《线性代数 B1》定理整理

* 整理者：徐小航　　2021 春季学期

第三章 线性方程组

定义：对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij}称为第i个方程中第j个变量x_j的**系数**；b_i是第i个方程的**常数项**。若常数项都为 0，则称该方程组为**齐次线性方程组**，否则为**非齐次线性方程组**。如果解集非空，称该线性方程组是**相容**的，否则为**不相容**的。

3.1 高斯消元法

定义：以下三种是**初等变换**：

(1)　交换两个方程

(2)　某个方程乘一非 0 常数

(3)　把某个方程乘一非 0 常数加到另一个方程上

定理：初等变换把线性方程组变为同解线性方程组。

3.2 高斯消元法的矩阵表示

定义：对章前的线性方程组：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

称为该方程组的**增广矩阵**。**系数矩阵**是增广矩阵去掉最后一列。矩阵的三种**初等行变换**就是线性方程组三种初等变换的对应。

3.3 一般线性方程组的高斯消元法

定义：矩阵的**最简形式**（或称**标准形式**）为增广矩阵经高斯消元得到的准上三角阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1,j_2-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 & c_{rj_r} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理：当$d_{r+1} \neq 0$，原方程组无解；当$d_{r+1} = 0$且$r = n$，有唯一解；当$d_{r+1} = 0$且$r < n$，有多解。

定义：若方程组有解为$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (0,0,\cdots,0)$，则称之为**零解**或**平凡解**。反之称为**非平凡解**。

定理：齐次线性方程组有非零解$\Leftrightarrow r < n$

定理：$m < n \Rightarrow$齐次线性方程组有非零解

第四章 矩阵与行列式

4.1 矩阵的定义

定义：$m \times n$矩阵有m行n列；在第i行第j列的元素称为**第(i,j)元素**，记作a_{ij}

定义：对角元都是a，其他为 0 的矩阵称为**数量矩阵**

定义：**上三角矩阵**是所有$i > j$的$a_{ij} = 0$的矩阵；**下三角矩阵**是所有$i < j$的$a_{ij} = 0$的矩阵；统称**三角矩阵**

定义：数域F上的所有$m \times n$矩阵全体记为$F^{m\times n}$

4.2 矩阵的运算

定理：矩阵的加法和数乘满足以下八个性质：

(1) 加法交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$
(2) 加法结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$
(3) 存在零矩阵：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$
(4) 存在负矩阵：$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=(-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$
(5) 左分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$
(6) 右分配率：$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$
(7) 数乘结合率：$(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$
(8) 数乘单位元：$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

定义：**基本矩阵$\boldsymbol{E}_{ij}$**是只有$a_{ij}=1$，其他元素都是 0 的$m \times n$矩阵

定义：设$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，其中每个$x_i$都是$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$的齐次线性函数：

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots\cdots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots\cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots\cdots + a_{mn}y_n \end{cases}$$

上式确定的映射$\mathcal{A}: \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$称为**线性映射**。

定义：**正交方阵**是可以写成$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$或$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$形式的方阵$\boldsymbol{P}$

定义：**矩阵多项式**：$f(\boldsymbol{A})=c_0\boldsymbol{I}+c_1\boldsymbol{A}+c_2\boldsymbol{A}^2+\cdots\cdots+c_k\boldsymbol{A}^k$

定理：（逆矩阵的性质）对可逆矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$有：

（1） $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$

（2） $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

（3） $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

定理：（转置运算的性质）

（1） $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

（2） $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

（3） $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

（4） $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$

定理：（迹的性质）

（1） $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$

（2） $\mathrm{tr}(\lambda\boldsymbol{A})=\lambda\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$

（3） $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$；$\mathrm{tr}(\overline{\boldsymbol{A}})=\overline{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})}$

（4） $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$

定义：（分块矩阵）准上、下三角矩阵

定理：（分块矩阵运算性质）对分块矩阵$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{A}_{ij}\right)_{r\times s},\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{B}_{ij}\right)_{r\times s}$有$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{A}_{ij}+\boldsymbol{B}_{ij}\right)_{r\times s}$、$\lambda\,\boldsymbol{A}=\left(\lambda\boldsymbol{A}_{ij}\right)_{r\times s}$；对$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{A}_{ij}\right)_{r\times s},\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{B}_{ij}\right)_{s\times t}$有$\boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{s}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}$（与矩阵乘法相同）；$(\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r))^{-1}=\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{A}_1{}^{-1},\boldsymbol{A}_2{}^{-1},\cdots,\boldsymbol{A}_r{}^{-1}\right)$

4.3 行列式

定义：对方阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，**行列式**（记）为

$$\det\boldsymbol{A}=\left|\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\right|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{1i}M_{1i}$$

其中M_{ij}是$\boldsymbol{A}$删去第i行与第j列后余下矩阵的行列式。M_{ij}称为$\det\boldsymbol{A}$的元素a_{ij}的**余子式**，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素a_{ij}的**代数余子式**。

定理：行列式按任意一行或任意一列展开结果一样。

定理：（初等变换对行列式的影响）

（1） 交换方阵$\boldsymbol{A}$的两行，得到方阵$\boldsymbol{B}$满足$\det\boldsymbol{A}=-\det\boldsymbol{B}$

（2） 将方阵$\boldsymbol{A}$的一行乘λ，得到方阵$\boldsymbol{B}$满足$\det\boldsymbol{B}=\lambda\det\boldsymbol{A}$

（3） 若方阵$\boldsymbol{A}$的两行成比例，则$\det\boldsymbol{A}=0$

（4） 若方阵$\boldsymbol{A}$的一行是两个向量之和，则$\det\boldsymbol{A}$可拆为两该行为两向量的行列式之和

（5） 将方阵$\boldsymbol{A}$的一行乘λ加到另一行，得到方阵$\boldsymbol{B}$满足$\det\boldsymbol{B}=\det\boldsymbol{A}$

综上，行列式函数具有反对称性（1），多重线性（2），规范性（$\det(e_1,e_2,\cdots\cdots e_n)=1$）

定义：排列、自然排列、顺序排列、对换、逆序、逆序数、奇排列、偶排列

定理：对方阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$：

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{(j_1,j_2,\cdots\cdots j_n)\in S_n} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots\cdots a_{nj_n}$$

定理：准三角方阵$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{A}_{ij}\right)_{k\times k}$若对角块$\boldsymbol{A}_{ii}$都是方阵，则：

$$\det \boldsymbol{A} = \prod_{i=1}^{k} \det \boldsymbol{A}_{ii}$$

定理：$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

定理：$\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$

定理：$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \det \boldsymbol{A} \det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{BA}^{-1}\boldsymbol{C})$；特别，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$时，$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{BA})$

定义：$\boldsymbol{A}$的**伴随方阵**为：

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

定理：$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{AA}^* = \det \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I} \Longrightarrow \det \boldsymbol{A}^* = (\det \boldsymbol{A})^{n-1}$

定理：$(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^* \quad (\lambda\boldsymbol{A})^* = \lambda^{n-1}\boldsymbol{A}^*$

定理：$\boldsymbol{A}$可逆$\Leftrightarrow \det \boldsymbol{A} \neq 0$，且$\boldsymbol{A}^{-1} = (\det \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^*$

定理：（Vandermonde 行列式）

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & {a_1}^n \\ 1 & a_2 & \cdots & {a_2}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & {a_n}^n \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i)$$

定理：（Cramer 法则）对系数矩阵为$\boldsymbol{A}$的方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

有唯一解：

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$$

其中$\Delta = \det \boldsymbol{A}$，$\Delta_i$是把$\boldsymbol{A}$的第$i$列替换成$(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$得到的方阵。

定理：$\det(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}) = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}) \Longrightarrow \lambda^m \det(\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}) = \lambda^n \det(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB})$

4.4 初等变换

定义：初等行变换与初等列变换统称初等变换。初等方阵根据三种初等变换分别为：

$$\boldsymbol{S}_{ij}=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_i(\lambda)=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\lambda&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&\lambda&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}$$

定理：对矩阵做初等行变换，相当于在矩阵左边乘上一个相应初等方阵；对矩阵作初等列变换，相当于在矩阵的右边乘上一相应初等方阵。行左列右

定理：$\boldsymbol{A}$可逆$\Leftrightarrow$可以分解成一系列初等矩阵乘积（得出初等变换法求逆矩阵）

4.5 秩与相抵

定义：若存在可逆方阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$使$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}$，则称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$**相抵**。

定义：满足对称性、反身性、传递性的关系是**等价关系**

定义：相抵等价类

定理：对任意$\boldsymbol{A}$，存在可逆方阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$使$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，其中$r$由$\boldsymbol{A}$唯一决定，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$被称为**相抵标准形**。

定义：列满秩、行满秩；$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$（$r(\boldsymbol{A})$）

定理：可逆方阵秩等于阶数，相抵标准形为$\boldsymbol{I}$

定理：$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相抵$\Leftrightarrow \operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$

定理：$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

定理：$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$

定理（定义）：$\boldsymbol{A}$的非零子式的最大阶数等于$\boldsymbol{A}$的秩

定理：$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\le\min\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A},\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\}$

定理：初等变换不改变矩阵的秩

定理：$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*=\begin{cases}n,\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n\\1,\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-1\\0,\operatorname{rank}\boldsymbol{A}<n-1\end{cases}$

定理：$\max\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A},\operatorname{rank}\boldsymbol{B},\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\}\le\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B})\le\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$

定理：$m+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}=n+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AB})$

定理：（Frobenius 秩不等式）$\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}+\operatorname{rank}\boldsymbol{BC}-\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\le\operatorname{rank}\boldsymbol{ABC}$

第五章 线性空间

5.1 数组空间及其子空间

定义：线性组合、组合系数、线性表示
定义：子空间（任意加和与数乘后都还属于子空间）、生成子空间$\langle a,b,c\cdots\rangle$

5.2 线性相关与线性无关

定义：$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$中，若某个向量$\boldsymbol{a}_i$能被其他向量线性表示，则称这个向量组**线性相关**，否则为**线性无关**。
定理：$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$线性相关$\Leftrightarrow\exists\boldsymbol{a}_i$使$\langle\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m\rangle=\langle\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{i-1},\boldsymbol{a}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{a}_m\rangle\Leftrightarrow\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_m$使$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m=0$
定理：含零向量的向量组一定线性相关。
定理：对向量组$S_1\subset S_2$，有S_1线性相关$\Longrightarrow S_2$线性相关；S_2线性无关$\Longrightarrow S_1$线性无关

定理：对$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m\in F^n$，$m>n\Longrightarrow\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$线性相关；$m=n\Longrightarrow\big(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$线性相关$\Leftrightarrow\det(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=0\big)$

5.3 极大无关组与秩

定义：方程组的秩、极大无关组
定义：如果两向量组可以相互线性表示，则称两者**等价**，记作$\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}\sim\{\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_l\}$。等价满足反身性、传递性、对称性。
定理：$\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}\sim\{\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_l\}\Leftrightarrow\langle\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m\rangle=\langle\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_l\rangle$
定理：向量组与其任意一个极大无关组等价；极大无关组间相互等价。
定理：两个分别线性无关向量组若等价，则两向量组元素数相等。
定义：向量组的秩$\operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m),r(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$
定理：任意矩阵行秩、列秩、秩相等。

5.4 基与维数

定义：基、$\boldsymbol{a}$在基$\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}$下的坐标$(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$、维数$\dim V$（空间一组基的向量个数）、自然基
定义：若F^m内有两组基$\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m\},\{\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m\}$，其间关系有下式确定：

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = t_{11}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + t_{1m}\boldsymbol{a}_m \\ \boldsymbol{b}_2 = t_{21}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + t_{2m}\boldsymbol{a}_m \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{b}_m = t_{m1}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + t_{mm}\boldsymbol{a}_m \end{cases} \Rightarrow (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m) = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} = (t_{ij})_{m\times m}$$

称$\boldsymbol{T}$为从基$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$到$\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$的**过渡矩阵**。若某向量在$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$与$\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$的坐标分别为$\boldsymbol{X} = (x_1, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{Y} = (y_1, \cdots, y_m)^{\mathrm{T}}$，则从原坐标$\boldsymbol{X}$到新坐标$\boldsymbol{Y}$的坐标变换公式为$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{X}$。
定理：V为r维子空间，则V中任意$r+1$个向量线性相关；V为r维子空间，则V中任意r个线性无关向量是V的一组基；$U \subseteq V \Rightarrow \dim U \le \dim V$；$U \subseteq V, \dim U \le \dim V \Rightarrow U = V$。

5.5 线性方程组解集结构

定理：对线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，有解$\Leftrightarrow \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{b})$；有唯一解$\Leftrightarrow \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{b}) = n$
定理：对齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$，解空间为$V$，则$\dim V = n - \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$，$n$为行数。
定义：**基础解系**：解空间的一组基
定理：对齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$，解空间为$V$；对方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，解集为$W$，则$W = \gamma_0 + V$，$\gamma_0$是$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的一个特解。则通解为：$\boldsymbol{x} = t_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + t_m\boldsymbol{a}_m + \gamma_0$
注：坐标、向量都是竖的！

5.6 一般线性空间

定义：有定义加法、数乘，且满足线性八律的，则称V是F上的**线性空间**，V中元素称为**向量**。
定义：子空间、平凡子空间、线性组合、组合系数、线性表示、线性相关、秩、基、维、无限维线性空间、坐标、扩充基

第六章 线性变换

6.1 线性变换的定义和性质

定义：设V, V'是数域上的两个线性空间，若映射$\mathcal{A}: V \to V'$满足对$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, \lambda \in F$都有$\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y}), \mathcal{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$，则称$\mathcal{A}$为从$V$到$V'$的**线性映射**，如果$V = V'$，则称为$\mathcal{A}$为$V$上的一个**线性变换**。把每个向量映射为自身的变换称为**单位变换**或**恒等变换**；把每个向量都映射为零向量的变换为**零变换**。
定理：平面上的伸缩变换、旋转变换、反射变换、投射变换分别为：

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

定理：$\mathcal{A}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$；$\mathcal{A}(-\boldsymbol{x}) = -\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$；

$$\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_i)$$

；$\boldsymbol{\alpha}_i$线性相关$\Rightarrow \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_i)$线性相关。

6.1 线性变换的矩阵

定义：若$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$上的一组基，且满足：

$$\begin{cases}\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)=a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \qquad\qquad\vdots\\ \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)=a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n\end{cases}\Rightarrow(\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_n))=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$$

$\boldsymbol{A}$称为线性变换$\mathcal{A}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵。
定理：设线性变换$\mathcal{A}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{y}=\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标分别为$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$，则$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$。
定理：设线性变换$\mathcal{A}$在两组基$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的矩阵分别为$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，而$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵为$\boldsymbol{T}$，则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$。
定理：若对两个n阶方阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，存在一个可逆n阶方阵$\boldsymbol{T}$使得$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$，则称$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$**相似**，记作$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$。相似满足反身性、对称性、传递性。每个相互相似的最大矩阵集称为一个**相似类**，该类中每个元素称为一个**代表元**。相似不变量、相似标准形。

6.3 特征值与特征向量

定义：若对两个n阶方阵$\boldsymbol{A}$，有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，则称$\lambda$为$\boldsymbol{A}$的一个**特征值**，$\boldsymbol{x}$为$\boldsymbol{A}$的一个**特征向量**。
定义：线性变换的特征值、特征向量
定义：对线性变换$\mathcal{A}$的某个特征值λ，其特征向量构成的子空间叫**特征子空间**，记作$V_{\mathcal{A}}(\lambda)$。
步骤：（特征值的计算）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\Rightarrow(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=0$。$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$被称为**特征多项式**，解此方程即可得到所有特征值。由代数基本定理，n阶方阵有n个特征值。再针对每个解得的特征值解方程$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得到所有的特征向量$\boldsymbol{x}$。
定理：$\boldsymbol{A}^k$的特征值是λ^k；$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的特征值是$\lambda$；$\boldsymbol{A}^*$的特征值是$\lambda^{-1}\det\boldsymbol{A}$；正交方阵满足$|\lambda|=1$。
定理：相似矩阵有同样的特征多项式和特征值。
定理：

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,,\det\boldsymbol{A}=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

定理：n阶方阵可逆⟺所有特征值都不是 0
定义：线性变换的特征多项式、特征值、行列式、秩、迹

6.3 矩阵的相似对角化

定理：n阶方阵不同特征值的特征向量是线性无关的。
定理：n阶方阵相似于对角矩阵⟺该方阵有n个线性无关的特征向量。且对角化矩阵即该方阵的n个特征向量为列的方阵。
定理：n阶方阵的n个特征向量两两不同⟹该方阵相似于对角矩阵
定理：任意n阶复方阵都可以相似于一个上三角矩阵，且该上三角矩阵的主对角线元素都是该方阵的特征值。

第七章 欧几里得空间

7.1 欧氏空间的定义与基本性质

定义：设V是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间，若V中任意两向量$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$按照某一法则对应一个实数$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，且满足对称性（$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$）、线性性（$(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$）、正定性（$\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geq 0,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0\Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$），则称$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$为$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$的**内积**，$V$为$\mathbb{R}$上的**欧几里得（Euclid）空间**，简称**欧氏空间**。

定理：（Cauchy-Schwarz 不等式）$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leq\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}$

定义：长度、模、单位向量、单位化

7.2 内积的表示与标准正交基

定义：$\boldsymbol{G}=\left(g_{ij}\right)_{n\times n},g_{ij}=\left(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\right)$，则称$\boldsymbol{G}$为内积$(,)$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的**度量矩阵**。

定理：度量矩阵是实对称方阵，且满足$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}\geq 0,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}=0\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x}=0$。满足这两条的方阵都可称为**正定方阵**。

定义：正交向量组、正交基、标准正交基

定理：（Schmidt 正交化）从欧氏空间中的任意一组基出发，可构造一组标准正交基。

步骤：（Schmidt 正交化）在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下，先把$\boldsymbol{\alpha}_1$单位化，取$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{\alpha}_1/|\boldsymbol{\alpha}_1|$；$\boldsymbol{\alpha}_2$减去$\boldsymbol{\alpha}_2$在$\boldsymbol{e}_1$方向的投影得到向量与$\boldsymbol{\alpha}_1$垂直，故取$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{\beta}_2/|\boldsymbol{\beta}_2|$。以此类推：

$$\boldsymbol{\beta}_k=\boldsymbol{\alpha}_k-\sum_{i=1}^{k-1}(\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i\ ,\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{\beta}_k/|\boldsymbol{\beta}_k|$$

7.3 欧几里得空间里的线性变换

定义：保持内积不变的线性变换即**正交变换**，即$(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}),\mathcal{A}(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

定理：对线性变换$\mathcal{A}$，$\mathcal{A}$是正交变换当且仅当下列两个条件之一成立：①$\mathcal{A}$保持任意向量的模不变 ②$\mathcal{A}$将标准正交基变换为标准正交基

定义：**正交矩阵**是满足$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$的实方阵。

定理：$\mathcal{A}$是正交变换$\Leftrightarrow\mathcal{A}$在标准正交基下矩阵为正交矩阵

定理：单位变换是正交变换；两个正交变换的复合还是正交变换；正交变换可逆，其逆变换也是正交变换。

定义：若$\mathcal{A}$在一组基下的行列式为 1，则称为**第一类变换**；若为-1，称为**第二类变换**。

定理：正交变换的特征值模长都是 1；若V的维数是奇数且$\mathcal{A}$是第一类正交变换，则$\mathcal{A}$存在值为 1 的特征值。

定义：满足$(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\mathcal{A}(\boldsymbol{y}))$的$\mathcal{A}$称为$V$上的**对称变换**。

定理：$\mathcal{A}$是对称变换$\Leftrightarrow\mathcal{A}$在标准正交基下矩阵为实对称矩阵

定理：对于对称变换$\mathcal{A}$，其不同特征值对应特征向量相互正交；实对称矩阵属于不同特征值

的特征向量必正交。
定理：实对称矩阵的特征值都是实数
定理：对任意n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$，存在一个n阶正交矩阵$\boldsymbol{T}$使得$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$是对角矩阵。
步骤：（实对称方阵的对角化）对任意n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$，可以求得其n个相互正交的特征向量，这n个特征向量就是$\boldsymbol{T}$的n个列。

第八章 实二次型

8.1 二次型的矩阵表示

定义：**二次型**是一个齐次的二次多项式：

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n},\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{A}$称为二次型$Q(x_1,\cdots,x_n)$的**矩阵**，$\boldsymbol{A}$的秩称为**二次型的秩**。任何二次型的矩阵都可表示为对角矩阵。
定义：对实数域上两个n阶方阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，若存在一个可逆实矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，则称$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是**相合**的，$\boldsymbol{P}$为**相合变换矩阵**。相合关系是一种等价关系。

8.2 二次型的标准形

定理：给定实二次型$Q(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，存在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$将$Q(x_1,\cdots,x_n)$化为二次型$\tilde{Q}(y_1,\cdots,y_n)=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\,\boldsymbol{y}$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是$\boldsymbol{A}$的特征值，$\tilde{Q}(y_1,\cdots,y_n)$称为$Q(x_1,\cdots,x_n)$的**标准二次型**。此时$\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$。
步骤：（配平方法求标准形）将$Q(x_1,\cdots,x_n)$配方，每个配方构成相合变换矩阵的一行。对每个实二次型都可找到一个配方找到$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$使之化为标准二次型。
步骤：（初等变换法求标准形）作一个二行一列的分块矩阵，第一行为$\boldsymbol{A}$，第二行为$\boldsymbol{I}$，经过一系列初等变换（包括行列变换），将第一行变为对角矩阵，则第二行是相合变换矩阵。

8.3 相合不变量与分类

定理：设$\boldsymbol{A}$是一个n阶实对称矩阵，则存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使：

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & & \\ & -\boldsymbol{I}_s & \\ & & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r+s$$

此对角矩阵称为$\boldsymbol{A}$的**规范形**。
定理：（惯性定理）实二次型Q的规范形中正项数r与负项数s由Q唯一确定。
定义：r为**正惯性指数**，s为**负惯性指数**，$r-s$为**符号差**。

8.4 二次曲线与曲面分类

定义：给定平面二次曲线方程$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0$，可以找到一个二阶正交矩阵$\boldsymbol{P}$使$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$，有变换$(x,y)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}(x',y')^{\mathrm{T}}$，将原方程变为$\lambda_1{x'}^2+\lambda_2{y'}^2+2{b_1}'x'+2{b_2}'y'+\ c'=0$。做坐标轴平移后，$\tilde{x}=x'+{b_1}'/\lambda_1\,,\tilde{y}=y'+{b_2}'/\lambda_2$，则：

椭圆型（$\lambda_1\lambda_2>0$）为$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3=0$；**双曲型**（$\lambda_1\lambda_2<0$）为$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3=0$；**抛物型**（$\lambda_1,\lambda_2$一个为 0）为$\lambda_1\tilde{x}^2+2\widetilde{b_2}\,\tilde{y}+\ \tilde{c}=0$

定义：对二次曲面方程$\lambda_1{x'}^2+\lambda_2{y'}^2+\lambda_3{z'}^2+2{b_1}'x'+2{b_2}'y'+2{b_3}'z'+\ c'=0$，有以下几种曲面类型：**椭球面型**（$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$同号）$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3\tilde{z}^2+\lambda_4=0$；**双曲面型**（$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$非零不同号，$\lambda_4\neq 0$）$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3\tilde{z}^2+\lambda_4=0$；**抛物型**（$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$两个非零一个为 0）$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+2\widetilde{b_3}\,\tilde{z}=0$; **二次锥面** ($\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$非零不同号, $\lambda_4=0$) $\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3\tilde{z}^2=0$; **二次柱面**（$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$至少一个为 0）$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+2\widetilde{b_2}\,\tilde{y}+\ \tilde{c}=0$

8.5 正定二次型

定义：若对任意非零向量$\boldsymbol{x}$有$Q>0$，则称Q为**正定二次型**，$\boldsymbol{A}$为**正定矩阵**。记为$\boldsymbol{A}>0$。
定理：$\boldsymbol{A}$正定$\Leftrightarrow Q$的正惯性系数为$n\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$相合于单位矩阵。该定理构成正定二次型的另一种定义。
定理：若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$相合，则$\boldsymbol{A}>0\Leftrightarrow\ \boldsymbol{B}>0$
定理：$\boldsymbol{A}>0\Longrightarrow\det\boldsymbol{A}>0$
定理：$\boldsymbol{A}>0\Leftrightarrow\ \boldsymbol{A}$的各阶顺序主子式均大于 0，即：

$$a_{11},\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}>0$$

定义：（二次型的分类）**正定二次型**：$r=n$；**半正定二次型**：$s=0,r\leq n$，规范形为${y_1}^2+\cdots+{y_r}^2$，记为$\boldsymbol{A}\geq 0$，相合于$\mathrm{diag}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O})$；**负定二次型**：$s=n$，规范形为$-{y_1}^2-\cdots-{y_n}^2$，记为$\boldsymbol{A}<0$，相合于$-\boldsymbol{I}$；**半负定二次型**：$r=0,s\leq n$，规范形为$-{y_1}^2-\cdots-{y_r}^2$，记为$\boldsymbol{A}\leq 0$，相合于$\mathrm{diag}(-\boldsymbol{I}_s,\boldsymbol{O})$；除此之外都是**不定型**。对应有半正定矩阵、负定矩阵、半负定矩阵。正定二次型的结论可类推到半正定、负定、半负定二次型上。