6.2.4 振动方程的解

(1) 简谐振动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \tag{6.1}$$

其中 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, 这里 k 表示弹性系数, m 是质点的质量. 要求出方程 (6.1) 的通解 $x = x(t)$ 的表达式. 此方程的特征方程为

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0.$$

它有两个复根 $\lambda = \pm \mathrm{i}\omega_0$. 因此 $x_1(t) = \cos\omega_0 t$, $x_2(t) = \sin\omega_0 t$ 是 (6.1) 的基本解组. 故, (6.1) 的通解为

$$x(t) = c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \sin\omega_0 t,$$

其中 c_1, c_2 是任意常数.

记 $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\neq 0$, 并取 φ 使得

$$\cos\varphi=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}},\ \sin\varphi=-\frac{c_c}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}.$$

于是上面的通解可表示为

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi). \tag{6.2}$$

这里 ω_0 表示角频率(圆频率), A 表示振幅, φ 表示初相位. 振幅与相位由振动的初值 $x(0)$ 和 $x'(0)$ 决定:

$$A=\frac{\sqrt{\omega_0^2x^2(0)+(x'(0))^2}}{\omega_0},\ \varphi=\arccos\frac{x(0)}{\sqrt{\omega_0^2x^2(0)+(x'(0))^2}}.$$

记 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$, 它是振动的周期, 只与角频率有关.

简谐运动是最基本也最简单的机械振动. 当某物体进行简谐运动时, 物体所受的力跟位移成正比, 并且总是指向平衡位置. 它是一种由自身系统性质决定的周期性运动.（如单摆运动和弹簧振子运动）实际上简谐振动就是正弦振动. 故此在无线电学中简谐信号实际上就是正弦信号.

(2) **阻尼振动方程**

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0, \tag{6.3}$$

这里 $\beta=\frac{\nu}{2m}$ 与阻尼系数 ν 成正比. (6.3) 的特征方程为

$$\lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2=0.$$

情形1°: $0<\beta<\omega_0$. 此时特征方程的根是一对共轭复数 $\lambda=-\beta\pm\mathrm{i}\omega$, 其中 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$. 于是 (6.3) 的通解是

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\beta t}(c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t),$$

c_1,c_2 是任意常数. 与简谐振动类似, 上面的通解也可以表示为

$$x(t)=A(t)\cos(\omega t+\varphi),$$

其中振幅 $A(t)=Ae^{-\beta}$, 按指数衰减, 振动的角频率为 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$.

情形2°: $\beta = \omega_0$. 这种情形称为“临界阻尼”. 此时特征方程有重根 $\lambda = -\beta < 0$. 相应的阻尼振动方程的通解为

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}(c_1 + c_2 t),\ (c_1, c_2\text{是任意常数}).$$

情形3°: $\beta > \omega_0$. 这种情形称为“过阻尼”. 此时特征方程的根是相异的负实数 $\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, $\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. 相应的阻尼振动方程的通解为

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t},\ c_1, c_2\ \text{是任意常数}.$$

对于阻尼振动, 由于振动系统受到摩擦和介质阻力或其他能耗而使振幅随时间逐渐衰减, 故, 又称减幅振动、衰减振动. 不论是弹簧振子还是单摆由于外界的摩擦和介质阻力总是存在, 在振动过程中要不断克服外界阻力做功, 消耗能量, 振幅就会逐渐减小, 经过一段时间, 振动就会完全停下来. 因为振幅与振动的能量有关, 阻尼振动也就是能量不断减少的振动. 阻尼振动是非简谐运动. 阻尼振动系统属于耗散系统.

(3) **受迫振动方程**

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=a\cos\omega t, \tag{6.4}$$

这是一类简单的受迫振动方程, $F(t)=a\cos\omega t$ 称为受迫力(也称策动力), ω 称为受迫力的频率. (6.4) 是一个非齐次二阶常系数线性微分方程, 对应的齐次方程的基本解组为 $\cos\omega_0 t, \sin\omega_0 t$.

当 $\omega\neq\omega_0$ 时, 可以假设 (6.4) 的一个特解为

$$x_0(t)=c\cos\omega t+d\sin\omega t,$$

其中 c,d 是待定常数. 将上式代入 (6.4) 得

$$-\omega^2c+\omega_0^2c=a,\ -\omega^2d+\omega_0^2d=0$$

因此, $c=\frac{a}{\omega_0^2-\omega^2}$, $d=0$. 此时, (6.4) 的通解为

$$x(t)=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t+\frac{a}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t,\ (c_1,c_2\text{ 是任意常数}).$$

如果考虑初值 $x(0)=x'(t)=0$, 那么对应的解为

$$x(t)=\frac{a}{\omega_0^2-\omega^2}(\cos\omega t-\cos\omega_0 t).$$

当受迫力的频率 ω 趋于固有频率 ω_0 时,

$$x(t)\to\tilde{x}(t)=\frac{at}{2\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

此时, 振幅 $\frac{at}{2\omega_0}$ 随时间增加而线性递增. 这就产生了共振现象.

当 $\omega=\omega_0$ 时, 也可以可得 (6.4) 的一个特解为

$$x_0(t)=\frac{at}{2\omega_0}\sin\omega_0 t,$$

此时, (6.4) 的通解为

$$x(t)=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t+\frac{at}{2\omega_0}\sin\omega_0 t,\ (c_1,c_2\text{ 是任意常数}).$$

如果考虑初值 $x(0)=x'(t)=0$, 那么对应的解仍为

$$x_0(t)=\frac{at}{2\omega_0}\sin\omega_0 t.$$