2022 年春季学期 数学分析 (B2) 期末考试
参考解答与评分细则

刘炜昊[1], 余启帆, 严骐鸣

2022 年 7 月 1 日

第一题 (10 分)

求 $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

解:

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}. \tag{1.1}$$

□

评卷人: 严骐鸣助教;

评分细则: 无具体给分细则.

第二题 (10 分)

求函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+\frac{1}{3}\sin 2x, \quad x\in[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 系数.

解: 因为

$$f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+\frac{1}{3}\sin 2x=\cos 2x+\frac{1}{3}\sin 2x, \tag{2.1}$$

所以 $f(x)$ 的 Fourier 系数为 $a_2=1, b_2=\frac{1}{3}$, 其它 Fourier 系数都为零. □

评卷人: 严骐鸣助教;

评分细则: 无具体给分细则.

第三题 (12 分)

求向量场 $\boldsymbol{v}=(y+z)\boldsymbol{i}+(z+x)\boldsymbol{j}+(x+y)\boldsymbol{k}$ 沿曲线

$$L:\boldsymbol{r}(t)=(\cos t,\sin t,t), \quad t\in[0,2\pi] \tag{3.1}$$

的积分, 这里 t 是曲线的正向参数.

解: 向量场 $\boldsymbol{v}$ 有势函数 $\varphi(x,y,z)=xy+yz+zx$, 因此所求的积分为

$$\varphi(\boldsymbol{r}(2\pi))-\varphi(\boldsymbol{r}(0))=\varphi(1,0,2\pi)-\varphi(1,0,0)=2\pi. \tag{3.2}$$

□

评卷人: 严骐鸣助教;

评分细则: 无具体给分细则.

---

[1] 闻道有先后, 解答有疏漏, 恳请读者来信指正: lwh1106@mail.ustc.edu.cn

第四题 (15 分)

将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & 1\leqslant |x|\leqslant \pi\end{cases}$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上展开为 Fourier 级数, 由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$ 的和.

解: 因为 f 是偶函数, 所以

$$b_n=0,\quad n=1,2,\cdots, \tag{4.1}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}, \tag{4.2}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\ \mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos nx\ \mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin n}{n},\quad n=1,2,\cdots, \tag{4.3}$$

故 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n}{n\pi}\cos nx. \tag{4.4}$$

因为 0 是 f 的连续点, 且 $f(0)=1$, 所以

$$1=\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n}{n\pi}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\frac{\pi-1}{2}. \tag{4.5}$$

根据 Parseval 等式, 有

$$\frac{2}{\pi^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{\pi-1}{2}. \tag{4.6}$$

□

评卷人: 刘炜昊助教;

评分细则: 计算 Fourier 级数共 5 分, 其中系数 b_n, a_0, a_n 分别为 1 分、1 分和 2 分, 写出对应的 Fourier 级数得 1 分; 令 $x=0$ 得 3 分, 计算得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 的结果再得 2 分; 正确写出 Parseval 等式得 3 分, 计算出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$ 再得 2 分 (若从 0 到 1 取积分, 则积分过程 3 分, 计算结果 2 分).

第五题 (15 分)

求向量场 $\boldsymbol{v}=xy^2\boldsymbol{i}+yz^2\boldsymbol{j}+zx^2\boldsymbol{k}$ 在球面 $S: x^2+y^2+z^2=z$ 的积分, 曲面 S 的正向是外法向.

解: 所求积分为

$$I:=\iint_S xy^2\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z+yz^2\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x+zx^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\iiint_V\left(y^2+z^2+x^2\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z, \tag{5.1}$$

这里 V 是 S 围成的球体, 已使用 Gauss 公式.

V 的参数方程为

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = \dfrac{1}{2} + r\cos\theta \end{cases}, \tag{5.2}$$

这里 $(r,\theta,\varphi) \in F := \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$. 于是

$$I = \iiint_F \left(\frac{1}{4} + r^2 + r\cos\theta\right) \cdot r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \tag{5.3}$$

$$= 2\pi \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant \frac{1}{2} \\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi}} \left(\frac{1}{4} + r^2 + r\cos\theta\right) \cdot r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta \tag{5.4}$$

$$= 2\pi \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant \frac{1}{2} \\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi}} \left(\frac{1}{4} + r^2\right) \cdot r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta \tag{5.5}$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}r^2 + r^4\right) \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \tag{5.6}$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}\right)\cdot 2 \tag{5.7}$$

$$= \frac{\pi}{15}. \tag{5.8}$$

□

评卷人: 刘炜昊助教;

评分细则: 使用 Gauss 公式转换为三重积分得 5 分, 坐标转换得 3 分, 范围得 1 分, 后续计算共 6 分. 注意, 若直接将被积函数 $x^2+y^2+z^2$ 换成 z, 该情况下大概率得分不超过 9 分 (因该关系只在球面上成立); 若直接使用第二型曲面积分计算, 根据计算过程酌情给分.

第六题 (15 分)

设常数 a,b 都是正实数, 平面向量场 $\boldsymbol{v} = \dfrac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{a^2x^2 + b^2y^2}$.

(1) 求 $\boldsymbol{v}$ 在区域 $D_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x > 0\right\}$ 的所有势函数;

(2) 证明 $\boldsymbol{v}$ 不是区域 $D_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 0\right\}$ 上的保守 (有势) 场.

(1) 解:

$$\varphi(x,y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}y \tag{6.1}$$

$$= \int_{(1,0)}^{(x,0)} \frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}y + \int_{(x,0)}^{(x,y)} \frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}y \tag{6.2}$$

$$= \int_0^y \frac{x}{a^2x^2+b^2x^2}\,\mathrm{d}y \tag{6.3}$$

$$= \frac{1}{ab}\arctan\frac{by}{ax}, \tag{6.4}$$

故所求的势函数为 $\varphi(x,y)=\dfrac{1}{ab}\arctan\dfrac{by}{ax}+C$, 其中 C 是任意常数. □

评卷人: 余启帆助教;

评分细则: 本小问 8 分, 其中式 6.2, 6.3 和 6.4 分别记 2 分, 最终结果记 2 分. 若结果中同时含有 x_0, y_0 等多个常数或没化简需扣 2 分.

(2) **解:** 设 L 是逆时针方向的椭圆 $a^2x^2+b^2y^2=1$, 所围成的区域为 D, 则 D 的面积为 $\sigma(D)=\dfrac{\pi}{ab}$. 向量场 $\boldsymbol{v}$ 沿 L 的第二型曲线积分为

$$\oint_L \frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}y=\oint_L -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y \tag{6.5}$$

$$=2\sigma(D) \tag{6.6}$$

$$=\frac{2\pi}{ab}\neq 0, \tag{6.7}$$

故 $\boldsymbol{v}$ 不是区域 $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>0\}$ 上的保守 (有势) 场. □

评卷人: 余启帆助教;

评分细则: 本小问 7 分, 其中式 6.5, 6.6 和 6.7 分别记 2 分, 最后说明保守场和环路积分的关系记 1 分. 注意, 非单连通区域无法用课本定理 11.16, 只能通过证明环路积分为 0, 或积分与路径无关来证明其为非保守场.

第七题 (15 分)

证明反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+4x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 并求其值.

解: 设 $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ (\alpha>0)$. 因为 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\sqrt{x}}=0$, 所以存在常数 $C>0$ 使得

$$0<\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}<C\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}. \tag{7.1}$$

由 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 结合比较判别法可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 记 $f(x,\alpha)=\dfrac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}$. 则对于 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$, 有

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right|=\left|\frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)}\right|\leqslant\frac{2}{\alpha_0(1+x^2)}, \tag{7.2}$$

由此可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha_0,+\infty)$ 上一致收敛. 于是

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)}\mathrm{d}x,\quad \alpha>0. \tag{7.3}$$

对于 $\alpha>0$ 且 $\alpha\neq 1$ 有

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)}\mathrm{d}x=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\alpha^2x^2}\right)\mathrm{d}x \tag{7.4}$$

$$=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\alpha^2x^2}\,\mathrm{d}x\right)=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{1+\alpha}. \tag{7.5}$$

易验证, 对 $\alpha=1$ 也有 $I'(\alpha)=\dfrac{\pi}{1+\alpha}$. 由于 $I(0)=0$, 故

$$I(\alpha)=\pi\ln(1+\alpha),\quad \alpha\geqslant 0. \tag{7.6}$$

于是所求反常积分的值为 $\pi\ln 3$. □

评卷人: 余启帆助教;

评分细则: 证明 $I(\alpha)$ 在 $\alpha>0$ 上收敛得 6 分 (其中 0 处的讨论得 2 分, $+\infty$ 处的讨论得 4 分), 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha_0,+\infty)$ 上一致收敛得 3 分, 计算 $I'(\alpha)$ 及最终结果得 6 分 (其中式 7.5 记 4 分, 式 7.6 及代入 $\alpha=2$ 计算记 2 分), 合计 15 分.

第八题 (8 分)

设函数 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上有二阶连续偏导数, 并且对任意点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 及任意正数 $r>0$ 有

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=f(P_0) \tag{8.1}$$

其中 S 是以 P_0 为球心, r 为半径的球面. 求证: f 满足 Laplace 方程

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0. \tag{8.2}$$

证明: 对任意 $r>0$ 取球面 S 的参数方程为

$$x=x_0+r\sin\theta\cos\varphi,\ y=y_0+r\sin\theta\sin\varphi,\ z=z_0+r\cos\theta, \tag{8.3}$$

其中 $(\theta,\varphi)\in D:=[0,\pi]\times[0,2\pi]$. 记 $P:=(x_0+r\sin\theta\cos\varphi, y_0+r\sin\theta\sin\varphi, z_0+r\cos\theta)$, 根据题目条件 (平均值定理) 有

$$\iint_D f(P)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=4\pi f(P_0). \tag{8.4}$$

这是含参变量 r 的积分. 关于变量 r 求导, 得

$$\iint_D\left[\sin\theta\cos\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(P)+\sin\theta\sin\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(P)+\cos\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(P)\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=0. \tag{8.5}$$

这等价于

$$\iint_S\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0. \tag{8.6}$$

因为 f 有连续的二阶偏导数, 所以根据 Gauss 公式得

$$\iiint_V \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0, \tag{8.7}$$

其中 V 是 S 围成的球体. 根据积分中值定理, 存在 $P_\xi \in V$ 使得

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)(P_\xi)=0. \tag{8.8}$$

令 $r \to 0^+$, 即得

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)(P_0)=0. \tag{8.9}$$

由于 P_0 是任意的, 故

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0. \tag{8.10}$$

□

评卷人: 汪珑庭老师;

评分细则: 未知, 可参考课堂笔记.