

§3.4 未定式的极限

3.4.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式

定理 1 ($\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 附近可微, $g'(x) \neq 0$, 且满足

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, 那么有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, 这里 l 可以是一个有限实数, 也可以是 ∞ .

证明 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, 而且当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限与函数 f 和 g 在 x_0 的值无关, 因此我们不妨假设 $f(x_0) = g(x_0) = 0$, 这样, 函数 f 和 g 在 x_0 都连续.

设 x 是区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中的任意一点 ($x \neq x_0$), 在以 x 和 x_0 为

端点的闭区间上, f 和 g 满足 Cauchy 中值定理的一切条件, 于是存在介于 x 和 x_0 之间的一点 ξ , 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

因为 $|\xi - x_0| < |x - x_0|$, 所以当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\xi \rightarrow x_0$. 由定理的假设, 即得到

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = l.$$

端点的闭区间上, f 和 g 满足 Cauchy 中值定理的一切条件, 于是存在介于 x 和 x_0 之间的一点 ξ , 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

因为 $|\xi - x_0| < |x - x_0|$, 所以当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\xi \rightarrow x_0$. 由定理的假设, 即得到

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = l.$$

注1: 定理中的极限过程可改为单测极限 (即 $x \rightarrow x_0 \pm 0$), 此时结论同样成立, 另一方面对于极限过程 $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 也有类似的 L'Hospital 法则.

以 $x \rightarrow \infty$ 时为例, 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

证明的过程中只要设 $y = \frac{1}{x}$, 则 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$, 而且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{y^2}f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y^2}g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

证明的过程中只要设 $y = \frac{1}{x}$, 则 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$, 而且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{y^2}f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y^2}g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

注2: 在使用 L'Hospital 法则时, 如果 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 还是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 即不但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, 而且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g'(x) = 0$, 则可以继续考虑二阶导数, 如果 $\lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)} = l$, 则 $\lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = l$. 不管使用几次, 前提条件一是前者必须是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 二是后者的极限一定存在, 两者缺一不可.

证明的过程中只要设 $y = \frac{1}{x}$, 则 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$, 而且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{y^2}f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y^2}g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

注2: 在使用 L'Hospital 法则时, 如果 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 还是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 即不但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, 而且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g'(x) = 0$, 则可以继续考虑二阶导数, 如果 $\lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)} = l$, 则 $\lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = l$. 不管使用几次, 前提条件一是前者必须是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 二是后者的极限一定存在, 两者缺一不可.

注3: 在使用 L'Hospital 法则之前, 最好先用等价无穷小替换的方法将分子或分母换成简单的函数.

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)}.$

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)}$.

解 这是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 由 L'Hospital 法则知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2e^{2x} = 2$$

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)}.$

解 这是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 由 L'Hospital 法则知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2e^{2x} = 2$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}.$

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)}.$

解 这是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 由 L'Hospital 法则知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2e^{2x} = 2$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}.$

解 这是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式. 但分子分母各自求导后的比式

$$\frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(\sin^2 x)'} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}$$

仍然是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 因此需要再次使用 L'Hospital 法则, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2 \cos 2x} = 1.$$

3.4.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 2 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 附近可微, $g'(x) \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, 这里 l 可以是一个有限实数, 也可以是 ∞ .

3.4.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 2 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 附近可微, $g'(x) \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, 这里 l 可以是一个有限实数, 也可以是 ∞ .

证明 只对 l 为实数的情况证明, $l = +\infty$ 或 $l = -\infty$ 的情况类似. 由 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, 知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$ 时, 有

$$l - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \varepsilon.$$

由 Cauchy 中值定理, 对于 $(x, c) \subset (x_0, x_0 + \delta_1)$, 存在 $\xi \in (x, c)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

因此,

$$l - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} < l + \varepsilon.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, 对于固定的 c , 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, 有 $\left| \frac{g(c)}{g(x)} \right| < \varepsilon$, $\left| \frac{f(c)}{g(x)} \right| < \varepsilon$. 于是, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} \cdot \frac{g(c)}{g(x)} + \frac{f(c)}{g(x)} \\ &< l + \varepsilon + (|l| + \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon; \end{aligned}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} > l - \varepsilon - (|l| + \varepsilon)\varepsilon - \varepsilon.$$

因此,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < (2 + |l| + \varepsilon)\varepsilon.$$

由此证明了 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. 同理, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. 证毕.

证明二 由 Daboux 定理, 在 x_0 的一个右邻域 $I_1 = (x_0, x_0 + \delta)$ 内, $g'(x)$ 不变号, 因此 $g(x)$ 在此邻域内严格单调. 设 x_n 是 I_1 内严格递减趋于 x_0 的数列, 根据 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi_n \in (x_{n+1}, x_n)$ 使得

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

因为 $\{g(x_n)\}$ 严格单调趋于 ∞ , 且 $\{\xi_n\}$ 也随 $\{x_n\}$ 从 x_0 右端趋于 x_0 , 根据 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = l.$$

注意到数列 $\{x_n\}$ 的任意性, 可知

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

注 $\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则也可以用类似地方法证明.

L'Hospital 法则与 Stolz 定理的比较

($\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上可微, $g'(x) \neq 0$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都趋于 0,

$$\text{如果 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \text{ 那么有 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A,$$

这里 A 可以是一个有限实数, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

($\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个趋于零的数列, 且 $\{b_n\}$ 严格单调递增.

$$\text{如果 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A, \text{ 那么有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A,$$

其中 A 可以是实数, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

($\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上可微, $g'(x) \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$.

如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, 那么有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$,

这里 A 可以是一个有限实数, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

($\frac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 定理) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个数列, 且 $\{b_n\}$ 严格单调递增趋于 $+\infty$.

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A$, 那么有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$,

其中 A 可以是实数, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

例 3 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} f'(x) = 0$. 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} f(x) = 0.$$

例 3 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} f'(x) = 0$. 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} f(x) = 0.$$

证明 根据 L'Hospital 法则, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) e^{-x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{2xe^{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} \cdot f'(x) e^{-x^2} = 0.\end{aligned}$$

例 3 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} f'(x) = 0$. 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} f(x) = 0.$$

证明 根据 L'Hospital 法则, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) e^{-x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{2xe^{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} \cdot f'(x) e^{-x^2} = 0.\end{aligned}$$

再根据 L'Hospital 法则, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f(x)}{e^{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x f'(x)}{2xe^{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2x} \cdot f(x) e^{-x^2} + \frac{1}{2} f'(x) e^{-x^2} \right) = 0.\end{aligned}$$

例 4 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + xf'(x) \ln x) = l$.

求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

例 4 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + xf'(x) \ln x) = l$.

求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \ln x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x) \ln x + f(x) \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + xf'(x) \ln x) = l$.

例 4 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + xf'(x) \ln x) = l$.

求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \ln x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x) \ln x + f(x) \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + xf'(x) \ln x) = l$.

例 5 设 $\alpha > 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$.

例 4 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + xf'(x) \ln x) = l$.

求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \ln x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x) \ln x + f(x) \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + xf'(x) \ln x) = l$.

例 5 设 $\alpha > 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$.

解 这是一个 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

如果用 $\frac{1}{x}$ 代替 x , 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$.

例 4 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + xf'(x) \ln x) = l$.

求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \ln x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x) \ln x + f(x) \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + xf'(x) \ln x) = l$.

例 5 设 $\alpha > 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$.

解 这是一个 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

如果用 $\frac{1}{x}$ 代替 x , 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$.

这个例子说明无论 α 是多小的正数, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 幂函数 x^α 总是比对数函数更高阶的无穷大量.

例 6 设 $\mu > 0$, $a > 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x}$.

例 6 设 $\mu > 0$, $a > 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x}$.

解 注意到, 只要 $\mu - k > 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 本题的分子部分 k 次导函数仍是无穷大量, 而分母部分的任意阶导函数都是无穷大量. 因此取正整数 $n > \mu$. 则当 $x > 1$ 时有

$$0 < \frac{x^\mu}{a^x} < \frac{x^n}{a^x}.$$

接连使用 n 次 L'Hospital 法则就有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^x (\ln a)^n} = 0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x} = 0.$$

例 6 设 $\mu > 0$, $a > 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x}$.

解 注意到, 只要 $\mu - k > 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 本题的分子部分 k 次导函数仍是无穷大量, 而分母部分的任意阶导函数都是无穷大量. 因此取正整数 $n > \mu$. 则当 $x > 1$ 时有

$$0 < \frac{x^\mu}{a^x} < \frac{x^n}{a^x}.$$

接连使用 n 次 L'Hospital 法则就有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^x (\ln a)^n} = 0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x} = 0.$$

此例说明, $a > 1$ 时, 有 $a^x \gg x^\mu$ ($x \rightarrow +\infty$).

例 7 设 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上有二阶连续导数, $f'(0) = 1$, $f''(0) \neq 0$, 且 $0 < f(x) < x$, $x \in (0, a)$. 令

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_1 \in (0, a).$$

(i) 求证 $\{x_n\}$ 收敛并求极限;

(ii) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 则说明理由. 若收敛, 则求其极限.

证明 (i) 由条件有 $0 < x_2 = f(x_1) < x_1$, 归纳地可证得

$$0 < x_{n+1} < x_n,$$

于是 $\{x_n\}$ 有极限, 设为 x_0 . 由 f 的连续性, 及 $x_{n+1} = f(x_n)$ 得

$$x_0 = f(x_0).$$

又因为当 $x > 0$ 时, $f(x) > x$, 所以只有 $x_0 = 0$. 即,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

(ii) 由 Stolz 定理和 L'Hospital 法则,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1/x_n}$$

(ii) 由 Stolz 定理和 L'Hospital 法则,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1/x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x_{n+1} - 1/x_n}$$

(ii) 由 Stolz 定理和 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1/x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x_{n+1} - 1/x_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_n - x_{n+1}}\end{aligned}$$

(ii) 由 Stolz 定理和 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1/x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x_{n+1} - 1/x_n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_n - x_{n+1}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n f(x_n)}{x_n - f(x_n)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{x - f(x)}\end{aligned}$$

(ii) 由 Stolz 定理和 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1/x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x_{n+1} - 1/x_n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_n - x_{n+1}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n f(x_n)}{x_n - f(x_n)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{x - f(x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + xf'(x)}{1 - f'(x)}\end{aligned}$$

(ii) 由 Stolz 定理和 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1/x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x_{n+1} - 1/x_n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_n - x_{n+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n f(x_n)}{x_n - f(x_n)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{x - f(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + xf'(x)}{1 - f'(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x) + xf''(x)}{-f''(x)}
 \end{aligned}$$

(ii) 由 Stolz 定理和 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1/x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x_{n+1} - 1/x_n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_n - x_{n+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n f(x_n)}{x_n - f(x_n)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{x - f(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + xf'(x)}{1 - f'(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x) + xf''(x)}{-f''(x)} \\
 &= -\frac{2}{f''(0)}
 \end{aligned}$$

3.4.3 其他类型的未定式

除了前面重点介绍的 $\frac{0}{0}$ 型未定式和 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式之外, 还有下列几种未定式

$$0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

前两种均容易化成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型; 而后三种可通过现对函数取对数, 再化为基本的 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 因此上述五类未定式, 都可以用 L'Hospital 法则处理.

3.4.3 其他类型的未定式

除了前面重点介绍的 $\frac{0}{0}$ 型未定式和 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式之外, 还有下列几种未定式

$$0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

前两种均容易化成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型; 而后三种可通过现对函数取对数, 再化为基本的 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 因此上述五类未定式, 都可以用 L'Hospital 法则处理.

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$.

3.4.3 其他类型的未定式

除了前面重点介绍的 $\frac{0}{0}$ 型未定式和 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式之外, 还有下列几种未定式

$$0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

前两种均容易化成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型; 而后三种可通过现对函数取对数, 再化为基本的 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 因此上述五类未定式, 都可以用 L'Hospital 法则处理.

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$.

解 这是一个 $0 \cdot \infty$ 型未定式, 可将它化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式处理

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x^{-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.\end{aligned}$$

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x} \right)$.

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x} \right)$.

解 这是一个 $\infty - \infty$ 型未定式. 令 $y = x - 1$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时有 $y \rightarrow 0$. 原式可化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式. 在处理过程中, 可以用同阶的无穷小量进行替代, 如 $\ln(1+y) \sim y$, $y \rightarrow 0$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \ln(1+y)}{y \ln(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \ln(1+y)}{y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+y}}{2y} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x} \right).$

解 这是一个 $\infty - \infty$ 型未定式. 令 $y = x - 1$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时有 $y \rightarrow 0$. 原式可化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式. 在处理过程中, 可以用同阶的无穷小量进行替代, 如 $\ln(1+y) \sim y$, $y \rightarrow 0$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \ln(1+y)}{y \ln(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \ln(1+y)}{y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+y}}{2y} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 10 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x} \right)$.

解 这是一个 $\infty - \infty$ 型未定式. 令 $y = x - 1$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时有 $y \rightarrow 0$. 原式可化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式. 在处理过程中, 可以用同阶的无穷小量进行替代, 如 $\ln(1+y) \sim y$, $y \rightarrow 0$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \ln(1+y)}{y \ln(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \ln(1+y)}{y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+y}}{2y} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 10 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

解 这是 0^0 型未定式, 由例 5 以及指数函数的连续性得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^0 = 1$$

例 11 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

例 11 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 这是 1^∞ 型未定式, 令

$$y = y(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}},$$

则

$$\ln y = \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2}$$

这是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{2x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{6x^2} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

例 12 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$

例 12 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

解 这是 ∞^0 型未定式, 记 $y = y(x) = x^{1/\sqrt{x}}$, 则 $\ln y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 由例 5 可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln y} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y} = e^0 = 1.$$

例 12 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$

解 这是 ∞^0 型未定式, 记 $y = y(x) = x^{1/\sqrt{x}}$, 则 $\ln y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 由例 5 可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln y} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y} = e^0 = 1.$$

例 13 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x}.$

例 12 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

解 这是 ∞^0 型未定式, 记 $y = y(x) = x^{1/\sqrt{x}}$, 则 $\ln y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 由例 5 可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln y} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y} = e^0 = 1.$$

例 13 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x}$.

解 这是 0^0 型未定式

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\tan x \ln(1 - \cos x)}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \tan x \ln(1 - \cos x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(1 - \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^{-2}(\cos x - 1)} = 0. \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x} = 1.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x} = 1.$$

例 14 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\arctan x - \frac{\pi}{2}}$.

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x} = 1.$$

例 14 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\arctan x - \frac{\pi}{2}}$.

解 这是 ∞^0 型未定式

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\arctan x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(\arctan x - \frac{\pi}{2}) \ln x}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) \ln x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\ln x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\arctan x - \frac{\pi}{2}} = 1.$$

例 15 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right)$.

例 15 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right)$.

解 这是 $\infty - \infty$ 型未定式

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3 \cos x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} \\&= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

- 是否存在可导函数 $f(x)$ 使得 $f'(x) = \operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R}$.

1. 是否存在可导函数 $f(x)$ 使得 $f'(x) = \operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R}$.
2. 若 $f(x)$ 在区间上严格递增且可导, 则 $f'(x) > 0$.

1. 是否存在可导函数 $f(x)$ 使得 $f'(x) = \operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R}$.
2. 若 $f(x)$ 在区间上严格递增且可导, 则 $f'(x) > 0$.
3. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 则 $f'(x)$ 的值域是一个区间.

1. 是否存在可导函数 $f(x)$ 使得 $f'(x) = \operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R}$.
2. 若 $f(x)$ 在区间上严格递增且可导, 则 $f'(x) > 0$.
3. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 则 $f'(x)$ 的值域是一个区间.
4. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导, $x_0 \in (a, b)$. 若 $f'(x)$ 在 x_0 左边为正, 在 x_0 的右边为负, 则 $f(x)$ 在 x_0 取最大值.