

中国科学技术大学

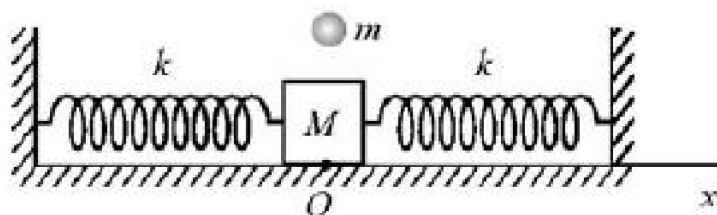
2017 – 2018 学年第一学期期末考试试卷

考试科目: 力学 得分: _____

学生所在学院: _____ 姓名: _____ 学号: _____

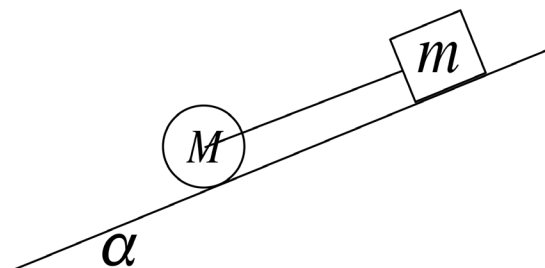
说明: 本次考试为半开卷考试。解题过程需要给出适当的说明。涉及到计算题如没有计算器可以估算。

一、 (20 分) 如下图所示, 两根相同的弹簧与物体 M 连接后放在光滑的水平面上, 弹簧的另一端分别固定在墙上, 两弹簧均处于自然长度。现令 M 沿着水平方向振动, 当 M 运动至中点时, 将一质量为 m 的质点快速粘在 M 上 (设粘上 M 前, m 的速率为零)。(1) 试求 m 粘上 M 之前和之后两种情况下振动系统的角频率比和振幅比; (2) 如果在 M 运动至最大位移时, 将 m 快速粘在 M 上, 求振动系统的角频率比和振幅比。

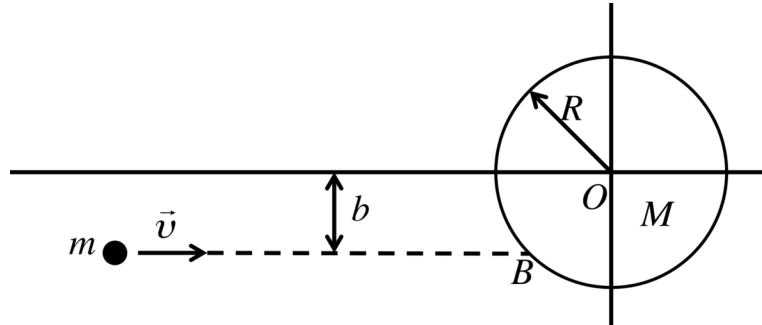


二、 (15 分) 飞机在空中以速率 $u = 2.00 \times 10^2 \text{ m/s}$ 做水平直线飞行, 发出频率为 $f_0 = 2.00 \times 10^3 \text{ Hz}$ 的声波。地面上有一位观察者用仪器测量飞机发出的声波频率。当飞机从观察者上空飞过, 观察者测得的声波频率在 4s 内从 $f_1 = 2.40 \times 10^3 \text{ Hz}$ 降到 $f_2 = 1.60 \times 10^3 \text{ Hz}$ 。求飞机的飞行高度。(设空气中声速为 $V = 3.30 \times 10^2 \text{ m/s}$)

三、 (20 分) 如图, 在固定于地表倾角为 α 的斜面上, 质量为 m 的木块通过轻绳和质量为 M , 半径为 r 的实心均匀圆柱体的转轴相连。已知斜面和木块及圆柱体之间的动、静摩擦系数均为 μ , 圆柱体转轴上的摩擦可忽略。圆柱体无滑动滚下, 求木块沿斜面下滑的加速度 a , 绳中张力 T , 圆柱体所受摩擦力 f 。



四、 (15分) 如图, 一质量为 m 的子弹以速度 \vec{v} 射向一个质量为 M 半径为 R 的绕轴在竖直面内自由转动的静止圆盘, 转轴通过圆盘中心且与盘面垂直。在碰撞前, 子弹沿转轴下方距离 b 处的直线运动。子弹打到圆盘并附着在 B 点。(1) 在碰撞前, 圆盘—子弹系统的总动量矩为多少? (2) 在碰撞后的瞬间, 圆盘—子弹这一系统的角速率为多少? (3) 在碰撞后, 该系统的动能为多少? (4) 有多少机械能在碰撞中损失掉了?



五、 (10分) 一横截面积为 5cm^2 的均匀虹吸管从一个很大的容器中吸水。虹吸管最高点处位于水面上方 1.0m , 出口处高度比水面高度低 0.6m 。求当虹吸管内水流达到定常流动时, 管内最高点处的压强和管中的体积流量。

六、 (10分) 一个长度为 L , 横截面积为 S , 杨氏模量为 Y 的均匀弹性细棒, 两端施加大小为 F 的正压力。求细棒中储存的弹性能。

七、 (10分) 飞船 A 以 $0.8c$ 的速度相对地球向正东飞行, 飞船 B 以 $0.6c$ 的速度相对地球向正西方向飞行。当两飞船即将相遇时 A 飞船在自己的天窗处相隔 $2s$ 发射两颗信号弹。在 B 飞船的观测者测得两颗信号弹相隔的时间间隔为多少?

中国科学技术大学

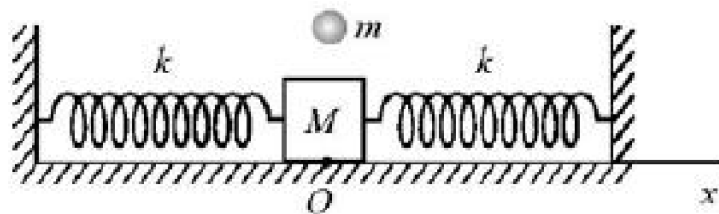
2017 – 2018 学年第一学期期末考试试卷

考试科目: 力学 得分: _____

学生所在学院: _____ 姓名: _____ 学号: _____

说明: 本次考试为半开卷考试。解题过程需要给出适当的说明。涉及到计算题如没有计算器可以估算。

一、 (20 分) 如下图所示, 两根相同的弹簧与物体 M 连接后放在光滑的水平面上, 弹簧的另一端分别固定在墙上, 两弹簧均处于自然长度。现令 M 沿着水平方向振动, 当 M 运动至中点时, 将一质量为 m 的质点快速粘在 M 上 (设粘上 M 前, m 的速率为零)。(1) 试求 m 粘上 M 之前和之后两种情况下振动系统的角频率比和振幅比; (2) 如果在 M 运动至最大位移时, 将 m 快速粘在 M 上, 求振动系统的角频率比和振幅比。



解: (1) 以中点 O 为坐标原点, 当 M 偏离 O 点 x 时, 受力 $f = -2kx$ 。由牛顿第二定

律 $M \frac{d^2x}{dt^2} = -2kx$, 则角频率 $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}}$

当 m 粘在 M 后, 弹簧振子的质量为 $(M+m)$, 所以角频率

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{M+m}}$$

则 $\frac{\omega_0}{\omega_1} = \sqrt{\frac{M+m}{M}}$ 5 分

设 m 粘在 M 之前, 振幅为 A_0 , M 通过平衡位置中点 O 时的速度为 V_0 , 则

装订线 答题时不要超过此线

$$\vec{M}\vec{V} = 2 \times 2 \text{ kA}$$

，所以 $V_0 = \omega_0 A_0$ 。在 m 和 M 粘接过

程中， $(M+m)$ 系统水平方向动量守恒，则 $MV_0 = (M+m)V_1$ ，则 $A_1 = V_1/\omega_1$ 。所以

$$\frac{A_0}{A_1} = \sqrt{\frac{M+m}{M}} \dots\dots 5 \text{ 分}$$

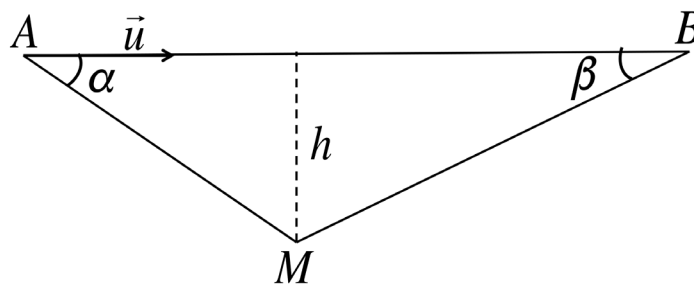
【理解： m 和 M 粘接过程开始时， m 和 M 速度不同，存在摩擦力，导致机械能的损失。】

(2) 同 (1) 问，
$$\frac{\omega_0}{\omega_2} = \sqrt{\frac{M+m}{M}} \dots\dots 5 \text{ 分}$$

当 M 运动至最大位移处时， m 粘在 M ，由水平方向动量守恒知共同速度为 $v_2=0$ 。因此振幅不变， $A_2/A_0=1$ 5 分 【理解： m 和 M 粘接过程开始时， m 和 M 速度都为零，不存在摩擦力，机械能守恒。】

二、 (15 分) 飞机在空中以速率 $u=2.00 \times 10^2 \text{ m/s}$ 做水平直线飞行，发出频率为 $f_0=2.00 \times 10^3 \text{ Hz}$ 的声波。地面上有一位观察者用仪器测量飞机发出的声波频率。当飞机从观察者上空飞过，观察者测得的声波频率在 4s 内从 $f_1=2.40 \times 10^3 \text{ Hz}$ 降到 $f_2=1.60 \times 10^3 \text{ Hz}$ 。求飞机的飞行高度。(设空气中声速为 $V=3.30 \times 10^2 \text{ m/s}$)

解：如图，飞机在 4s 内从 A 点飞到 B 点。飞机在 A 点处，以速率 $v_{AM} = u \cos \alpha$ 接近观察者，观察者测得的从 A 点发出的声波频率为 $f_1=2.40 \times 10^3 \text{ Hz}$ ；当飞机在 B 点处时，以速率 $v_{BM} = u \cos \beta$ 远离观察者，观察者测得的从 B 点发出的声波频率为 $f_2=1.60 \times 10^3 \text{ Hz}$ 。



根据多普勒效应公式：
$$f_1 = \frac{1}{1 - \frac{u \cos \alpha}{V}} f_0 \dots\dots 4 \text{ 分}$$

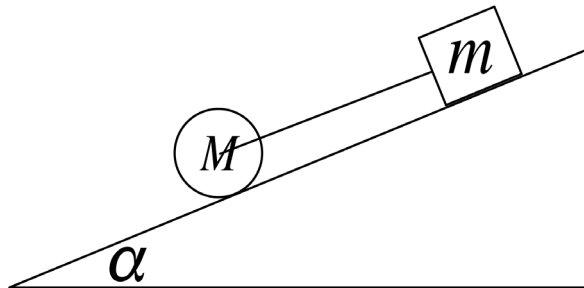
$$f_2 = \frac{1}{1 + \frac{u \cos \beta}{v}} f_0 \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

解得： $\cos \alpha = 0.275$, $\cos \beta = 0.413$ 2 分

如图中几何关系： $AB = h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = u \cdot \Delta t$ 3 分

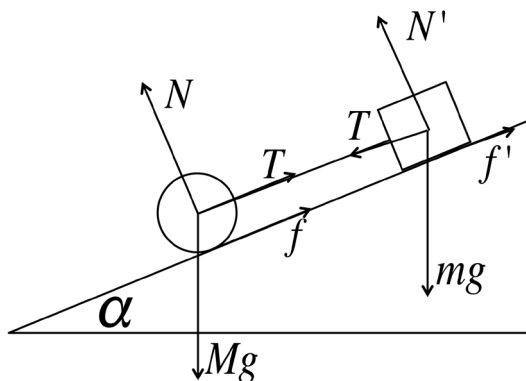
解得： $h = 1.08 \times 10^3 \text{ m}$ 2 分

三、 (20 分) 如图，在固定于地表倾角为 α 的斜面上，质量为 m 的木块通过轻绳和质量为 M ，半径为 r 的实心均匀圆柱体的转轴相连。已知斜面和木块及圆柱体之间的动、静摩擦系数均为 μ ，圆柱体转轴上的摩擦可忽略。圆柱体无滑动滚下，求木块沿斜面下滑的加速度 a ，绳中张力 T ，圆柱体所受摩擦力 f 。



解：倾角很小时，木块和圆柱体静止不动；倾角大到一定程度，圆柱体无滑动滚动；倾角继续增大，圆柱体开始既滚又滑。

受力如下：



圆柱体无滑动滚动。

m 受力分析，得： $N' = mg \cos \alpha$, $mg \sin \alpha + T - f' = ma$, $f' = \mu N'$ 6 分

M 受力分析, 得: $N = Mg \cos \alpha$, $Mg \sin \alpha - f - T = Ma$ 4 分

M 转动平衡, 得: $fr = I\beta = \frac{1}{2}Mr^2\beta$ 2 分

无滑动滚动条件: $a = r\beta$ 1 分

解得: $a = \frac{(M+m)g \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha}{1.5M+m}$ 1 分

$f = \frac{M(M+m)g \sin \alpha - \mu Mmg \cos \alpha}{3M+2m}$ 1 分

$T = \frac{mg(3\mu M \cos \alpha - m \sin \alpha)}{3M+2m}$ 1 分

无滑动滚动情况下, $a > 0$, 即 $\text{tg} \alpha > \frac{\mu m}{M+m}$ 2 分

如果考虑到圆柱体的摩擦力需要满足 $f < \mu N$, 这就给出 $\text{tg} \alpha < 3\mu$ 2 分

与前面 $a > 0$ 的要求合在一起应有

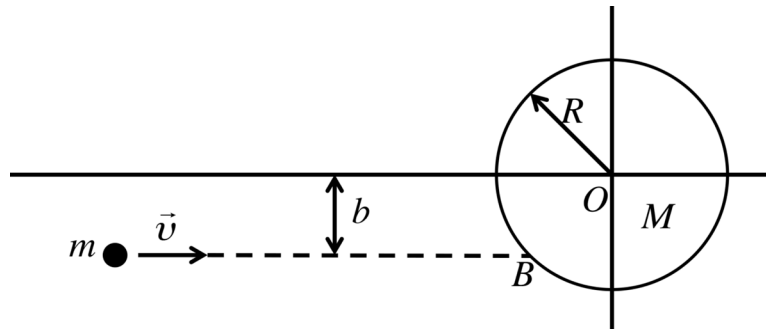
$$\frac{\mu m}{M+m} < \text{tg} \alpha < 3\mu$$

但如果细心的同学发现还应有一个要求 $T > 0$, 则又增加了一个条件

$$\text{tg} \alpha < 3\mu \frac{M}{m} \quad \text{.....+2 分}$$

因此就需要补充条件 $\frac{M}{m} \geq 1$, 这样 $f < \mu N$ 满足的同时会自动满足 $T > 0$ 。

四、 (15 分) 如图, 一质量为 m 的子弹以速度 \vec{v} 射向一个质量为 M 半径为 R 的绕轴在竖直面内自由转动的静止圆盘, 转轴通过圆盘中心且与盘面垂直。在碰撞前, 子弹沿转轴下方距离 b 处的直线运动。子弹打到圆盘并附着在 B 点。(1) 在碰撞前, 圆盘—子弹系统的总动量矩为多少? (2) 在碰撞后的瞬间, 圆盘—子弹这一系统的角速率为多少? (3) 在碰撞后, 该系统的动能为多少? (4) 有多少机械能在碰撞中损失掉了?



解：(1)系统碰前的总动量矩为 mvb 。↵

(2)根据系统的角动量守恒，↵

↵

↵

$$mvb = (I_o + mR^2)\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega$$

可得角速率为↵

↵

↵

$$\omega = \frac{2mvb}{(M + 2m)R^2}$$

(3)系统的动能为↵

↵

↵

$$E_k = \frac{1}{2}(I_o + mR^2)\omega^2 = \frac{m^2v^2b^2}{(M + 2m)R^2}$$

(4)系统损失的机械能能为↵

↵

↵

↵

$$\frac{1}{2}mv^2 - E_k = \frac{mv^2(MR^2 + 2mR^2 - 2mb^2)}{2(M + 2m)R^2}$$

五、 (10分) 一横截面积为 5cm^2 的均匀虹吸管从一个很大的容器中吸水。虹吸管最高点处位于水面上方 1.0m ，出口处高度比水面高度低 0.6m 。求当虹吸管内水流达到定常流动时，管内最高点处的压强和管中的体积流量。

解：你们自己算一下吧，不考虑粘滞性，用伯努利方程和连续性原理。

六、 (10分) 一个长度为 L ，横截面积为 S ，杨氏模量为 Y 的均匀弹性细棒，两端施加大小为 F 的正压力。求细棒中储存的弹性能。

解： $F = k\Delta L$ ， $\frac{F}{S} = Y \frac{\Delta L}{L}$ 4分

得： $k = \frac{YS}{L}$ 2分

弹性势能： $E = \frac{1}{2}k\Delta L^2 = \frac{1}{2} \frac{F^2 L}{YS}$ 4分

七、 (10分) 飞船 A 以 $0.8c$ 的速度相对地球向正东飞行, 飞船 B 以 $0.6c$ 的速度相对地球向正西方向飞行. 当两飞船即将相遇时 A 飞船在自己的天窗处相隔 $2s$ 发射两颗信号弹. 在 B 飞船的观测者测得两颗信号弹相隔的时间间隔为多少?

解: 以地面为 K 系, 飞船 A 为 K' 系, 以正东为 x 轴正向; 则飞船 B 相对于飞船 A 的相对速度

$$v'_{B} = \frac{v_{B} - v_{A}}{1 - \frac{v_{A}}{c} \frac{v_{B}}{c}} = \frac{-0.6c - 0.8c}{1 - \frac{0.8c}{c} (-0.6c)} = \frac{-1.4}{1 + 0.8 \times 0.6} c = -0.946c$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - (v'_{B}/c)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - 0.946^2}} = 6.17(s)$$

这道题如果有同学对“测得”的理解包括信号以光速传播的时间, 也算正确。