

第十三章 动载荷(Dynamic loading)

§ 13-1 概述 (Instruction)

§ 13-2 动静法的应用

(The application for method of dynamic equilibrium)

§ 13-3 构件受冲击时的应力和变形

(Stress and deformation by impact loading)

§ 13-4 冲击韧性

§ 13-1 概述 (Instruction)

一、基本概念 (Basic concepts)

1、静荷载 (Static load)

荷载由零缓慢增长至最终值,然后保持不变.构件内各质点加速度很小,可略去不计.

2、动荷载 (Dynamic load)

荷载作用过程中随时间快速变化,或其本身不稳定(包括大小、方向),构件内各质点加速度较大.

二、动响应 (Dynamic response)

构件在动载荷作用下产生的各种响应(如应力、应变、位移等),称为动响应(dynamic response).

实验表明在静载荷下服从胡克定律的材料,只要应力不超过比例极限,在动载荷下胡克定律仍成立且 $E_{静}=E_{动}$.

三、动荷因数 (Dynamic factor)

$$\text{动荷因数 } K_d = \frac{\text{动响应}}{\text{静响应}}$$

四、动荷载的分类 (Classification of dynamic load)

1. 惯性力 (Inertia force)
2. 冲击荷载 (Impact load)
3. 振动问题 (Vibration problem)
4. 交变应力 (Alternate stress)

3. 振动问题 (Vibration problem)

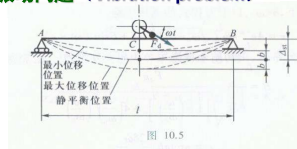


图 10.5

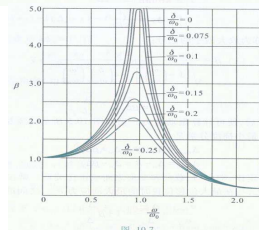


图 10.7

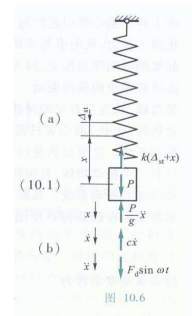


图 10.6

§ 10-2 动静法的应用

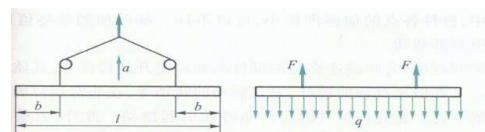
(The application for method of dynamic equilibrium)

达朗伯原理 (D'Alembert's Principle): 达朗伯原理认为处于不平衡状态的物体,存在惯性力,惯性力的方向与加速度方向相反,惯性力的数值等于加速度与质量的乘积.只要在物体上加上惯性力,就可以把动力学问题在形式上作为静力学问题来处理,这就是**动静法 (Method of kineto static)**.

$$F=ma \quad F+(-ma)=0$$

惯性力 (Inertia force): 大小等于质点的质量 m 与加速度 a 的乘积,方向与 a 的方向相反,即 $F=-ma$

一、直线运动构件的动应力 (Dynamic stress of the body in the straight-line motion)



$$q = A\rho g + A\rho a = A\rho g \left(1 + \frac{a}{g} \right)$$

$$F = \frac{1}{2}ql$$

$$M = F \left(\frac{l}{2} - b \right) - \frac{1}{2}q \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}A\rho g \left(1 + \frac{a}{g} \right) \left(\frac{l}{4} - b \right) l$$

相应的应力(一般称为动应力)为

$$\sigma_d = \frac{M}{W} = \frac{A\rho g}{2W} \left(1 + \frac{a}{g}\right) \left(\frac{l}{4} - b\right) l$$

当加速度 a 等于零时,由上式求得杆件在静载下的应力为

$$\sigma_s = \frac{A\rho g}{2W} \left(\frac{l}{4} - b\right) l$$

故动应力 σ_d 可以表示为

$$\sigma_d = \sigma_s \left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

括号中的因子可称为动荷因数,并记为

$$K_d = 1 + \frac{a}{g}$$

于是式(b)写成

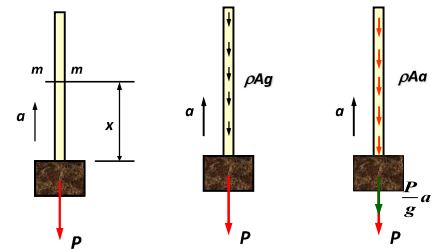
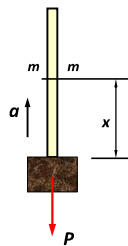
$$\sigma_d = K_d \sigma_s$$

这表明动应力等于静应力乘以动荷因数,强度条件可以写成

$$\sigma_d = K_d \sigma_s \leq [\sigma] \quad (e)$$

由于在动荷因数 K_d 中已经包含了动载的影响,所以 $[\sigma]$ 即为静载下的许用应力。

例题1 一起重机绳索以加速度 a 提升一重为 P 的物体,设绳索的横截面面积为 A , 绳索单位体积的质量 ρ ,求距绳索下端为 x 处的 m - m 截面上的应力。



绳索的重力集度为 ρAg

物体的惯性力为 $\frac{P}{g} a$

绳索每单位长度的惯性力 $\rho A a$

$$F_{Nst} = P + \rho Agx$$

$$F_{Nd} = \left(1 + \frac{a}{g}\right)(P + \rho Agx)$$

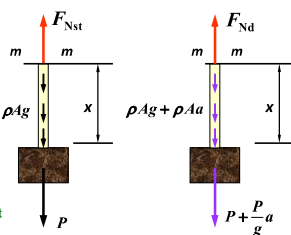
$$F_{Nd} = K_d F_{Nst}$$

绳索中的动应力为

$$\sigma_d = \frac{F_{Nd}}{A} = K_d \frac{F_{Nst}}{A} = K_d \sigma_{st}$$

σ_{st} 为静荷载下绳索中的静应力

强度条件为 $\sigma_d = K_d \sigma_{st} \leq [\sigma]$

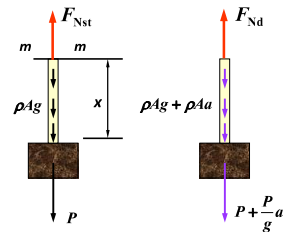


Δ_d 表示动变形

Δ_{st} 表示静变形

当材料中的应力不超过比例极限时荷载与变形成正比

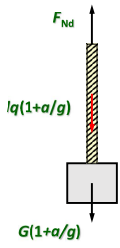
$$\Delta_d = K_d \Delta_{st}$$



结论: 只要将静载下的应力, 变形, 乘以动荷系数 K_d 即得动载下的应力与变形。

例題2 起重機鋼絲繩長60m, 名義直徑28cm, 有效橫截面面積 $A=2.9\text{cm}^2$, 單位長重量 $q=25.5\text{N/m}$, $[\sigma]=300\text{MPa}$, 以 $a=2\text{m/s}^2$ 的加速度提起重 50kN 的物體, 試校核鋼絲繩的強度。

解: (1) 受力分析如圖



$$F_{Nd} = (G + ql)\left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

(2) 動應力

$$\sigma_d = \frac{F_{Nd}}{A} = \frac{1}{A}(G + ql)\left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

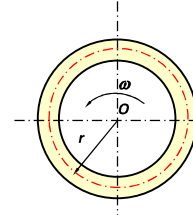
$$= \frac{1}{2.9 \times 10^{-4}}(50 \times 10^3 + 25.5 \times 60)\left(1 + \frac{2}{9.8}\right)$$

$$= 214\text{MPa} < [\sigma] = 300\text{MPa}$$

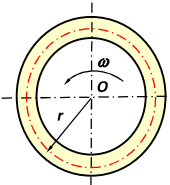
二、轉動構件的動應力

(Dynamic stress of the rotating member)

例題4 一平均直徑為 D 的薄圓環, 繞通過其圓心且垂直於環平面的軸作等速轉動。已知環的角速度為 ω , 環的橫截面面積為 A , 材料的單位體積質量為 ρ , 求圓環橫截面上的正應力。



解:



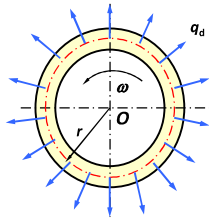
因圓環很薄, 可認為圓環上各點的向心加速度相同, 等於圓環中線上各點的向心加速度。

$$a_n = \frac{D}{2}\omega^2$$

因為環是等截面的, 所以相同長度的任一段質量相等。

其上的慣性力集度為

$$q_d = (1 \cdot A \cdot \rho)\left(\frac{D}{2}\omega^2\right) = \frac{A\rho\omega^2 D}{2}$$

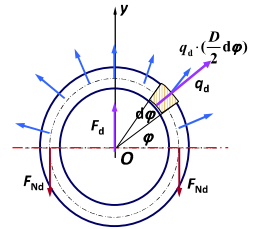


$$q_d = (1 \cdot A \cdot \rho)\left(\frac{D}{2}\omega^2\right) = \frac{A\rho\omega^2 D}{2}$$

$$F_d = \int_0^\pi q_d \left(\frac{D}{2} \cdot d\varphi\right) \cdot \sin\varphi$$

$$= \frac{A\rho\omega^2 D^2}{4} \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi$$

$$= \frac{A\rho\omega^2 D^2}{2}$$



$$F_{Nd} = \frac{F_d}{2} = \frac{A\rho\omega^2 D^2}{4} \quad \sigma_d = \frac{F_{Nd}}{A} = \frac{\rho\omega^2 D^2}{4}$$

$$\sigma_d = \frac{F_d}{A} = \frac{\rho\omega^2 D^2}{4}$$

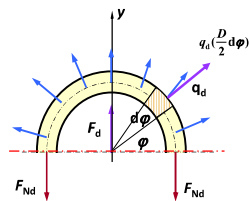
$$\frac{D\omega}{2} = v \quad \text{圓環軸線上點的線速度}$$

$$\sigma_d = \rho v^2$$

強度條件

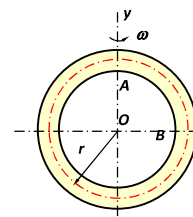
$$\sigma_d = \frac{\rho v^2}{g} \leq [\sigma]$$

環內應力與橫截面面積無關, 要保證強度, 應限制圓環的轉速。



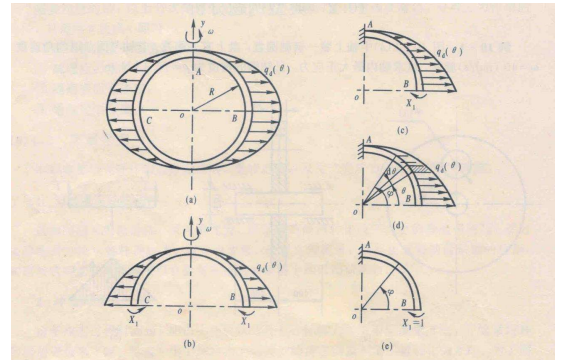
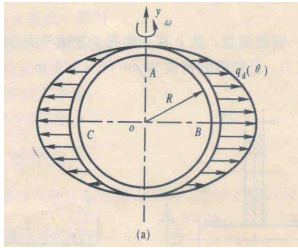
《輔導》p204

* 例 10-2 圖 10-3(a) 所示一半徑為 R 的圓環, 環繞在圓環平面內的 ay 軸以等角速度 ω 旋轉, 圓環比重為 γ , 橫截面面積為 A , 求圓環截面 A 和 B 的彎矩值。



解: (1) 圆环旋转时, 环所受的惯性力集度为(图 10-3(a))

$$q_d(\theta) = \frac{\gamma A}{g} R \cos\theta \cdot \omega^2 = \frac{\gamma A R \omega^2}{g} \cos\theta$$



解: (1) 圆环旋转时, 环所受的惯性力集度为(图 10-3(a))

$$q_d(\theta) = \frac{\gamma A}{g} R \cos\theta \cdot \omega^2 = \frac{\gamma A R \omega^2}{g} \cos\theta$$

在惯性力作用下, 圆环内力是静不定问题, 沿 B、C 截面截开, 由于结构与荷载对称, 故 B、C 截面上弯矩值均相等, 设为 X_1 , 其它内力均为零, 故为一次静不定, 如图 10-3(b) 所示。

为简便起见, 取 1/4 圆环为基本静定系统, 如图 10-3(c) 所示, 应用力法求解, 由于 B 截面转角为零, 于是有正则方程

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1r} = 0$$

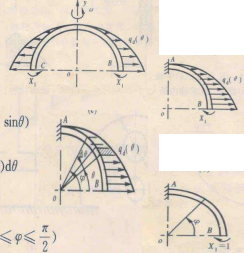
(2) 计算上式中的系数。

在惯性力作用下, 任意截面上(图 10-3(d))

$$\begin{aligned} dM(\varphi) &= -\frac{\gamma A}{g} R \cos\theta \omega^2 R d\theta R (\sin\varphi - \sin\theta) \\ &= -\frac{\gamma A \omega^2 R^3}{g} \cos\theta (\sin\varphi - \sin\theta) d\theta \end{aligned}$$

故截面上因惯性力产生的弯矩为

$$M(\varphi) = \int_0^\varphi dM(\varphi) = -\frac{\gamma A \omega^2 R^3}{2g} \sin^2\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$$



在 B 端加一单位力偶, 任意截面上的弯矩(图 10-3(c))

$$M(\varphi) = 1$$

于是

$$\delta_{11} = \int \frac{M^2(\varphi)}{EI} dS = \int_0^{\pi/2} \frac{R}{EI} d\varphi = \frac{\pi R}{2EI}$$

$$\Delta_{1r} = \int \frac{M(\varphi)M(\varphi)}{EI} dS = -\int_0^{\pi/2} \frac{\gamma A \omega^2 R^3}{2gEI} \sin^2\varphi \cdot R d\varphi = -\frac{\pi \gamma A \omega^2 R^4}{8gEI}$$

所以

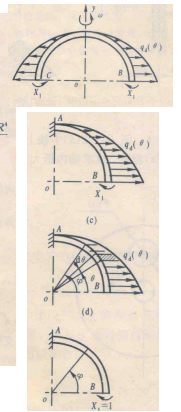
$$X_1 = -\frac{\Delta_{1r}}{\delta_{11}} = \frac{\gamma A \omega^2 R^3}{4g}$$

(3) A、B 截面弯矩。
B 截面弯矩为

$$M_B = X_1 = \frac{\gamma A \omega^2 R^3}{4g} \quad (\text{外侧受拉})$$

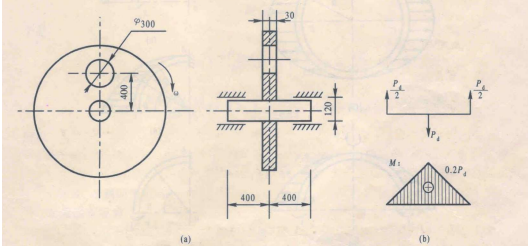
A 截面弯矩为 ($\varphi = \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{\gamma A \omega^2 R^3}{2g} \sin^2 \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma A \omega^2 R^3}{4g} \\ &= \frac{\gamma A \omega^2 R^3}{4g} \quad (\text{内侧受拉}) \end{aligned}$$



《辅导》p203

例 10-1 图 10-2(a) 中轴上装一钢制圆盘, 盘上有一圆孔。若轴与圆盘以匀角速度 $\omega = 40$ (rad/s) 旋转, 试求轴内最大正应力。已知钢的密度为 $\rho = 76.4$ kN/m³。



解: 圆盘结构上的不对称性是引起轴内弯曲正应力的唯一原因。图示圆盘在当前位置上, 这种情况与一个单独由圆孔尺寸构成的均质小圆盘作用于轴线下方相应于图示小圆孔的对称位置上是完全等价的。

引起轴弯曲的惯性力等于小圆盘的质量、旋转半径和角速度平方的乘积, 即

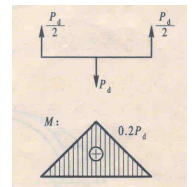
$$P_d = m \omega^2 r = \frac{\pi}{4} \times 0.3^2 \times 0.03 \times \frac{76.4}{9.8} \times 10^3 \times 0.4 \times 40^2 = 10.58 \text{ kN}$$

由图 10-2(b) 可见, 轴上的最大弯矩

$$M_{\max} = \frac{1}{2} P_d \cdot 0.4 = 2.12 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

轴上最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{2.12 \times 10^3}{32 \times 0.12^3} = 12.5 \text{ MPa}$$



例 10.1 在 AB 轴的 B 端有一个质量很大的飞轮(图 10.3)。与飞轮相比,轴的质量可以忽略不计。轴的另一端 A 装有刹车离合器。飞轮的转速为 $n = 100 \text{ r/min}$, 转动惯量为 $I_0 = 0.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$ 。轴的直径 $d = 100 \text{ mm}$ 。刹车时使轴在 10 s 内均匀减速至停止转动。求轴内的最大动切应力。

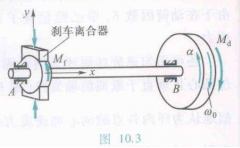


图 10.3

解: 飞轮与轴的转动角速度为

$$\omega_0 = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{10\pi}{3} \text{ rad/s}$$

当飞轮与轴同时作匀减速转动时, 其角加速度为

$$\alpha = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t} = \frac{0 - \frac{10\pi}{3}}{10} = -\frac{\pi}{3} \text{ rad/s}^2$$

等号右边的负号只是表示 α 与 ω_0 的方向相反(如图 10.3 所示)。按动量矩定理, 飞轮上加上方向与 α 相反的惯性力偶矩 M_i , 且

$$M_i = -I_0 \alpha = -(0.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2) \left(-\frac{\pi}{3} \text{ rad/s}^2\right) = \frac{0.5\pi}{3} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

设作用于轴上的摩擦力矩为 M_f , 由平衡方程 $\sum M_i = 0$, 求出

$$M_f = M_i = \frac{0.5\pi}{3} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

AB 轴由于摩擦力矩 M_f 和惯性力偶矩 M_i 引起扭转变形, 横截面上的扭矩为

$$T = M_f = \frac{0.5\pi}{3} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

横截面上的最大扭转切应力为

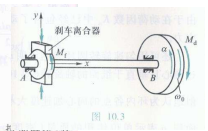
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{0.5\pi \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{\frac{\pi}{16} \times (100 \times 10^{-3} \text{ m})^3} = 2.67 \times 10^8 \text{ Pa} = 2.67 \text{ MPa}$$


图 10.3

例题 5 重为 G 的球装在长 L 的转臂端部, 以等角速度在光滑水平面上绕 O 点旋转, 已知许用应力 $[\sigma]$, 求转臂的截面面积(不计转臂自重)

解:

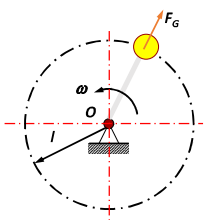
(1) 受力分析如图

惯性力为

$$F_G = ma_n = \omega^2 Rm = \omega^2 IG/g$$

(2) 强度条件

$$\sigma = F_G / A \leq [\sigma]$$

$$A \geq \frac{F_G}{[\sigma]} = \frac{\omega^2 GI}{g[\sigma]}$$


例题 6 轮机叶片在工作时通常要发生拉伸, 扭转和弯曲的组合变形。本题只计算在匀速转动时叶片的拉伸应力和轴向变形。设叶片可近似地简化为变截面直杆, 且横截面积沿轴线按线性规律变化。叶根的横截面积 A_0 为叶顶的横截面积 A_1 的两倍, 即 $A_0 = 2A_1$ 。令叶根和叶顶的半径分别为 R_0 和 R_1 。转速为 ω , 材料单位体积的质量为 ρ 。试求叶片根部的应力和总伸长。

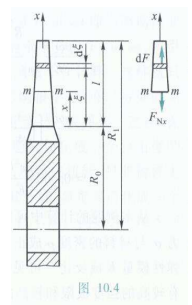


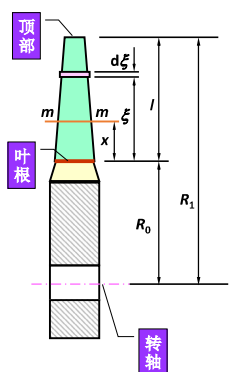
图 10.4

解: 设距叶根为 x 的横截面 $m-m$ 的面积为 $A(x)$

$$A(x) = A_0 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{l}\right)$$

在距叶根为 ξ 处取长为 $d\xi$ 的微元, 其质量应

$$dm = \rho A(\xi) d\xi$$



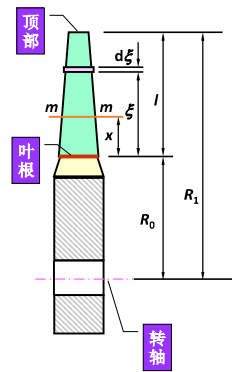
在距叶根为 ξ 处的向心加速度为

$$a_n = \omega^2 (R_0 + \xi)$$

dm 的惯性力应为

$$dF = \omega^2 (R_0 + \xi) \cdot dm$$

$$= \rho \omega^2 (R_0 + \xi) A(\xi) d\xi$$



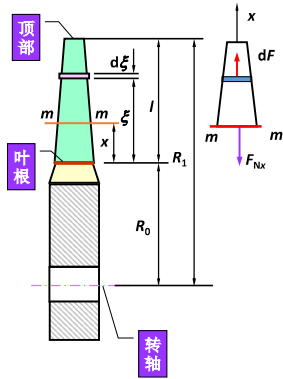
m - m 以上部分的惯性力为

$$F = \int dF$$

$$= \int_x^l \rho \omega^2 (R_0 + \xi) A(\xi) d\xi$$

m - m 截面上的轴力 F_{Nx} 等于 F

$$F_{Nx} = \int_x^l \rho \omega^2 (R_0 + \xi) A(\xi) d\xi$$



最大的惯性力发生在叶根截面上

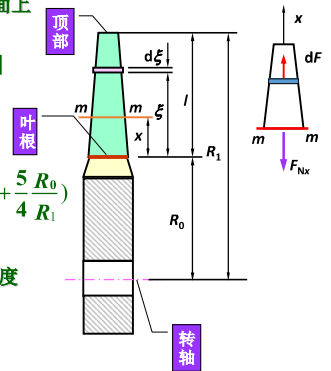
$$F_{Nmax} = \rho \omega^2 A_0 \left[\frac{l^2}{3} + \frac{3}{4} R_0 l \right]$$

在叶根截面上的拉应力为

$$\sigma = \frac{F_{Nmax}}{A_0} = \frac{\rho v^2}{3g} \left(1 - \frac{R_0}{R_1} \right) \left(1 + \frac{5}{4} \frac{R_0}{R_1} \right)$$

式中 $v = R_1 \omega$ 为叶顶的线速度

$$l = R_1 - R_0$$



在距叶根为 x 处取 dx 一段

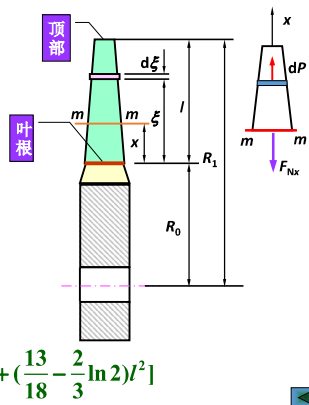
其伸长应为

$$d(\Delta l) = \frac{F_{Nx} dx}{EA(x)}$$

叶片的总伸长为

$$\Delta l = \int_0^l \frac{F_{Nx}}{EA(x)} dx$$

$$= \frac{\rho \omega^2 l}{E} \left[\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) R_0 l + \left(\frac{13}{18} - \frac{2}{3} \ln 2 \right) l^2 \right]$$



从本例题的计算中可以发现,汽轮机叶片旋转过程中,叶根横截面上的拉应力 σ 与材料的密度 ρ 成正比。叶片的总伸长 Δl 也与材料的密度 ρ 成正比,且与弹性模量 E 成反比。可见,叶片旋转时要满足强度和刚度的要求,除了材料应有较高的强度极限和较高的弹性模量外,还应有较低的密度。材料的这种综合力学性能可用比强度和比模量来衡量。比强度定义为材料的强度极限除以材料的重度;比模量定义为材料的弹性模量除以材料的重度。比强度和比模量大的材料,说明在质量相当的情况下有更高的承载能力和更大的刚度。即满足轻质、高强的特点。在机械的高速旋转部件、飞机和航天器中,需要采用比强度和比模量大的材料。纤维增强复合材料有较大的比强度和比模量,因此在军用和民用飞机中被广泛应用。几种材料的比强度和比模量的值已列入表 10.1 中。

§ 10-3 构件受冲击时的应力和变形 (Stress and deformation by impact loading)

原理 (Principle) 能量法 (Energy method)

当运动着的物体碰撞到一静止的构件时,前者的运动将受阻而在短时间停止运动,这时构件就受到了冲击作用。

在冲击过程中,运动中的物体称为冲击物 (impacting body)

阻止冲击物运动的构件,称为被冲击物 (impacted body)

表 10.1 几种材料的比强度和比模量

材料名称	密度 /(10^3 kg/m^3)	抗拉强度 /MPa	弹性模量 /GPa	比强度 /(10^3 m)	比模量 /(10^6 m)
高强度钢	7.85	1340	206	17.42	2.68
铝合金	2.80	480	70	17.49	2.55
玻璃纤维	2.55	2500	75	100.04	3.00
碳纤维	1.75	3000	230	174.93	13.40
玻璃纤维增强环氧复合材料	1.84	1370	45	75.98	2.50
碳纤维增强环氧复合材料	1.53	1330	155	88.70	10.34

机械能守恒定律

冲击时,冲击物在极短的时间间隔内速度发生很大的变化,其加速度 a 很难测出,无法计算惯性力,故无法使用动静法.在实用计算中,一般采用能量法.即在若干假设的基础上,根据能量守恒定律对受冲击构件的应力与变形进行偏于安全的简化计算.

$$T + V = V_{ed}$$

T, V 是冲击物在冲击过程中所减少的动能和势能.

V_{ed} 是被冲击物所增加的应变能.

假设 (Assumption)

1. 冲击物视为刚体, 不考虑其变形
(The impacting body is rigid);
2. 被冲击物的质量远小于冲击物的质量, 可忽略不计
(The mass of the impacted deformable body is negligible in comparison with the impacting mass);
3. 冲击后冲击物与被冲击物附着在一起运动
(The impact body do not rebound);
4. 不考虑冲击时热能的损失, 即认为只有系统动能与势能的转化
(The loss of energy of sound light heat ect. in the process of impact is lost in the impact).

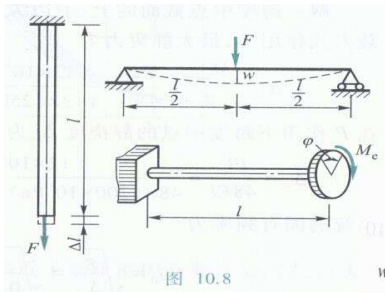
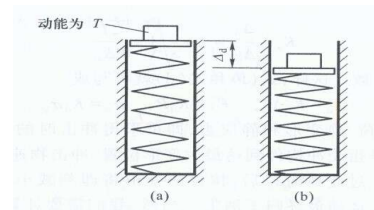


图 10.8

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} = \frac{F}{EA/l}$$

$$w = \frac{Fl^3}{48EI} = \frac{F}{48EI/l^3}$$

$$\varphi = \frac{M_e l}{GI_p} = \frac{M_e}{GI_p/l}$$



$$\Delta T + \Delta V = V_{ed}$$

$$\Delta V = P\Delta_d$$

$$V_{ed} = \frac{1}{2} F_d \Delta_d$$

$$\Delta T + \Delta V = V_{ed}$$

$$\Delta V = P\Delta_d$$

$$V_{ed} = \frac{1}{2} F_d \Delta_d$$

$$\frac{F_d}{P} = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = \frac{\sigma_d}{\sigma_{st}}$$

$$F_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} P, \quad \sigma_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} \sigma_{st}$$

$$V_{ed} = \frac{1}{2} \frac{\Delta_d^2}{\Delta_{st}} P$$

$$\Delta_d^2 - 2\Delta_{st}\Delta_d - \frac{2T\Delta_{st}}{P} = 0$$

$$\Delta_d = \Delta_{st} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2T}{P\Delta_{st}}} \right)$$

$$K_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T}{P\Delta_{st}}}$$

$$\Delta_d = K_d \Delta_{st}, \quad F_d = K_d P, \quad \sigma_d = K_d \sigma_{st}$$

重物 P 从高度为 h 处自由落下, 冲击到弹簧顶部上, 然后随弹簧一起向下运动. 当重物 P 的速度逐渐降低到零时, 弹簧的变形达到最大值 Δ_d , 与之相应的冲击载荷即为 F_d .

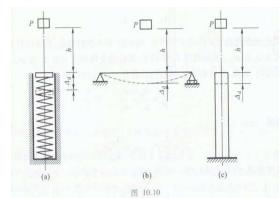
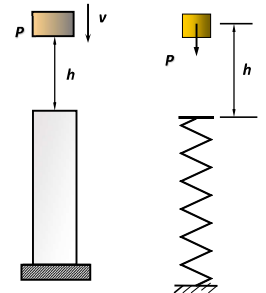
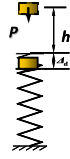


图 10.10



根据能量守恒定律可知,冲击物所减少的动能 T 和势能 V ,应全部转换为弹簧的变形能 V_{ed} 即 $T + V = V_{ed}$

$$K_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T}{P\Delta_{st}}}$$



若冲击是因重为 P 的物体从高度 h 处自由下落造成的(图 10.10),则物体与弹簧接触时, $v^2 = 2gh$,于是 $T = \frac{1}{2} P v^2 = Ph$,代入公式(10.6)得

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} \quad (10.8)$$

(3) 若已知冲击物自高度 h 处以初速度 v_0 下落,则

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2 + 2gh}{g\Delta_{st}}}$$

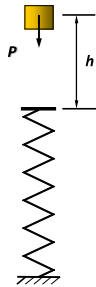
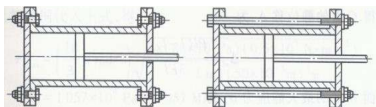


图 10.11

从公式(10.6)、公式(10.8)和式(h)都可看到,在冲击问题中,如能增大静位移 Δ_{st} ,就可以降低冲击载荷和冲击应力。这是因为静位移的增大表示构件较为柔软,因而能更多地吸收冲击物的能量。但是,增加静变形 Δ_{st} 应尽可能地避免增加静应力 σ_{st} ,否则,降低了动荷因数 K_d ,却又增加了 σ_d ,结果动应力未必就会降低。汽车大梁与轮轴之间安装叠板弹簧,火车车厢架与轮轴之间安装压缩弹簧,某些机器或零件上加上橡皮坐垫或垫圈,都是为了既能增大静变形 Δ_{st} ,又不改变构件的静应力。这样可以明显地降低冲击应力,起到很好的缓冲作用。又如把承受冲击的汽缸盖螺栓,由短螺栓(图 10.12a)改为长螺栓(图 10.12b),增加了螺栓的静变形 Δ_{st} ,可以提高其承受冲击的能力。



上述计算方法,忽略了其他种能量的损失。事实上,冲击物所减少的动能和势能不可能全部转变为受冲构件的应变能。所以,按上述方法算出的受冲构件的应变能的数值偏高。

讨论

(1) 当载荷突然全部加到被冲击物上,即 $h=0$ 时

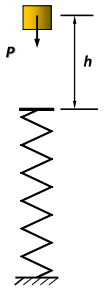
$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 2$$

由此可见,突加载荷的动荷因数是2,这时所引起的荷应力和变形的2倍。

(2) 若已知冲击开始瞬间冲击物与被冲击物接触时的速度为 v ,则

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

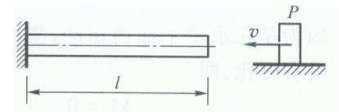
$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{st}}}$$



对水平放置的系统,例如图 10.11 所示情况,冲击过程中系统的势能不变, $\Delta V = 0$ 。若冲击物与杆件接触时的速度为 v ,则动能 $T = \frac{1}{2} P v^2$ 。以 $\Delta V, \Delta T = T$

$$\frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta_d^2}{\Delta_{st}} P$$

$$\Delta_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}} \Delta_{st}$$



$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}$$

$$F_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}} P, \quad \sigma_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}} \sigma_{st}$$

例题7 一重量为 P 的重物由高度为 h 的位置自由下落,与一块和直杆 AB 相连的平板发生冲击。杆的横截面积为 A ,求杆的冲击应力。

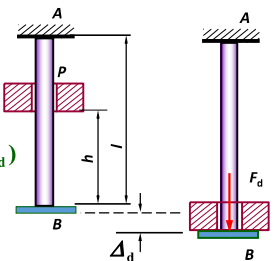
重物是冲击物,

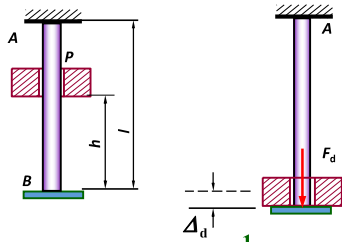
杆 AB (包括圆盘)是被冲击物。

冲击物减少的势能 $V = P(h + \Delta_d)$

动能无变化 $T = 0$

AB 增加的应变能 $V_{ed} = \frac{1}{2} F_d \Delta_d$



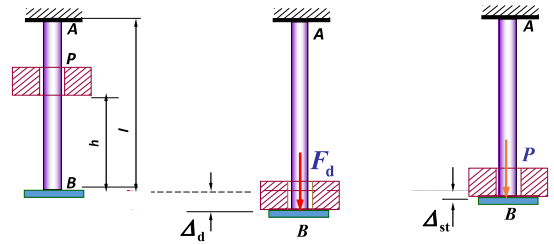


根据能量守恒定理

$$P(h + \Delta_d) = \frac{1}{2} F_d \Delta_d$$

$$\Delta_d = \frac{F_d \cdot l}{EA} \rightarrow F_d = \left(\frac{EA}{l}\right) \Delta_d \rightarrow V_{ed} = \frac{1}{2} F_d \Delta_d = \frac{1}{2} \left(\frac{EA}{l}\right) \Delta_d^2$$

$$\Delta_{st} = \frac{P \cdot l}{EA} \rightarrow P = \frac{EA}{l} \Delta_{st}$$

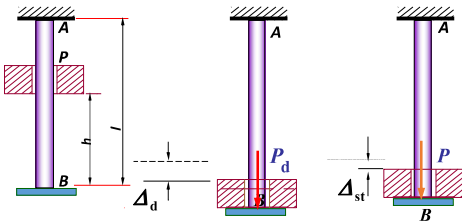


$$\Delta_d^2 - 2\Delta_{st}\Delta_d - 2\Delta_{st}h = 0$$

$$\Delta_d = \Delta_{st} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} \right)$$

$$K_d = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} \right)$$

称为自由落体冲击的动荷因数



$$K_d = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} \right)$$

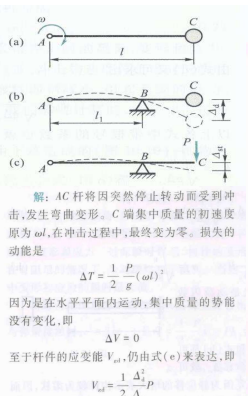
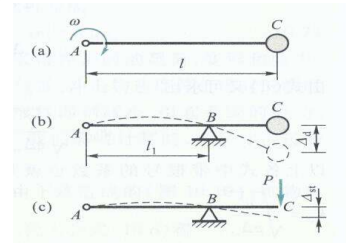
$$\Delta_d = K_d \Delta_{st}$$

$$F_d = K_d \cdot P$$

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st}$$

Δ_{st} 为冲击物以静载方式作用在冲击点时, 冲击点的静位移。

例 10.4 在水平平面内的 AC 杆, 绕通过 A 点的铅垂轴以匀角速 ω 转动, 图 10.13a 是它的俯视图。杆的 C 端有一重为 P 的集中质量。如因发生故障在 B 点卡住而突然停止转动 (图 10.13b), 试求 AC 杆内的最大冲击应力。设 AC 杆的质量可以不计。



$\Delta T + \Delta V = V_{ed}$

将 $\Delta T, \Delta V$ 和 V_{ed} 代入公式 (10.5), 略作整理即得到

$$\frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = \sqrt{\frac{\omega^2 l^2}{g \Delta_{st}}}$$

由式 (d) 知冲击应力为

$$\sigma_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} \sigma_{st} = \sqrt{\frac{\omega^2 l^2}{g \Delta_{st}}} \sigma_{st}$$

若 P 以静载的方式作用于 C 端 (图 10.13c), 利用法, 都可求得 C 点的静位移 Δ_{st} 为

$$\Delta_{st} = \frac{Pl(l-l_1)^2}{3EI}$$

同时, 在截面 B 上的最大静应力 σ_{st} 为

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W} = \frac{P(l-l_1)}{W}$$

把 Δ_{st} 和 σ_{st} 代入式 (i) 便可求出最大冲击应力为

$$\sigma_d = \frac{\omega}{W} \sqrt{\frac{3EHP}{g}}$$

例 10.5 若例 10.1 中的 AB 轴在 A 端突然刹车 (即 A 端突然停止转动), 试求轴内最大动应力。设切变模量 $G = 80 \text{ GPa}$, 轴长 $l = 1 \text{ m}$ 。

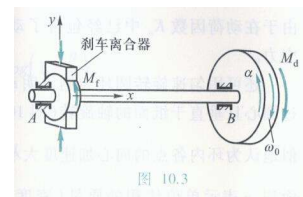


图 10.3

$$\Delta T = \frac{1}{2} I_p \omega^2$$
 仿照 § 3.6 计算弹应变能的方法, 不难求得 AB 轴的扭转应变能为

式中 T_i 为扭矩。令 $\Delta T = V_{\omega}$, 从而求得

$$T_i = \omega \sqrt{\frac{I_p G I_p}{l}}$$

轴内的最大冲击切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{T_i}{W_p} = \omega \sqrt{\frac{I_p G I_p}{l W_p^2}}$$

对于圆轴,

$$\frac{I_p}{W_p^2} = \frac{\pi d^4 / 32}{\left(\frac{16}{\pi d^3}\right)^2} = \frac{2}{\pi d^2} = \frac{2}{A}$$

于是

$$\tau_{\max} = \omega \sqrt{\frac{2GI_p}{Al}}$$

可见扭转冲击时, 轴内最大动应力 τ_{\max} 与轴的体积 Al 有关。体积 Al 越大, τ_{\max} 越小。把已知数据代入上式, 得

$$\tau_{\max} = \left(\frac{10}{3} \pi \text{ rad/s}\right) \sqrt{\frac{2 \times (80 \times 10^9 \text{ Pa}) (0.5 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^2)}{(1 \text{ m}) (50 \times 10^{-6} \text{ m})^2 \pi}}$$

$2.57 \text{ MPa} = 1.057 \times 10^8 \text{ Pa} = 1.057 \text{ MPa}$

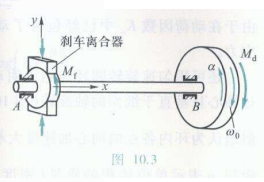


图 10.3

例 10.6 在图 10.14 中, 变截面杆 a 的最小截面与等截面杆 b 的截面相等。在相同的冲击载荷下, 试比较两杆的强度。

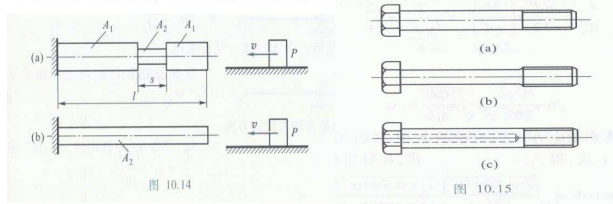


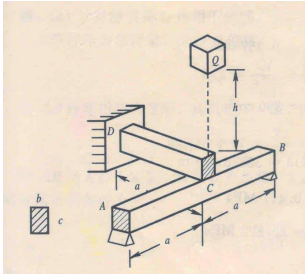
图 10.14

图 10.15

解: 在相同的静载荷作用下, 两杆的静应力 σ_s 相同, 但杆 a 的静变形 Δ_s^a 显然小于杆 b 的静变形 Δ_s^b 。这样, 由式 (h) 看出, 杆 a 的动应力必然大于杆 b 的动应力。而且, 杆 a 削弱部分的长度 s 越小, 则静变形越小, 就更加增大了动应力的数值。

《辅导》p206

例 10-4 如图 10-5(a)所示重量为 Q 的重物从高度 h 自由落下，冲击到交叉放置的悬臂梁和简支梁上。已知 $Q=1\text{ kN}$, $h=20\text{ cm}$, 梁的材料弹性模量 $E=10\text{ GPa}$, $b=12\text{ cm}$, $c=20\text{ cm}$, $a=100\text{ cm}$, 不计被冲击梁的重量求冲击时各梁最大挠度和应力。



解: (1) 计算 C 点静挠度。
在 C 点处二梁相互作用力为 R (图 10-5(b))

对悬臂梁 DC

$$f_{C_{DC}} = \frac{(Q-R)a^2}{3EI}$$

对简支梁 AB

$$f_{C_{AB}} = \frac{R(2a)^3}{48EI} = \frac{Ra^3}{6EI}$$

根据交叉梁在 C 点处变形协调条件有

$$f_{C_{DC}} = f_{C_{AB}}$$

即

$$\frac{(Q-R)a^2}{3EI} = \frac{Ra^3}{6EI}$$

解得

$$R = \frac{2}{3}Q = 0.667\text{ kN}$$

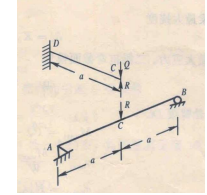
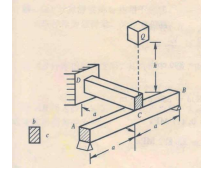
故

$$\delta_{C_{DC}} = f_{C_{DC}} = \frac{Ra^2}{6EI} = \frac{Qa^2}{9EI} = 0.0138\text{ cm}$$

(2) 计算动载荷系数 K_d 。

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{C_{DC}}}} = 54.85$$

(3) 计算冲击时各梁最大挠度和最大应力。



各梁最大挠度

$$\delta_d = K_d \delta_{C_{DC}} = 0.757\text{ cm}$$

求最大应力。二梁抗弯截面模量

$$W = \frac{bc^2}{6} = 800\text{ cm}^3$$

① 悬臂梁 DC

$$M_{\max 1} = (Q-R)a = 333.5\text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\sigma_{\max 1} = \frac{M_{\max 1}}{W} = 0.417\text{ MPa}$$

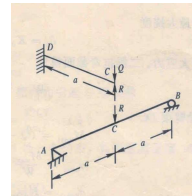
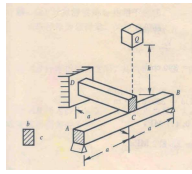
$$\sigma_{d\max 1} = K_d \sigma_{\max 1} = 22.872\text{ MPa}$$

② 简支梁 AB

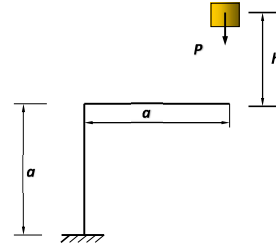
$$M_{\max 2} = \frac{Ra}{2} = 333.5\text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\sigma_{\max 2} = \frac{M_{\max 2}}{W} = 0.417\text{ MPa}$$

$$\sigma_{d\max 2} = K_d \sigma_{\max 2} = 22.872\text{ MPa}$$



例 8 等截面刚架的抗弯刚度为 EI , 抗弯截面系数为 W , 重物 P 自由下落时, 求刚架内的最大正应力 (不计轴力)。

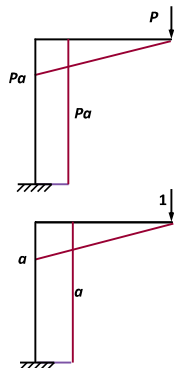


解:

$$\Delta_{st} = \frac{4Pa^3}{3EI}$$

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{3EIh}{2Pa^3}}$$

$$\sigma_{d\max} = K_d \sigma_{st\max} = (1 + \sqrt{1 + \frac{3EIh}{2Pa^3}}) \frac{Pa}{W}$$

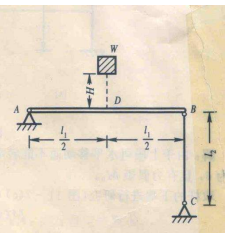


《辅导》p230

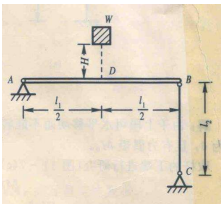
例 11-6 如图 11-8 所示结构, 已知 AB 梁, $E_1=100\text{ GPa}$, $I_1=1 \times 10^{-4}\text{ m}^4$, 梁长 $l_1=2\text{ m}$; BC 杆, $E_2=72\text{ GPa}$, 截面积 $A_2=1 \times 10^{-4}\text{ m}^2$, $I_2=6.25 \times 10^{-8}\text{ m}^4$, 杆长 $l_2=1\text{ m}$ 。欧拉公式适用的临界柔度 $\lambda_1=62.8$, 中柔度杆适用直线公式 $\sigma_c = a - b\lambda$, 其中 $a=373\text{ MPa}$, $b=2.15\text{ MPa}$, 稳定安全系数 $n_s=3$ 。当重物 $W=2.88\text{ kN}$ 从高度 $H=6\text{ cm}$ 处自由落到 AB 梁上时, 试校核 BC 杆的稳定性。

解: (1) 计算 BC 杆所受压力。

(2) 在 AB 中点施加轴力 P , 求 BC 杆所受压力。



解: (1) 计算 BC 杆所受动压力。
 ① 在 AB 中点施加静载荷 W, BC 杆承受压力应为 $N_s = \frac{W}{2}$, B 处位移为 $\Delta_{Bs} = \frac{N_s l_1}{E_1 A_1} = 2 \times 10^{-4} \text{ m}$



载荷作用点静变形 $\Delta_{Bs} = \frac{W l_1}{48 E_1 I_1} = \frac{1}{2} \Delta_{Bs} = 4.9 \times 10^{-3} \text{ m}$

② 冲击动荷系数为 $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{Bs}}} = 6.05$

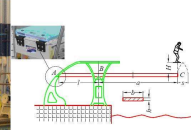
③ BC 杆所受动压力为 $N_d = K_d \cdot \frac{W}{2} = 8.71 \text{ kN}$

(2) 校核 BC 杆稳定性。
 ① BC 杆柔度, BC 杆两端铰支, $\mu=1$
 $i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A_1}} = 2.5 \text{ cm}$
 $\lambda = \frac{\mu l_1}{i_1} = 40$

$\lambda < \lambda_s$, BC 杆为中柔度杆。
 ② BC 杆临界压力计算
 BC 杆临界应力 $\sigma_{cr} = a - b\lambda = 287 \text{ MPa}$
 临界压力 $P_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A_1 = 28.7 \text{ kN}$
 故有 $n = \frac{P_{cr}}{N_d} = \frac{28.7}{8.71} = 3.3 > n_{st}$
 BC 杆稳定安全。

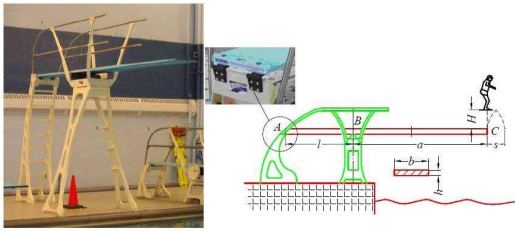
四、跳板跳水(30分)

华彰瞩目的第 29 届北京奥林匹克运动会上, 具有“梦之队”之称的中国跳水队获得了跳水比赛 8 枚金牌中的 7 枚, 囊括了 3m 跳板跳水的 4 枚金牌。Daniflex 的 Maxiflex Model B 跳板是奥林匹克跳水比赛和国际跳水比赛唯一指定使用的产品, 它的尺寸如图 10.16 所示, 其中横截面尺寸为 $b = 0.5 \text{ m}$, $h = 0.05 \text{ m}$, 跳板的弹性模量 $E = 70 \text{ GPa}$, 比重 $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$, $a = 3.2 \text{ m}$, $l = 1.6 \text{ m}$ 。运动员从跳板上跳至距水面高度 H 处落至跳板端点 C, 再从跳板上弹起至空中完成动作后落水。若运动员体重 $G = 700 \text{ N}$, 最大弹跳高度 $H = 0.6 \text{ m}$, 取 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。

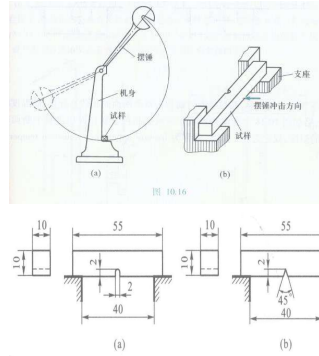


- 根据所学知识, 建立相应的力学分析模型。(3分)
- 为保证运动员落水安全, 运动员从空中落入水中时, 在跳板所在平面处, 运动员重心距跳板 C 端最小距离 λ 应大于 0.5 m 。试求运动员从跳板上跳时所需最小水平速度(假设水平方向为匀速运动)? (4分)
- 不计跳板质量, 将运动员看做刚体时, 运动员冲击跳板时, 跳板中的最大动应力为多少? 在上述运动过程中, 运动员冲击跳板时的动量损耗是多少? (12分)
- 如运动员为弹性体, 定性说明在冲击时跳板中的最大动应力增大还是减小? (3分)
- 如考虑跳板质量, 试计算跳板中的最大动应力。(8分)

第七届力学竞赛

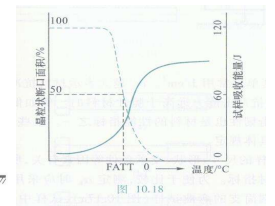


§ 13-4 冲击韧性



$$\alpha_k = \frac{W}{A}$$

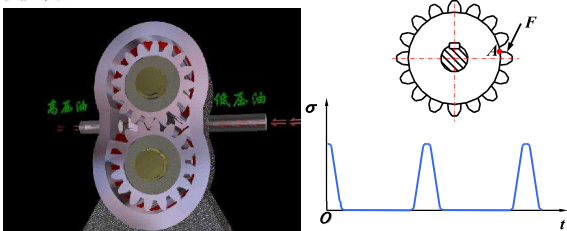
α_k 称为冲击韧性, 其单位常用 J/cm^2



§ 14-1 交变应力与疲劳失效 (Alternating stress and fatigue failure)

一、交变应力 (Alternating stress)

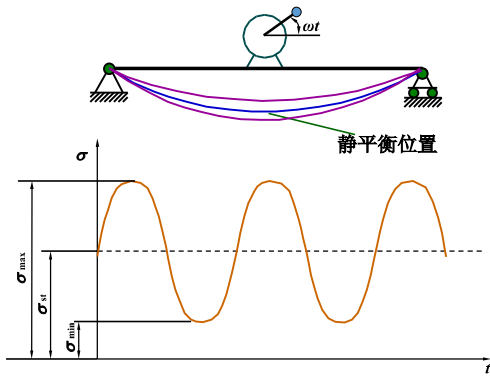
构件内一点处的应力随时间作周期性变化, 这种应力称为交变应力。



二、产生的原因(Reasons)

1. 载荷做周期性变化 (Load changes periodically with time)
2. 载荷不变, 构件点的位置随时间做周期性的变化 (The point changes his location periodically with time under an unchangeable load)

例题1 一简支梁在梁中间部分固接一电动机, 由于电动机的重力作用产生静弯曲变形, 当电动机工作时, 由于转子的偏心而引起离心惯性力。由于离心惯性力的垂直分量随时间作周期性的变化, 梁产生交变应力。



例题2 火车轮轴上的力来自车箱,大小、方向基本不变,即弯矩基本不变。

假设轴以匀角速度 ω 转动。

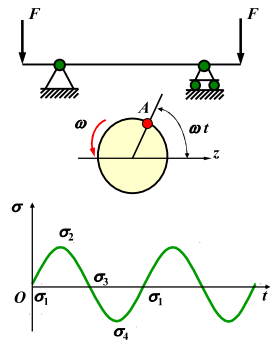
横截面上 A 点到中性轴的距离却是随时间 t 变化的。

$$y = r \sin \omega t$$

A 点的弯曲正应力为

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{M \cdot r}{I} \sin \omega t$$

σ 随时间 t 按正弦曲线变化

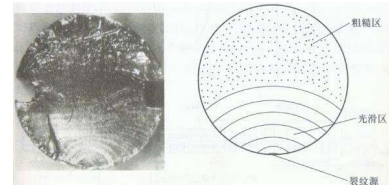


三、疲劳破坏 (Fatigue failure)

材料在交变应力作用下的破坏习惯上称为 **疲劳破坏** (fatigue failure)

1. 疲劳破坏的特点 (Characteristics of the fatigue failure)

- (1) 交变应力的破坏应力值一般低于静载荷作用下的强度极限值,有时甚至低于材料的屈服极限。
- (2) 无论是脆性还是塑性材料,交变应力作用下均表现为脆性断裂,无明显塑性变形。
- (3) 断口表面可明显区分为光滑区与粗糙区两部分。



材料发生破坏前,应力随时间变化经过多次重复,其循环次数与应力的有关,应力愈大,循环次数愈少。

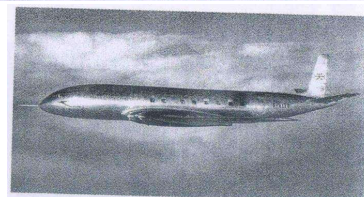
用手折断铁丝,弯折一次一般不断,但反复来回弯折多次后,铁丝就会发生断裂,这就是材料受交变应力作用而破坏的例子。

因疲劳破坏是在没有明显征兆的情况下突然发生的,极易造成严重事故。据统计,机械零件,尤其是高速运转的构件的破坏,大部分属于疲劳破坏。

2007年3月19日,《人民日报》在第一版刊登由新华社播发的新闻稿:“国务院总理温家宝2月26日主持召开国务院常务会议,听取大型飞机重大专项领导小组关于大型飞机方案论证工作汇报,原则批准大型飞机研制重大科技专项正式立项,同意组建大型客机股份公司,尽快开展工作。”这则消息,犹如一石激起千层浪,引起很大反响;中国要造大飞机了!一时间成为国内外热议的话题。2008.5.11. 中国商用飞机有限责任公司 在上海 揭牌成立

什么是“大飞机”(大型飞机的俗称)?由于各国航空工业发展水平不一样,“大飞机”只是一个相对的概念。当前在我国,“大飞机”一般是指起飞总质量超过100吨的运输类飞机,包括军民用大型喷气运输机,也包括150座以上的干线喷气客机。大飞机是中国民航使用最广泛的主力机型。而发达国家航运体系中则习惯上把300座以上的宽体喷气客机才称作“大型客机”。

1952年5月2日,世界上第一种民用喷气客机“彗星”号客机正式投入航线。“彗星”从伦敦起飞,两小时后抵达罗马,引起巨大轰动。在此之前,世界上的民航客机清一色是安装活塞式发动机的螺旋桨式飞机,飞行速度已达极限,即每小时700千米左右,而“彗星”号客机的巡航速度是每小时788千米。“彗星”号还有一个优势,即采用了密封座舱,飞机在云上飞行,不仅可以鸟瞰美丽的景色,其平稳舒适也是前所未有的。



世界上第一架喷气客机“彗星”开启了民航喷气时代。

人们能在令人难以置信的短时间里，越过千山万水，但却没有旅行过长的感觉。速度看不见摸不着，人们快不相信自己的手表了。

“彗星”引起人们极大的震动和兴趣。但是由于开始时“彗星”全部采用头等舱布局，只能乘 36 人，经营成本太高，难以盈利，因而没能吸引更多的订单，只有加拿大太平洋航空公司订购了 2 架，法国航空公司和法国空海联合运输公司各订购了 3 架。

加长航程的“彗星”-2 于 1952 年 2 月 16 日首飞，该机装罗·罗公司的“埃及”发动机，可载 44 名旅客。而更长航程，可乘 78 名旅客的“彗星”-3 也在设计中。

1952 年 5 月 2 日，“彗星”的第一个定期航班载着 36 名旅客从伦敦希思罗机场出发，在罗马(意大利)、贝鲁特(黎巴嫩)、喀土穆(苏丹)、恩德培(乌干达)、利文斯顿(北罗得西亚)经停后，最后比预定时间提前 2 分钟到达目的地——南非约翰内斯堡，全程 23 小时 34 分钟，以每小时约 790 千米(426.66 海里)的速度飞行，飞行了 10819 千米(5841.79 海里)。这架“彗星”对商业飞行所作出的贡献和 20 年后的“协和”号一样，把飞行时间缩短了一半。“彗星”号还有一个优势，它采用了气密座舱，人们可以坐在飞机上，平稳、舒适地在云层以上飞行。

品质。

但是后来连续发生的几起事故更为神秘。1953 年 5 月 2 日，英国海外航空公司的一架“彗星”在印度加尔各答起飞爬升时失事，机上 43 人全部遇难。1953 年 6 月 25 日，UAT 航空公司的一架“彗星”在塞内加尔的达喀尔受到严重损坏。更为震惊的噩梦是 1954 年 1 月 10 日，英国海外航空公司的“彗星”在意大利厄尔巴岛附近地中海上空解体，机组和旅客共 35 人全部遇难。接着 1954 年 4 月 8 日，英国海外航空公司的又一架“彗星”载意大利那不勒斯湾，机上 21 人罹难。至此，全部“彗星”号停飞。



图 2-2-3 意大利那不勒斯湾“彗星”号飞机坠毁后残骸被“彗星”号前运来上图中。

交变应力引起的失效与静应力全然不同。在交变应力作用下，虽应力低于屈服极限，但长期反复作用之后，构件也会突然断裂，即使是塑性较好的材料，断裂前也无明显的塑性变形，这种现象称为疲劳失效。最初，人们认为上述失效现象的出现，是因为在交变应力长期作用下，“纤维状结构”的塑性材料变成“颗粒状结构”的脆性材料，因而导致脆性断裂，并称之为“金属疲劳”。近代金相显微镜观察的结果表明，金属结构并不因交变应力而发生变化，上述解释并不正确。但“疲劳”这个词却一直沿用至今，用以表述交变应力下金属的失效现象。

但是道路并不平坦，潜藏的危机和灾难接踵而至。从 1952 年 11 月到 1954 年 4 月的 18 个月间(“彗星”-2 还没有开始交付，“彗星”-3 原型机尚未试飞)，在给四家航空公司交付的 17 架“彗星”-1/1A 中，就有 6 架相继发生事故，总共 110 名旅客和机组人员遇难。

第一起事故发生在 1952 年 10 月 26 日，英国海外航空公司的一架“彗星”在意大利罗马起飞时严重损坏。

第二起事故发生在 1953 年 3 月 3 日，加拿大太平洋航空公司的一架“彗星”从卡拉奇机场起飞时坠毁，机上 11 人全部遇难。这是世界上第一起喷气客机的空难。事故调查表明，是驾驶员起飞时把机头抬得过高而使飞机失速所致，为此，在机翼上加装了可放下的前缘，以改善起飞的

“彗星”陨落，震动了世界。英国海军出动舰船，幸运地在地中海出事的海域打捞出几乎全部的“彗星”残骸。英国首相丘吉尔下令，不惜一切代价，搞清飞机解体爆炸的原因。神秘的空中解体更引起航空工业界的高度重视，英国皇家航空研究中心对残骸进行详细研究，对每一块碎片都进行了认真的检查，最后终于查明，两次爆炸解体失事的原因如出一辙：是由于飞机机体结构的金属产生疲劳断裂，也就是机体的金属表面存在

细小的裂纹。由于金属蒙皮承受着不断变化的压力和温度，使在应力集中、金属过薄的裂纹首先扩展并一发不可收拾直至撕裂，造成爆炸解体。对于“彗星”号飞机来说，机身疲劳是因在多次起降，压力和温度变化的过程中，增压座舱壳体疲劳断裂所致。在此之前，金属疲劳对航空安全的威胁尚未引起人们足够的重视。

对金属疲劳的解释一般认为，在足够大的交变应力下，金属中位置最不利或较弱的晶体，沿最大切应力作用面形成滑移带，滑移带开裂成为微观裂纹。在构件外形突变(如圆角、切口、沟槽等)或表面刻痕或材料内部缺陷等部位，都可能因较大的应力集中而引起微观裂纹。分散的微观裂纹经过集结贯通，将形成宏观裂纹。以上是裂纹的萌生过程。已形成的宏观裂纹在交变应力下逐渐扩展。扩展是缓慢的而且并不连续，因应力水平的高低时而持续时而停滞。这就是裂纹的扩展过程。随着裂纹的扩展，构件截面逐步削弱，当削弱到一定极限时，构件便发生突然断裂。

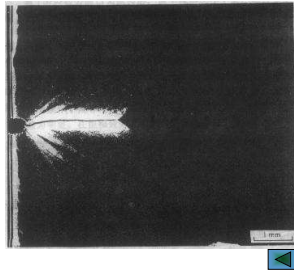
疲劳失效是构件在名义应力低于强度极限，甚至低于屈服极限的情况下，突然发生的脆性断裂。飞机、车辆和机器发生的事故中，有很大比例是零部件疲劳失效造成的。这类事故带来的损失和伤亡都是非常惨痛的。所以，金属疲劳问题引起了多方关注。

2. 疲劳过程一般分三个阶段
(The three phases of fatigue process)

(1) 裂纹萌生 在构件外形突变或材料内部缺陷等部位, 都可能产生应力集中引起微观裂纹. 分散的微观裂纹经过集结沟通, 将形成宏观裂纹.

(2) 裂纹扩展 已形成的宏观裂纹在交变应力下逐渐扩展.

(3) 构件断裂 裂纹的扩展使构件截面逐渐削弱, 削弱到一定极限时, 构件便突然断裂.



“彗星”太超前了, 以致成为当时鲜为人知的“金属疲劳”的牺牲品, 它是拓荒者, 它为此付出了高昂的血的代价。但是, 由此而进行的科学研究取得了知识和经验, 人们编制了新的试验程序, 制订了新的标准, 供此后飞机设计制造中使用。人们认识了疲劳断裂, 解决了这个问题。从此全机寿命疲劳试验, 成为一架新飞机在飞机制造厂必须作的长期试验, 这是工厂内的一处独特的风景线。

高铁车轴的检查

§ 11-2 交变应力的循环特征、应力幅和平均应力

(The cycle symbol, stress amplitude and mean stress for alternating stress)

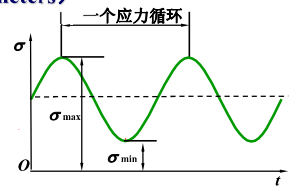
交变应力的疲劳破坏与静应力下的破坏有很大差异, 故表征材料抵抗交变应力破坏能力的强度指标也不同.

下图为交变应力下具有代表性的正应力—时间曲线.

一、基本参数 (Basic parameters)

1. 应力循环 (Stress cycle)

应力每重复变化一次, 称为一个应力循环 (stress cycle)



2. 循环特征 (Cycle symbol)

最小应力和最大应力的比值称为循环特征 (cycle symbol), 用 r 表示.

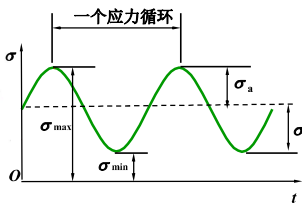
$$\text{在拉、压或弯曲交变应力下 } r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

$$\text{在扭转交变应力下 } r = \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}$$

3. 应力幅 (Stress amplitude)

最大应力和最小应力的差值的二分之一, 称为交变应力的应力幅 (stress amplitude) 用 σ_a 表示

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$



4. 平均应力 (Mean stress)

最大应力和最小应力代数的一半, 称为交变应力的平均应力 (mean stress), 用 σ_m 表示. $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$

二、交变应力的分类

(The classification of alternating stress)

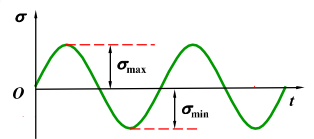
1. 对称循环 (Symmetrical reversed cycle)

在交变应力下若最大应力与最小应力等值而反号.

$$\sigma_{\min} = -\sigma_{\max} \text{ 或 } \tau_{\min} = -\tau_{\max}$$

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1$$

$r = -1$ 时的交变应力, 称为对称循环 (symmetrical reversed cycle) 交变应力.

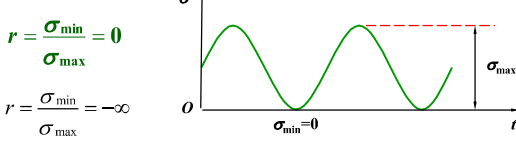


$$\sigma_a = \sigma_{\max} \quad \sigma_m = 0$$

2. 非对称循环 (Unsymmetrical reversed cycle)

$r \neq -1$ 时的交变应力,称为**非对称循环** (unsymmetrical reversed cycle) 交变应力。

(1) 若非对称循环交变应力中的最小应力或最大应力等于零 (σ_{\min} 或 $\sigma_{\max}=0$)



$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = 0$$

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -\infty$$

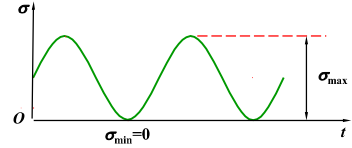
$r=0$ 或 $-\infty$ 的交变应力,称为**脉动循环** (fluctuating cycle) 交变应力

$$\sigma_a = \sigma_m = \frac{\sigma_{\max}}{2} \quad -\sigma_a = \sigma_m = \frac{\sigma_{\min}}{2}$$

(2) $r > 0$ 为同号应力循环; $r < 0$ 为异号应力循环。

(3) 构件在静应力下,各点处的应力保持恒定,即 $\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$ 。若将静应力视作交变应力的一种特例,则其循环特征

$$r = +1 \quad \sigma_a = 0 \quad \sigma_m = \sigma_{\max}$$



例题3 发动机连杆大头螺钉工作时最大拉力 $F_{\max} = 58.3\text{kN}$, 最小拉力 $F_{\min} = 55.8\text{kN}$, 螺纹内径为 $d = 11.5\text{mm}$, 试求 σ_a, σ_m 和 r 。

解:

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{A} = \frac{4 \times 58300}{\pi \times 0.0115^2} = 561\text{MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{F_{\min}}{A} = \frac{4 \times 55800}{\pi \times 0.0115^2} = 537.2\text{MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{561 - 537}{2} = 12\text{MPa}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{561 + 537}{2} = 549\text{MPa}$$

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{537}{561} = 0.957$$

§ 11-3 持久极限 (Endurance Limit)

一、材料持久极限 (疲劳极限)

(Endurance limit or fatigue limit of a materials)

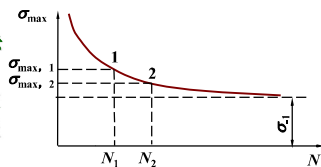
循环应力只要不超过某个“最大限度”, 构件就可以经历无数次循环而不发生疲劳破坏, 这个限度值称为“疲劳极限”, 用 σ_r 表示。

二、S-N 曲线 (应力-寿命曲线)

(S-N curve or Stress-life curve)

通过测定一组承受不同最大应力试样的疲劳寿命, 以最大应力 σ_{\max} 为纵坐标, 疲劳寿命 N 为横坐标, 即可绘出材料在交变应力下的应力-疲劳寿命曲线, 即 S-N 曲线。

当最大应力降低至某一值后, S-N 曲线趋一水平, 表示材料可经历无限次应力循环而不发生破坏, 相应的最大应力值 σ_{\max} 称为材料的**疲劳极限**或**耐劳极限**, 用 σ_r 表示。

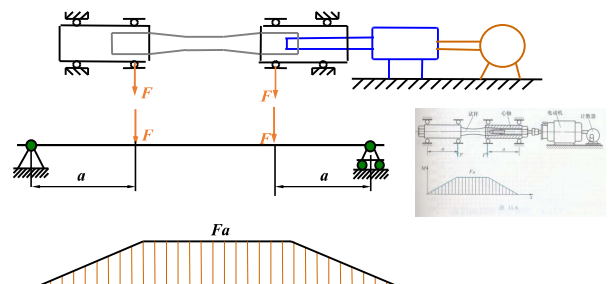


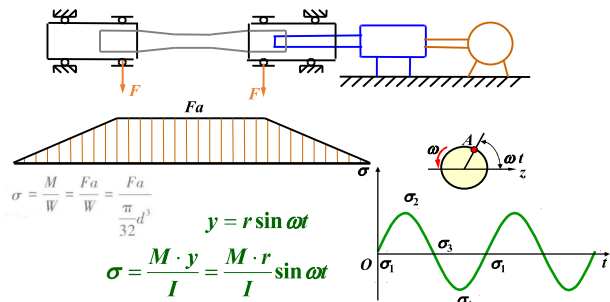
而不发生疲劳破坏。交变应力的这一极限值称为疲劳极限或持久极限。对称循环的疲劳极限记为 σ_{-1} , 下标“-1”表示对称循环的循环特征为 $r = -1$ 。

常温下的试验结果表明, 如钢制试样经历 10^7 次循环仍未发生疲劳破坏, 则再增加循环次数, 也不会发生疲劳破坏。所以, 就把在 10^7 次循环下仍未疲劳的最大应力, 规定为钢材的疲劳极限, 而把 $N_0 = 10^7$ 称为循环基数。有色金属的 S-N 曲线无明显趋于水平的直线部分。通常规定一个循环基数, 例如 $N_0 = 10^8$, 把它对应的最大应力作为这类材料的“条件”疲劳极限。

三、测定方法 (Test measures)

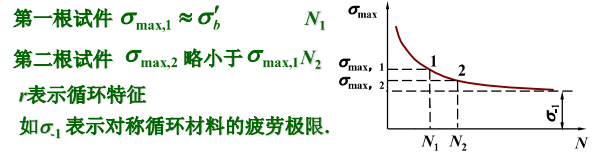
在纯弯曲变形下, 测定对称循环的持久极限技术上较简单。





保持载荷 F 的大小和方向不变,以电动机带动试样旋转。每旋转一周,截面上的点便经历一次对称应力循环。这与图 11.2 中火车轴的受力情况是相似的。

在对称循环下测定疲劳强度指标,技术上比较简单,也最为常见。测定时将金属加工成 $d = 7 \sim 10 \text{ mm}$, 表面光滑的试样(光滑小试样), 每组试样约为 10 根。把试样装于疲劳试验机上(图 11.6), 使它承受纯弯曲。在最小直径截面上, 最



§ 11-4 影响构件持久极限的因素

对称循环的疲劳极限 σ_{-1} , 一般是常温下用光滑小试样测定的。但实际构件的外形、尺寸、表面质量、工作环境等, 都将影响疲劳极限的数值。下面就介绍影响疲劳极限的几种主要因素。

一、构件外形的影响 (The effect of member figure)

若构件上有螺纹、键槽、键肩等, 其持久极限要比同样尺寸的光滑试件有所降低, 其影响程度用有效应力集中因数表示。

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_{-1})_k} \quad K_\tau = \frac{\tau_{-1}}{(\tau_{-1})_k}$$

K_σ 和 K_τ 都大于 1

在 § 2.12 中曾经提到, 应力集中处的最大应力与按公式计算的“名义”应力之比, 称为理论应力集中因数。它可用弹性力学或光弹性实验的方法来测定。理论应力集中因数只与构件外形有关, 没有考虑材料性质。用不同材料加工成形状、尺寸相同的构件, 则这些构件的理论应力集中因数也相同。但是, 由图 11.8 和图 11.9 可以看出, 有效应力集中因数不仅与构件的形状、尺寸有关, 而且与强度极限 σ_b , 亦即与材料的性质有关。有一些由理论应力集中因数估算出有效应力集中因数的经验公式^①, 这里不再详细介绍。一般说静载抗拉强度高, 有效应力集中因数越大, 即对应力集中越敏感。

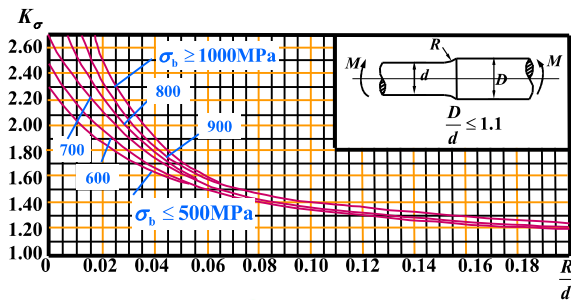
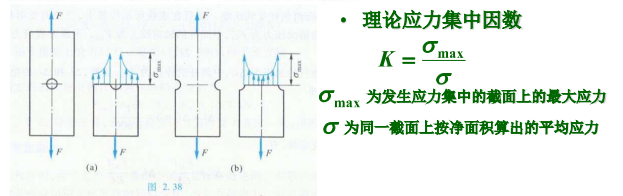


图 11-8 (a)

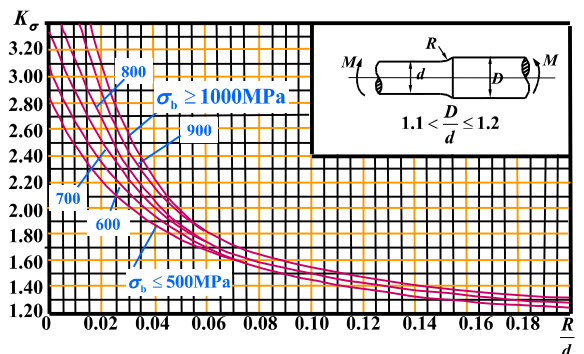


图 11-8 (b)

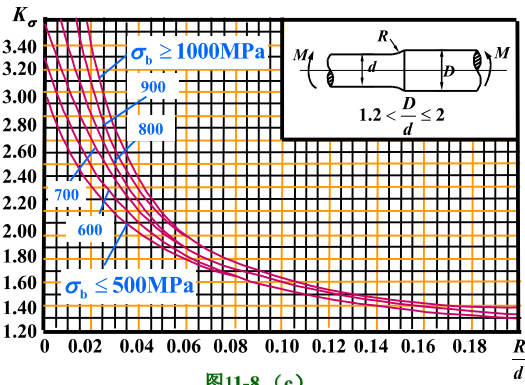


图11-8 (c)

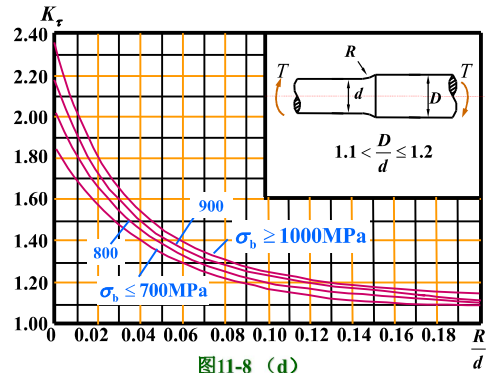


图11-8 (d)

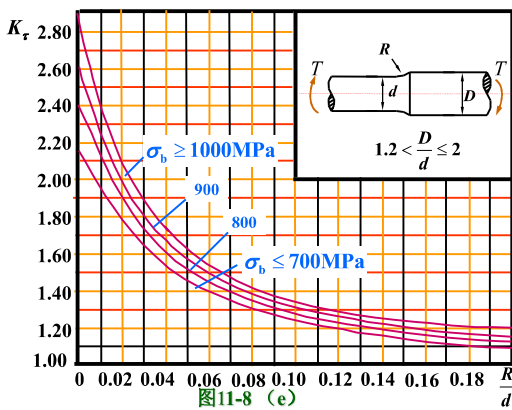


图11-8 (e)

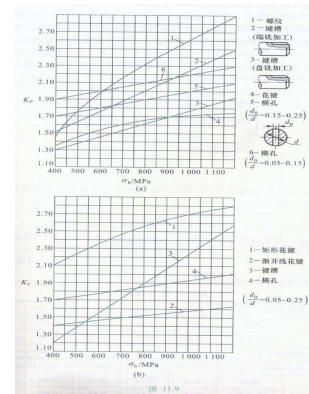


图 11-9

二、构件尺寸的影响 (The effect of member sides)

大试件的持久极限比小试件的持久极限要低

尺寸对持久极限的影响程度, 用尺寸因数表示

$$\varepsilon_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_d}{\sigma_{-1}}$$

光滑大试件的持久极限
光滑小试件的持久极限

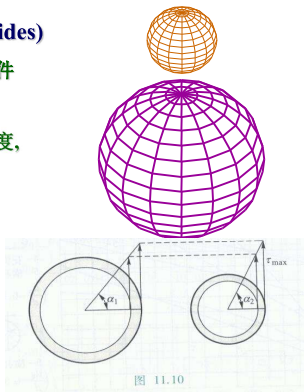


图 11.10

右边表格给出了在弯, 扭的对称应力循环时的尺寸因数.

表11-1 尺寸因数

直径 d (mm)	ε_σ		各种钢 ε_τ
	碳钢	合金钢	
>20~30	0.91	0.83	0.89
>30~40	0.88	0.77	0.81
>40~50	0.84	0.73	0.78
>50~60	0.81	0.70	0.76
>60~70	0.78	0.68	0.74
>70~80	0.75	0.66	0.73
>80~100	0.73	0.64	0.72
>100~120	0.70	0.62	0.70
>120~150	0.68	0.60	0.68
>150~500	0.60	0.54	0.60

三、构件表面状态的影响 (The effect of member surface state)

实际构件表面的加工质量对持久极限也有影响,这是因为不同的加工精度在表面上造成的刀痕将呈现不同程度的应力集中

若构件表面经过淬火,氮化,渗碳等强化处理,其持久极限也就得到提高.

表面质量对持久极限的影响用表面状态因数 β 表示

$$\beta = \frac{(\sigma_{-1})_{\text{其他加工情况的构件的持久极限}}}{\sigma_{-1}} = \frac{\text{其他加工情况的构件的持久极限}}{\text{表面磨光的试件的持久极限}}$$

表 11.2 不同表面粗糙度的表面质量因数 β

加工方法	轴表面粗糙度 $R_a/\mu\text{m}$	σ_s/MPa		
		400	800	1200
磨 削	0.4~0.1	1	1	1
车 削	3.2~0.8	0.95	0.90	0.80
粗 车	25~6.3	0.85	0.80	0.65
未加工的表面	—	0.75	0.65	0.45

表 11.3 各种强化方法的表面质量因数 β

强化方法	心部强度 σ_s/MPa	β		
		光轴	低应力集中的轴 $K_\sigma \leq 1.5$	高应力集中的轴 $K_\sigma \geq 1.8 \sim 2$
高频淬火	600~800	1.5~1.7	1.6~1.7	2.4~2.8
	800~1000	1.3~1.5		
氮化	900~1200	1.1~1.25	1.5~1.7	1.7~2.1
渗碳	400~600	1.8~2.0	3	
	700~800	1.4~1.5		
	1000~1200	1.2~1.3	2	

强化方法	心部强度 σ_s/MPa	β		
		光轴	低应力集中的轴 $K_\sigma \leq 1.5$	高应力集中的轴 $K_\sigma \geq 1.8 \sim 2$
喷丸硬化	600~1500	1.1~1.25	1.5~1.6	1.7~2.1
滚子滚压	600~1500	1.1~1.3	1.3~1.5	1.6~2.0

综合考虑上述三种影响因素,构件在对称循环下的持久极限

$$\sigma_{-1}^0 = \frac{\varepsilon_\sigma \beta}{K_\sigma} \sigma_{-1} \quad K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_{-1})_k}$$

K_σ 为有效应力集中因数 ε_σ 为尺寸因数

$$\varepsilon_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_d}{\sigma_{-1}}$$

β 为表面状态因数

σ_{-1} 为表面磨光的光滑小试件的持久极限

$$\beta = \frac{(\sigma_{-1})_{\text{其他加工情况的构件的持久极限}}}{\sigma_{-1}}$$

如果循环应力为切应力,将上述公式中的正应力换为切应力即可.

$$\tau_{-1}^0 = \frac{\varepsilon_\tau \beta}{K_\tau} \tau_r$$

对称循环下, $r=-1$.上述各系数均可查表而得.

§ 11-5 对称循环下构件的疲劳强度计算 (Calculation of the fatigue strength of the member under symmetric cycles)

一、对称循环的疲劳许用应力 (The permissible stress of fatigue under symmetric cycles)

$$[\sigma_{-1}] = \frac{\sigma_{-1}^0}{n} = \frac{1}{n} \frac{\varepsilon_\sigma \beta}{K_\sigma} \sigma_{-1} \quad [\tau_{-1}] = \frac{\tau_{-1}^0}{n} = \frac{1}{n} \frac{\varepsilon_\tau \beta}{K_\tau} \tau_{-1}$$

二、对称循环的疲劳强度条件 (The strength condition of fatigue under symmetric cycles)

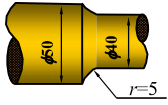
$$\sigma_{\max} \leq [\sigma_{-1}]$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}^0}{\sigma_{\max}} \quad n_\sigma \geq n$$

$$n_\sigma = \frac{\varepsilon_\sigma \beta}{K_\sigma \sigma_{\max}} \sigma_{-1} \geq n \quad \text{同理} \quad n_\tau = \frac{\varepsilon_\tau \beta}{K_\tau \tau_{\max}} \tau_{-1} \geq n$$



例題4 階梯軸如圖, 材料為鉻鎳合金鋼, $\sigma_b=920\text{MPa}$, $\sigma_{-1}=420\text{MPa}$, $\tau_{-1}=250\text{MPa}$, 分別求出彎曲和扭轉時的有效力集中因數和尺寸因數。



解: (1) 彎曲時的有效力集中因數和尺寸因數

$$\frac{D}{d} = \frac{50}{40} = 1.25 \quad \frac{r}{d} = \frac{5}{40} = 0.125$$

由圖表查有效力集中因數: 當 $\sigma_b = 1000\text{MPa}$ 時, $K_\sigma = 1.55$

當 $\sigma_b = 900\text{MPa}$ 時, $K_\sigma = 1.55$

當 $\sigma_b = 920\text{MPa}$ 時, $K_\sigma = 1.55$

由表查尺寸因數 $\varepsilon_\sigma = 0.77$

(2) 扭轉時的有效力集中因數和尺寸因數

由圖表查有效力集中因數

當 $\sigma_b = 1000\text{MPa}$ 時, $K_\tau = 1.28$

當 $\sigma_b = 900\text{MPa}$ 時, $K_\tau = 1.25$

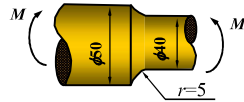
當 $\sigma_b = 920\text{MPa}$ 時, 應用直線插值法得

$$K_\tau = 1.25 + \frac{1.28 - 1.25}{1000 - 900} (920 - 900) = 1.26$$

由表查尺寸因數 $\varepsilon_\tau = 0.81$

例題5 旋轉碳鋼軸上, 作用一不變的力偶 $M=0.8\text{kN}\cdot\text{m}$, 軸表面經過精車, $\sigma_b=600\text{MPa}$, $\sigma_{-1}=250\text{MPa}$, 規定 $n=1.9$, 試校核軸的強度。

解: (1) 確定危險點應力及循環特征



$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = -\sigma_{\min} = \frac{800 \times 32}{0.05^3 \pi} = 65.2\text{MPa}$$

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1 \text{ 為對稱循環}$$

(2) 查圖表求各影響因數, 計算構件持久限。

$$\text{求 } K_\sigma \quad \frac{D}{d} = 1.4; \quad \frac{r}{d} = 0.15; \quad \sigma_b = 600\text{MPa}$$

查圖得 $K_\sigma \approx 1.4$

求 ε_σ 查圖得 $\varepsilon_\sigma \approx 0.79$

求 β 表面精車, $\beta=0.94$

(3) 強度校核

$$n_\sigma = \frac{\varepsilon_\sigma \beta}{K_\sigma \sigma_{\max}} \sigma_{-1} = \frac{0.79 \times 0.94}{62.5 \times 1.4} \times 250 = 2.12 \geq n$$

所以安全

例 11.1 某減速器第一軸如圖 11.11 所示。鍵槽為端銑加工, $m-m$ 截面上的彎矩 $M = 860\text{N}\cdot\text{m}$, 軸的材料為 Q275 鋼, $\sigma_b = 520\text{MPa}$, $\sigma_{-1} = 220\text{MPa}$ 。若規定安全因數 $n = 1.4$, 試校核 $m-m$ 截面的強度。

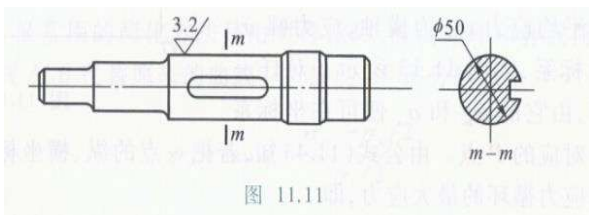


圖 11.11

解: 計算軸在 $m-m$ 截面上的最大工作應力。若不計鍵槽對抗彎截面系數的影響, 則 $m-m$ 截面的抗彎截面系數為

$$W = \frac{\pi}{32} d^3 = \frac{\pi}{32} \times (0.05\text{ m})^3 = 12.27 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

軸在恒定彎矩 M 作用下旋轉, 故為彎曲變形下的對稱循環。

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{860\text{ N}\cdot\text{m}}{12.27 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 70 \times 10^6 \text{ Pa} = 70\text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = -70\text{ MPa}$$

$$r = -1$$

現在確定軸在 $m-m$ 截面上的系數 $K_\sigma, \varepsilon_\sigma, \beta$ 。由圖 11.9a 中的曲線 2 查得端銑加工的鍵槽, 當 $\sigma_b = 520\text{MPa}$ 時, $K_\sigma = 1.65$ 。由表 11.1 查得 $\varepsilon_\sigma = 0.84$ 。由表 11.2, 使用插入法, 求得 $\beta = 0.936$ 。

把以上求得的 $\sigma_{\max}, K_\sigma, \varepsilon_\sigma, \beta$ 等代入公式 (11.12), 求出截面 $m-m$ 處的工作安全因數為

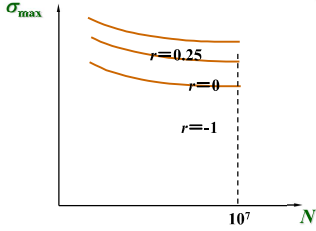
$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_{\max}} = \frac{220\text{ MPa}}{\frac{1.65}{0.84 \times 0.936} \times 70\text{ MPa}} = 1.5$$

規定的安全因數為 $n = 1.4$ 。所以, 軸在截面 $m-m$ 處滿足強度條件 (11.11)。

§ 11-6 疲劳极限曲线 (Enduring limit curve)

与测定对称循环特征持久极限 σ_{-1} 的方法相类似,在给定的循环特征 r 下进行疲劳试验,求得相应的 $S-N$ 曲线.

利用 $S-N$ 曲线便可确定不同 r 值的持久极限 σ_r .



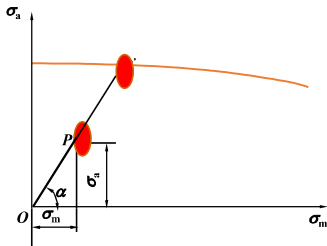
循环特征相同的所有应力循环都在同一射线上.

离原点越远,纵横坐标之和越大,应力循环的 σ_{max} 也越大

只要 σ_{max} 不超过同一 r 下的持久极限 σ_r ,就不会出现疲劳失效

所以在每一条由原点出发的射线上,都有一个由持久极限 σ_r 确定的临界点(如 OP 上的 P').

将这些点联成曲线即为持久极限曲线



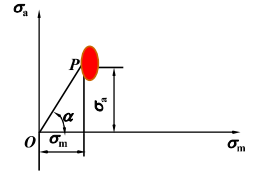
选取以平均应力 σ_m 为横轴,应力幅 σ_a 为纵轴的坐标系

对任一循环,由它的 σ_a 和 σ_m 便可在坐标系中确定一个对应的 P 点

若将该点的纵横坐标相加,就是该点所代表的应力循环的最大应力即 $\sigma_a + \sigma_m = \sigma_{max}$

由原点到 P 点作射线 OP 其斜率为

$$\tan \alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} = \frac{1-r}{1+r}$$



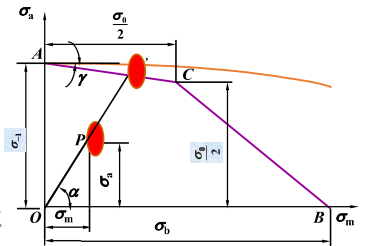
由于需要较多的试验资料才能得到持久极限曲线,所以通常采用简化的持久极限曲线

最常用的简化方法是由对称循环,脉动循环和静载荷,取得 A, C, B 三点

用折线 ACB 代替原来的曲线

$$\text{折线} AC \text{ 部分的倾角为 } \gamma, \text{ 斜率为 } \psi_\sigma = \tan \gamma = \frac{\sigma_{-1} - \sigma_0 / 2}{\sigma_0 / 2}$$

直线 AC 上的点都与持久极限 σ_r 相对应,将这些点的坐标记为 σ_m 和 σ_a 于是 AC 的方程可写为 $\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m$



系数 ψ_σ 与材料有关。对拉-压或弯曲,碳钢的 $\psi_\sigma = 0.1 \sim 0.2$,合金钢的 $\psi_\sigma = 0.2 \sim 0.3$ 。对扭转,碳钢的 $\psi_\tau = 0.05 \sim 0.1$,合金钢的 $\psi_\tau = 0.1 \sim 0.15$ 。

上述简化折线只考虑了 $\sigma_m > 0$ 的情况。对塑性材料,一般认为在 σ_m 为压应力时仍与 σ_m 为拉应力时相同。

§ 11-7 不对称循环下构件的疲劳强度计算

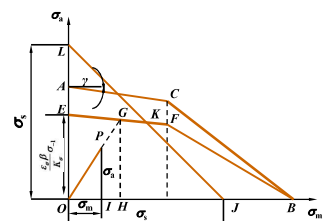
(Calculation of the fatigue strength of the member under unsymmetric cycles)

构件工作时,若危险点的应力循环由 P 点表示,则

$$\overline{PI} = \sigma_a, \overline{OI} = \sigma_m$$

延长射线 OP 与 EF 相交于 G 点, G 点纵横坐标之和就是持久极限 σ_r ,即

$$\overline{OH} + \overline{GH} = \sigma_r$$



构件的工作安全因数应为

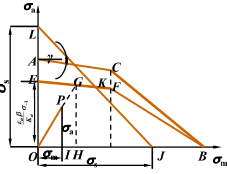
$$n_\sigma = \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} = \frac{\overline{OH} + \overline{GH}}{\sigma_m + \sigma_a} = \frac{\sigma_{rm} + \overline{GH}}{\sigma_m + \sigma_a} \quad (a)$$

$$\overline{GH} = \frac{\varepsilon_\sigma \beta}{K_\sigma} (\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_{rm}) \quad (b)$$

由三角形相似关系 $\overline{GH} = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \sigma_{rm}$ (c)

由 (b), (c) 两式解出

$$\sigma_{rm} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a + \psi_\sigma} \cdot \sigma_m \quad \overline{GH} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a + \psi_\sigma} \cdot \sigma_a$$



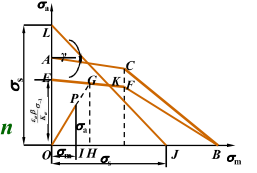
$$\sigma_{rm} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a + \psi_\sigma} \cdot \sigma_m \quad \overline{GH} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a + \psi_\sigma} \cdot \sigma_a$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} = \frac{\overline{OH} + \overline{GH}}{\sigma_m + \sigma_a} = \frac{\sigma_{rm} + \overline{GH}}{\sigma_m + \sigma_a} \quad (a)$$

代入 (a) 式 $n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m}$

强度条件为 $n_\sigma \geq n$

扭转强度条件为 $n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \beta} \tau_a + \psi_\tau \tau_m} \geq n$

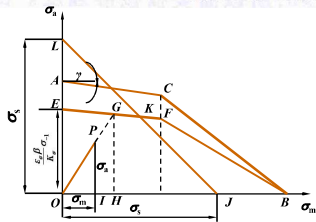


除满足疲劳强度条件外,构件危险点的 σ_{\max} 还应低于屈服极限 σ_s 。在 $\sigma_a - \sigma_m$ 坐标系中,

$$\sigma_{\max} = \sigma_s + \sigma_m = \sigma_s$$

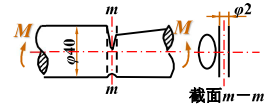
$$n_\sigma = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\max}} \geq n_s$$

对 $r > 0$ 的情况,应按上式补充静强度校核。



例6 如图所示圆杆上有一个沿直径的贯穿圆孔,不对称交变弯矩为 $M_{\max} = 5M_{\min} = 512 \text{ N}\cdot\text{m}$ 。材料为合金钢, $\sigma_b = 950 \text{ MPa}$, $\sigma_{-1} = 430 \text{ MPa}$, $\psi_f = 0.2$ 。圆杆表面经磨削加工。若规定安全因数 $n = 2, n_s = 1.5$, 试校核此杆的强度。

解: (1) 计算圆杆的工作应力



$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi}{32} \times (0.04)^3 = 6.28 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{512}{6.28 \times 10^{-6}} = 81.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{5} \sigma_{\max} = 16.3 \text{ MPa} \quad r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{81.5 + 16.3}{2} = 48.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = 32.6 \text{ MPa}$$

(2) 确定因数 $K_\sigma, \varepsilon_\sigma, \beta$ 。

按照圆杆的尺寸 $\frac{d_0}{d} = \frac{2}{40} = 0.05$

由图 11.9a 中曲线 6 查得, 当 $\sigma_b = 950 \text{ MPa}$ 时 $K_\sigma = 2.18$

由表 11.1 查得 $\varepsilon_\sigma = 0.77$

由表 11.2 查得 表面经磨削加工的杆件, $\beta = 0.77$

(3) 疲劳强度校核

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} = \frac{430}{\frac{2.18}{0.77 \times 1} \times 32.6 + 0.2 \times 48.9} = 4.21$$

规定的安全因数为 $n = 2, n_\sigma > n$, 所以疲劳强度是足够的。

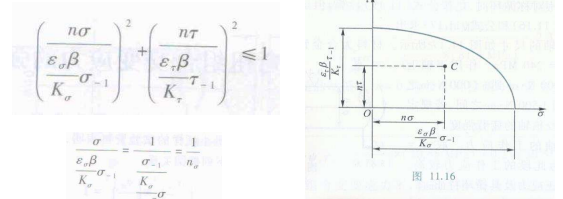
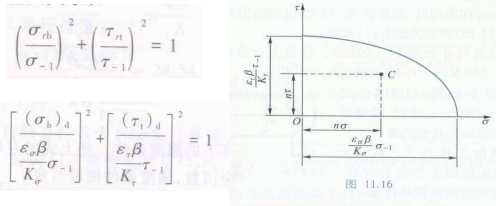
(4) 静强度校核 因为 $r = 0.2 > 0$, 所以需要校核静强度

最大应力对屈服极限的工作安全因数为

$$n_\sigma = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\max}} = \frac{540}{81.5} = 6.62 > n_s$$

所以静强度也是满足的。

§ 11-8 弯扭组合交变应力的强度计算
(Calculation of the strength of composit deformations)



弯扭组合对称循环下的强度条件

$$n_{\sigma\tau} = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} \geq n$$

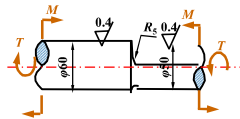
其中 n_{σ} 是单一弯曲对称循环下的安全因数

n_{τ} 是单一扭转对称循环下的安全因数

例题7 阶梯轴的尺寸如图所示。材料为合金钢, $\sigma_b=900\text{MPa}$, $\sigma_{-1}=410\text{MPa}$, $\tau_{-1}=240\text{MPa}$ 。作用于轴上的弯矩变化于 $-1000\text{N}\cdot\text{m}$ 到 $+1000\text{N}\cdot\text{m}$ 之间, 扭矩变化于 0 到 $1500\text{N}\cdot\text{m}$ 之间。若规定安全因数 $n=2$, 试校核轴的疲劳强度。

解: (1) 计算轴的工作应力。

首先计算交变弯曲正应力及其循环特征



$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \times 0.05^3}{32} = 12.3 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{1000}{12.3 \times 10^{-6}} = 81.3 \text{ MPa} \quad r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_{\min}}{W} = -\frac{1000}{12.3 \times 10^{-6}} = -81.3 \text{ MPa}$$

其次计算交变扭转切应力及其循环特征

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \times 0.05^3}{16} = 24.6 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} = \frac{1500}{24.6 \times 10^{-6}} = 61 \times 10^6 \text{ Pa} = 61 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\min} = 0 \quad r_{\min} = \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = 0$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max}}{2} = 30.5 \text{ MPa} \quad \tau_m = \frac{\tau_{\max}}{2} = 30.5 \text{ MPa}$$

(2) 确定各种因数

根据 $\frac{D}{d} = \frac{60}{50} = 1.2, \frac{R}{d} = \frac{5}{10} = 0.1$

由图11.8b查得 $K_{\sigma} = 1.55$

由图11.8d查得 $K_{\tau} = 1.24$

由于名义应力 σ_{\max} 是按照轴直径等于 50mm 计算的, 所以尺寸因数也应按照轴直径等于 50mm 来确定

由表11.1查得 $\epsilon_{\sigma} = 0.73, \epsilon_{\tau} = 0.78$

由表11.2查得 $\beta = 1$

对合金钢取 $\psi_{\tau} = 0.1$

(3) 计算弯曲工作安全因数 n_{σ} 和扭转工作安全因数 n_{τ}

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma} \epsilon_{\sigma} \beta \sigma_{\max}} = \frac{410}{1.55 \times 0.73 \times 1 \times 81.3} = 2.38$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau} \epsilon_{\tau} \beta \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m} = \frac{240}{1.24 \times 0.78 \times 1 \times 30.5 + 0.1 \times 30.5} = 4.66$$

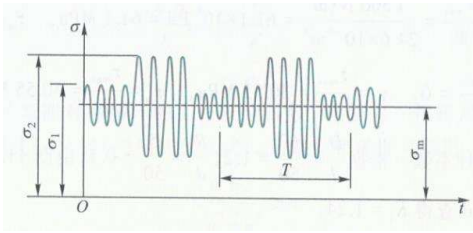
(4) 计算弯扭组合交变应力下, 轴的工作安全因数 $n_{\sigma\tau}$

$$n_{\sigma\tau} = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{2.38 \times 4.66}{\sqrt{2.38^2 + 4.66^2}} = 2.12 > n = 2$$

所以满足疲劳强度条件



§ 14-9 变幅交变应力



$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} \quad \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = 1$$

例如,设构件承受的交变应力开始按 σ_1 循环了 n_1 次,以后按 σ_2 循环。并且由 $S-N$ 曲线,已知与 σ_1 和 σ_2 对应的寿命分别是 N_1 和 N_2 。将 N_1, N_2 和 n_1 代入公式 (11.20),便可求出 n_2 。 n_2 就是构件后来在 σ_2 作用下,到达疲劳失效所经历的循环次数。

如能把应力与时间的关系简化成分级周期变化的应力谱(图 11.18),并设在一个周期 T 内,按 $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ 的循环次数分别为 n'_1, n'_2, \dots ,则在 λ 个周期内,按 $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ 经历的循环次数分别为

$$n_1 = \lambda n'_1, \quad n_2 = \lambda n'_2, \dots$$

代入公式 (11.20),得

$$\lambda \sum_{i=1}^k \frac{n'_i}{N_i} = 1$$

由 $S-N$ 曲线求出 N_i ,由应力谱求出 n'_i ,于是由上式可以求出周期数 λ 。

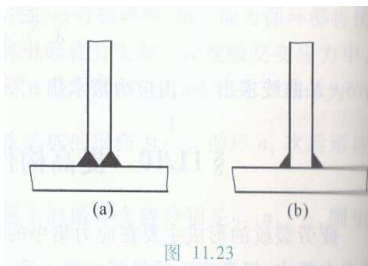


图 11.23

累积损伤的概念认为,当应力高于构件的疲劳极限时,每一应力循环都将使构件受到损伤,损伤积累到一定程度,便将引起疲劳失效。设变幅交变应力中,超过疲劳极限的应力是 $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ 。如构件在稳定常幅应力 σ_1 作用下寿命为 N_1 (参看图 11.7),便可认为按 σ_1 每循环一次造成的损伤为 $\frac{1}{N_1}$ 。循环 n_1 次后形成

的损伤为 $\frac{n_1}{N_1}$ 。同理,若在 $\sigma_2, \sigma_3, \dots$ 作用下的循环次数分别是 n_2, n_3, \dots ,则引起的损伤分别是 $\frac{n_2}{N_2}, \frac{n_3}{N_3}, \dots$ 。损伤的总和为

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i}$$

显然,如应力始终维持为 σ_1 ,则当 $n_1 = N_1$ 时,亦即 $\frac{n_1}{N_1} = 1$ 时,构件将疲劳失效。线性累积损伤理论认为,变幅交变应力下,各级交变应力对构件引起的损伤总和等于 1 时,便造成疲劳失效,即

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = 1$$

§ 14-10 提高构件疲劳强度的措施

1. 减缓应力集中

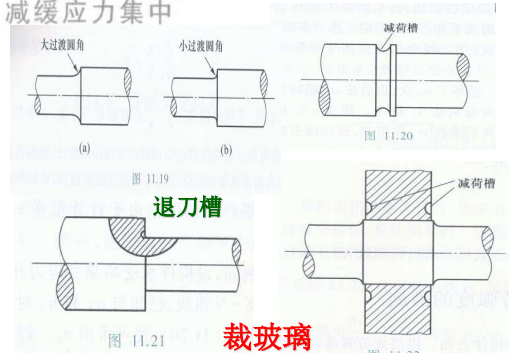


图 11.21

裁玻璃

2. 降低表面粗糙度 构件表面加工质量对疲劳强度影响很大(§ 11.4),对疲劳强度要求较高的构件,应有较低的表面粗糙度。高强度钢对表面粗糙度更为敏感,只有经过精加工,才更有利于发挥它的高强度性能。否则将会使疲劳极限大幅度下降,失去采用高强度钢的意义。在使用中也应尽量使构件表面受到机械损伤(如划伤、打印等)或化学损伤(如腐蚀、生锈等)。

3. 增加表层强度 为了强化构件的表层,可采用热处理和化学处理,如表面高频淬火、渗碳、氮化等,皆可使构件疲劳强度有显著提高。但采用这些方法时,要严格控制工艺过程,否则将造成表面微细裂纹,反而降低疲劳极限。也可以用机械的方法强化表层,如滚压、喷丸等,以提高疲劳强度(§ 11.4)。

作业：

10.18, 10.23, 10.24,

11.1, 11.4, 11.6, 11.7, 11.9, 11.13, 11.15

课程结束

课程总结

- 1、经典课程中加入前沿知识；（传授知识、拓展思路、了解前沿，走进力学之门。）
- 2、传授人文知识，做有文化的人；（不传授专门知识。）
- 3、复习时看课件、作业（习题课）；
- 4、将来有困难需咨询时愿意做你们的朋友；
- 5、欢迎加盟我们课题组！

拉丁格言：

Simplex Sigillum Veri
Pulchritudo Splendor Veritatis

简单是真的印记
美是真理的光辉