 Aa, n_3 个人为 aa. 试求 θ 的极大似然估计.

基因型	AA	Aa	aa
概率	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

10. 设总体的概率密度函数如下, 试求未知参数的极大似然估计:

(1) $f(x;\theta)=\dfrac{1}{2\theta}e^{-|x|/\theta},\ \ -\infty<x<\infty,\theta>0.$

(2) $f(x;\theta)=\begin{cases}1, & \theta-1/2<x<\theta+1/2\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(3) $f(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1<x<\theta_2\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

11. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 $-\infty<\mu<+\infty$, $\sigma^2>0$ 为未知参数. 求 $\theta=P(X\geq 2)$ 的极大似然估计.

12. 设总体的数学期望为 μ, $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本. 假设 $a_1,\cdots,a_n$ 是任意常数, 且 $\sum_{i=1}^n a_i\neq 0$. 验证 $\sum_{i=1}^n a_iX_i/\sum_{i=1}^n a_i$ 是 μ 的无偏估计量.

13. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, $EX=\mu, Var(X)=\sigma^2$.
(1) 确定常数 c 使得 $c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计.
(2) 记 $\overline{X}$, S^2 分别是样本均值和样本方差. 确定常数 c 使 $\overline{X}^2-cS^2$ 是 μ^2 的无偏估计.

14. 设从均值为 μ, 方差为 σ^2 的总体中, 分别抽取容量为 n_1, n_2 的两个独立样本. 设 $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ 分别是两样本的均值. 试证明对于任意常数 a, $Y=a\overline{X}_1+(1-a)\overline{X}_2$ 是 μ 的无偏估计, 并确定常数 a 使 Y 的方差达到最小.

15. 设有 k 台仪器, 第 i 台仪器测量的标准差为 σ_i, $i=1,\cdots,k$. 用这些仪器独立地对某一物理量 θ 各测一次, 分别得到 $X_1,X_2,\cdots,X_k$. 设仪器都没有系统误差, 即 $EX_i=\theta$, $i=1,\cdots,k$. 问 $a_1,\cdots,a_k$ 应取何值方能使 $\hat{\theta}=\sum_{i=1}^k a_iX_i$ 估计 θ 时, $\hat{\theta}$ 是无偏的, 并且 $Var(\hat{\theta})$ 最小?

16. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是抽自均匀分布 $U(\theta,c\theta))$ 的简单随机样本, 其中 $c>1$ 为常数, $\theta>0$ 为未知参数.
(1) 试求 θ 的极大似然估计.
(2) 试求 θ 的矩估计, 并验证其是否具有无偏性.

17. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为从下述几何分布中抽出的简单随机样本,

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},\ \ k=0,1,2,\cdots,\ \ 0<p<1,$$

分别求出 p^{-1} 和 p^{-2} 的无偏估计.

18. 假设如第 2 题, 并假定 $p_2 = 2p_1 = 2p$. 记 p 的矩估计为 $\hat{p}$, 现定义

$$\hat{p}_1 = \frac{n_1}{n},\ \ \hat{p}_2 = \frac{n_2}{2n},\ \ \hat{p}_3 = \frac{1}{3}(1 - \frac{n_3}{n}).$$

试验证它们的无偏性并确定何者的方差最小.

19. 一袋中有 N 个均匀硬币, 其中 θ 个是普通的硬币, 其余 $N-\theta$ 个两面都是正面. 现从袋中随机摸出一个把它连掷两次, 记下结果, 但是不看它属于哪种硬币, 又把它放回袋中, 如此重复 n 次. 如果掷出 $0,1,2$ 次正面的次数分别是 n_0, n_1, n_2 次 $(n_0 + n_1 + n_2 = n)$, 试分别用矩估计法和极大似然法这两种方法估计袋中普通硬币数 θ.

20. * 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是从总体 X 中抽出的简单随机样本, 已知 X 服从概率密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\theta}{\sigma}} & x > \theta \\ 0 & \text{其它}, \end{cases}$$

其中 $\sigma > 0$ 为一已知常数, 而 θ 是未知参数

(1) 试求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$ 和极大似然估计 $\hat{\theta}_2$.

(2) 验证 $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ 的无偏性. 如果不是无偏的话, 你是否可以将其修正得到 θ 的无偏估计 $\widetilde{\theta_1}$, $\widetilde{\theta_2}$?

(3) 比较 $\widetilde{\theta_1}$ 与 $\widetilde{\theta_2}$ 何者为优 (即方差较小).

21. 设某种清漆的 9 个样品的干燥时间 (以小时计) 分别为

$$6.0,\quad 5.7,\quad 5.8,\quad 6.5,\quad 7.0,\quad 6.3,\quad 5.6,\quad 6.1,\quad 5.0.$$

设干燥时间服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 试在下列两种条件下分别求 μ 的 95% 置信区间:

(1) $\sigma^2 = 0.6^2$, (2) σ^2 未知.

22. 从自动包糖机中随机抽 12 包糖, 测得样本平均值为 10.092, 样本标准差 $S = 0.2575$. 设每包糖重服从正态分布, 在下列两种情况下求总体均值 μ 的 95% 置信区间:

(1) 总体方差 $\sigma^2 = 0.04$. (2) 总体方差 σ^2 未知.

23. 某商店每天的投资利润率是一随机变量, 它服从正态分布. 现随机给出了五天的利润率: -0.2, 0.1, 0.8, 0.6, 0.9, 试在下列假设下求平均利润率的 95% 置信区间:

(1) 利润率的方差为 0.1. (2) 利润率的方差未知.

24. 假设 0.50, 1.25, 0.80, 2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值. 已知 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, 1)$.

(1) 求 X 的数学期望 $\mathrm{E}X$ (记 $\mathrm{E}X$ 为 b).

(2) 求 μ 的置信度为 95% 的置信区间.

(3) 利用上述结果求 b 的置信度为 95% 的置信区间.

25. 设某种电子管的使用寿命服从正态分布, 从中随机抽取 15 个进行检验, 得平均寿命为 1950 小时, 样本标准差为 300 小时. 试以 95% 的可靠性估计整批电子管平均使用寿命的置信区间.

26. 随机地取某种炮弹 9 发做试验, 求得炮口速度的样本标准差 $= 11$ (m/s), 设炮口速度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 求炮口速度均方差 σ 的 95% 置信区间.

27. 一批零件的长度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 从这批零件中随机地抽取 10 件, 测得长度值分别为 (单位: mm): 49.5, 50.4, 49.7, 51.1, 49.4, 49.7, 50.8, 49.9, 50.3, 50.0. 在下列条件下求这批零件长度总体方差 σ^2 的 95% 置信区间.

(1) $\mu = 50\text{mm}$.　　(2) μ 未知.

28. 假设用机器包装精盐的重量服从正态分布. 现从生产线上随机地抽取 10 袋, 测得其重量为 (单位: 克) : 501.5, 500.7, 492.0, 504.7, 483.0, 512.8, 504.0, 490.3, 486.0, 520.0. 试在下列条件下求总体方差的 0.95 的置信区间.

(1) $\mu = 500\text{g}$.　　(2) μ 未知.

29. 现有两种品牌的油漆, 随机地从甲品牌抽出 10 个样品, 从乙品牌抽出 9 个样品, 测得其干燥时间 (单位: 小时) 为:

甲品牌：	5.7,	6.1,	5.5,	6.9,	5.6,	6.2,	5.3,	5.7,	5.7,	5.8.
乙品牌：	6.0,	5.7,	5.8,	6.5,	7.0,	6.3,	5.6,	6.1,	5.0.	

设这两种品牌油漆的干燥时间分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 试在下列假设下求 $\mu_1 - \mu_2$ 的 95% 置信区间.

(1) $\sigma_1 = 0.65\text{h}$, $\sigma_2 = 0.6\text{h}$.　　(2) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 未知.

30. 研究两种固体燃料火箭推进器的燃烧率. 设两者都服从正态分布, 并且已知燃烧率的标准差均近似地为 0.05cm/s, 取样本容量为 $n_1 = n_2 = 20$. 得燃烧率的样本均值分别为 $\overline{x}_1 = 18cm/s$, $\overline{x}_2 = 24cm/s$, 设两样本独立. 求燃烧率总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间.

31. 现有两批导线, 随机地从 A 批导线中抽取 4 根, 从 B 批导线中抽取 5 根, 测得其电阻 (单位: 欧姆) 为:

A批导线:　0.143,　0.142,　0.143,　0.137

B批导线: 0.140, 0.142, 0.136, 0.138 0.140

设这两批导线的电阻分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 且相互独立. 试在下列假设下求 $\mu_1 - \mu_2$ 的 95% 置信区间.

(1) $\sigma_1^2 = 8 \times 10^{-6}, \sigma_2^2 = 6 \times 10^{-6}$. (2) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 未知.

32. 设两化验员甲、乙各自独立地用相同的方法对某种聚合物的含氯量各做 10 次测量, 分别求得测量值的样本方差为 0.5419 与 0.6065. 设测量值总体分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 试求方差比 σ_1^2/σ_2^2 的 95% 置信区间.

33. 在一批货物中, 随机抽取 100 件出来检查, 发现其中有 10 件次品, 试求这批货物次品率的 95% 置信区间.

34. 某学校计划组织一次大型的郊游活动, 为此要了解学生对该活动的支持程度. 随机地对 100 名学生进行了调查, 其中有 78 名支持者. 若记该校学生中支持这项活动的人数比例为 p, 并设该校学生数足够多.

(1) 求 p 的置信水平为 95% 的置信区间.

(2) 若只关心 p 的下限 (即至少有多少百分比的学生支持这项活动), 求出此置信下限 ($\alpha = 0.05$).

35. * 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是抽自总体 X 的简单随机样本, X 具有概率密度函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \geq \theta; \\ 0, & x < \theta. \end{cases}$$

证明: 可取 $X_{(1)} - \theta$ 作为求 θ 区间估计的枢轴变量, 其中 $X_{(1)} = \min(X_1, \cdots, X_n)$. 并据此求出 θ 的 $1 - \alpha$ 置信下限.

36. * 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是抽自总体 X 的简单随机样本, X 具有概率密度函数

$$f(x) = \begin{cases} 1/\theta, & 0 < x < \theta; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 θ 的 $1 - \alpha$ 置信下限 (提示: 利用 $\max(X_1, \cdots, X_n)/\theta$ 作为枢轴变量).

第五章　假设检验

1. 样本 $X_1, \cdots, X_n$ 为抽自总体 $N(\mu, 1)$ 的样本, 考虑如下假设检验问题

$$H_0: \quad \mu = 2 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \quad \mu = 3,$$

若检验的拒绝域为 $W = \{\overline{X} \geq 2.6\}$

(1) 当 $n = 20$ 时求检验犯两类错误的概率.

(2) 如果要使得检验犯第二类错误的概率 $\beta \leq 0.01$, n 最小应取多少?

(3) 证明: 当 $n \to +\infty$ 时, $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$. 其中 α 为犯第一类错误的概率.

2. 设总体为均匀分布 $U(0, \theta)$, $X_1, \cdots, X_n$ 是一组样本. 考虑检验问题

$$H_0: \quad \theta \geq 3 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \quad \theta < 3,$$

拒绝域取为 $W = \{X_{(n)} = \max\{X_1, \cdots, X_n\} \leq 2.5\}$,

(1) 求此检验的功效函数和检验水平.

(2) 为使检验水平达到 0.05 , 样本量 n 至少应取多大?

3. 设样本 $X_1, \cdots, X_n$ 抽自参数为 λ 的泊松分布总体, 对检验问题

$$H_0: \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \quad \lambda \neq \frac{1}{2}$$

取检验的拒绝域为 $\{(X_1, \cdots, X_n): \ \sum\limits_{i=1}^{10} X_i \leq 1 \text{ 或 } \geq 10\}$

(1) 求此检验在 $\lambda = 0.25, 0.5, 1$ 处的功效函数值, 并求出该检验的水平.

(2) 求犯第一类错误的概率及在 $\lambda = 0.25,\ 0.75$ 处犯第二类错误的概率.

4. 根据长期资料分析, 钢筋强度服从正态分布. 今测得六炉钢生产出钢的强度分别为

$$48.5, \quad 49.0, \quad 53.5, \quad 49.5, \quad 56.0, \quad 52.5$$

能否认为其强度的均值为 52.0 $(\alpha = 0.05)$?

5. 要求一种元件的平均使用寿命不得低于 1000 小时, 生产者从一批这种元件中随机抽取 25 件, 测得其寿命的平均值为 950 小时. 已知该种元件的寿命服从标准差为 $\sigma = 100$ 小时的正态分布. 试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验这批元件是否合格.

6. 某工厂生产 10 欧姆的电阻, 根据以往所生产电阻的实际情况, 可以认为其电阻值服从正态分布, 标准差为 0.1. 现随机抽取 10 个电阻, 测得阻值为 9.9, 10.1, 10.2, 9.7, 9.9, 9.9, 10, 10.5, 10.1, 10.2. 问从这些样本我们能否认为该厂生产的电阻的平均值为 10 欧姆 ($\alpha = 0.05$)?

7. 用传统工艺加工的某种水果罐头中每瓶维生素 C 的含量平均为 19 毫克, 现采用一种新的加工工艺, 试图减少在加工过程中对维生素 C 的破坏, 抽查了 16 瓶罐头, 测得维生素 C 的含量 (单位: 毫克) 为:

$$23,\ 20.5,\ 21,\ 20,\ 22.5,\ 19,\ 20,\ 23,\ 20.5,\ 18.8,\ 20,\ 19.5,\ 22,\ 18,\ 23,\ 22.$$

已知水果罐头中维生素 C 的含量服从正态分布. 在方差未知的情况下, 问新工艺下维生素的含量是否比旧工艺有所提高 ($\alpha = 0.01$)?

8. 随机抽取某班 25 名学生的数学考试成绩, 得平均分数为 82 分, 样本标准差为 8, 已知全年级的数学成绩服从正态分布且平均分数为 87 分, 试问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 能否认为该班的数学平均成绩为 87 分?

9. 某机器制造出来的肥皂厚度为 5cm. 今欲了解机器性能是否良好, 随机抽取 10 块肥皂为样本, 测得平均厚度为 5.3cm, 标准差为 0.3cm, 试分别在 0.05, 0.01 的显著性水平下检验机器是否工作良好.

10. 为了考察 A, B 两种制鞋材料的耐磨性, 用它们制作了 10 双鞋, 其中每双鞋的两只鞋分别用 A 和 B 两种材料制作 (左、右脚两只鞋随机地采用 A 或 B). 10 个男孩试穿这 10 双鞋之后的磨损情况如下表所示 (数字代表磨损程度), 问是否可以认为这两种材料的耐磨性无显著性差异 ($\alpha = 0.05$)?

男孩	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	13.2	8.2	10.9	14.3	10.7	6.6	9.5	10.8	8.8	13.3
B	14.0	8.8	11.2	14.2	11.8	6.4	9.8	11.3	9.3	13.6

11. 一个以减肥为主要目的的健美俱乐部声称, 参加其训练班至少可以使肥胖者平均减少体重 8kg 以上. 为检验该宣传是否可信, 调查人员随机调查了 9 名参加者, 得到他们

训练前后的体重数据如下 (单位: kg):

训练前	104.5	94.0	104.7	96.4	91.6	90.9	92.0	99.9	109.7
训练后	94.2	86.6	97.5	91.7	82.6	83.8	81.3	92.2	101.0

现假设训练前后人的体重均服从正态分布. 问在 0.05 的显著性水平下, 是否可以认为该俱乐部的宣传是可信的?

12. 在上题中, 如果训练前后的数据是对两组人测得的, 并假设训练前后的人的体重服从方差相同的正态分布, 问在 0.05 的显著性水平下, 是否可以认为该俱乐部的宣传是可信的?

13. 装配一个部件可以采用不同的方法, 现在关心的是哪一种方法的效率更高. 现在从两种不同的装配方法中各抽取 12 件产品, 记录各自的装配时间 (单位: 分钟) 如下:

甲方法	30	34	34	35	34	28	34	26	31	31	38	26
乙方法	26	32	22	26	31	28	30	22	31	26	32	29

假设两总体为正态总体, 且方差相等. 问这两种方法的装配时间有无显著不同 ($\alpha = 0.05$)?

14. 某车间生产铜丝, 生产一向比较稳定. 今从产品中随机抽取 10 根检查其折断力, 得数据如下 (单位: kg):

288.8, 294.7, 300.2, 286.6, 290.3, 280.1, 296.4, 295.4, 290.2, 289.2.

假设铜丝的折断力服从正态分布, 问是否可以相信该车间生产的铜丝的折断力的方差是 16 ($\alpha = 0.05$)?

15. 某考试要求成绩的标准差为 12. 现从考试成绩单中任意抽取 15 份, 计算样本的标准差为 16 , 设考试成绩服从正态分布, 问此次考试的标准差是否符合要求 ($\alpha = 0.05$)?

16. 为了了解甲、乙二企业职工工资水平, 分别从二企业各随机抽取若干名职工调查, 得如下数据 (单位: 元):

甲企业: 750, 1060, 750, 1820, 1140, 1050, 1000

乙企业: 1000, 1900, 900, 1800, 1200, 1700, 1950, 1200

设二企业职工工资分别服从正态分布, 而总体独立且均值方差均未知. 试根据以上数据判断: 两企业职工工资的方差是否相等? 甲企业职工平均工资是否低于乙企业职工平均工资 ($\alpha = 0.05$)?

17. 设纱厂生产的某种细纱支数服从正态分布, 方差为 1.44. 现从一批产品中随机抽取 16 缕进行支数测量得样本方差为 4.41, 试问细纱的均匀度有无显著变化 ($\alpha = 0.05$)?

18. 假设某台精盐包装机生产的袋装盐的净重服从正态分布, 按要求每袋盐的标准重量为 500g, 标准差不得超过 10g, 某天开工后, 从装好的盐中随机抽取 10 袋, 测得其净重 (单位: g) 为

$$510,\quad 495,\quad 478,\quad 487,\quad 501,\quad 493,\quad 528,\quad 504,\quad 503,\quad 504.$$

问这时机器的工作是否正常 ($\alpha = 0.05$)?

19. 现有两台天平, 为比较它们的精度, 将一物体分别在两台天平上各称量 9 次, 得数据如下 (单位:g):

甲天平	19.96	19.97	20.06	19.96	20.06	20.01	20.01	19.98	19.98
乙天平	19.90	19.89	20.18	19.91	20.03	20.00	20.00	20.02	19.91

设两台天平的称量结果分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 在显著性水平 0.05 下检验下列假设

$$H_0: \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad \longleftrightarrow \qquad H_1: \quad \sigma_1^2 < \sigma_2^2.$$

20. 从甲、乙两处煤矿各随机抽取矿石 5 个和 4 个, 分析其含灰率 (%) 得到如下结果

甲矿	24.3	20.8	23.7	21.3	17.4
乙矿	18.2	16.9	20.2	16.7	

假设各煤矿含灰率都服从正态分布且方差相等, 问甲乙两矿的含灰率有无显著差异 ($\alpha = 0.05$)?

21. 设总体 $X \sim N(\mu_1, 0.04)$, $Y \sim N(\mu_2, 0.09)$. 现从 X 中抽取样本观察值 2.10, 2.35, 2.39, 2.41, 2.44, 2.56. 从 Y 中抽取样本观察值 2.03, 2.28, 2.58, 2.71. 试检验 μ_1 和 μ_2 是否有显著差异 ($\alpha = 0.05$)?

22. 现有两批电子器件, 从中随机抽取若干件进行检验, 测得样本的电阻如下 (单位:Ω) 为

A批	0.140	0.138	0.143	0.142	0.144	0.137
B批	0.135	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140

假设这两批电子器件的电阻均服从正态分布, 试在显著性水平 0.05 下比较一下这两批电子器件的电阻有无差异.

23. 独立地用两种工艺生产同一种产品, 现随机抽取若干产品测得产品的某性能指标如下:

工艺 A	0.47	1.02	0.33	0.70	0.94	0.85	0.39	0.52	0.47
工艺 B	0.41	1.00	0.46	0.61	0.84	0.87	0.36	0.52	0.51

假设这两种工艺生产的产品该指标均服从正态分布, 由此结果是否能判断这两种工艺对产品该性能指标的影响有无显著差异 ($\alpha = 0.05$)?

24. 一药厂生产一种新的止痛片, 厂方希望抽取样品检验服用新药片后至开始起作用的时间间隔较原有止痛片至少缩短一半, 因此厂方提出需要假设

$$H_0: \quad \mu_1 \leq 2\mu_2 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \quad \mu_1 > 2\mu_2,$$

此处 μ_1, μ_2 分别是服用原有止痛片和服用新止痛片后至起作用的时间间隔的总体的均值. 设两总体均为正态分布且方差分别为已知值 σ_1^2, σ_2^2. 现分别在两总体中取一样本 $X_1, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, \cdots, Y_m$, 设两个样本独立, 试给出上述假设的拒绝域, 取显著性水平为 α.

25. 某种大量生产的袋装食品, 按规定不得少于 250g. 今从一批该食品中任意抽取 50 袋, 发现有 6 袋低于 250g. 若规定不符合标准的比例超过 5% 就不得出厂, 问该批产品是否可以出厂 ($\alpha = 0.05$)?

26. 2000 年的全国人口普查表明某城市的 65 岁以上老年人所占的比例为 13.55%, 现在为了调查人口的变动情况, 随机抽取 400 名居民, 发现其中有 57 人年龄在 65 岁以上. 试问该市现在老年人所占的比例较 2000 年普查时是否有变化 ($\alpha = 0.05$)?

27. 为检验吸烟与慢性气管炎有无关系, 随机调查了 339 人, 其中 205 名吸烟者中有 43 人患慢性气管炎, 在 134 名不吸烟者中有 13 人患慢性气管炎. 问在显著性水平 0.05 下数据是否支持 "吸烟者中患慢性气管炎的比例较高" 这个结论?

28. 为确定某种肥料的效果, 取 1000 株植物做试验. 在没有施肥的 100 株植物中, 有 53 株长势良好, 在已施肥的 900 株中, 则有 783 株长势良好. 问施肥的效果是否显著 ($\alpha = 0.01$)?

29. 袋中装有 8 个球, 其中红球数未知. 在其中任取 3 个, 记录红球的个数 X, 然后放回, 再任取 3 个, 记录红球的个数, 然后放回. 如此重复进行了 112 次. 得到结果如下:

x	0	1	2	3
次数	1	31	55	25

试在 $\alpha = 0.05$ 水平下检验假设 H_0 : 红球的个数为 5.

30. 为检验一颗骰子是否均匀, 将它独立的抛掷 120 次, 得到出现各面的次数分别为 18, 18, 24, 16, 20, 24. 试在显著性水平 0.05 下判断这颗骰子是否均匀.

31. 有甲、乙、丙三个工厂生产同一种产品. 产品分 1, 2, 3 三个等级 (分别代表高、中、低). 为考察各工厂产品质量是否一致, 从这三个工厂中分别随机抽出产品若干件, 每件鉴定其质量等级, 结果如下:

等级 \ 工厂	甲	乙	丙
1	58	38	30
2	40	44	35
3	11	18	26

试在显著性水平 0.05 下检验假设: 各工厂产品质量一致. 若不一致, 试问哪个厂产品质量较优? 哪个厂的产品质量较劣? 并请说明理由.

32. 检查了一本书的 100 页, 记录各页中印刷错误的个数, 其结果为

错误个数 f_i	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7
含 f_i 个错误的页数	86	40	19	2	0	2	1	0

试在显著性水平 0.05 下检验假设 H_0 : 每页上的印刷错误个数服从泊松分布.

33. 下表给出了从某大学一年级学生中随机抽取的 200 个学生的某次数学考试成绩:

分数	$[20,30]$	$(30,40]$	$(40,50]$	$(50,60]$	$(60,70]$	$(70,80]$	$(80,90]$	$(90,100]$
学生数	5	15	30	51	60	23	10	6

试在显著性水平 0.05 下检验假设成绩是否服从正态总体 $N(60, 15^2)$.