

## 《材料力学》

主讲：龚兴龙

5系，力一楼422室

电话：63600419, 13856991903

Email: [gongxl@ustc.edu.cn](mailto:gongxl@ustc.edu.cn)

主页: [gong.ustc.edu.cn](http://gong.ustc.edu.cn)

助教：李颜: [liyan111@mail.ustc.edu.cn](mailto:liyan111@mail.ustc.edu.cn)

高粱: [groundlevel@mail.ustc.edu.cn](mailto:groundlevel@mail.ustc.edu.cn)

力一楼439, 电话: 17805609029, 13242835439

实验：徐旭, 电话: 63606674, 15005603208

Email: [xuxu2011@ustc.edu.cn](mailto:xuxu2011@ustc.edu.cn)

交作业：每周一课间(课代表)

QQ群号：582073537



## 课程说明

- 1、教材和课程内容
- 2、时间安排（竞赛）
- 3、学习方法
- 4、成绩（考试、实验、作业）
- 5、考教分离
- 6、要求（不影响他人）



## 第一章 绪论 (Preface)

### § 1-1 材料力学的学科属性

### § 1-2 几个基本概念

### § 1-3 材料力学的任务

### § 1-4 研究内容

### § 1-5 研究方法

### § 1-6 基础和后续课程

## § 1-1 材料力学的属性

### 一、物理学

**物理学**是研究宇宙间物质存在的基本形式、性质、运动和转化、内部结构等方面，从而认识这些结构的组成元素及其相互作用、运动和转化的基本规律的科学。

物理学的各分支学科是按物质的不同存在形式和不同运动形式划分的。人对自然界的认识来自于实践，随着实践的扩展和深入，物理学的内容也在不断扩展和深入。

随着物理学各分支学科的发展，人们发现物质的不同存在形式和不同运动形式之间存在着联系，于是各分支学科之间开始互相渗透。物理学也逐步发展成为各分支学科彼此密切联系的统一整体。

物理学家力图寻找一切物理现象的基本规律，从而统一地理解一切物理现象。这种努力虽然逐步有所进展，但现在离实现这一目标还很遥远。看来人们对客观世界的探索、研究是无穷无尽的。

**物理学分支**：[物理学概览](#)、[力学](#)、[热学](#)、[光学](#)、[声学](#)、[电磁学](#)、[核物理学](#)、[固体物理学](#)

## 二、力学

力学又称经典力学，是研究通常尺寸的物体在受力下的形变，以及速度远低于光速的运动过程的一门自然科学。力学是物理学、天文学和许多工程学的基础，机械、建筑、航天器和舰艇等的合理设计都必须以经典力学为基本依据。

机械运动是物质运动的最基本的形式。机械运动亦即力学运动，是物质在时间、空间中的位置变化，包括移动、转动、流动、变形、振动、波动、扩散等。而平衡或静止，则是其中的特殊情况。物质运动的其他形式还有热运动、电磁运动、原子及其内部的运动和化学运动等。

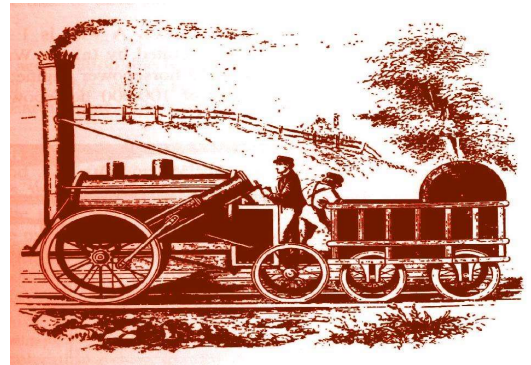
力是物质间的一种相互作用，机械运动状态的变化是由这种相互作用引起的。静止和运动状态不变，则意味着各作用力在某种意义上的平衡。因此，力学可以说是力和(机械)运动的科学。

力学知识最早起源于对自然现象的观察和在生产劳动中的经验。人们在建筑、灌溉等劳动中使用杠杆、斜面、汲水等器具，逐渐积累起对平衡物体受力情况的认识。古希腊的阿基米德对杠杆平衡、物体重心位置、物体在水中受到的浮力等作了系统研究，确定它们的基本规律，初步奠定了静力学即平衡理论的基础。

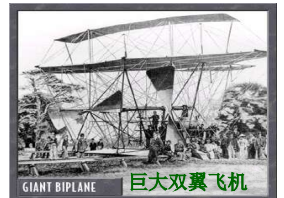
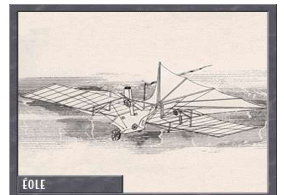
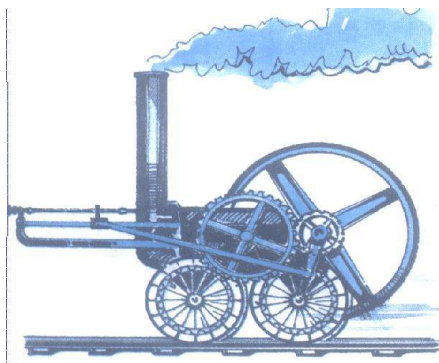
伽利略在实验研究和理论分析的基础上，最早阐明自由落体运动的规律，提出加速度的概念。牛顿继承和发展前人的研究成果(特别是开普勒的行星运动三定律)，提出物体运动三定律。伽利略、牛顿奠定了动力学的基础。牛顿运动定律的建立标志着力学开始成为一门科学。

20世纪以前，在力学知识的积累、应用和完善的基础上，逐渐形成和发展起来的蒸汽机、内燃机、铁路、桥梁、舰船、兵器等大型工业推动了近代科学技术和社会的进步。

17  
世纪  
前后

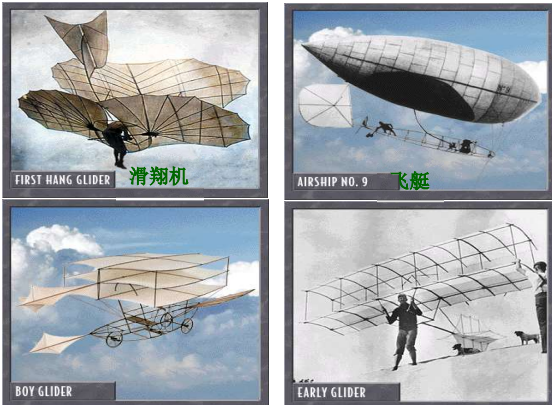


19  
世纪  
初





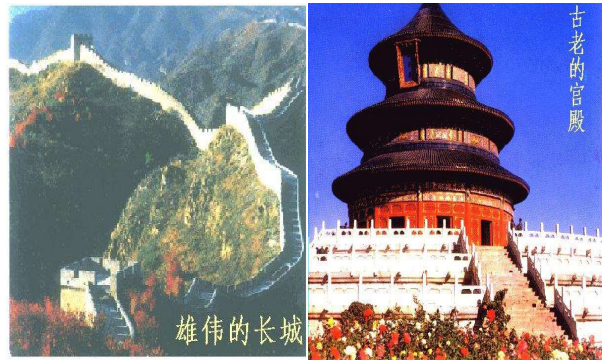
## 我国祖先的功绩



塔高65.86米，距今已有近千年历史，虽然历经近千年的风雨侵蚀和多次地震、炮击的重创，至今仍巍然耸立。用现代力学的观点看，构件的受力特性都较好。

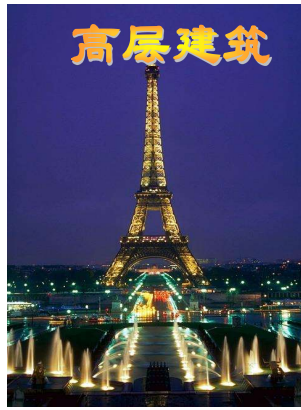
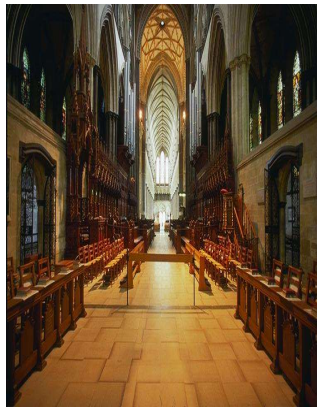


建于1056年  
山西应县佛宫寺



20世纪产生的、诸多高新技术，如高层建筑、大跨度悬索桥、海洋平台、精密仪器、机器人、高速列车以及大型水利工程等许多重要工程更是在力学指导下得以实现，并不断发展完善的。





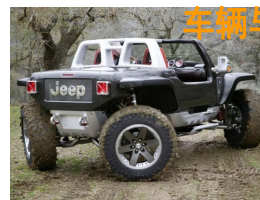
车辆与机械



车辆与机械



车辆与机械

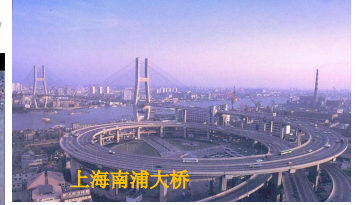




## 道路与造桥



## 我国著名桥梁



## 大型水利设施



大量中、外力学专家为力学的发展作出了突出的贡献，这里只简单介绍部分力学专家。

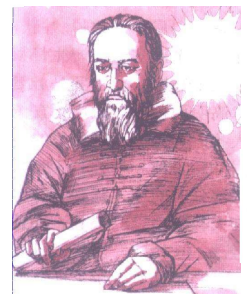
达芬奇



达芬奇说：“力学是数学的乐园，因为我们在这里获得了数学的果实。”



伽利略创建了材料力学



伽利略



## 第谷与开普勒



图 1.8 布拉格街头开普勒与第谷的雕像

### 牛顿

牛顿, I. (Isaac Newton 1642-1727) 伟大的英国物理学家、数学家、天文学家。

1642年12月25日生于林肯郡的一个农民家庭。1727年3月20日因肾结石症在伦敦逝世。

在力学方面的贡献：牛顿在伽利略等人工作的基础上进行深入研究，总结出物体运动的三个基本的定律，为力学奠定了坚实的基础，牛顿是万有引力定律的发现者，创立了经典力学理论体系。

在数学、光学、热学、天文学等方面均作出了开创性的贡献。《自然哲学的数学原理》牛顿最重要的著作，该书总结了他一生中许多重要发现和研究成果。

### 拉格朗日, J.-L.

拉格朗日, J.-L. (Joseph-Louis Lagrange 1736-1813) 法国力学家、数学家。1736年1月25日生于意大利都灵，1813年4月10日卒于巴黎。

拉格朗日是分析力学的奠基人。他在所著《分析力学》(1788)中，应用数学分析解决质点和质点系（包括刚体、流体）的力学问题。1764年建立的虚速度原理的基础上提出分析力学的一般原理，即虚功原理，并同达朗伯原理结合而得到动力学普遍方程。对于有约束的力学系统，他采用适当的变换，引入广义坐标，得到一般运动方程，即第一类和第二类拉格朗日方程。拉格朗日继承欧拉之后研究过理想流体运动方程，并提出速度势和流函数的概念，成为流体无旋运动理论的基础。1811年还导出弹性薄板的平衡方程。

### 铁木辛柯, S.P.

铁木辛柯, S.P. (1878-1972) 美籍俄罗斯力学家。1878年12月23日生于乌克兰的什波托夫卡，1972年5月29日卒于联邦德国。

1903~1906年开始了他的创造性工作，每年去德国格丁根大学在著名学者的指导下从事研究工作。1907~1917年任基辅工学院和彼得堡一些学院任教授。1922年到美国，从电力学研究工作。设计成光弹性设备和电瓷火药头。1928年，他建立了“美国机械工程师学会力学部”，定期组织各种形式的力学讨论会。1936年起斯坦福大学任教授达20年。

铁木辛柯在应用力学方面著述甚多。特别是自20年代末，除授课和培养研究生外，把主要精力用于编写书籍，共编写了《材料力学》、《高等材料力学》、《结构力学》等二十种。

### 钱学森

钱学森 (1911~)。著名科学家。我国近代力学事业的奠基人之一。在空气动力学、航空工程、喷气推进、工程控制论、物理力学、应用力学、人体科学等技术学科领域作出了许多开创性的贡献。为我国火箭、导弹和航天事业的创建与发展作出了卓越贡献。是我国系统工程理论与应用研究的倡导者。共发表专著7部，论文300余篇。他是中国科学院力学研究所创建人之一，是中国力学学会第一任理事长。1957年被选为中国科学院院士。1998年被选为中国工程院院士。钱学森，1911年12月11日出生于上海。现任中国科协名誉主席。

在1955年钱学森突破艰难险阻回到中国之后，对中国的力学、航天和国防事业作出了巨大贡献，其中最重要的可以被概括为十一个“第一”：“组建中国第一个火箭、导弹研究机构；组建中国第一个空气动力学专业研究机构；指导设计中国第一枚液体探空火箭；组织中国第一枚近程地地导弹发射；组织中国第一枚改进后中近程地地导弹发射；组织中国首次导弹与原子弹‘两弹结合’试验；组织中国第一颗人造地球卫星发射；首次获得中国空军环境探测数据；领导制造中国第一艘核动力潜艇；指挥发射中国第一颗返回式卫星；参与组织领导了中国洲际导弹第一次全程飞行、潜艇水下导弹发射和地球静止轨道试验通信卫星发射。”

**钱伟长**




钱伟长（1912~），著名力学家、应用数学家、教育家和社会活动家。是我国近代力学的奠基人之一。兼长应用数学、物理学、中文信息学，著述甚丰。特别在弹性力学、变分原理、振动方法等领域有重要的成就。早期提出的薄板薄壳非线性内禀统一理论对欧美的固体力学和理性力学有过重大影响。创办了我国第一个力学研究室，筹建了中国科学院力学所和自动化研究所。长期从事高等教育领导工作，为培养我国科学技术人才作出重要贡献。社会活动十分活跃，积极推动了祖国的统一大业。1955年被选为中国科学院院士。钱伟长，1912年10月9日出生于江苏省无锡县鸿声乡七房桥村。现任上海工业大学校长，中国政治协商会议全国委员会副主席。

**钱令希**



钱令希（1916~），著名力学家、工程师、教育家。长期从事结构力学的教学和研究，是我国计算力学的工程结构优化设计的开拓者，也是结构力学与现代科学技术密切结合的先行者与奠基人，在我国的桥梁工程、水利工程、船舶工程、港湾工程等各个领域都作出了重要贡献。他善于教书育人，爱徒人才，培养出了几代优秀人才。钱令希，1916年7月16日出生于江苏省无锡县荡口镇的一个书香门第。1955年，他被选为中国科学院学部委员，1982年担任中国科学院技术科学部常务委员。1992年当选为主席团成员。现任大连理工大学教授，中国力学学会名誉理事。

**徐芝纶**



徐芝纶（1911~），力学家、力学教育家。长期致力于工程力学的教育与结构数值分析的研究。为我国工科力学教材建设作出了贡献。他编著的《弹性力学》教材在国内被广泛采用；曾积极推动有限元法在我国的普及与推广。1934年毕业于清华大学，1936年获美国麻省理工学院土木工程硕士，1937年获美国哈佛大学工程科学硕士，1937年回国历任浙江大学、中央大学、上海交通大学教授。徐芝纶，1911年6月20日出生于江苏省江都县一个知识分子家庭。任中国力学学会第一届、第二届理事。现任上海大学教授。

**孙训方**



孙训方（1923~），工程力学家与力学教育家。长期从事固体力学中有关断裂、损伤、疲劳、蠕变的研究。在我国率先将断裂力学研究应用于工程实际，发展了含表面裂纹结构弹性断裂力学分析及完整性评定方法。他在断裂力学的工程应用、损伤局部性的研究中作出了贡献，并培育了一批力学研究人才。学术生活十分活跃，并在国际、国内学术组织中担任职务。他是第一届理事会理事、第二届理事会副理事长、第三届理事会常务理事。孙训方，1923年11月27日出生于安徽省寿县一个知识分子家庭。现任西南交通大学教授。

**力学到底在人类科技进展中扮演着什么样的角色？**

- 在那些里程碑式的科技进步中，如蒸汽机代表的蒸汽时代，电力代表的电气时代，信息代表的信息时代，以及人们预测的以互联网、智能技术、生物技术为代表的新一轮技术革命所催生的新一轮产业革命，似乎力学都没有参与。
- 其实不然，蒸汽机技术的成熟得益于牛顿力学的完善；电气时代得益于发电机和电动机的发明，而熟悉发电机和电动机工作原理的人可能不会说与力学无关，电子工程师们也调侃“如果没有掉入力学和热学的坑里都不好意思说自己是电子工程师”。信息技术可以分为硬件和软件两个部分，硬件自然少不了力和热，软件编程部分也会利用力学模型去规划算法；人工智能是新一轮产业革命中重点领域，而提到人工智能很多人会和信息技术、软件编程相联系，以机器人技术为例，如果没有力学先规划出机器人的功能动作，并给出这些动作的教学描述，信息技术和编程就无法开展。
- 这大概就是马克思所谓的“力学是‘大工业的真正科学的基础’”（《剩余价值理论》第二册，116）。很多工程问题随着讨论的深入，一般都会成为力学问题，力学问题解决后，其它问题也就迎刃而解。可能正因如此爱因斯坦说：“尽管我们今天确实知道古典力学不能用来作为统治全部物理学的基础，可是它在物理学中仍然占领着我们全部思想的中心。”（《物理学与实在》）

物理科学的建立是从力学开始的。在物理科学中，人们曾用纯粹力学理论解释机械运动以外的各种形式的运动，如热、电磁、光、分子和原子内的运动等。当物理学摆脱了这种机械(力学)的自然观而获得健康发展时，力学则在工程技术的推动下按自身逻辑进一步演化，逐渐从物理学中独立出来。





**四大力学**：经典力学、电动力学、量子力学、统计力学

量子力学、相对论、规范场论将现代物理学与现代力学区分开来。现代物理学越来越深入地研究世界和自然的本质。

### 欧拉创建变分法



图 2.2 莱昂哈德·欧拉 (1707-1783)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

### 拉格朗日建立分析力学

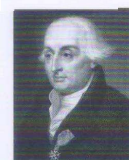


图 2.4 约瑟夫·拉格朗日 (1734-1813)

### 哈密顿力学

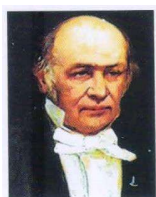


图 2.6 威廉·哈密顿 (1805-1865)

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

### 量子力学

$$i\hbar \dot{\Psi} = \hat{H}\Psi$$



图 2.7 埃尔温·薛定谔 (1887-1961)

薛定谔方程在描述量子力学基本规律方面的地位无可取代。方程中的  $\Psi$  为粒子的波函数,  $\hbar$  为约化普朗克常数,  $\hat{H}$  是哈密顿算符, 代表了系统的哈密顿量。方程 (2.7) 如此之重要, 以至于它被铭刻于薛定谔的墓碑之上。方程 (2.7) 如此对称优美: 左方为虚数 (i), 右方为实数 (1); 左方为导数  $\dot{\Psi}$ , 右方为函数  $\Psi$ ; 左方为  $\hbar$ , 右方为  $H$ 。薛定谔方程与哈密顿-雅可比方程有着高度的相似性——而这种相似性事实上也有其根源—— $\hbar$  为零时, 薛定谔方程即退化为哈密顿-雅可比方程。在薛定谔最早的思考中, 他试图对电子行为找到一种

**薛定谔对哈密顿的赞誉** 薛定谔本人将自己所取得的成就大部分归功于哈密顿。他对哈密顿充满了赞誉:“现代物理学的发展让哈密顿声誉日隆。他著名的力学-光学类比实际上催生了波动力学。波动力学本身对哈密顿众多的科学思想并未有很大的拓展, 当代物理学家们所需要的只不过是 在一个世纪前哈密顿处理实验结果的基础上再多思考一点点而已。现代物理学所有理论的核心概念都是哈密顿量, 如果你想用现代物理学来解决任何问题, 你首先需要知道的就是其哈密顿量。所以, 哈密顿是有史以来最伟大的人物之一。”<sup>[15]</sup>

2018 年 5 月 28 日, 习近平同志在两院院士大会上的讲话中指出,“《墨经》中写道, ‘力, 刑之所以奋也’, 就是说动力是使物体运动的原因……”这里的“动力”即表示“动之力”(dynamics), 又代表“动力源”(power), 还代表“动力”(motivation)。从 dynamics 来看, 我们有牛顿第二定律, 或“力, 形之所以奋也”; 从 power 来看, 我们有造就万物运动的动力源, 或“力, 万物之作用也”; 从 motivation 来看, 我们有激发主观能动性的精神力和信息力, 或“力, 精神所以奋也”。



“十二五”力学学科发展规划最重要的结论是下述关于力学的定义：力学是关于力、运动和变形的科学，研究自然界和工程中复杂介质的宏/微观力学行为，揭示机械运动及其与物理、化学、生物学过程的相互作用规律，是构成人类科学知识体系的重要组成部分。

**力学分支：**固体力学、流体力学、一般力学、工程力学、交叉学科（以研究对象分类）

### 三、固体力学

**固体力学**是力学中形成较早、理论性较强、应用较广的一个分支，它主要研究可变形固体在外界因素(如载荷、温度、湿度等)作用下，其内部各个质点所产生的位移、运动、应力、应变以及破坏等的规律。

**物质形态：**固体，流体（液态和气态），等离子体，软物质

**固体力学分支：**材料力学，弹性力学，塑性力学，稳定性理论，振动理论，结构力学，断裂力学，复合材料力学

**力学基石：**理论力学、材料力学、弹性力学、塑性力学、粘性力学

## § 1-2 几个基本概念

### 一、构件

各种机器、仪器、工具、建筑物和日用品均是由许多不能再拆卸的零件或元件构成，按元件的作用及功能，可将元件分成两大类，即结构元件和功能元件。所谓结构元件，简称构件，其主要的作用是承受载荷，进而传递载荷或运动。如建筑物中的横梁承受载荷，并将载荷传递给立柱，立柱又将载荷传递给地基；又如内燃机的活塞在高压作用下产生往复运动，并将载荷和运动传递给连杆，再通过连杆传给曲杆，且使曲杆产生旋转运动对外做功。所谓功能元件即主要承担各种特殊功能（非载荷功能）的元件，如机器上的标牌、电阻、电容、集成块等。

2012年科学出版社出版的《未来10年中国学科发展战略：力学》卷中，对力学是这样定义的：“力学是关于力、运动及其关系的科学。……力学研究介质运动、变形、流动的宏微观行为，揭示力学过程及其与物理、化学、生物学过程的相互作用规律。”

这一定义体现了三点进步：

(1) 用“力学是关于力、运动及其关系的科学”取代了原来的“力学是研究物质机械运动规律的科学”，将力学从当前已经研究的相对充分的“机械运动”桎梏中解脱出来，从笛卡儿(Rene Descartes, 1596~1650)、拉普拉斯(Pierre-Simon Laplace, 1749~1827)、费尔巴哈(Ludwig Feuerbach, 1804~1872)、马赫等建立发展的机械唯物主义中解脱出来；

(2) “力学研究介质运动、变形、流动的宏微观行为”突破了以往力学研究宏观、物理学研究微观的传统分工，体现了跨层次、跨尺度的思想和行动；

(3) “揭示力学过程及其与物理、化学、生物学过程的相互作用规律”体现了力学的学科交叉性。

### 四、材料力学

**材料力学**是固体力学中最早发展起来的一个分支，它研究材料在外力作用下的力学性能、变形状态和破坏规律，为工程设计中选用材料和选择构件尺寸提供依据。它的研究对象主要是杆件，包括直杆、曲杆(如挂钩、拱)和薄壁杆等，但也涉及一些简单的板壳问题。在固体力学各分支中，材料力学的分析和计算方法一般说来最为简单，但材料力学对于其他分支学科的发展起着启蒙和奠基的作用。

材料力学 € 固体力学 € 力学 € 物理学

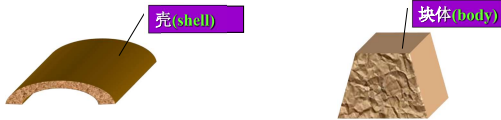
**材料力学以至整个固体力学研究的对象是构件**，为便于对构件进行简化处理，按构件的几何形状我们把构件分为四类。

**第一类称为杆**，即细而长的构件，也即在一个方向上的尺度很大，在另外两个垂直的方向上的尺度很小，这在数学上可近似看成是一维的；

**第二类称为板**，即薄而平的构件，也即在平面内的两个方向上的尺度很大，在厚度方向上的尺度很小，这在数学上可近似看成是二维的；



第三类称为壳，即薄而曲的构件，也即在曲面的两个方向上的尺度很大，在厚度方向上的尺度很少，这在数学上也可近似地看成是二维的；  
 第四种是实体元件，即三个方向上的尺度均较接近的构件。材料力学研究的构件主要是杆件。



材料力学以“杆、梁”为主要研究对象 (the main research objective in mechanics of materials include axially-loaded bars, shafts, beams, and columns)



工程中多为梁、杆结构



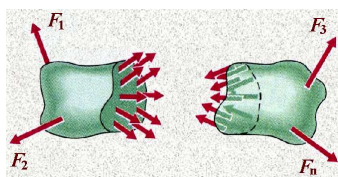
## 二、外力 (external force)

外力：其它物体对构件的机械作用，来自构件外部的力。

- 1. 按作用主体分
  - 载荷：其他物体作用于构件上的主动力
  - 约束反力：由载荷及构件的约束形式所决定的被动力
- 2. 按作用方式分
  - 体积力 (body force)
    - 集中力 (concentrated force)
  - 表面力 (surface force)
    - 分布力 (distributed force)
- 3. 按随时间变化分
  - 静载荷 (static load)
  - 动载荷 (dynamic load)
    - 交变载荷 (alternate load)
    - 冲击载荷 (impact load)

## 三、内力 (internal force)

1. 定义：指由外力作用所引起的、物体内相邻部分之间相互作用力（附加内力）。

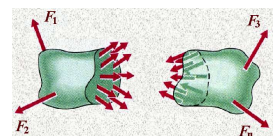


### • 内力

- 物体因受外力作用而使其内部各部分之间因相对位置改变而引起的相互作用；
- 材料力学中的内力，是指外力作用下，物体各质点之间相互作用力的变化量，所以是物体内部各部分之间因外力而引起的附加相互作用力，即“附加内力”；
- 内力随外力的增加而加大，随外力的撤除而消失。

### • 杆件内力分析的特点

- 截面：横截面
- 横截面上的内力：截面法

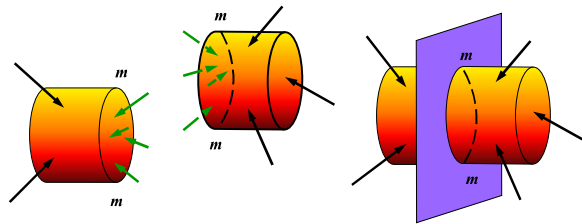
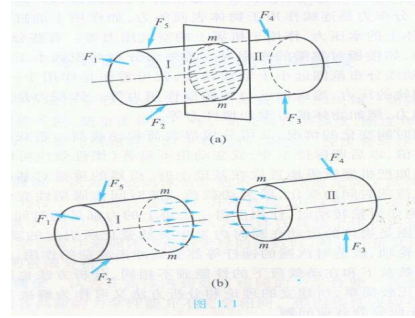
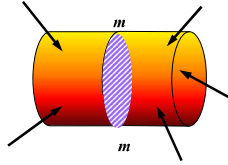


## 2. 内力的求法 —— 截面法 (method of sections)

### 步骤 (procedures for analysis)

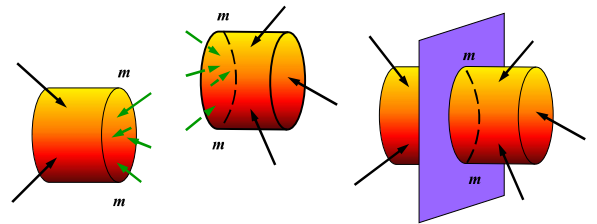
#### ① 截开

在所求内力的截面处，假想地用截面将杆件一分为二。



#### ② 代替

任取一部分，其弃去部分对留下部分的作用，用作用在截面上相应的内力（力或力偶）代替。



#### ③ 平衡

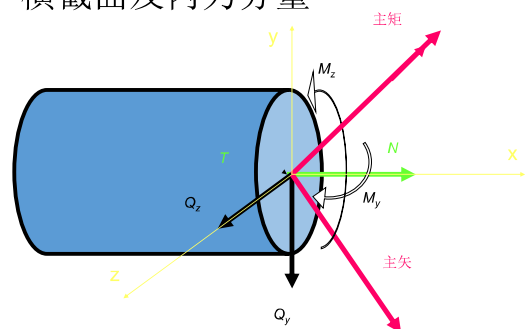
对留下的部分建立平衡方程，根据其上的已知外力来计算杆在截开面上的未知内力（此时截开面上的内力对所留部分而言是外力）。

## 截面法的三步曲

- 沿横截面截开，留下一部分作为研究对象，弃去另一部分——**截开**
- 用作用于截面上的内力代替弃去部分对留下部分的作用——**替代**
- 对留下部分立平衡方程并解之——**平衡**

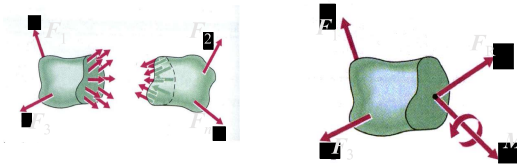
**一截、二取、三代、四平**    **截面；横截面**

## 横截面及内力分量





# 内力主矢与内力主矩

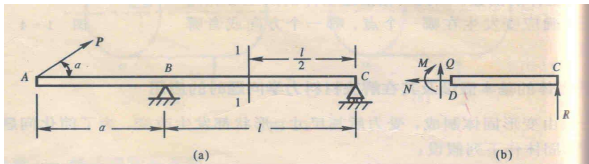
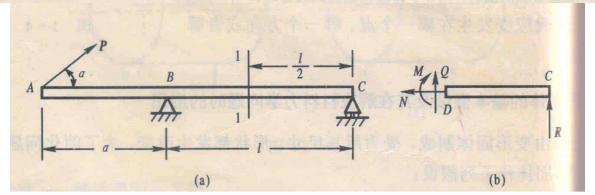


使用静力平衡方程求出内力  $F_R$  和  $M$

$$\sum F_i = F_R \quad \sum m_o(F_i) = M$$

## 例1. 《材料力学辅导》p4例1-1

例 1-1 直杆 ABC 如图 1-5(a) 所示,  $\alpha = 30^\circ$ 。试求 1-1 横截面上的内力。



解: (1) 求支座 C 的约束反力。

$$\sum m_a = 0 \quad P \sin \alpha \cdot a - R \cdot l = 0$$

$$R = P \sin \alpha \cdot \frac{a}{l} = \frac{Pa}{2l}$$

(2) 沿 1-1 截面将杆截开, 取右段, 左段对右段的作用力用  $N$ 、 $Q$  和力偶  $M$  代替。

$$\sum X = 0 \quad N = 0$$

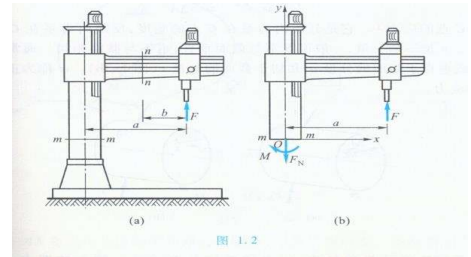
$$\sum Y = 0 \quad Q - R = -\frac{Pa}{2l}$$

$$\sum m_D = 0 \quad M = R \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pa}{4}$$

表述清晰

讨论: 本题是一平面问题, 对平面问题, 杆件截面上的内力分量只有三个, 即轴力  $N$ 、剪力  $Q$  和弯矩  $M$ 。材料力学课程主要讨论平面问题。

## 例1.1 确定 m-m 截面上的内力

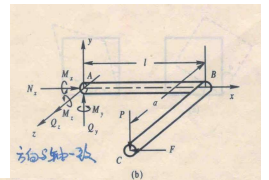
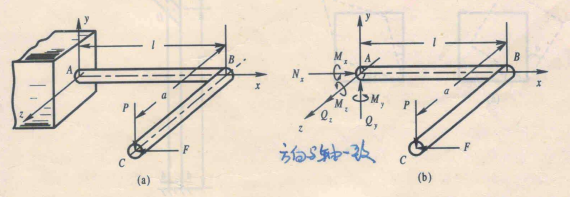


$$N = P$$

$$M = Pa$$

## 例2. 《材料力学辅导》p5例1-2

例 1-2 图 1-6(a) 所示之平面折杆 ABC 的 A 端为固定端, C 端受集中力  $P$  及  $F$ ,  $P$  力与折杆 ABC 所在平面垂直,  $F$  力在 ABC 平面内且与 BC 段垂直。已知  $AB \perp BC$ ,  $AB = l$ ,  $BC = a$ , 试求折杆根部 A 截面上的内力分量。



解: 从 A 截面处截开, 并在 A 截面上加六个内力分量(如图 1-6(b) 所示)。

$$\sum X = 0 \quad N_x = F$$

$$\sum Y = 0 \quad Q_y = P$$

$$\sum Z = 0 \quad Q_z = 0$$

$$\sum m_x = 0 \quad M_x = -Pa$$

$$\sum m_y = 0 \quad M_y = Fa$$

$$\sum m_z = 0 \quad M_z = Pl$$

讨论: 本题是一空间问题, 对空间问题, 构件截面上的内力分量应为六个, 至于哪些分量不为零, 由构件受力情况确定。

#### 四、应力 (Stress)

1. 定义 (Definition): 由外力引起的内力的集度

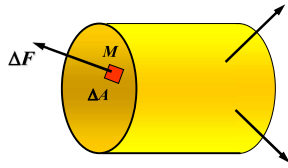
2. 应力 (Stress)

① 平均应力

$$p_m = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

② 全应力 (总应力)

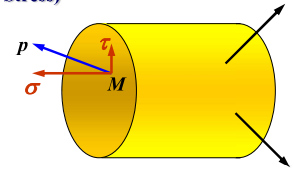
$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$



③ 全应力分解为

★ 垂直于截面的应力称为“正应力” (The stress acting normal to section is called the Normal Stress)

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_N}{\Delta A} = \frac{dF_N}{dA}$$



★ 位于截面内的应力称为“切应力” (The stress acting tangent to section is called the Shear Stress)

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} = \frac{dT}{dA}$$

单位: MPa (与压强的关系)

#### 五、变形和位移 (deformation and displacement)

1. 变形 (deformation)

在外力作用下物体形状和尺寸发生改变

2. 位移 (displacement)

变形前后物体内一点位置的变化

## 五、变形和位移 (deformation and displacement)

### 1. 变形 (deformation)

在外力作用下物体形状和尺寸发生改变

### 2. 位移 (displacement)

变形前后物体内一点位置的变化

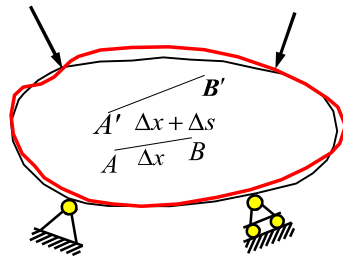
- 变形体与刚体
- 变形的定义及特点
  - 构件内任意两点间的位置发生了变化
  - 变形在弹性体内是连续的
- 变形与刚性位移的区别
- 对变形的定量描述—应变
  - 两种基本变形—长度变化及角度变化
  - 应变定义：线应变；剪应变(角应变)

力学是关于力、运动和变形的科学，研究自然界和工程中复杂介质的宏/微观力学行为，揭示机械运动及其与物理、化学、生物学过程的相互作用规律，是构成人类科学知识体系的重要组成部分。

## 六、应变 (strain)

度量构件一点处的变形程度

$$\epsilon_m = \frac{\Delta s}{\Delta x} \quad \text{平均线应变 (mean normal strain)}$$

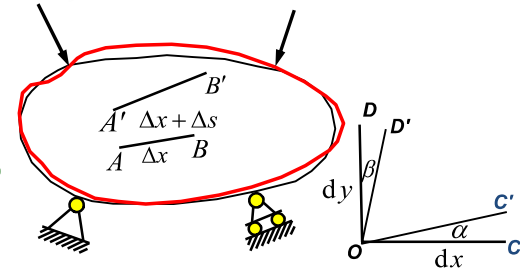


线应变 (normal strain)  $\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$

### 角应变 (shearing strain)

$$\gamma = \alpha + \beta$$

$$\gamma = \lim_{\substack{OC \rightarrow 0 \\ OD \rightarrow 0}} \left( \frac{\pi}{2} - \angle C'OD' \right)$$



引入单元体和微分公式

## 应变 (strain)

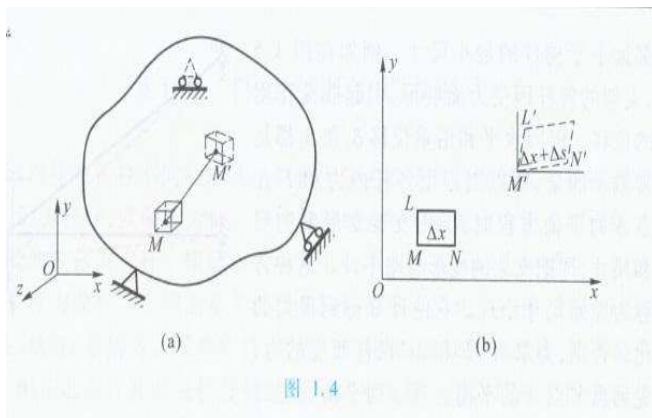


图 1.4

## 线应变与剪应变

$$\epsilon_m = \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

M点沿x方向的线应变——简称应变

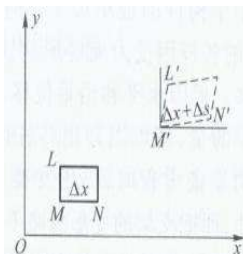
单位

$$\gamma = \lim_{\substack{ML \rightarrow 0 \\ MN \rightarrow 0}} \left( \frac{\pi}{2} - \angle LM'N' \right)$$

M点在xy平面内的剪应变或角应变

直角的改变量

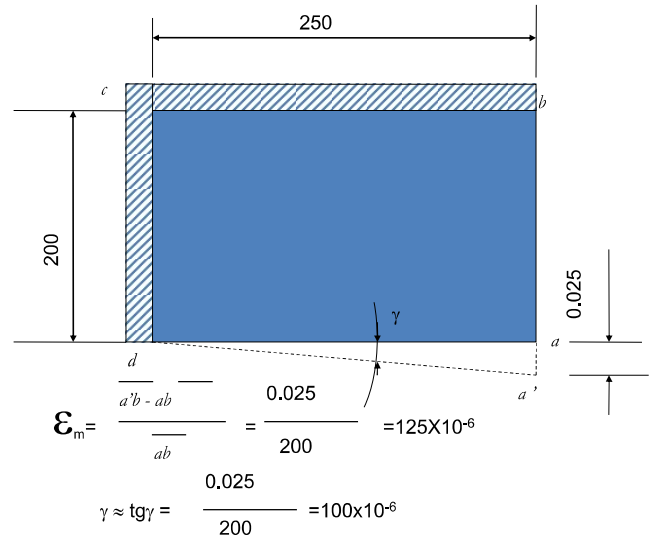
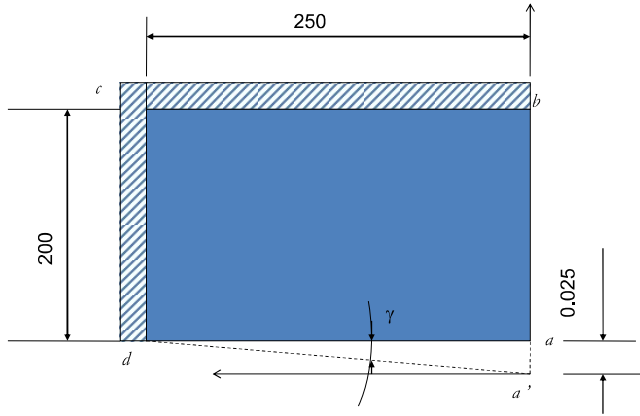
更一般的定义





## 例1.2

求 $ab$ 边的平均应变和 $ab$ 、 $ad$ 两边夹角的变化



## § 1-3 材料力学的任务

### The tasks of mechanics of materials

材料力学是研究结构构件和机械零件承载能力的基础学科。

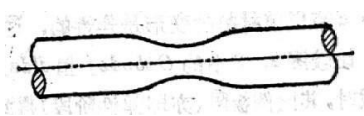
在结构承受载荷或机械传递运动时，为保证各构件或机械零件能正常工作，构件和零件必须符合如下要求：不发生断裂，即具有足够的强度；弹性变形应不超出允许的范围，即具有足够的刚度；在原有形状下的平衡应是稳定平衡，也就是构件不会失去稳定性。

### 1. 强度 (strength)

构件抵抗破坏的能力



## 构件拉伸破坏——强度问题

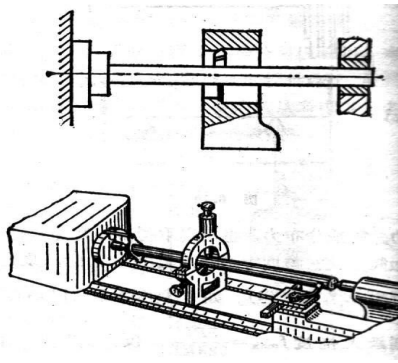


**强度要求：**在载荷作用下构件应不致破坏，即不发生断裂和明显塑性变形，具有抵抗破坏的能力。

### 2. 刚度 (stiffness): 构件抵抗变形的能力。



# 刚度问题的例

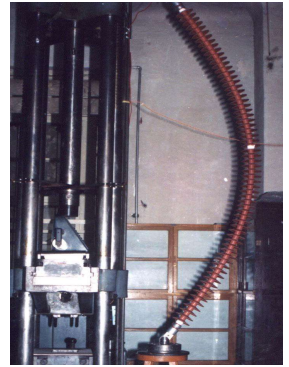


**刚度要求:** 在载荷作用下构件所产生的变形应在工程允许范围内, 具有抵抗变形的能力。

### 3. 稳定性 (stability): 构件保持原有平衡状态的能力

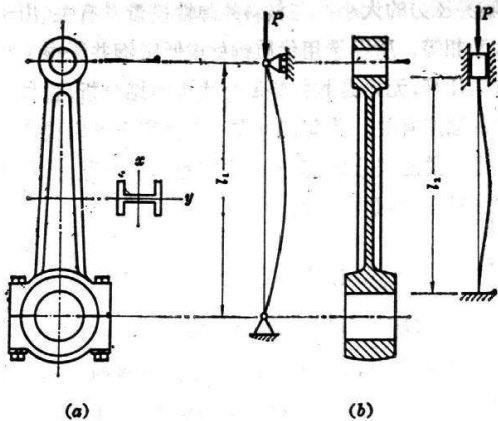


伏尔加河大桥异常晃动



**稳定性要求:** 在载荷作用下构件保持其原有形状下平衡为稳定的平衡, 具有不失稳的能力。

## 压杆稳定问题



伏尔加河大桥异常晃动

在结构承受载荷或机械传递运动时, 为保证各构件或机械零件能正常工作, 构件和零件必须符合如下要求: 不发生断裂, 即具有足够的强度; 弹性变形应不超出允许的范围, 即具有足够的刚度; 在原有形状下的平衡应是稳定平衡, 也就是构件不会失去稳定性。

**强度要求:** 在载荷作用下构件应不致破坏, 即不发生断裂和明显塑性变形, 具有抵抗破坏的能力。

**刚度要求:** 在载荷作用下构件所产生的变形应在工程允许范围内, 具有抵抗变形的能力。

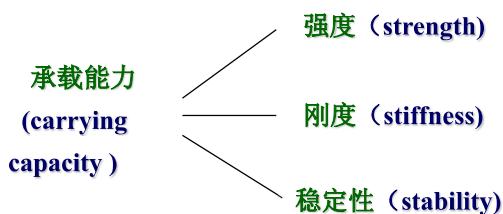
**稳定性要求:** 在载荷作用下构件保持其原有形状下平衡为稳定的平衡, 具有不失稳的能力。

对强度、刚度和稳定性这三方面的要求, 有时统称为“强度要求”, 而材料力学在这三方面对构件所进行的计算和试验, 统称为强度计算和强度试验。

为了确保设计安全, 通常要求多用材料和用高质量材料; 而为了使设计符合经济原则, 又要求少用材料和用廉价材料。材料力学的目的之一就在于为合理地解决这一矛盾, 为实现既安全又经济的设计提供理论依据和计算方法。

## 材料力学的任务

在满足强度、刚度、稳定性的要求下, 以最经济的代价, 为构件确定合理的形状和尺寸, 选择适宜的材料, 而提供必要的理论基础和计算方法。



材料力学是研究结构构件和机械零件承载能力的基础学科。其基本任务是: 将工程结构和机械中的简单构件简化为一维杆件, 计算杆中的应力、变形并研究杆的稳定性, 以保证结构能承受预定的载荷; 选择适当的材料、截面形状和尺寸, 以便设计出既安全又经济的结构构件和机械零件。



# 材料力学的发展简史

在古代建筑中，尽管还没有严格的科学理论，但人们从长期生产实践中，对构件的承力情况已有一些定性或较粗浅的定量认识。例如，从圆木中截取矩形截面的木梁，当高宽比为3:2时最为经济，这大体上符合现代材料力学的基本原理。

随着工业的发展，在车辆、船舶、机械和大型建筑工程的建造中所碰到的问题日益复杂，单凭经验已无法解决，这样，在对构件强度和刚度长期定量研究的基础上，逐渐形成了材料力学。

意大利科学家伽利略为解决建造船舶和水闸所需的梁的尺寸问题，进行了一系列实验，并于1638年首次提出梁的强度计算公式。由于当时对材料受力后会发生变形这一规律缺乏认识，他采用了刚体力学的方法进行计算，以致所得结论不完全正确。后来，英国科学家胡克在1678年发表了根据弹簧实验观察所得的，“力与变形成正比”这一重要物理定律(即胡克定律)。奠定了材料力学的基础。从18世纪起，材料力学开始沿着科学理论的方向向前发展。

# 材料力学的发展简史

高速车辆、飞机、大型机械以及铁路桥梁等的出现，使减轻构件的自重成为亟待解决的问题。随着冶金工业的发展，新的高强度金属(如钢和铝合金等)逐渐成为主要的工程材料，从而使薄型和细长型构件大量被采用。

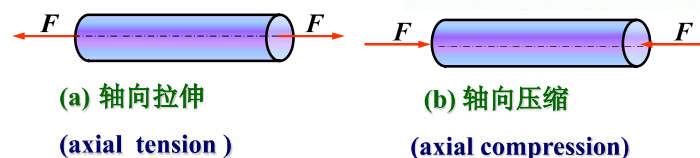
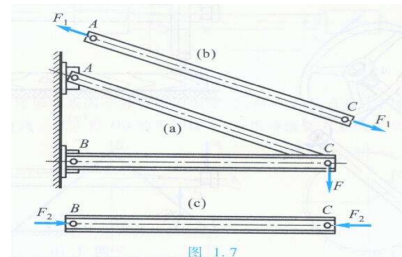
这类构件的失稳破坏屡有发生，从而引起工程界的注意，从而成为构件刚度和稳定性理论发展的推动力。由于超高强度材料和焊接结构的广泛应用，低应力脆断和疲劳事故又成为新的研究课题，促使这方面研究迅速发展。

## § 1-4 材料力学的研究内容

材料力学的研究通常包括两大部分：**一部分**是材料的力学性能(或称机械性能)的研究，材料的力学性能参量不仅可用于材料力学的计算，而且也是固体力学其他分支的计算中必不可少的依据；**另一部分**是对杆件进行力学分析。

## 杆件变形的基本形式

### 1. 轴向拉伸和压缩



(a) 轴向拉伸

(b) 轴向压缩

(axial tension)

(axial compression)

拉压变形——在一对大小相等、方向相反、作用线与杆件的轴心线重合、且作用于杆两端的外载下，杆件发生的伸长或缩短变形；

### 2. 剪切(shear)

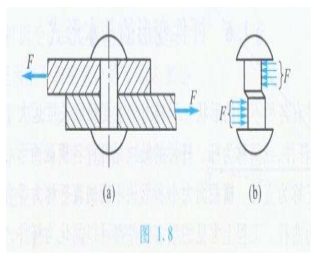
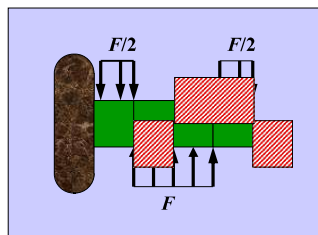


图 1.8

剪切变形——在一对距离十分接近、大小相等、方向相反、作用线与轴心线垂直的外载作用下，杆件横截面方向所发生的错动变形；

### 3. 扭转(torsion)

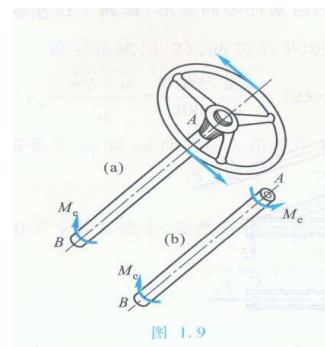
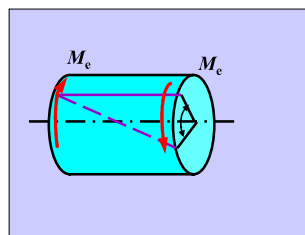


图 1.9

扭转变形——在一对大小相等、方向相反、作用面在杆的两端且垂直与轴心线的力偶作用下杆件发生的变形，表现为杆件的任意两个横截面发生绕轴心线的转动；



## 1. 弯曲 (bending)

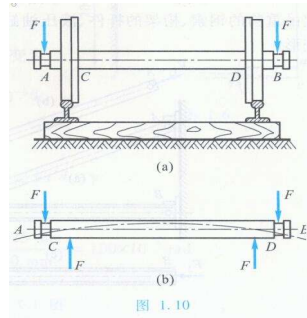
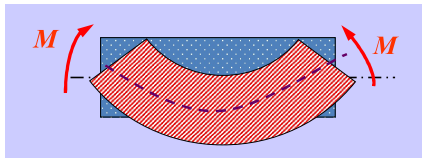
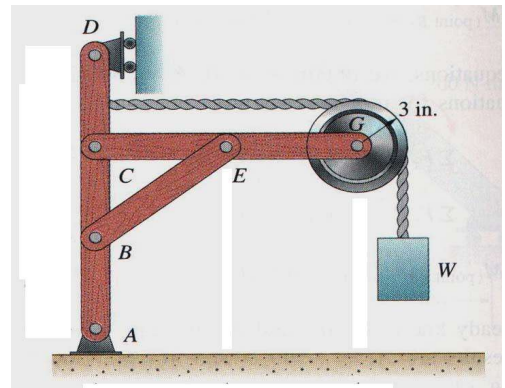


图 1.10

弯曲变形——在垂直与杆轴心线的横力作用、或在一对作用于杆两端且作用于杆轴的纵向平面内的大小相等、方向相反的力偶作用下，杆件发生的变形。表现为杆件的轴心线由直线变为曲线。

**对杆件进行力学分析：**将载荷拆解为单一变形，求解后组合成完整力学解（**组合变形**），再进行强度分析。（研究内容里再介绍）

## 承受拉压弯剪的组合结构



❖ 几种基本变形的组合——组合变形

杆件接受力和变形可分为拉杆、压杆受弯曲(有时还应考虑剪切)梁和受扭转的轴等几大类。杆中的内力有轴力、剪力、弯矩和扭矩。杆的变形可分为伸长、缩短、挠曲和扭转。在处理具体的杆件问题时，根据材料性质和变形情况的不同，可将问题分为线弹性问题、几何非线性问题、物理非线性问题三类。

**线弹性问题**是指在杆变形很小，而且材料服从胡克定律的前提下，对杆列出的所有方程都是线性方程，相应的问题就称为线性问题。对这类问题可使用叠加原理，即为求杆件在多种外力共同作用下的变形(或内力)，可先分别求出各外力单独作用下杆件的变形(或内力)，然后将这些变形(或内力)叠加，从而得到最终结果。

**几何非线性问题**是指杆件变形较大，就不能在原有几何形状的基础上分析力的平衡，而应在变形后的几何形状的基础上进行分析。这样，力和变形之间就会出现非线性关系，这类问题称为几何非线性问题。

**物理非线性问题**是指材料内的变形和内力之间(如应变和应力之间)不满足线性关系，即材料不服从胡克定律。解决这类问题可利用卡氏第一定理、克罗蒂—恩盖塞定理或采用单位载荷法等。

## § 1-5 研究方法

在许多工程结构中，杆件往往在复杂载荷的作用或复杂环境的影响下发生破坏。例如，杆件在交变载荷作用下发生疲劳破坏，在高温恒载条件下因蠕变而破坏，或受高速动载荷的冲击而破坏等。这些破坏是使机械和工程结构丧失工作能力的主要原因。所以，材料力学还研究材料的疲劳性能、蠕变性能和冲击性能。

因为在现实世界中，实际构件一般比较复杂，所以对它的研究一般分两步进行：**先作简化假设，再进行力学分析。**

在材料力学研究中，一般可把材料抽象为可变形固体。对可变形固体，引入几个假设。

## 两个基本假设:

### 一、连续性假设 (continuity assumption)

物质密实地充满物体所在空间, 毫无空隙。

### 二、均匀性假设 (homogenization assumption)

物体内, 各处的力学性质完全相同。即认为从材料中取出的任何一个部分, 不论体积如何, 在力学性能上都是完全一样的。

**连续介质假设** 连续介质假设由瑞士著名科学家欧拉于1753年提出, 是连续介质力学中一个根本性假设。它体现了一种新的时空观。从空间的观点来看, 连续介质假设将真实流体或固体所占有的空间视为由“质点”来连续地无空隙的充满。所谓质点指的是微观上充分大、宏观上充分小的微团。所谓“微观上充分大”, 是指该微团的尺度和分子运动的尺度相比应足够大, 使得微团中包含大量的粒子, 对微团进行统计平均后能得到确定的表征值; 所谓“宏观上充分小”, 是指该微团的尺度和所研究问题的特征尺度相比要充分小, 使得微团上赋予的物理量可视为均匀不变, 从而可以把该微团近似地看成是几何上的一个点。质点所具有的宏观物理量(如质量、速度、压力、温度等)满足一切应该遵循的物理定律。

### 六、平截面假设

认为杆的横截面在杆件受拉伸、压缩或纯弯曲而变形以及圆杆横截面在受扭转而变形的过程中, 保持为刚性平面, 并与变形后的杆件轴线垂直。

### 七、圣维南原理

若作用在物体表面某一小部分上力系由一个静力互等力系代替, 则在离这一部分较远处的应力分布所受影响可以忽略不计。

同弹性力学和塑性力学相比, 材料力学的研究方法显得粗糙。用材料力学方法计算构件的强度, 有时会由于构件的几何外形或作用在构件上的载荷较复杂而得不到精确的解, 但由于方法比较简便, 又能提供足够精确的估算值作为工程结构初步设计的参考, 所以常为工程技术人员所采用。

冯·卡门: “任何一个工程技术问题, 根本就没有100%的准确答案, 要说有, 那只是解决问题和开拓问题的办法。”

## 通常还要作下列几个工作假设:

### 三、各向同性假设 (isotropy assumption)

组成物体的材料沿各方向的力学性质完全相同。

### 四、小变形假设 (neglecting deformation assumption)

材料力学所研究的构件在载荷作用下的变形与原始尺寸相比甚小, 故对构件进行受力分析时可忽略其变形。即假定物体变形很小, 从而可认为物体上各个外力和内力的相对位置在变形前后不变。

### 五、线弹性假设

在小变形和材料中应力不超过比例极限两个前提下, 可认为物体的力和位移(或应变)始终成正比。

## 力学分析方法

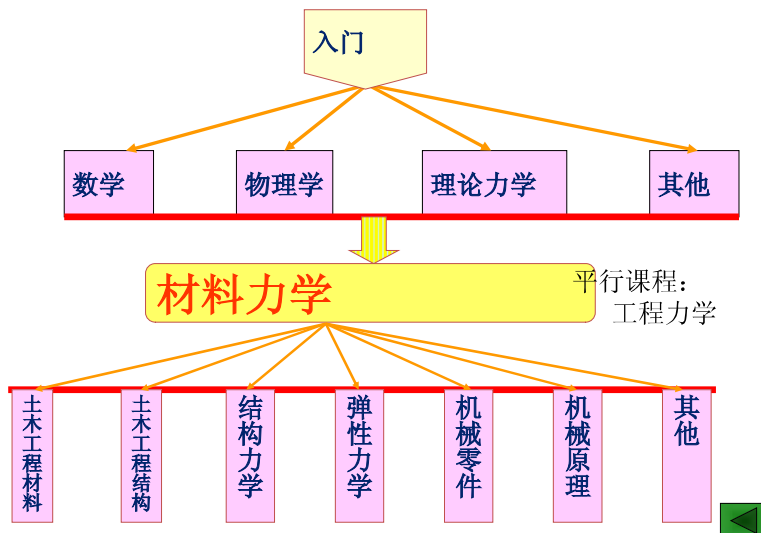
对构件进行力学分析, 首先应求得构件在外力作用下各截面上的内力。其次, 应求得构件中的应力和构件的变形。对此, 单靠静力学的方法就不够了, 还需要研究构件在变形后的几何关系, 以及材料在外力作用下变形和力之间的物理关系。根据几何关系、物理关系和平衡关系(三条件法), 可以解得物体内的应力、应变和位移。把它们和材料的允许应力、允许变形作比较, 即可判断此物体的强度是否符合预定要求。若材料处于多向受力状态, 则应根据强度理论来判断强度。

## § 1-6 基础和后续课程

材料力学是一门很重要的技术基础课, 它与机械、土建、航空、交通水利等工程密切相关, 他在基础课和专业课之间起着桥梁作用。

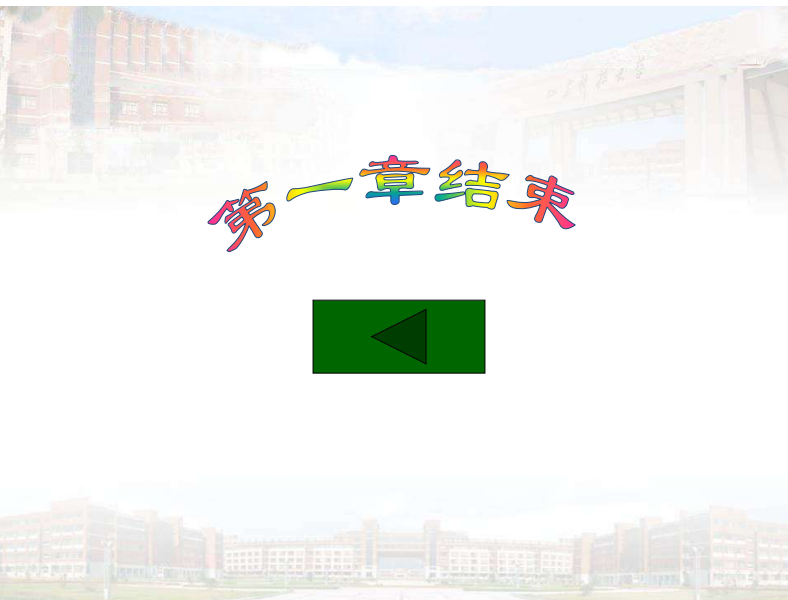
我们必须学好材料力学

We must study Mechanics of Materials hard



力学的探究促发了新的数学方法:

天体力学的发展促进了测量学和解析几何学;牛顿力学造就了微积分;连续介质力学促进了微分方程的研究;理性力学促进了张量函数表示、对称群和积分方程;弹性力学促进了复变函数理论;固体力学促进了奇异性理论、应力波理论;动力学促进了动力系统、傅里叶变换和小波方法;计算力学的发展促进了离散数学、变分法与有限元;实验力学的发展促进了比拟分析、谱分析和相似律等数学方法的发展。



## 第二章 轴向拉伸和压缩

### Chapter 2 Axial Tension and Compression

#### § 2-1 轴向拉压的实例和物理模型

#### § 2-2 杆拉压时横截面上的应力应变分析

#### § 2-3 斜截面上的应力

#### § 2-4 材料的力学性能与虎克定律

#### § 2-5 拉压强度计算

#### § 2-6 拉压杆的变形和位移计算

#### § 2-7 变形能

#### § 2-8 应力集中

#### § 2-9 拉压超静定问题

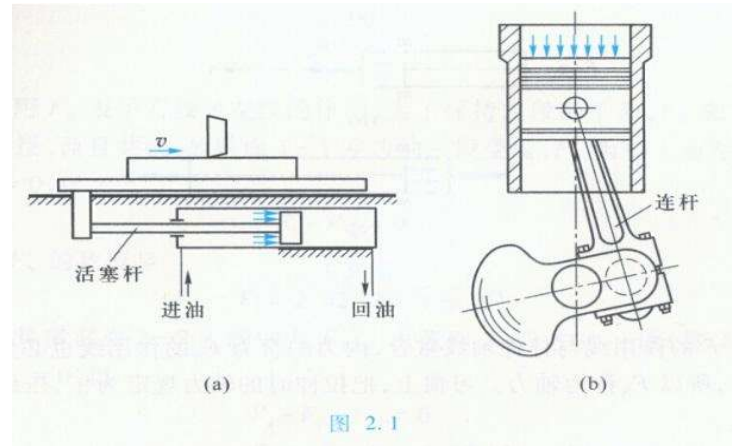
#### § 2-1 轴向拉压的实例和物理模型

##### 一、工程实例

##### (Engineering examples)







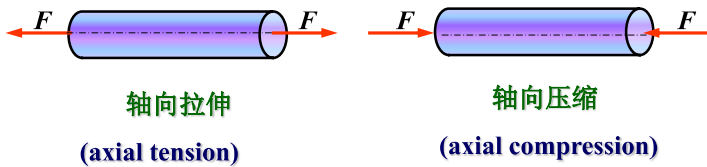
## 二、受力特点(Character of external force)

外力的合力作用线与杆的轴线重合

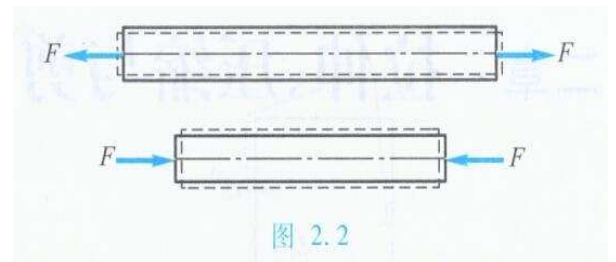
## 三、变形特点(Character of deformation)

沿轴向伸长或缩短

## 四、计算简图 (Simple diagram for calculating)

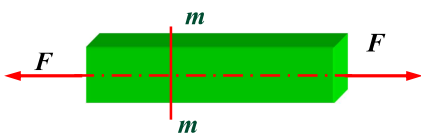


## 五、物理模型



## § 2-2 杆拉压时横截面上的应力应变分析

### 一、求内力：轴力和轴力图

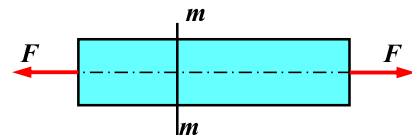


设一等直杆在两端轴向拉力  $F$  的作用下处于平衡,欲求杆件横截面  $m-m$  上的内力.

### 1. 截面法(Method of sections)

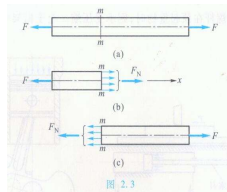
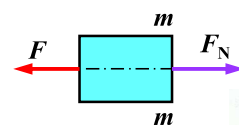
#### (1) 截开

在求内力的截面  $m-m$  处,假想地将杆截为两部分.



#### (2) 代替

取左部分作为研究对象,弃去部分对研究对象的作用以截开面上的内力代替,合力为  $F_N$ .

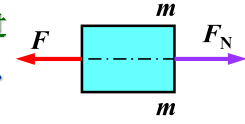
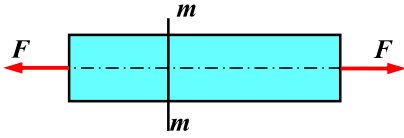


(3) 平衡

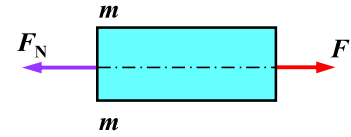
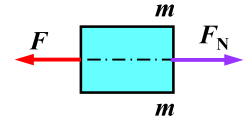
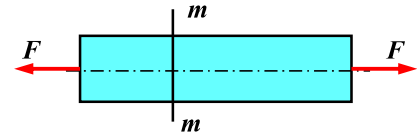
对研究对象列平衡方程

$$F_N = F$$

式中： $F_N$ 为杆件任一横截面  $m-m$  上的内力，与杆的轴线重合，即垂直于横截面并通过其形心，称为**轴力(axial force)**。

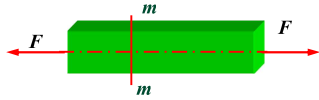


若取 右侧为研究对象，则在截开面上的轴力与左侧部分上的轴力数值相等而指向相反。



## § 2-2 杆拉压时横截面上的应力应变分析

### 一、求内力：轴力和轴力图

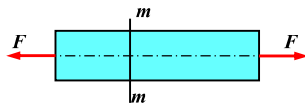


设一等直杆在两端轴向拉力  $F$  的作用下处于平衡,欲求杆件横截面  $m-m$  上的内力.

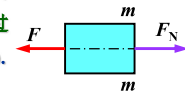
#### (3) 平衡

对研究对象列平衡方程

$$F_N = F$$



式中:  $F_N$  为杆件任一横截面  $m-m$  上的内力,与杆的轴线重合,即垂直于横截面并通过其形心,称为**轴力(axial force)**.



### 2. 轴力符号的规定

(Sign convention for axial force)

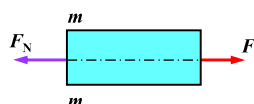
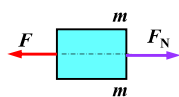
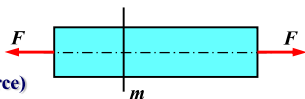
(1) 若轴力的指向背离截面,则规定为正的,称为**拉力**

(tensile force).

(2) 若轴力的指向指向截面,则规定为负的,称为**压力**

(compressive force).

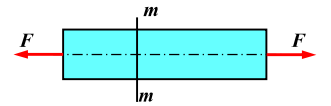
**严格定义**



### 1. 截面法(Method of sections)

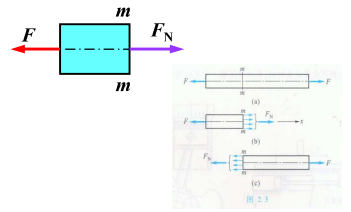
#### (1) 截开

在求内力的截面  $m-m$  处,假想地将杆截为两部分.

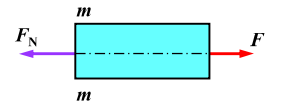
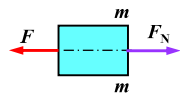
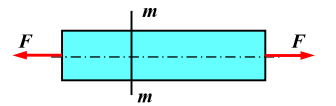


#### (2) 代替

取左部分作为研究对象.弃去部分对研究对象的作用以截面上的内力代替,合力为  $F_N$ .

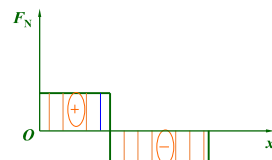


若取右侧为研究对象,则在截面上的轴力与左侧部分上的轴力数值相等而指向相反.



### 二、轴力图(Axial force diagram)

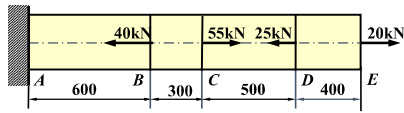
用平行于杆轴线的坐标表示横截面的位置,用垂直于杆轴线的坐标表示横截面上的轴力数值,从而绘出表示轴力与横截面位置关系的图线,称为轴力图.将正的轴力画在  $x$  轴上侧,负的画在  $x$  轴下侧.



**设正法**



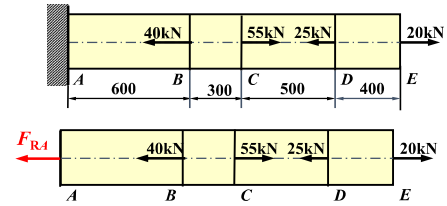
例题 1 一等直杆其受力情况如图所示，作杆的轴力图。



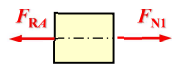
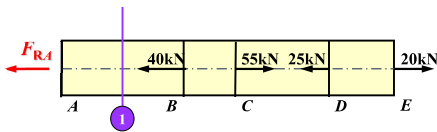
解: 求支座反力

$$\sum F_x = 0 \quad -F_{RA} - 40 + 55 - 25 + 20 = 0$$

$$F_{RA} = 10\text{kN}$$



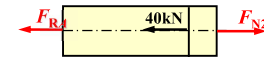
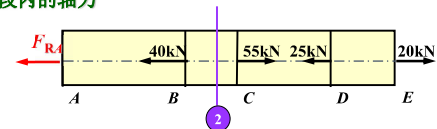
求AB段内的轴力



$$F_{N1} - F_{RA} = 0$$

$$F_{N1} = F_{RA} = +10(\text{kN}) \quad (+)$$

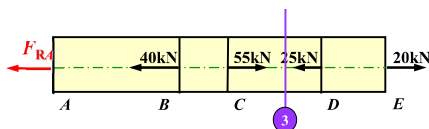
求BC段内的轴力



$$F_{N2} - F_{RA} - 40 = 0$$

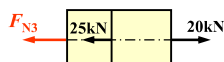
$$F_{N2} = F_{RA} + 40 = +50(\text{kN}) \quad (+)$$

求CD段内的轴力

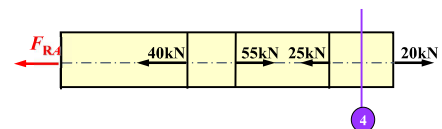


$$-F_{N3} - 25 + 20 = 0$$

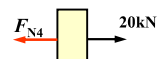
$$F_{N3} = -5(\text{kN}) \quad (-)$$

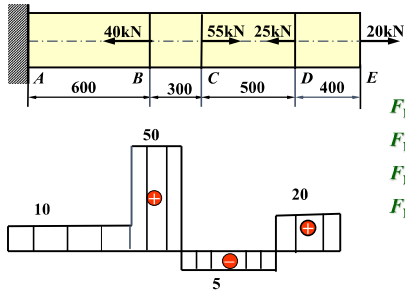


求DE段内的轴力



$$F_{N4} = +20(\text{kN}) \quad (+)$$

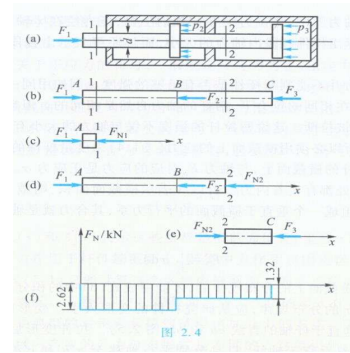




$F_{N1}=10\text{kN}$  (拉力)  
 $F_{N2}=50\text{kN}$  (拉力)  
 $F_{N3}=-5\text{kN}$  (压力)  
 $F_{N4}=20\text{kN}$  (拉力)

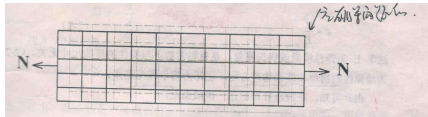
$F_{N\max} = 50(\text{kN})$  发生在BC段内任一横截面上

例题

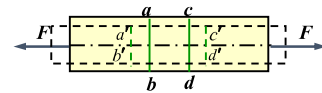


## 二、应力和应变 (三条件法)

### 1、变形几何条件



### 变形现象(Deformation phenomenon)



(1) 横向线 $ab$ 和 $cd$ 仍为直线,且仍然垂直于轴线;

(2)  $ab$ 和 $cd$ 分别平行移至 $a'b'$ 和 $c'd'$ ,且伸长量相等.

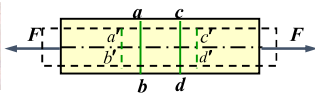
结论: 各纤维的伸长相同,所以它们所受的力也相同.

### 平面假设 (Plane assumption)

变形前原为平面的横截面,在变形后仍保持为平面,且仍垂直于轴线.

几何方程:

正应变  $\varepsilon = \varepsilon_1$  (常数)  
 剪应变  $\gamma = 0$



### 2. 物理条件和物理方程

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

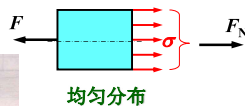
$E$  为弹性模量或扬氏模量.

由此可知,在拉压杆件的任一横截面上,

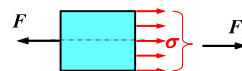
$$\therefore \varepsilon = \varepsilon_1 \text{ (常数)}, \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\therefore \sigma = C_1 E = C_2 \text{ (常数)}$$

此式表明,在任意横截面上正应力 $\sigma$ 也是均匀分布的



### 3. 静力等效条件



$$N = \int_A \sigma dA = \sigma A$$

### 4. 应力应变分析的定解问题和基本解

已知: 杆的任意横截面 A-A 上的轴力  $N$ , A-A 截面的面积  $A$ .

求: A-A 截面上的每一点的轴向应力  $\sigma$  和轴向应变  $\varepsilon$

基本方程:  $\varepsilon = C_1$  (常数)

$$(2-1)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$(2-2)$$

$$N = \int_A \sigma dA$$

$$(2-3)$$

已知：杆的任意横截面 A-A 上的轴力  $N$ ，A-A 截面的面积  $A$ 。  
 求：A-A 截面上的每一点的轴向应力  $\sigma$  和轴向应变  $\epsilon$   
 基本方程： $\epsilon = C_1$  (常数) (2-1)  
 $\epsilon = \sigma/E$  (2-2)  
 $N = \int_A \sigma dA$  (2-3)

解：由 (2-1) 和 (2-2) 即可的  $\sigma = E\epsilon = C_2$  (常数) (2-2')

代入 (2-3) 得  $N = \sigma A$  (2-3')

即  $\sigma = \frac{N}{A}$  (2-4)

代入 (2-2) 得  $\epsilon = \frac{N}{EA}$  (2-5)

(2-4) 和 (2-5) 即为拉压定解问题的基本解。

**正应力公式(Formula for normal stress)**

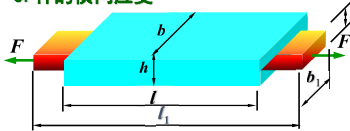
$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

式中， $F_N$  为轴力， $A$  为杆的横截面积， $\sigma$  的符号与轴力  $F_N$  的符号相同。

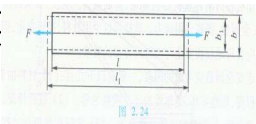
当轴力为正号时（拉伸），正应力也为正号，称为拉应力；

当轴力为负号时（压缩），正应力也为负号，称为压应力。

**5. 杆的横向应变**



**横向变形(Lateral deformation)**



**纵向线应变**

1. 横向变形(Lateral deformation)  $\Delta b = b_1 - b$

2. 横向应变(Lateral strain)  $\epsilon' = \frac{b_1 - b}{b} = \frac{\Delta b}{b}$

$$\epsilon' = \frac{b_1 - b}{b} = \frac{\Delta b}{b}$$

$$\epsilon = \frac{N}{EA}$$

**泊松比 (Poisson's ratio)**

$$\mu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|$$

$\epsilon' = -\mu\epsilon$   $\mu$  称为泊松比 (Poisson's ratio)



1829 年，泊松发现杆件拉伸时横向收缩应变与纵向拉伸变形之比是一个常数，被后人称为泊松比。导出了板的弯曲方程。

表 2.2 几种常用材料的  $E$  和  $\mu$  的约值

材料名称	$E/GPa$	$\mu$
碳 钢	196 ~ 216	0.24 ~ 0.28
合 金 钢	186 ~ 206	0.25 ~ 0.30
灰 铸 铁	78.5 ~ 157	0.23 ~ 0.27
钢及其合金	72.6 ~ 128	0.31 ~ 0.42
铝 合 金	70	0.33

**例题**

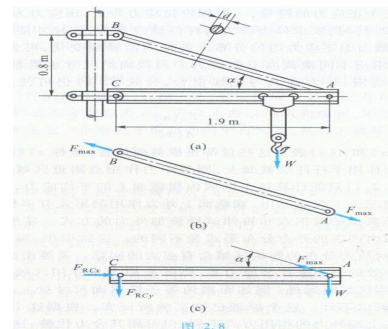


图 2.8

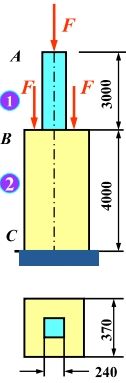


例题2 一横截面为正方形的砖柱分上、下两段,其受力情况,各段长度及横截面积如图所示。已知 $F = 50\text{kN}$ , 试求荷载引起的最大工作应力。

解: (1) 作轴力图

$$F_{N1} = -F = -50\text{kN}$$

$$F_{N2} = -3F = -150\text{kN}$$

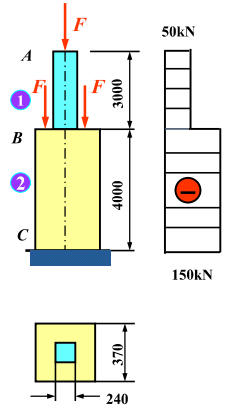


(2) 求应力

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{-50000}{0.24 \times 0.24} = -0.87 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = -0.87 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{-150000}{0.37 \times 0.37} = -1.1 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = -1.1 \text{ MPa}$$

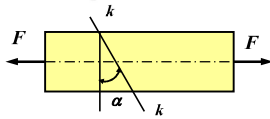
结论:  $\sigma_{\max}$  在柱的下段, 其值为 $1.1\text{MPa}$ , 是压应力。



### § 2-3 斜截面上的应力 (Stress on an inclined plane)

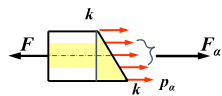
#### 1. 斜截面上的应力 (Stress on an inclined plane)

以  $p_\alpha$  表示斜截面  $k-k$  上的应力, 于是有  $p_\alpha = \frac{F_\alpha}{A_\alpha}$



$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha} \quad F_\alpha = F$$

$$p_\alpha = \frac{F_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F}{A} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha$$



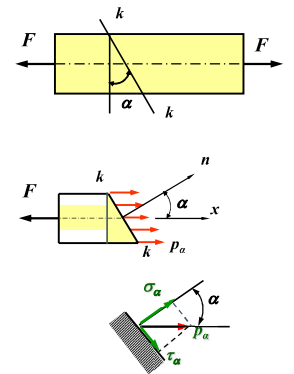
将应力  $p_\alpha$  分解为两个分量:

$$\text{沿截面法线方向的正应力 } \sigma_\alpha$$

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha$$

沿截面切线方向的切应力  $\tau_\alpha$

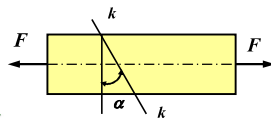
$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$



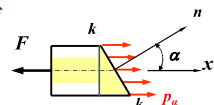
#### 2. 符号的规定 (Sign convention)

(1)  $\alpha$  角

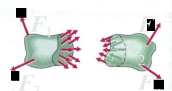
自  $x$  转向  $n$    
 { 逆时针时  $\alpha$  为正号   
 { 顺时针时  $\alpha$  为负号



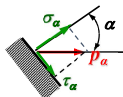
(2) 正应力   
 { 拉伸为正   
 { 压缩为负



(3) 切应力 对研究对象任一点取矩



{ 顺时针为正   
 { 逆时针为负



讨论

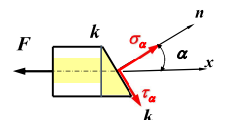
$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_\alpha &= p_\alpha \cdot \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha \\ \tau_\alpha &= p_\alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \right.$$

(1) 当  $\alpha = 0^\circ$  时,  $\sigma_\alpha = \sigma_{\max} = \sigma$

(2) 当  $\alpha = 45^\circ$  时,  $\tau_\alpha = \tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$

(3) 当  $\alpha = -45^\circ$  时,  $\tau_\alpha = \tau_{\min} = -\frac{\sigma}{2}$

(4) 当  $\alpha = 90^\circ$  时,  $\sigma = 0, \tau = 0$



## § 2-4 材料在拉伸和压缩时的力学性能 (Mechanical properties of materials in axial tension and compression)

### 一、实验方法(Test method)

#### 1. 试验条件 (Test conditions)

- (1) 常温: 室内温度
- (2) 静载: 以缓慢平稳的方式加载
- (3) 标准试件: 采用国家标准统一规定的试件

### 二、拉伸试验(Tensile tests)

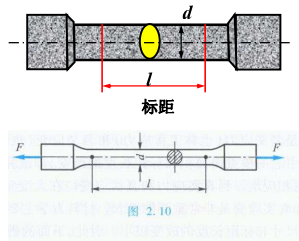
#### 1. 低碳钢拉伸时的力学性质

(Mechanical properties for a low-carbon steel in tension)

##### (1) 拉伸试样

先在试样中间等直部分上划两条横线这一段杆称为**标距**  $l$  (original gage length).

$$l = 10d \text{ 或 } l = 5d$$



##### (3) 应力应变图

表示应力和应变关系的曲线, 称为**应力-应变图** (stress-strain diagram)

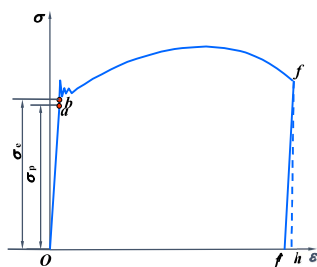
##### (a) 弹性阶段

试样的变形完全弹性的. 此阶段内的直线段材料满足

**胡克定律 (Hooke's law)**

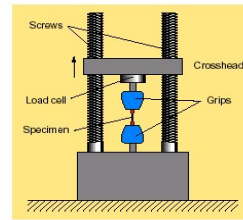
$$\sigma = E\varepsilon$$

$\sigma_p$  — 比例极限 (proportional limit)



### 2. 试验设备(Test instruments)

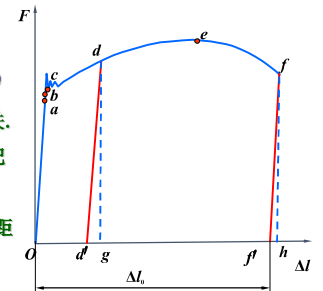
- (1) 微机控制电子万能试验机
- (2) 游标卡尺



##### (2) 拉伸图 ( $F-\Delta l$ 曲线)

表示  $F$  和  $\Delta l$  关系的曲线, 称为**拉伸图** (tension diagram)

拉伸图与试样的尺寸有关. 为了消除试样尺寸的影响, 把拉力  $F$  除以试样的原始面积  $A$ , 得正应力; 同时把  $\Delta l$  除以标距的原始长度  $l$ , 得到应变.



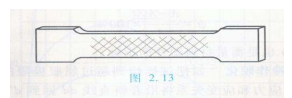
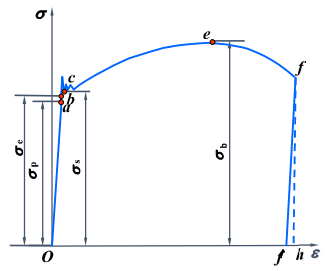
$b$  点是弹性阶段的最高点.

$\sigma_e$  — 弹性极限 (elastic limit)

##### (b) 屈服阶段

当应力超过  $b$  点后, 试样的荷载基本不变而变形却急剧增加, 这种现象称为**屈服 (yielding)**.  $c$  点为屈服下限

$\sigma_s$  — 屈服极限 (yielding strength)

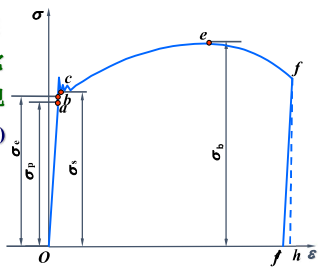


(c) 强化阶段

过屈服阶段后，材料又恢复了抵抗变形的能力，要使它继续变形必须增加拉力。这种现象称为材料的**强化 (hardening)**

e点是强化阶段的最高点

$\sigma_b$  —— 强度极限 (ultimate strength)



(d) 局部变形阶段

过e点后，试样在某一段内的横截面面积显著地收缩，出现**颈缩 (necking)**现象，一直到试样被拉断。

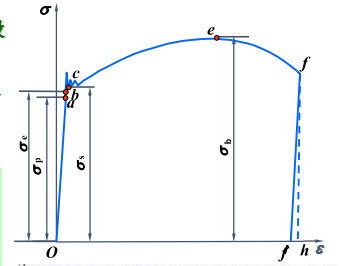
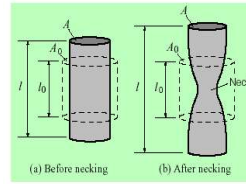


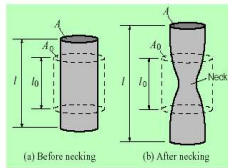
图 2.14

(4) 伸长率和端面收缩率

试样拉断后，弹性变形消失，塑性变形保留，试样的长度由  $l$  变为  $l_1$ ，横截面积原为  $A$ ，断口处的最小横截面积为  $A_1$ 。

伸长率 (percent elongation)  $\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\%$

断面收缩率 (percent reduction in area)  $\psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\%$



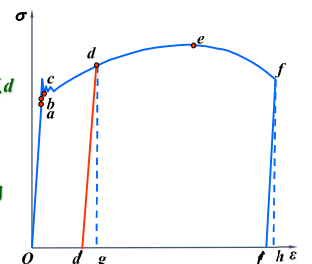
$\delta \geq 5\%$  的材料，称作**塑性材料 (ductile materials)**

$\delta < 5\%$  的材料，称作**脆性材料 (brittle materials)**

(5) 卸载定律及冷作硬化

卸载定律 (unloading law)

若加载到强化阶段的某一点  $d$  停止加载，并逐渐卸载，在卸载过程中，荷载与试样伸长量之间遵循直线关系的规律称为材料的**卸载定律 (unloading law)**。



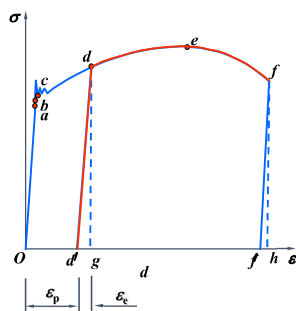
冷作硬化

在常温下把材料预拉到强化阶段然后卸载，当再次加载时，试样在线弹性范围内所能承受的最大荷载将增大。这种现象称为冷作硬化

$\epsilon_e$  - 弹性应变 (elastic strain)

$\epsilon_p$  - 塑性应变 (plastic strain)

$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$



2. 其它塑性材料

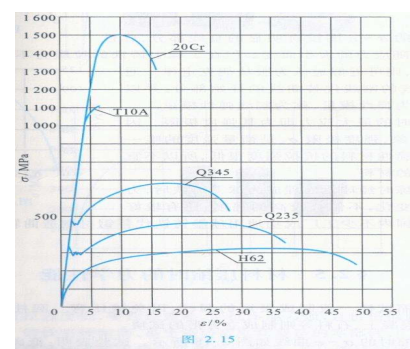
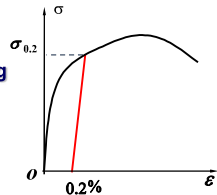


图 2.15



3. 无明显屈服极限的塑性材料  
(Ductile materials without clearing defined yield point)

名义屈服应力用  $\sigma_{0.2}$  表示.

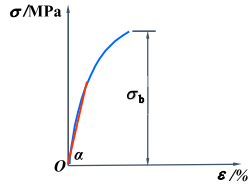


4. 铸铁拉伸时的机械性能

(Mechanical properties for a cast iron in tension)

$\sigma_b$  - 铸铁拉伸强度极限

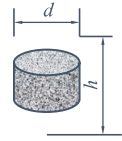
$E = \tan \alpha$  割线斜率



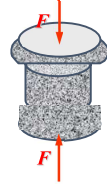
三、材料压缩时的力学性能(Mechanical properties of materials in axial compression)

1. 实验试样 (Test specimen)

$$\frac{h}{d} = 1.5 \sim 3.0$$



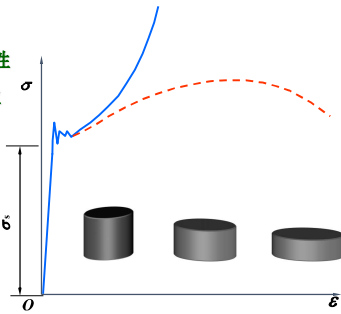
2. 低碳钢压缩时的  $\sigma$ - $\epsilon$  曲线 (Stress-strain curve for a low-carbon steel in compression)



压缩的实验结果表明

低碳钢压缩时的弹性模量  $E$  屈服极限  $\sigma_s$  都与拉伸时大致相同.

屈服阶段后, 试样越压越扁, 横截面积不断增大, 试样不可能被压断, 因此得不到压缩时的强度极限.



3. 铸铁压缩时的  $\sigma$ - $\epsilon$  曲线  
(Stress-strain curve for cast iron in compression)

铸铁压缩时破坏端面与横截面大致成  $45^\circ \sim 55^\circ$  倾角, 表明这类试样主要因剪切而破坏, 铸铁的抗压强度极限是抗拉强度极限的  $4 \sim 5$  倍.

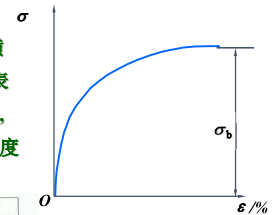
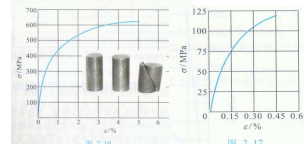


表 2.1 几种常用材料的主要力学性能

材料名称	牌 号	$\sigma_s$ 或 $\sigma_{0.2}$ /MPa	$\sigma_b$ /MPa	$\delta_5$ /%
普通碳素钢	Q235	215 ~ 235	370 ~ 500	25 ~ 27
	Q275	255 ~ 275	410 ~ 540	19 ~ 21
优质碳素结构钢	40	335	570	19
	45	355	600	16
普通低合金结构钢	Q345	275 ~ 345	470 ~ 630	19 ~ 21
	Q390	330 ~ 390	490 ~ 650	17 ~ 19
合金结构钢	20Cr	540	835	10
	40Cr	785	980	9
碳素铸钢	ZG270 - 500	270	500	18
可锻铸铁	KTZ450 - 06	270	450	$6(\delta_5)$
球墨铸铁	QT450 - 10	310	450	10
灰铸铁	HT150		150 ~ 250	

注: 表中  $\delta_5$  是指  $l = 5d$  的标准试样的伸长率;  $\delta_5$  是指  $l = 3d$  的非比例试样的伸长率.

三、温度和时间对力学性能的影响

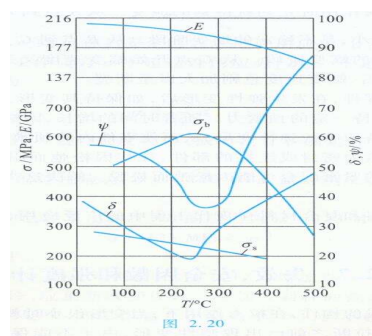
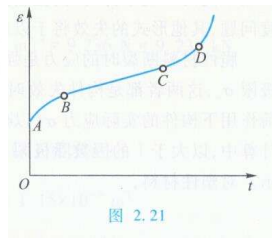


图 2.20

### 蠕变及松弛(creeping & relaxation)

固体材料在保持应力不变的情况下, 应变随时间缓慢增长的现象称为**蠕变(creeping)**

粘弹性材料在总应变不变的条件下, 变形恢复力(回弹应力)随时间逐渐降低的现象称为**松弛(relaxation)**



### 94版《射雕英雄传》

金庸原著:



“那口缸是薄铁皮做的, 缸口封住, 上面放了三寸深的水。那条小河么, 我先在水底下打了桩子, 桩顶离水面五六寸, 因此……因此你们看出来。”

冒牌的“铁掌水上飘”裘千仞: 头顶铁缸、踏水过河

### 中央电视台《加油! 向未来》2016年7月17日



**流变学:** 是研究材料的流动和变形的科学, 它是一门介于力学、化学、物理与工程科学之间的新兴交叉学科。



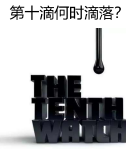
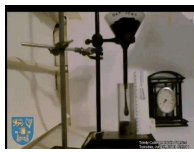
**流变:**  $t \rightarrow 0$  固体  
 $t \rightarrow \infty$  液体



- 材料科学
- 地球物理
- 物理学
- 食物流变
- 混凝土流变学
- 填充高分子流变学

### 最长的实验-沥青滴漏实验

1927年, 澳大利亚昆士兰州的Thomas Parnell教授开始准备实验  
1930年, 实验开始  
2014年, 第9滴沥青滴落  
2005年, Thomas Parnell和John Mainston凭借沥青滴漏实验获**搞笑诺贝尔物理学奖**



沥青滴落过程

www.thetenthwatch.com

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1938.12	1947.2	1954.4	1962.5	1970.8	1979.4	1988.7	2000.11	2014.4

### § 2-5 拉压强度计算

#### 1. 极限应力(Ultimate stress)

材料的两个强度指标  $\sigma_s$  和  $\sigma_b$  称作极限应力或危险应力, 并用  $\sigma_0$  表示。

#### 2. 许用应力(Allowable stress)

以大于1的因数除极限应力, 并将所得结果称为许用应力, 用  $[\sigma]$  表示。  $[\sigma] = \frac{\sigma_u}{n}$   $n$  — 安全因数 (factor of safety)

**塑性材料 (ductile materials)**  $[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$

**脆性材料 (brittle materials)**  $[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$

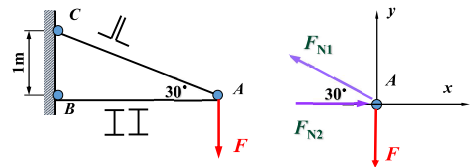
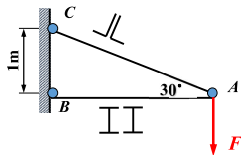
**安全因数 的确定**

从以上讨论看出,若从安全的角度考虑,应加大安全因数,降低许用应力,这就难免要增加材料的消耗和机器的重量,造成浪费。相反,如从经济的角度考虑,应减小安全因数,提高许用应力。这样可以少用材料,减轻自重,但又不利于安全。所以应合理地权衡安全与经济两方面的要求。

至于确定安全因数应考虑的因素,一般有以下儿点:(1)材料的素质,包括材料的均匀程度,质地好坏,是塑性的还是脆性的等。(2)载荷情况,包括对载荷的估计是否准确,是静载荷还是动载荷等。(3)实际构件简化过程和计算方法的精确程度。(4)零件在设备中的重要性,工作条件,损坏后造成后果的严重程度,制造和修配的难易程度等。(5)对减轻设备自重和提高设备机动性的要求。上述这些因素都足以影响安全因数的确定。例如材料的均匀程度较差,分

许用应力和安全因数的数值,可在有关业务部门的一些规范中查到。目前一般机械制造中,在静载的情况下,对塑性材料可取  $n_s = 1.2 \sim 2.5$ ; 脆性材料均匀性较差,且断裂突然发生,有更大的危险性,所以取  $n_s = 2 \sim 3.5$ ,有时甚至取到 3~9。

**例题3** 简易起重设备中, AC杆由两根  $80 \times 80 \times 7$  等边角钢组成, AB杆由两根 10号工字钢组成。材料为Q235钢, 许用应力  $[\sigma] = 170 \text{MPa}$ 。求许可荷载  $[F]$ 。



解: (1) 取结点A为研究对象, 受力分析如图所示。

结点A的平衡方程为

$$\sum F_y = 0 \quad F_{N1} \sin 30^\circ - F = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{N2} - F_{N1} \cos 30^\circ = 0$$

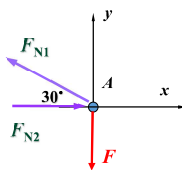
得到  $F_{N1} = 2F$

$$F_{N2} = 1.732F$$

由型钢表查得

$$A_1 = 1086 \times 2 = 2172 \times 10^{-6} \text{m}^2$$

$$A_2 = 1430 \times 2 = 2860 \times 10^{-6} \text{m}^2$$



(2) 许可轴力为

$$[F_{N1}] = [\sigma] A_1 = 369.24 \text{kN}$$

$$[F_{N2}] = [\sigma] A_2 = 486.20 \text{kN}$$

(3) 各杆的许可荷载

$$F_1 = \frac{[F_{N1}]}{2} = 184.6 \text{kN} \quad F_2 = \frac{[F_{N2}]}{1.732} = 280.7 \text{kN}$$

(4) 结论: 许可荷载  $[F] = 184.6 \text{kN}$

### 三、强度条件(Strength condition)

杆内的最大工作应力不超过材料的许用应力

#### 1. 数学表达式(Mathematical formula)

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{N\max}}{A} \leq [\sigma]$$

#### 2. 强度条件的应用(Application of strength condition)

(1) 强度校核  $\frac{F_{N\max}}{A} \leq [\sigma]$

(2) 设计截面  $A \geq \frac{F_{N\max}}{[\sigma]}$

(3) 确定许可荷载  $F_{N\max} \leq [\sigma] A$

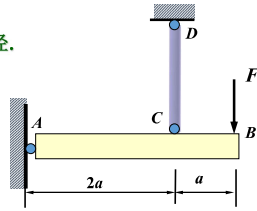
$$F_{N\max} \leq [\sigma] A$$

$$F_{N\max} \leq [\sigma] A$$



例题4 刚性杆ACB有圆杆CD悬挂在C点,B端作用集中力 $F=25\text{kN}$ ,已知CD杆的直径 $d=20\text{mm}$ ,许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$ ,试校核CD杆的强度,并求:

- (1) 结构的许可荷载 $[F]$ ;
- (2) 若 $F=50\text{kN}$ ,设计CD杆的直径.



解:

(1) 求CD杆的内力

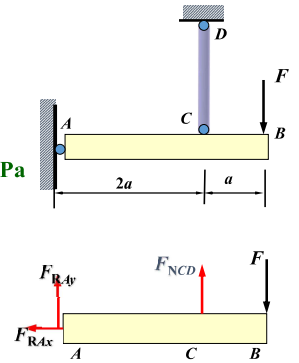
$$\sum M_A = 0 \quad F_{NCD} = \frac{3}{2}F$$

$$\sigma = \frac{F_{NCD}}{A} = \frac{3F/2}{\pi d^2/4} = 119\text{MPa}$$

$$\sigma < [\sigma]$$

(2) 结构的许可荷载 $[F]$

$$\text{由 } \sigma_{CD} = \frac{F_{NCD}}{A} \leq [\sigma]$$



得  $F_{NCD} = \frac{3F}{2} \leq [\sigma]A$

→  $[F] = 33.5\text{kN}$

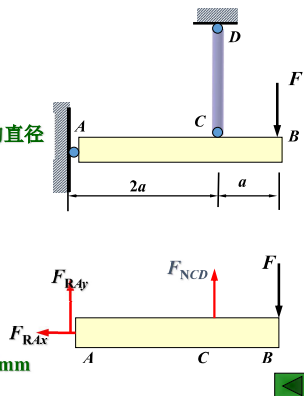
(3) 若 $F=50\text{kN}$ ,设计CD杆的直径

由  $\sigma_{CD} = \frac{F_{NCD}}{A} \leq [\sigma]$

得  $A \geq \frac{F_{NCD}}{[\sigma]} = \frac{3F/2}{[\sigma]}$

→  $\frac{\pi d^2}{4} = \frac{3F/2}{[\sigma]}$

→  $d = 24.4\text{mm}$  取 $d = 25\text{mm}$



例题

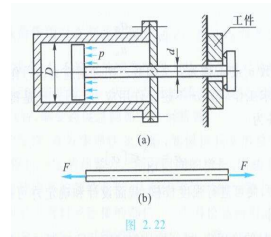


图 2.22

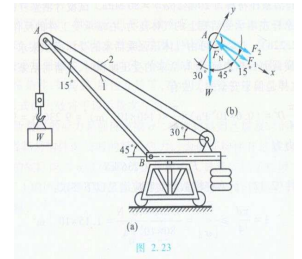


图 2.23

## § 2-5 拉压杆的变形和位移计算

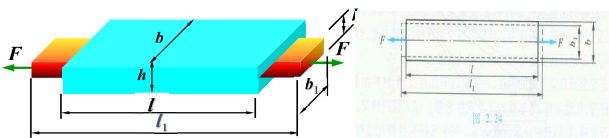


图 2.24

### 一、纵向变形 (Axial deformation)

1. 纵向变形 (Axial deformation)  $\Delta l = l_1 - l$
2. 纵向应变 (Axial strain)  $\frac{\Delta l}{l} = \epsilon$

### 二、胡克定律 (Hooke's law)

实验表明工程上大多数材料都有一个弹性阶段,在此弹性范围内,正应力与线应变成正比.

$$\text{由 } \sigma = E\epsilon \quad \frac{F_N}{A} = \sigma \quad \frac{\Delta l}{l} = \epsilon$$

上式改写为  $\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$

式中  $E$  称为弹性模量 (modulus of elasticity),  $EA$  称为抗拉 (压) 刚度 (rigidity).

由基本解

$$\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{E(x)A(x)} \quad (2-7)$$

即可计算杆的伸长, 并进一步评价构件在外载作用下抵抗变形的能力——刚度。

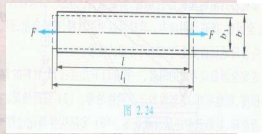
$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$$

$$\therefore du(x) = \frac{N(x)dx}{E(x)A(x)}$$

设杆的原长为  $l$ , 两端伸长为  $\Delta l$ , 则有

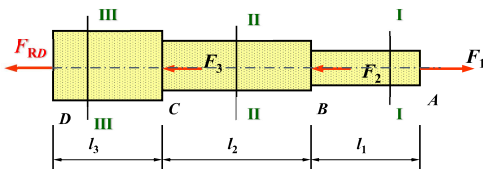
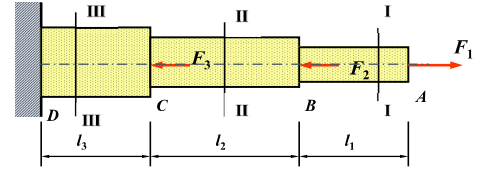
$$\Delta l = \int_0^l du(x) = \int_0^l \frac{N(x)}{E(x)A(x)} dx \quad (5-1)$$

此即计算杆件伸长(缩短)得基本公式。特别当拉压杆为等截面均匀材料且  $N(x)$  为常数  $N$  时, 则有

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)dx}{E(x)A(x)} = \frac{Nl}{EA} \quad (5-2)$$


例题5 图示为一变截面圆杆  $ABCD$ 。已知  $F_1=20\text{kN}$ ,  $F_2=35\text{kN}$ ,  $F_3=35\text{kN}$ ,  $l_1=l_3=300\text{mm}$ ,  $l_2=400\text{mm}$ ,  $d_1=12\text{mm}$ ,  $d_2=16\text{mm}$ ,  $d_3=24\text{mm}$ 。试求:

- (1) I-I、II-II、III-III截面的轴力并作轴力图
- (2) 杆的最大正应力  $\sigma_{\max}$
- (3) B截面的位移及AD杆的变形

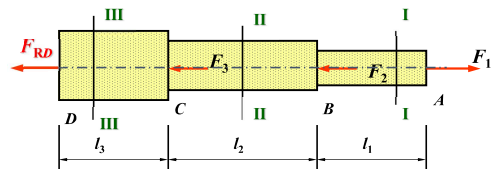
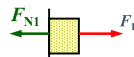


解: 求支座反力  $F_{RD} = -50\text{kN}$

(1) I-I、II-II、III-III截面的轴力并作轴力图

$$F_1 - F_{N1} = 0$$

$$F_{N1} = 20\text{kN} (+)$$

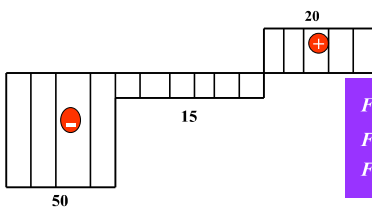
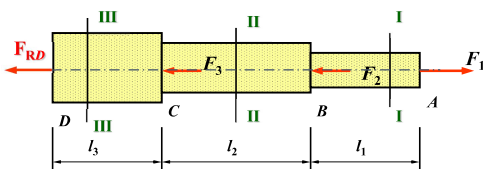


$$F_{N3} - F_{RD} = 0$$

$$F_1 - F_2 - F_{N2} = 0$$

$$F_{N3} = -50\text{kN} (-)$$

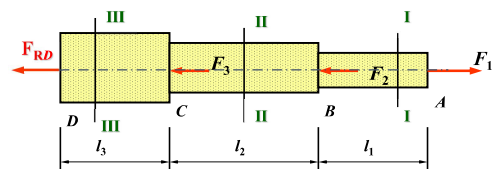
$$F_{N2} = -15\text{kN} (-)$$



$$F_{N1} = 20\text{kN} (+)$$

$$F_{N2} = -15\text{kN} (-)$$

$$F_{N3} = -50\text{kN} (-)$$



(2) 杆的最大正应力  $\sigma_{\max}$

$$AB \text{ 段 } \sigma_{AB} = \frac{F_{N1}}{A_1} = 176.8\text{MPa} (+)$$

$$BC \text{ 段 } \sigma_{BC} = \frac{F_{N2}}{A_2} = 74.6\text{MPa} (-)$$

$$DC \text{ 段 } \sigma_{DC} = \frac{F_{N3}}{A_3} = 110.5\text{MPa} (-)$$

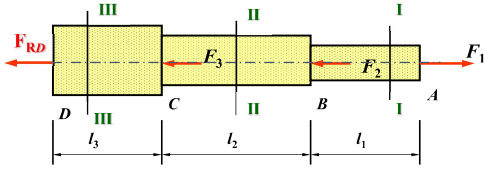
$$F_{N1} = 20\text{kN} (+)$$

$$F_{N2} = -15\text{kN} (-)$$

$$F_{N3} = -50\text{kN} (-)$$

$\sigma_{\max} = 176.8\text{MPa}$   
发生在AB段。

### 《典型题解》p18例2-1



(3) B截面的位移及AD杆的变形

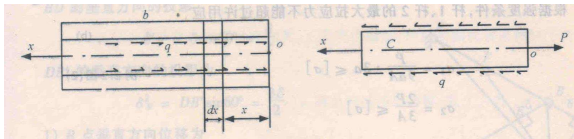
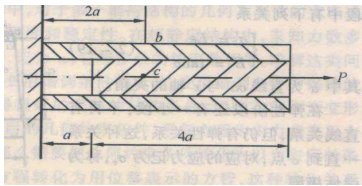
$$\Delta l_{AB} = \frac{F_{N1} l_1}{EA_1} = 2.53 \times 10^{-4} \text{ m} \quad \Delta l_{BC} = \frac{F_{N2} l_2}{EA_2} = -1.42 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{F_{N3} l_3}{EA_3} = -1.58 \times 10^{-4} \text{ m} \quad u_B = \Delta l_{CD} + \Delta l_{BC} = -0.3 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{AD} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = -0.47 \times 10^{-4} \text{ mm}$$

例2-1 (浙江大学1998年试题) 一圆杆紧插在一套管中(如图), 杆端加 \$P\$ 力后恰好能将杆自套管中拉出。设刚拉动时摩擦力均匀分布于两者接触的圆柱面上。杆的横截面积为 \$A\_1\$, 套管的横截面积为 \$A\_2\$, 两者材料的弹性模量皆为 \$E\$。试求: ① 杆刚拉动时套管的伸长量; ② 此时圆杆上 \$C\$ 点的轴向线应变 \$\epsilon\_c\$ 及套管上 \$b\$ 点的轴向线应变 \$\epsilon\_b\$。

解: 将圆杆与套管分开, 如图取轴线为 \$x\$ 轴, 其原点取在右端面上, 接触面上的相互作用力, 用分布摩擦力 \$q\$ 代替。总摩擦力与外力 \$P\$ 平衡, 单位长度的摩擦力 \$q\$ 为



将圆杆与套管分开, 如图取轴线为 \$x\$ 轴, 其原点取在右端面上, 接触面上的相互作用力, 用分布摩擦力 \$q\$ 代替。总摩擦力与外力 \$P\$ 平衡, 单位长度的摩擦力 \$q\$ 为

$$q = \frac{P}{4a}$$

作用在圆杆上距原点为 \$x\$ 的截面上的轴力 \$N(x)\$ 和应力 \$\sigma(x)\$

$$N(x) = P - qx = P - \frac{P}{4a}x, \quad \sigma(x) = \frac{P}{A_1} \left(1 - \frac{x}{4a}\right)$$

根据虎克定律, 杆 \$c\$ 点的应变 \$\epsilon\_c\$

$$\epsilon_c = \frac{\sigma(x)}{E} \Big|_{x=3a} = \frac{P}{4EA_1}$$

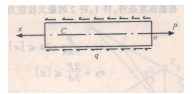
用截面法求得作用在套管距原点 \$x\$ 处的轴力 \$\bar{N}(x)\$ 为

$$\bar{N}(x) = \begin{cases} \frac{P}{4a}x & 0 \leq x \leq 4a \\ P & 4a \leq x \leq 5a \end{cases}$$

其应变 \$\epsilon(x)\$ 为

$$\epsilon = \begin{cases} \frac{Px}{4aEA_2} & 0 \leq x \leq 4a \\ \frac{P}{EA_2} & 4a \leq x \leq 5a \end{cases}$$

套管上 \$b\$ 点的应变



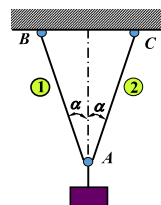
套管上距原点为 \$x\$ 处的微长度 \$d\Delta\$ 的伸长量

$$d\Delta = \epsilon_x dx$$

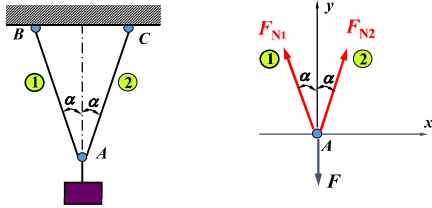
套管的总伸长量 \$\Delta\$ 为所有微长度 \$dx\$ 的积分

$$\Delta = \int_0^{5a} \epsilon_x dx = \int_0^{4a} \frac{Px}{4aEA_2} dx + \int_{4a}^{5a} \frac{P}{EA_2} dx = \frac{3Pa}{EA_2}$$

例题6 图所示杆系由两根钢杆 1 和 2 组成。已知杆端铰接, 两杆与铅垂线均成 \$\alpha=30^\circ\$ 的角度, 长度均为 \$l=2\text{m}\$, 直径均为 \$d=25\text{mm}\$, 钢的弹性模量为 \$E=210\text{GPa}\$。设在点处悬挂一重物 \$F=100\text{kN}\$, 试求 \$A\$ 点的位移 \$\Delta\_A\$。







解: (1) 列平衡方程, 求杆的轴力

$$\sum F_x = 0 \quad F_{N2} \sin \alpha - F_{N1} \sin \alpha = 0$$

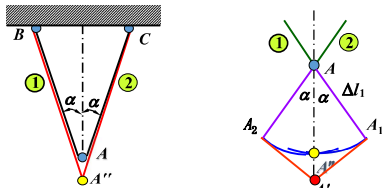
$$\sum F_y = 0 \quad F_{N1} \cos \alpha + F_{N2} \cos \alpha - F = 0$$

$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{F}{2 \cos \alpha}$$

(2) 两杆的变形为

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{F_{N1} l_1}{EA} = \frac{Fl}{2EA \cos \alpha} \quad (\text{伸长})$$

变形的几何条件相容是变形后, 两杆仍应较结在一起。



以两杆伸长后的长度  $BA_1$  和  $CA_2$  为半径作圆弧相交于  $A'$ , 即为  $A$  点的新位置.  $AA''$  就是  $A$  点的位移。

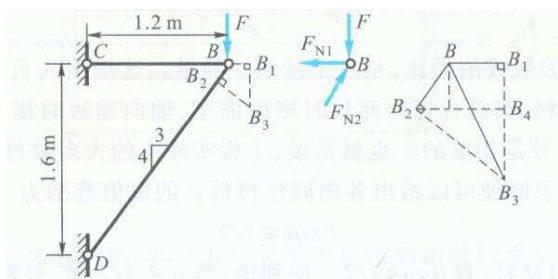
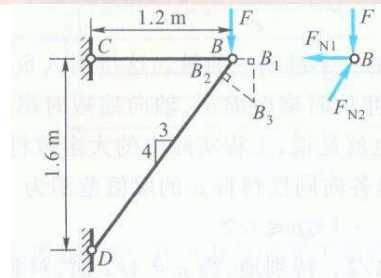
因变形很小, 故可过  $A_1, A_2$  分别做两杆的垂线, 相交于  $A'$

可认为  $AA' = AA''$

$$\Delta_A = A\bar{A}' = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} = \frac{Fl}{2EA \cos^2 \alpha} = 1.293 \text{mm} (\downarrow)$$

## 五、拉压杆件结构的位移计算

例 2.7 图 2.26a 为一简单托架。钢杆  $BC$  的横截面为圆, 直径  $d=20 \text{ mm}$ 。  $BD$  杆为 8 号槽钢。若  $F=60 \text{ kN}$ ,  $[\sigma]=160 \text{ MPa}$ ,  $E=200 \text{ GPa}$ , 试校核托架的强度, 并求  $B$  点的位移。



例 2.7 图 2.26a 为一简单托架。钢杆  $BC$  的横截面为圆, 直径  $d=20 \text{ mm}$ 。  $BD$  杆为 8 号槽钢。若  $F=60 \text{ kN}$ ,  $[\sigma]=160 \text{ MPa}$ ,  $E=200 \text{ GPa}$ , 试校核托架的强度, 并求  $B$  点的位移。

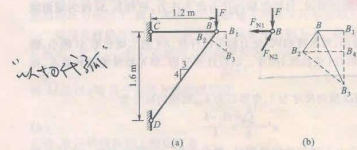


图 2.26

解: 三角形  $BCD$  三边的长度比为  $BC : CD : BD = 3 : 4 : 5$ , 由此求出  $BD = 2 \text{ m}$ , 并根据  $B$  点的平衡方程, 求得  $BC$  杆的轴力  $F_{N1}$  和  $BD$  杆的轴力  $F_{N2}$  分别为

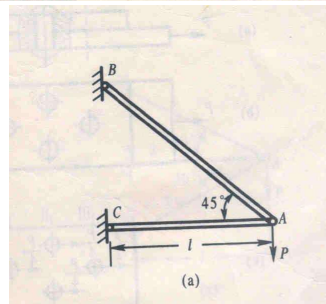
$$F_{N1} = \frac{3}{4} F = 45 \text{ kN} (\text{拉}), \quad F_{N2} = \frac{5}{4} F = 75 \text{ kN} (\text{压})$$

$BC$  杆圆截面的面积  $A_1 = 314 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ 。  $BD$  杆为 8 号槽钢, 由附录 II 型钢表 3 中查得截面面积  $A_2 = 1.020 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ 。于是,  $BC$  和  $BD$  两杆的应力分别是

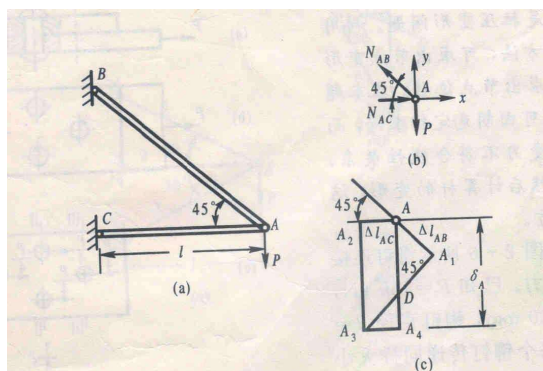
$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = 143 \text{ MPa} < [\sigma]$$

## 《辅导》p15例2-2

例 2-2 如图 2-5(a)所示三角架, AB 杆材料的应力—应变关系为  $\sigma_{AB} = E_1 \epsilon^{1/2}$ , AC 杆材料的应力—应变关系为  $\sigma_{AC} = E_2 \epsilon$ , 而杆的横截面面积均为 A, 试求 A 点的铅垂位移  $\delta_A$ 。



$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = 73.5 \text{ MPa} < [\sigma]$   
 可见两杆都满足强度要求。  
 根据胡克定律, 求出 BC 和 BD 两杆的变形分别为  
 $\overline{BB_1} = \Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{A_1 E} = 0.86 \times 10^{-3} \text{ m}$   
 $\overline{BB_2} = \Delta l_2 = \frac{F_{N2} l_2}{A_2 E} = 0.732 \times 10^{-3} \text{ m}$   
 也可用解析法求位移  $\overline{BB_3}$ , 注意到三角形 BCD 三边的长度比为 3:4:5,  
 由图 2.26b 可以求出  
 $\overline{B_1 B_3} = \Delta l_1 \times \frac{3}{5} + \Delta l_2$   
 B 点的铅垂位移  
 $\overline{B_1 B_3} = \overline{B_1 B_2} + \overline{B_2 B_3} = \overline{BB_2} \times \frac{4}{5} + \overline{B_2 B_3} \times \frac{3}{4}$   
 $= \Delta l_2 \times \frac{4}{5} + \left( \Delta l_1 \times \frac{3}{5} + \Delta l_2 \right) \times \frac{3}{4} = 1.56 \times 10^{-3} \text{ m}$   
 B 点的水平位移  
 $\overline{BB_1} = \Delta l_1 = 0.86 \times 10^{-3} \text{ m}$   
 最后求出位移  $\overline{BB_3}$  为  
 $\overline{BB_3} = \sqrt{(\overline{B_1 B_3})^2 + (\overline{BB_1})^2} = 1.78 \times 10^{-3} \text{ m}$



解: 由图 2-4(b)所示可得节点 A 平衡方程  
 $\sum X = 0 \quad N_{AC} - N_{AB} \cos 45^\circ = 0$   
 $\sum Y = 0 \quad N_{AB} \sin 45^\circ - P = 0$   
 解得  $N_{AB} = \sqrt{2} P$  (拉力);  $N_{AC} = P$  (压力)。  
 根据 AB 杆与 AC 杆材料各自的应力—应变关系, 得各杆的线应变为  
 $\epsilon_{AB} = \left( \frac{\sigma_{AB}}{E_1} \right)^2 = \left( \frac{N_{AB}}{E_1 A} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{2} P}{E_1 A} \right)^2$   
 $\epsilon_{AC} = \frac{\sigma_{AC}}{E_2} = \frac{N_{AC}}{E_2 A} = \frac{P}{E_2 A}$   
 由此求得各杆的变形  
 $\Delta l_{AB} = \epsilon_{AB} l_{AB} = \left( \frac{\sqrt{2} P}{E_1 A} \right)^2 \times \sqrt{2} l = \frac{2 \sqrt{2} P^2 l}{E_1^2 A^2}$   
 $\Delta l_{AC} = \epsilon_{AC} l_{AC} = \frac{Pl}{E_2 A}$   
 可以用图解法求 A 点的铅垂位移。因为  $\Delta l_{AB}$  为拉伸变形, 而  $\Delta l_{AC}$  为压缩变形, 于是各杆之间的变形几何关系如图 2-5(c) 所示, 从而可得  
 $\delta_A = \overline{AA_1} = \overline{AD} + \overline{DA_1} = \frac{\Delta l_{AB}}{\cos 45^\circ} + \Delta l_{AC} = \sqrt{2} \Delta l_{AB} + \Delta l_{AC}$   
 $= \frac{4 P^2 l}{E_1^2 A^2} + \frac{Pl}{E_2 A} = \frac{(4EP + E_1^2 A) Pl}{E_1^2 E_2 A^2}$

例 7 图示三角形架 AB 和 AC 杆的弹性模量  $E=200 \text{ GPa}$   
 $A_1=2172 \text{ mm}^2$ ,  $A_2=2548 \text{ mm}^2$ , 求当  $F=130 \text{ kN}$  时节点的位移。

解: (1) 由平衡方程得两杆的轴力

$$F_{N1} = 2F$$

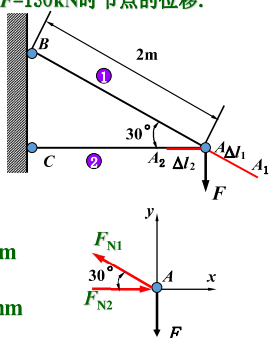
$$F_{N2} = 1.732F$$

1 杆受拉, 2 杆受压

(2) 两杆的变形

$$AA_1 = \Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{EA_1} = 1.198 \text{ mm}$$

$$AA_2 = \Delta l_2 = \frac{F_{N2} l_2}{EA_2} = 0.765 \text{ mm}$$



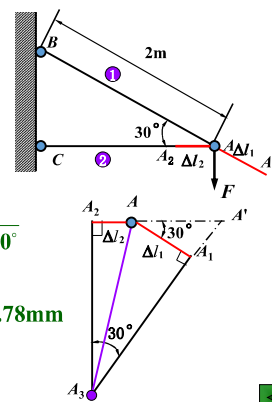
$AA_3$  为所求 A 点的位移

$$A_2 A' = A_2 A + AA' =$$

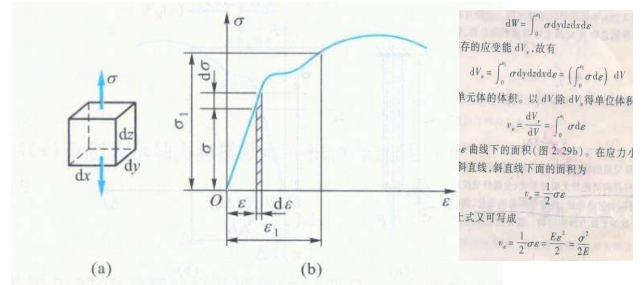
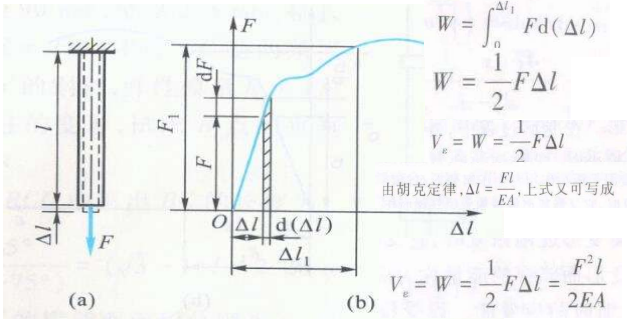
$$\Delta l_2 + \frac{\Delta l_1}{\cos 30^\circ}$$

$$A_2 A_3 = \frac{A_2 A'}{\tan 30^\circ} = \frac{\Delta l_2}{\tan 30^\circ} + \frac{\Delta l_1}{\sin 30^\circ}$$

$$AA_3 = \sqrt{(AA_2)^2 + (A_2 A_3)^2} = 3.78 \text{ mm}$$



## § 2-7 变形能



$v_e$  也称为应变能密度, 单位为  $J/m^3$ 。以比例极限  $\sigma_p$  代入(2.19)式求出的应变能密度, 称为回弹模量, 它可以度量弹性范围内材料吸收能量的能力。

**例 2.9** 简易起重机如图 2.30 所示。BD 杆为无缝钢管, 外径 90 mm, 壁厚 2.5 mm, 杆长  $l = 3$  m, 弹性模量  $E = 210$  GPa。BC 是两条横截面积为  $172$  mm<sup>2</sup> 的钢索, 弹性模量  $E_1 = 177$  GPa。若不考虑立柱的变形和 BD 杆的自重, 试求 B 点的铅垂位移。设  $P = 30$  kN。

**解:** 从三角形 BCD 中解出钢索 BC 的长度为  
 $\overline{BC} = l_1 = \overline{BD} \frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} \approx 2.20$  m

算出钢索 BC 和 BD 杆的横截面积分别为  
 $A_1 = 2 \times 172 \text{ mm}^2 = 344 \text{ mm}^2$   
 $A = \frac{\pi}{4} (90^2 - 85^2) \text{ mm}^2 = 687 \text{ mm}^2$

由 BD 杆的平衡方程, 求得钢索 BC 的拉力为  
 $F_{N1} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} P \approx 1.41 P$

BD 杆所受的轴向压力为  
 $F_{N2} = \frac{\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} P \approx 1.93 P$

$W = \frac{1}{2} P \delta$   
 $P$  所完成的功在数值上应等于该弹性系统的应变能, 即等于钢索 BC 和 BD 杆应变能的总和。故  
 $\frac{1}{2} P \delta = \frac{F_{N1}^2 l_1}{2E_1 A_1} + \frac{F_{N2}^2 l}{2EA}$   
 $\approx \frac{(1.41 P)^2 l_1}{2E_1 A_1} + \frac{(1.93 P)^2 l}{2EA}$   
 由此求得  
 $\delta \approx 4.48 \times 10^{-3} \text{ m}$

## § 2-8 应力集中 (Stress concentrations)

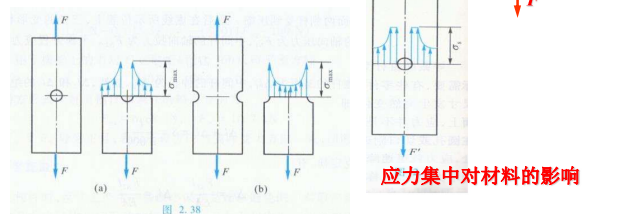
**应力集中 (stress concentrations)**  
 因杆件外形突然变化而引起局部应力急剧增大的现象, 称为应力集中 (stress concentrations).

• 应力集中因数 (stress-concentration factor)

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma}$$

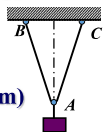
$\sigma_{\max}$  — 发生应力集中的截面上的最大应力

$\sigma$  — 同一截面上按净面积算出的平均应力





## § 2-9 拉压超静定问题 (Statically indeterminate problem of axially loaded members)



### 一、静定与超静定问题 (Statically determinate & indeterminate problem)

#### 1. 静定问题 (Statically determinate problem)

杆件的轴力可以用静力平衡条件求出,这种情况称作静定问题。

#### 2. 超静定问题 (Statically indeterminate problem)

只凭静力平衡方程已不能解出全部未知力,这种情况称做超静定问题。



## 二、超静定问题求解方法 (Solution methods for statically indeterminate problem)

### 1. 超静定的次数 (Degrees of statically indeterminate problem)

未知力数超过独立平衡方程数的数目,称作超静定的次数。

$$n = \text{未知力的个数} - \text{独立平衡方程的数目}$$

### 2. 求解超静定问题的步骤 (Procedure for solving a statically indeterminate)

- (1) 确定静不定次数; 列静力平衡方程
- (2) 根据变形协调条件列变形几何方程
- (3) 将变形与力之间的关系 (胡克定律) 代入变形几何方程得补充方程
- (4) 联立补充方程与静力平衡方程求解

## 三、一般超静定问题举例

### (Examples for general statically indeterminate problem)

例题8 设 1, 2, 3 三杆用铰链连结如图所示,  $l_1 = l_2 = l$ ,  $A_1 = A_2 = A$ ,  $E_1 = E_2 = E$ , 3 杆的长度  $l_3$ , 横截面积  $A_3$ , 弹性模量  $E_3$ 。试求在沿铅垂方向的外力  $F$  作用下各杆的轴力。

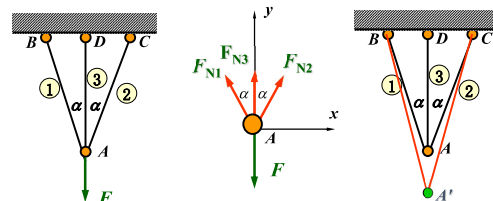
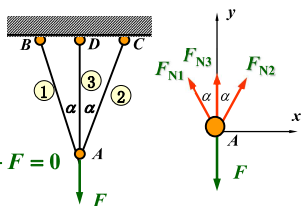
解: (1) 列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \quad F_{N1} = F_{N2}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{N1} \cos \alpha +$$

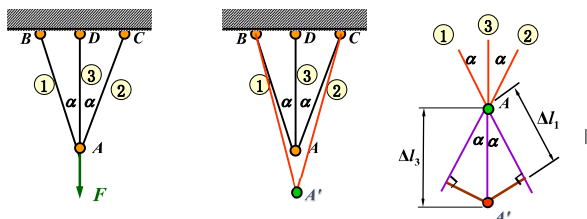
$$F_{N2} \cos \alpha + F_{N3} - F = 0$$

这是一次超静定问题!



### (2) 变形几何方程

由于问题在几何、物理及受力方面都是对称,所以变形后 A 点将沿铅垂方向下移,变形协调条件是变形后三杆仍铰结在一起!



变形几何方程为

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha$$

物理方程为

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{EA_1} \quad \Delta l_3 = \frac{F_{N3} l_3 \cos \alpha}{E_3 A_3}$$

(3) 补充方程

$$F_{N1} = F_{N3} \frac{EA}{E_3 A_3} \cos^2 \alpha$$

### (4) 联立平衡方程与补充方程求解

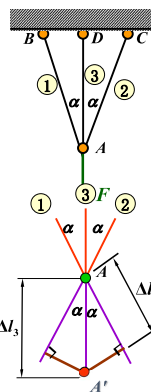
$$F_{N1} = F_{N2}$$

$$F_{N1} \cos \alpha + F_{N2} \cos \alpha + F_{N3} - F = 0$$

$$F_{N1} = F_{N3} \frac{EA}{E_3 A_3} \cos^2 \alpha$$

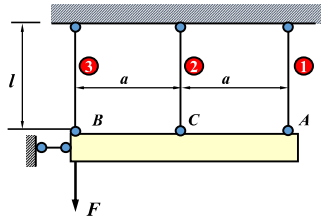
$$\rightarrow F_{N3} = \frac{F}{1 + 2 \frac{EA}{E_3 A_3} \cos^2 \alpha}$$

$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{F}{1 + 2 \cos \alpha + \frac{E_3 A_3}{EA} \cos^2 \alpha}$$



例9 图示平行杆系1、2、3 悬吊着刚性横梁AB，在横梁上作用着荷载F。各杆的截面积、长度、弹性模量均相同，分别为A、l、E。

试求三杆的轴力  $F_{N1}$ ,  $F_{N2}$ ,  $F_{N3}$ 。



解：(1) 平衡方程

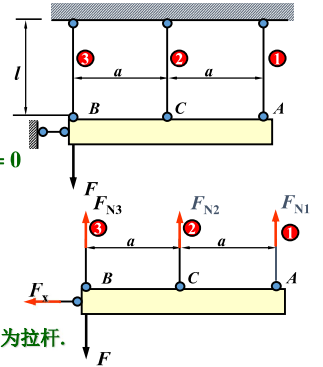
$$\sum F_x = 0 \quad F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

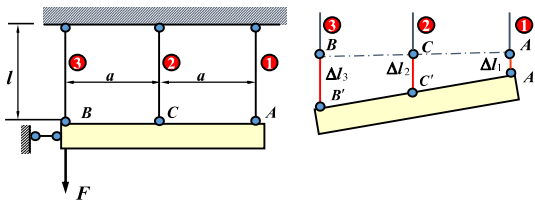
$$F_{N1} + F_{N2} + F_{N3} - F = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_{N1} \cdot 2a + F_{N2} \cdot a = 0$$



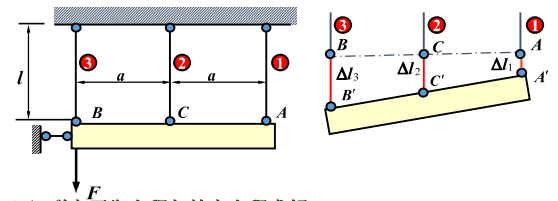
这是一次超静定问题,且假设均为拉杆。



(2) 变形几何方程  $\Delta_1 + \Delta_3 = 2\Delta_2$

物理方程  $\Delta_1 = \frac{F_{N1}l}{EA_1}$     $\Delta_2 = \frac{F_{N2}l}{EA}$     $\Delta_3 = \frac{F_{N3}l}{EA}$

(3) 补充方程  $F_{N1} + F_{N3} = 2F_{N2}$



(4) 联立平衡方程与补充方程求解

$$F_x = 0$$

$$\begin{cases} F_{N1} \cdot 2a + F_{N2} \cdot a = 0 \\ F_{N1} + F_{N2} + F_{N3} - F = 0 \\ F_{N1} + F_{N3} = 2F_{N2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_{N1} &= -F/6 \\ F_{N2} &= F/3 \\ F_{N3} &= 5F/6 \end{aligned}$$

例 2.10 内燃机的气阀弹簧和车辆的缓冲弹簧经常采用双层圆柱螺旋弹簧(图 2.32)。若内弹簧的刚度为  $k_1$ , 外弹簧的刚度为  $k_2$ , 压力为  $F$ , 试求内、外弹簧各自分担的压力。

解: 设以  $F_1$  及  $F_2$  分别表示内弹簧和外弹簧所承担的压力, 显然

$$F_1 + F_2 = F \quad (e)$$

在  $F_1$  作用下, 内弹簧的压缩变形为

$$\lambda_1 = \frac{F_1}{k_1}$$

在  $F_2$  作用下, 外弹簧的压缩变形为

$$\lambda_2 = \frac{F_2}{k_2}$$

以上两式即为物理方程。在压力作用下, 内、外两个弹簧的压缩变形必然相等。于是得变形协调方程

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

或

$$\frac{F_1}{k_1} = \frac{F_2}{k_2} \quad (f)$$

解(e), (f)两式, 得

$$F_1 = \frac{k_1 F}{k_1 + k_2} \quad (g)$$

$$F_2 = \frac{k_2 F}{k_1 + k_2} \quad (h)$$

可见, 内、外弹簧所承担的力与各自的刚度成正比。而刚度  $k_1$  和  $k_2$  又与弹簧的

图 2.32

例 2.11 在图 2.33 所示结构中, 设横梁 AB 的变形可以省略, 1, 2 两杆的横截面面积相等, 材料相同。试求 1, 2 两杆的内力。

解: 设 1, 2 两杆的轴力分别为  $F_{N1}$  和  $F_{N2}$ 。由 AB 杆的平衡方程  $\sum M_A = 0$ , 得

$$3F - 2F_{N2} \cos \alpha - F_{N1} = 0 \quad (h)$$

由于横梁 AB 是刚性杆, 结构变形后, 它仍为直线, 由图中看出, 1, 2 两杆的伸长  $\Delta l_1$  和  $\Delta l_2$  应满足以下关系:

$$\frac{\Delta l_2}{\cos \alpha} = 2\Delta l_1 \quad (i)$$

这就是变形协调方程。

由胡克定律,

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l}{EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_{N2} l}{EA \cos \alpha}$$

代入(i)式得

$$\frac{F_{N2} l}{EA \cos^2 \alpha} = 2 \frac{F_{N1} l}{EA} \quad (j)$$

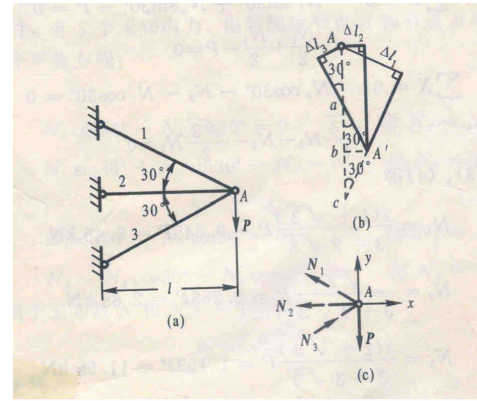
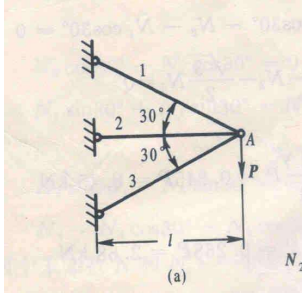
由(h), (j)两式解出

$$F_{N1} = \frac{3F}{4 \cos^3 \alpha + 1}, \quad F_{N2} = \frac{6F \cos^2 \alpha}{4 \cos^3 \alpha + 1}$$

图 2.33

《辅导》p17例2-4

例 2-4 一支架受力如图 2-7(a)所示。1、2、3 杆材料相同，横截面积分别为  $A_1 = 150 \text{ mm}^2$ ， $A_2 = 150 \text{ mm}^2$ ， $A_3 = 200 \text{ mm}^2$ 。若  $P = 10 \text{ kN}$ ，试求各杆轴力。



解：假设支架受力后，1、2 杆伸长，3 杆缩短，节点 A 移至 A' (图 2-7(b))。相应轴力  $N_1$ 、 $N_2$  为拉力， $N_3$  为压力 (图 2-7(c))。

由图 2-6(b) 可得

$$Ac = Aa + ab + bc$$

即变形协调条件为

$$\frac{\Delta l_1}{\sin 30^\circ} = \frac{\Delta l_2}{\sin 30^\circ} + \frac{\Delta l_3}{\tan 30^\circ} + \frac{\Delta l_2}{\tan 30^\circ}$$

整理上式得

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 + \sqrt{3} \Delta l_3 \quad (1)$$

将物理条件

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA_1} \times \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA_2}, \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l \times 2/\sqrt{3}}{EA_3}$$

代入(1)式得

$$\frac{2N_1 l}{\sqrt{3} EA_1} = \frac{2N_2 l}{\sqrt{3} EA_2} + \frac{\sqrt{3} N_3 l}{EA_3}$$

将  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  的数值代入整理后得

$$2N_1 = N_2 + 2N_3 \quad (2)$$

节点 A (图 2-7(c)) 的平衡条件为

$$\sum Y = 0 \quad N_1 \sin 30^\circ + N_3 \sin 30^\circ - P = 0 \quad (3)$$

$$\frac{N_1}{2} + \frac{N_3}{2} - P = 0$$

$$\sum X = 0 \quad N_1 \cos 30^\circ - N_2 - N_3 \cos 30^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} N_1 - N_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} N_3 = 0$$

联立求解(2)、(3)、(4)得

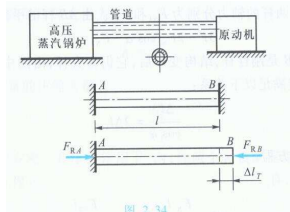
$$N_1 = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{3 + 2\sqrt{3}} P = 0.845P = 8.45 \text{ kN}$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} P = 0.268P = 2.68 \text{ kN}$$

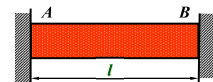
$$N_3 = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{3 + 2\sqrt{3}} P = 1.153P = 11.55 \text{ kN}$$

四、温度应力 (Thermal stresses or temperature stresses)

温度变化将引起物体的膨胀或收缩。静定结构可以自由变形，不会引起构件的内力，但在超静定结构中变形将受到部分或全部约束，温度变化时往往就要引起内力，与之相对应的应力称为热应力 (thermal stresses) 或温度应力 (temperature stresses)。



例题11 图示等直杆 AB 的两端分别与刚性支承连结。设两支承的距离 (即杆长) 为 l，杆的横截面积为 A，材料的弹性模量为 E，线膨胀系数为  $\alpha$ 。试求温度升高  $\Delta T$  时杆内的温度应力。

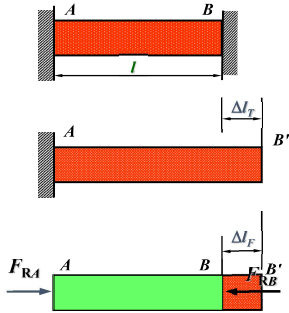




解：这是一次超静定问题  
变形相容条件是  
杆的总长度不变。

$$\Delta l = 0$$

杆的变形为两部分，  
即由温度升高引起的变形  
 $\Delta l_T$  以及与轴向压力  $F_{RB}$  相  
应的弹性变形  $\Delta l_F$



(1) 变形几何方程

$$\Delta l = \Delta l_T - \Delta l_F = 0$$

(2) 物理方程

$$\Delta l_F = \frac{F_{RB} l}{EA} \quad \Delta l_T = \alpha_l \Delta T \cdot l$$

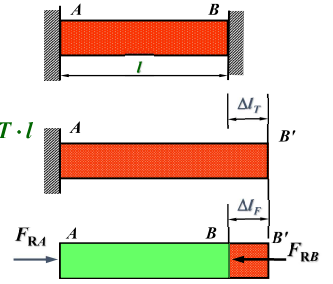
(3) 补充方程

$$\alpha_l \Delta T \cdot l = \frac{F_{RB} l}{EA}$$

(4) 温度内力

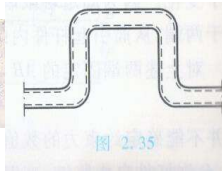
$$F_{RB} = EA \cdot \alpha_l \cdot \Delta T$$

$$\text{由此得温度应力 } \sigma_T = \frac{F_{RB}}{A} = \alpha_l \cdot E \cdot \Delta T$$



碳钢的  $\alpha_l = 12.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$ , 代入上式得  
$$\sigma_T = 12.5 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^3 \Delta T \text{ MPa} = 2.5 \Delta T \text{ MPa}$$

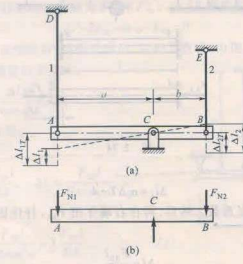
可见当  $\Delta T$  较大时,  $\sigma_T$  的值非常可观。为了避免过高的温度应力, 可以在管道中增加伸缩节 (图 2.35)、在钢轨各段之间留有伸缩缝等, 这样就可以削弱对膨胀构件的约束, 减小温度应力。



高铁铁轨

例 2.12 在图 2.36a 中, 设横梁 ACB 的变形可以省略不计 (即设 ACB 为刚体), 钢杆 AD 的横截面面积  $A_1 = 100 \text{ mm}^2$ , 长度  $l = 330 \text{ mm}$ , 弹性模量  $E_1 = 200 \text{ GPa}$ , 线胀系数  $\alpha_1 =$

$12.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ; 钢杆 BE 的相应数据分别是:  $A_2 = 200 \text{ mm}^2$ ,  $l_2 = 220 \text{ mm}$ ,  $E_2 = 100 \text{ GPa}$ ,  $\alpha_2 = 16.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 。如温度升高  $30 \text{ } ^\circ\text{C}$ , 试求两杆的轴力。



解: 设想拆除钢杆, 钢杆与横梁间的铰链连接, 允许其自由膨胀。这时钢杆和钢杆的温度变形分别是  $\Delta l_1$  和  $\Delta l_2$ 。当把已经伸长的杆件再与横梁相连接时, 必将在两杆内分别引起轴力  $F_{N1}$  和  $F_{N2}$ , 并使两杆再次变形。设  $F_{N1}$  和  $F_{N2}$  的方向如图 2.36b 所示; 横梁的最终位置如图 2.36a 中虚线所示, 而图中的  $\Delta l_1$  和  $\Delta l_2$  分别是钢杆和钢杆因轴力引起的压缩变形。于是得变形协调方程为

$$\frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{\Delta l_1 - \Delta l_2} = \frac{240}{150}$$

这里  $\Delta l_1$  和  $\Delta l_2$  皆为绝对值, 求出上式中的各项变形分别为

$$\Delta l_1 = (330 \times 10^{-3} \text{ m}) (12.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}) (30 \text{ } ^\circ\text{C}) = 124 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\Delta l_2 = (220 \times 10^{-3} \text{ m}) (16.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}) (30 \text{ } ^\circ\text{C}) = 109 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$F_{N1} = \frac{F_{N2} (330 \times 10^{-3} \text{ m})}{(100 \times 10^{-6} \text{ m}^2) (200 \times 10^9 \text{ Pa})} = 0.0165 \times 10^3 F_{N2} \text{ m/N}$$

$$F_{N2} = \frac{F_{N1} (220 \times 10^{-3} \text{ m})}{(200 \times 10^{-6} \text{ m}^2) (100 \times 10^9 \text{ Pa})} = 0.011 \times 10^3 F_{N1} \text{ m/N}$$

把以上数据代入变形协调方程, 经整理后, 得出

$$124 \text{ N} - 0.0165 F_{N2} = \frac{8}{5} (0.011 F_{N1} - 109 \text{ N})$$

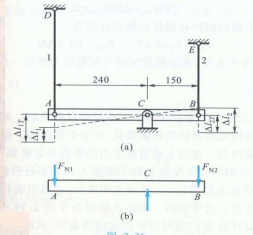
把作用于横梁上的力对 C 点取矩 (图 2.36b), 得平衡方程

$$240 F_{N1} - 150 F_{N2} = 0$$

从以上两方程中解出钢杆和钢杆的轴力分别为

$$F_{N1} = 6.68 \text{ kN}, \quad F_{N2} = 10.7 \text{ kN}$$

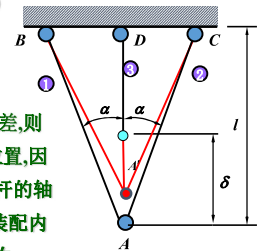
求得的  $F_{N1}$  及  $F_{N2}$  皆为正号, 表示所设方向是正确的, 即两杆均受拉



## 五、装配应力 (Initial stresses)

(Statically indeterminate structure with a misfit)

图示杆系, 若 3 杆尺寸有微小误差, 则在杆系装配好后, 各杆将处于图中位置, 因而产生轴力。3 杆的轴力为拉力, 1、2 杆的轴力为压力。这种附加的内力就称为装配内力, 与之相对应的应力称为装配应力 (initial stresses)。



$\Delta l_3$  代表杆3的伸长

$\Delta l_1$  代表杆1或杆2的缩短

$\Delta$ 代表装配后A点的位移

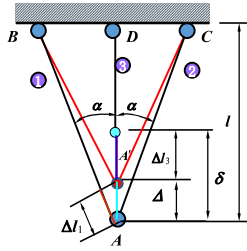
(1) 变形几何方程

$$\Delta l_3 + \Delta = \delta \quad \Delta = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha}$$

$$\Delta l_3 + \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} = \delta$$

(2) 物理方程

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l}{E_1 A_1} \quad \Delta l_3 = \frac{F_{N3} l}{E_3 A_3}$$



(3) 补充方程

$$\frac{F_{N3} l}{E_3 A_3} + \frac{F_{N1} l}{E_1 A_1 \cos^2 \alpha} = \delta$$

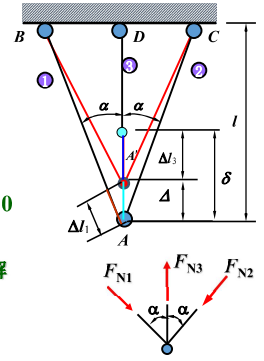
(4) 平衡方程

$$F_{N1} \sin \alpha - F_{N2} \sin \alpha = 0$$

$$F_{N3} - F_{N1} \cos \alpha - F_{N2} \cos \alpha = 0$$

(5) 联立平衡方程与补充方程求解

$$F_{N1}, F_{N2}, F_{N3}$$



例 2.13 吊桥链条的一节由三根长为  $l$  的钢杆组成(图 2.37a)。若三杆的横截面积相等、材料相同,中间钢杆略短于名义长度,且加工误差为  $\delta = \frac{l}{2000}$ ,试求各杆的装配应力。

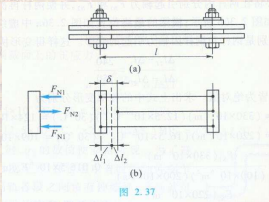


图 2.37

解: 如不计两端连接螺栓的变形,可将链条的一节简化成图 2.37b 所示的超静定结构。当把较短的中间杆与两侧杆一同固定于两端的刚体时,中间杆将被拉长,而两侧杆将被压缩。最后在虚线所示位置上,三杆的变形相互协调。设两侧杆的轴向压力为  $F_{N1}$ 、中间杆的轴向拉力为  $F_{N3}$ 。平衡方程应为

$$2F_{N1} = F_{N3} \quad (e)$$

若两侧杆的缩短为  $\Delta l_1$ ,中间杆的伸长为  $\Delta l_2$ ,显然,  $\Delta l_1$  和  $\Delta l_2$  的绝对值之和

应等于  $\delta$ ,即

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta = \frac{l}{2000} \quad (f)$$

由胡克定律,

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l}{EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_{N2} l}{EA}$$

代入(f)式,得

$$F_{N1} + F_{N2} = \frac{EA}{2000}$$

从(e),(g)两式解出

$$F_{N1} = \frac{EA}{6000}, \quad F_{N2} = \frac{EA}{3000}$$

如材料的弹性模量  $E = 200 \text{ GPa}$ ,求得两侧杆和中间杆的装配应力分别是

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A} = \frac{E}{6000} = 33.3 \times 10^6 \text{ Pa} = 33.3 \text{ MPa (压应力)}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A} = \frac{E}{3000} = 66.7 \times 10^6 \text{ Pa} = 66.7 \text{ MPa (拉应力)}$$

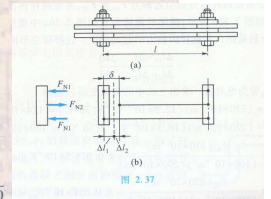
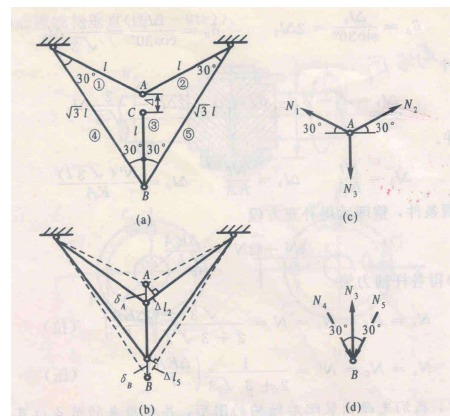
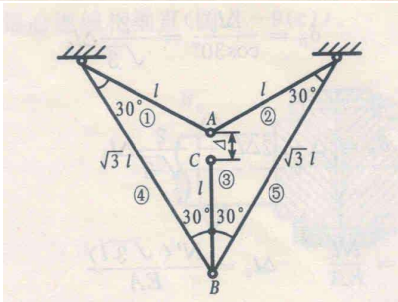
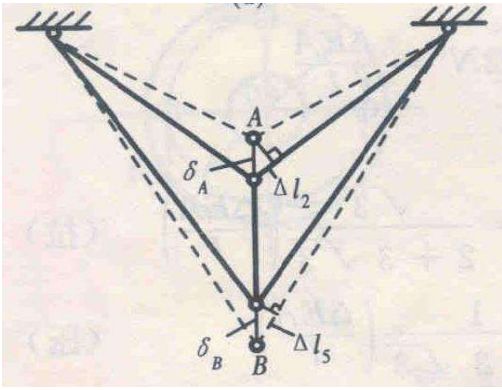


图 2.37

## 《辅导》p18例2-5

例 2-5 图 2-8(a)所示桁架,在装配时发现杆 3 的长度较设计长度短了  $\Delta$ 。设各杆的抗拉刚度均为  $EA$ ,现强迫杆端 A 与 C 装配在一起,试求装配后各杆的轴力。





解: (1) 静力平衡条件。  
桁架有 5 根杆件, 有 5 个未知内力。由装配后节点 A 和节点 B 的平衡条件(图 2-8 (c)、(d)), 可得 4 个平衡方程:

节点 A

$$\sum X = 0 \quad N_2 \cos 30^\circ - N_1 \cos 30^\circ = 0 \quad \text{得 } N_1 = N_2 = N$$

$$\sum Y = 0 \quad N_1 \sin 30^\circ + N_2 \sin 30^\circ - N_3 = 0 \quad \text{得 } N_3 = N$$

节点 B

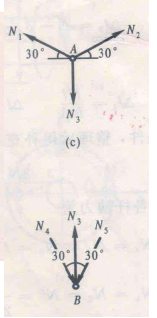
$$\sum X = 0 \quad N_4 \sin 30^\circ - N_5 \sin 30^\circ = 0 \quad \text{得 } N_4 = N_5 = N'$$

$$\sum Y = 0 \quad N_4 - N_1 \cos 30^\circ - N_5 \cos 30^\circ = 0 \quad \text{得 } N_1 = \sqrt{3} N'$$

实际上, 剩下两个未知数  $N$  和  $N'$ , 一个方程

$$N = \sqrt{3} N' \quad (1)$$

(2) 变形协调条件。  
装配后, 节点 A 下移  $\delta_A$ , 节点 B 上移  $\delta_B$ 。由装配后的结构变形图(图 2-8(b))的几何关系



可得变形协调条件

$$\delta_A = \frac{\Delta l_2}{\sin 30^\circ} = 2\Delta l_2 \quad \delta_B = \frac{\Delta l_1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta l_1$$

(3) 物理条件。

$$\Delta l_2 = \frac{N l}{EA} \quad \Delta l_1 = \frac{N' l}{EA} \quad \Delta l_3 = \frac{N' (\sqrt{3} l)}{EA}$$

代入变形协调条件, 整理后得补充方程

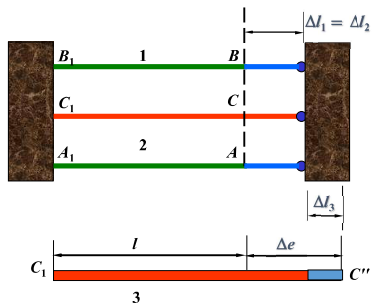
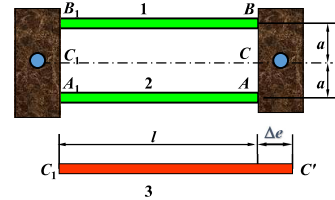
$$3N + 2N' = \frac{\Delta E A}{l} \quad (2)$$

联解(1)、(2)得各杆轴力为

$$N_1 = N_2 = N_3 = N = \frac{\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}} \left( \frac{\Delta E A}{l} \right) \quad (\text{拉})$$

$$N_4 = N_5 = N' = \frac{1}{2 + 3\sqrt{3}} \left( \frac{\Delta E A}{l} \right) \quad (\text{压})$$

**例题10** 两铸件用两根钢杆 1、2 连接, 其间距为  $l=200\text{mm}$ 。现要将制造得过长了  $\Delta e=0.11\text{mm}$  的铜杆 3 装入铸件之间, 并保持三根杆的轴线平行且等间距  $a$ , 试计算各杆内的装配应力。已知: 钢杆直径  $d=10\text{mm}$ , 铜杆横截面积为  $20 \times 30\text{mm}$  的矩形, 钢的弹性模量  $E=210\text{GPa}$ , 铜的弹性模量  $E_3=100\text{GPa}$ 。铸件很厚, 其变形可略去不计, 故可看作刚体。



(1) 变形几何方程为  $\Delta l_1 + \Delta l_3 = \Delta e$

(2) 物理方程

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{EA} \quad \Delta l_3 = \frac{F_{N3} l}{E_3 A_3}$$

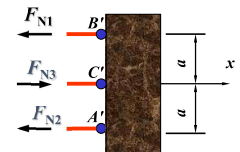
(3) 补充方程

$$\frac{F_{N3} l}{E_3 A_3} = \Delta e - \frac{F_{N1} l}{EA}$$

(4) 平衡方程

$$F_{N1} = F_{N2}$$

$$F_{N3} - F_{N1} - F_{N2} = 0$$



联立平衡方程与补充方程求解, 即可得装配内力, 进而求出装配应力。



第二章结束

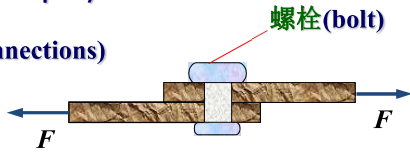


# 第三章 剪切和挤压

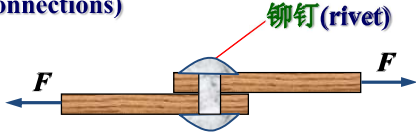
## 一、基本概念和实例 (Basic concepts and examples)

### 1. 工程实例 (Engineering examples)

#### (1) 螺栓连接 (Bolted connections)



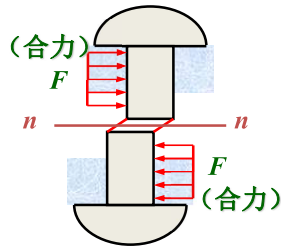
#### (2) 铆钉连接 (Riveted connections)



### 2. 受力特点 (Character of external force)

以铆钉为例

构件受两组大小相等、方向相反、作用线相互很近的平行力系作用。

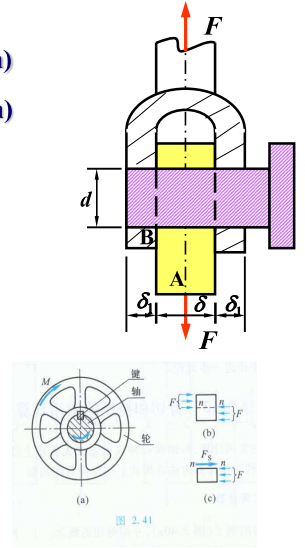
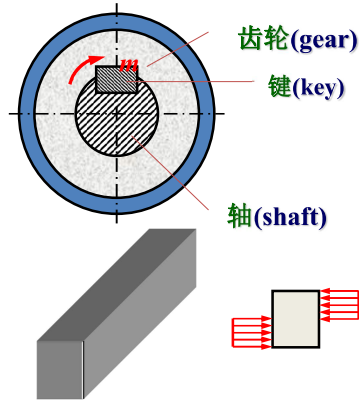


### 3. 变形特点 (Character of deformation)

构件沿两组平行力系的交界面发生相对错动。

#### (3) 键块联接 (Keyed connection)

#### (4) 销轴联接 (Pinned connection)



### 4. 连接处破坏三种形式:

(Three types of failure in connections)

#### (1) 剪切破坏

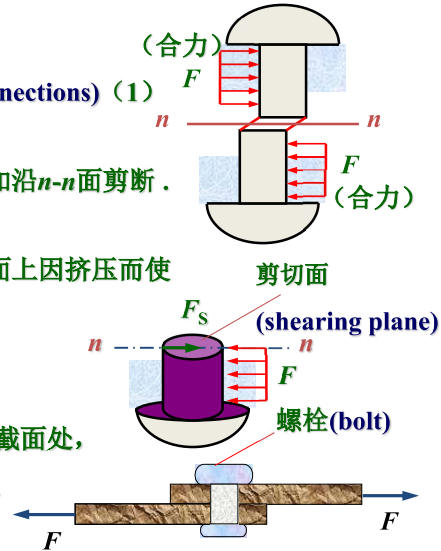
沿铆钉的剪切面剪断, 如沿n-n面剪断。

#### (2) 挤压破坏

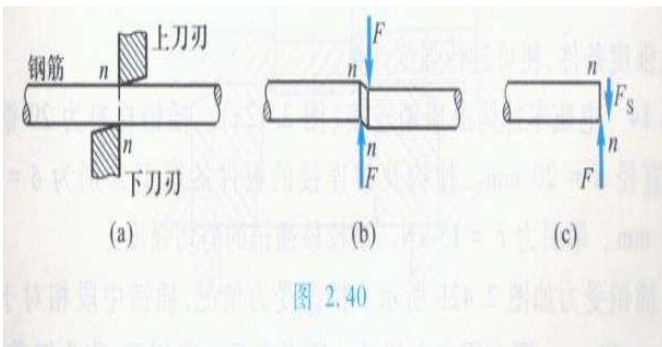
铆钉与钢板在相互接触面上因挤压而使溃压连接松动, 发生破坏。

#### (3) 拉伸破坏

钢板在受铆钉孔削弱的截面处, 应力增大, 易在连接处拉断。



### 5. 物理模型



## 二、剪切的应力分析

### (Analysis of shearing stress)

#### 1. 内力计算 (Calculation of internal force)

$$\sum F_x = 0 \quad F_s - F = 0$$

$$F_s = F \quad F_s - \text{剪力 (shearing force)}$$

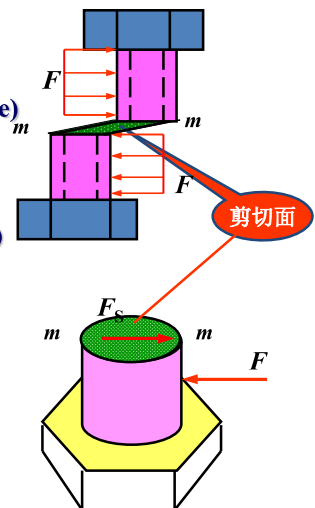
#### 2. 切应力 (Shearing stress)

$$\tau = \frac{F_s}{A}$$

符号

式中,  $F_s$  - 剪力 (shearing force)

$A$  - 剪切面的面积 (area in shear)



### 3. 强度条件(Strength condition)

$$\tau = \frac{F_s}{A} \leq [\tau]$$

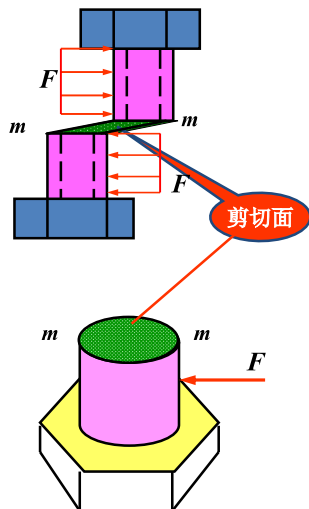
$[\tau]$  为材料的许用切应力 (Allowable shearing stress of a material)  $\tau$

$$[\tau] = \frac{\tau_u}{n}$$

$\tau_u$  - 剪切极限应力

(ultimate shearing stress)

$n$  - 安全因数 (factor of safety)



例 2.14 电瓶车挂钩由插销连接(图 2.42a)。插销材料为 20 钢,  $[\tau] = 30 \text{ MPa}$ , 直径  $d = 20 \text{ mm}$ 。挂钩及被连接的板件的厚度分别为  $\delta = 8 \text{ mm}$  和  $1.5\delta = 12 \text{ mm}$ 。牵引力  $F = 15 \text{ kN}$ 。试校核插销的剪切强度。

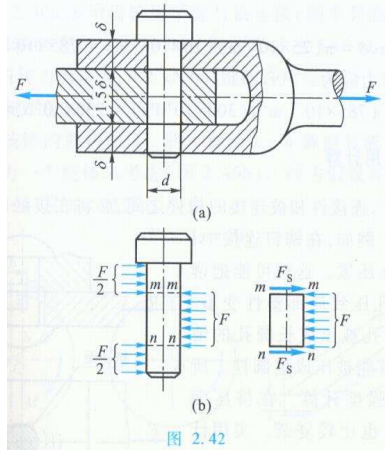


图 2.42

解: 插销受力如图 2.42b 所示。根据受力情况, 插销中段相对于上、下两段, 沿  $m-m$  和  $n-n$  两个面向左错动。所以有两个剪切面, 称为双剪切。而图 2.40 和图 2.41 所示的情况仅有一个剪切面。由平衡方程容易求出

$$F_s = \frac{F}{2}$$

插销横截面上的切应力为

$$\tau = \frac{F_s}{A} = \frac{15 \times 10^3 \text{ N}}{2 \times \frac{\pi}{4} (20 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = 23.9 \times 10^6 \text{ Pa} = 23.9 \text{ MPa} < [\tau]$$

故插销满足强度要求。

例 2.15 已知钢板厚度  $\delta = 10 \text{ mm}$ , 其剪切极限应力为  $\tau_u = 300 \text{ MPa}$ 。若用冲床将钢板冲出直径  $d = 25 \text{ mm}$  的孔, 问需要多大的冲剪力  $F$ ?

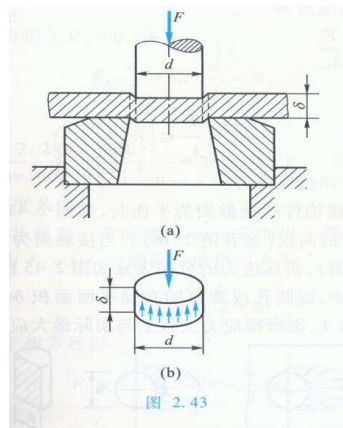


图 2.43

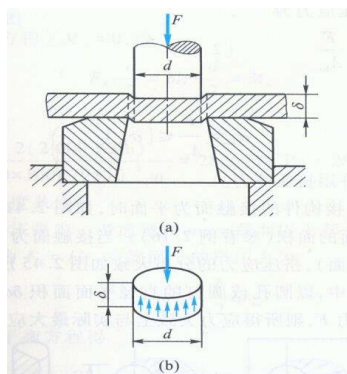
解: 剪切面是钢板内被冲头冲出的圆饼体的柱形侧面, 如图 2.43b 所示。

其面积为

$$A = \pi d \delta = \pi (25 \times 10^{-3} \text{ m}) (10 \times 10^{-3} \text{ m}) = 785 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

冲孔所需要的冲剪力应为

$$F \geq A \tau_u = (785 \times 10^{-6} \text{ m}^2) (300 \times 10^6 \text{ Pa}) = 236 \times 10^3 \text{ N} = 236 \text{ kN}$$



### 三、挤压的应力分析 (Analysis of bearing stress)

#### 1. 挤压力(Bearing force)

$$F = F_s$$

螺栓与钢板相互接触的侧面上, 发生的彼此间的局部承压现象, 称为挤压 (bearing)。

在接触面上的压力, 称为挤压力 (bearing force), 并记为  $F$

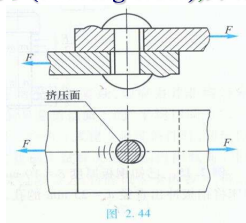
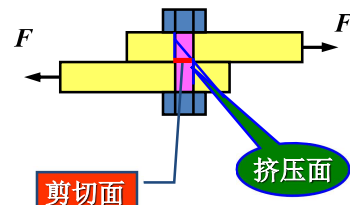
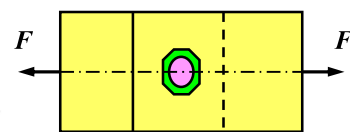
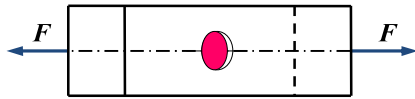


图 2.44

## 2. 挤压破坏的两种形式 (Two types of bearing failure)

- (1) 螺栓压扁
- (2) 钢板在孔缘压成椭圆



## 3. 挤压应力 (Bearing stress)

$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}}$$

$F$  - 挤压力 (bearing force)

$A_{bs}$  - 挤压面的面积 (area in bearing)

## 4. 强度条件 (Strength condition)

$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}]$$

$[\sigma_{bs}]$  - 许用挤压应力 (allowable bearing stress)

## 挤压面的面积计算

- (1) 当接触面为圆柱面时, 挤压面积  $A_{bs}$  为实际接触面在直径平面上的投影面积

$$A_{bs} = d \times h$$

挤压现象的实际受力如图所示。

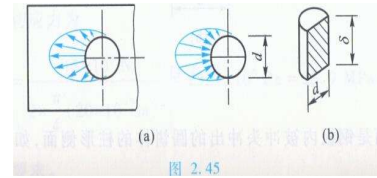
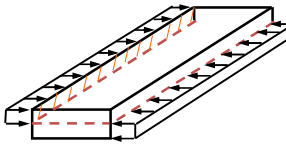


图 2.45

- (2) 当接触面为平面时,  $A_{bs}$  为实际接触面面积。

## 四、强度条件的应用 (Application of strength conditions)

### 1. 校核强度 (Check the intensity)

$$\tau \leq [\tau] \quad \sigma_{bs} \leq [\sigma_{bs}]$$

### 2. 设计截面 (Determine the allowable dimension)

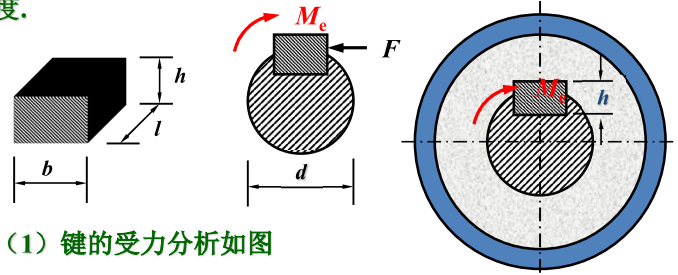
$$A \geq \frac{F_s}{[\tau]} \quad A_{bs} \geq \frac{F}{[\sigma_{bs}]}$$

### 3. 求许可载荷 (Determine the allowable load)

$$F_s \leq [\tau]A \quad F \leq [\sigma_{bs}]A_{bs}$$

### 4. 破坏条件 (failure condition) $\tau \geq \tau_u$

例题12 齿轮与轴由平键连接, 已知轴的直径  $d=70\text{mm}$ , 键的尺寸为  $b \times h \times L=20 \times 12 \times 100\text{mm}$ , 传递的扭转力偶矩  $M_e=2\text{kN}\cdot\text{m}$ , 键的许用切应力为  $[\tau]=60\text{MPa}$ , 许用挤压应力为  $[\sigma_{bs}]=100\text{MPa}$ . 试校核键的强度。



解: (1) 键的受力分析如图

$$F \cdot \frac{d}{2} = M_e \quad F = \frac{2M_e}{d} = \frac{2 \times 2 \times 10^3}{70 \times 10^{-3}} = 57\text{kN}$$

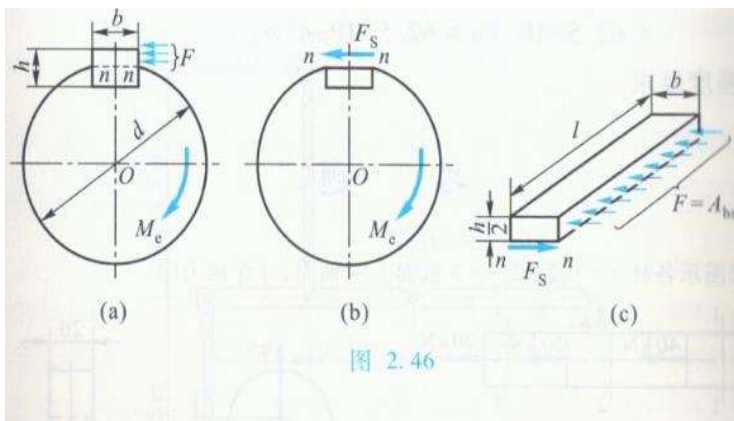


图 2.46

解: (1) 键的受力分析如图

$$F \cdot \frac{d}{2} = M_e \quad F = \frac{2M_e}{d} = \frac{2 \times 2 \times 10^3}{70 \times 10^{-3}} = 57\text{kN}$$

### (2) 校核剪切强度

$$F_s = F$$

$$\tau = \frac{F_s}{A} = \frac{F}{bl} = \frac{57 \times 10^3}{20 \times 100 \times 10^{-6}} = 28.6\text{MPa} \leq [\tau]$$

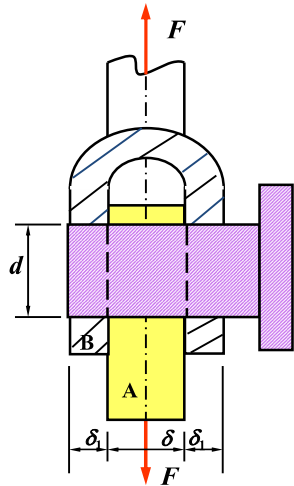
### (3) 校核挤压强度

$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}} = \frac{F}{lh/2} = \frac{57 \times 10^3}{100 \times 6 \times 10^{-6}} = 95.3\text{MPa} \leq [\sigma_{bs}]$$

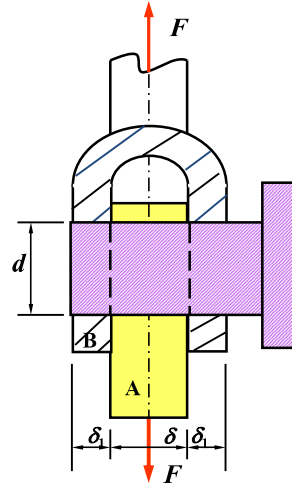
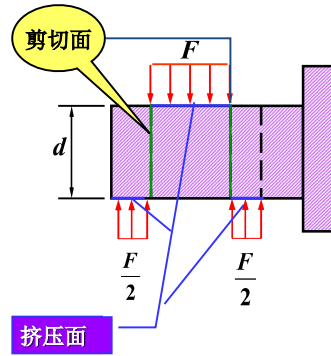
综上, 键满足强度要求。



例题13 一销钉连接如图所示, 已知外力  $F=18\text{kN}$ , 被连接的构件 A 和 B 的厚度分别为  $\delta=8\text{mm}$  和  $\delta_1=5\text{mm}$ , 销钉直径  $d=15\text{mm}$ , 销钉材料的许用切应力为  $[\tau]=60\text{MPa}$ , 许用挤压应力为  $[\sigma_{bs}]=200\text{MPa}$ . 试校核销钉的强度.



解: (1) 销钉受力如图b所示



(2) 校核剪切强度  
由截面法得两个面上的剪力

$$F_s = \frac{F}{2}$$

剪切面积为  $A = \frac{\pi d^2}{4}$

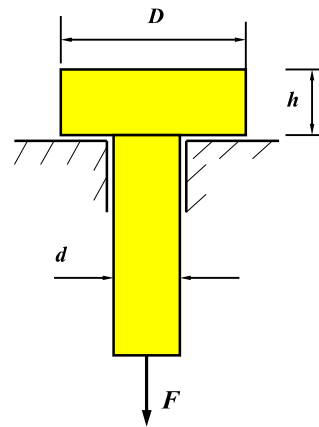
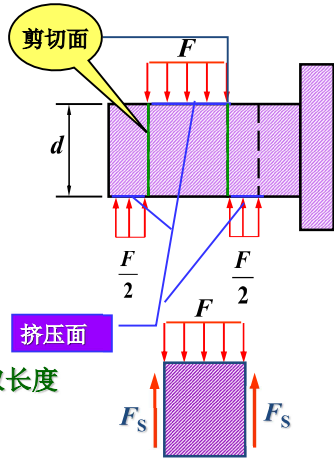
$$\tau = \frac{F_s}{A} = 51\text{MPa} \leq [\tau]$$

(3) 挤压强度校核  $\delta < 2\delta_1$

这两部分的挤压力相等, 故应取长度为  $\delta$  的中间段进行挤压强度校核.

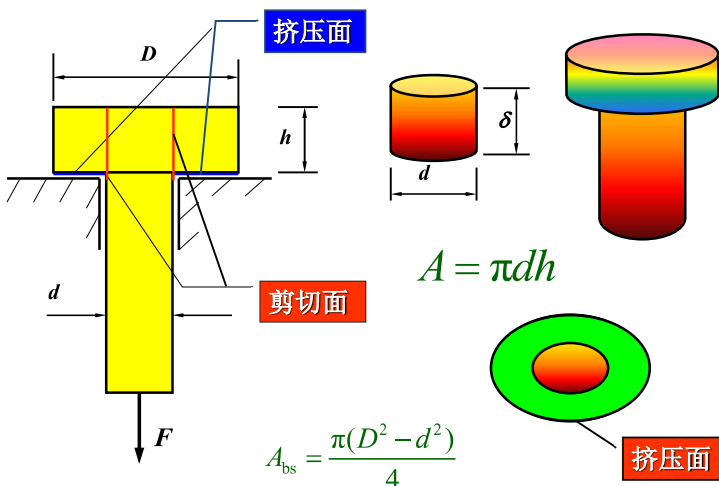
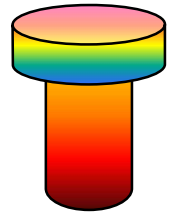
$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}} = \frac{F}{\delta d} = 150\text{MPa} \leq [\sigma_{bs}]$$

故销钉是安全的.

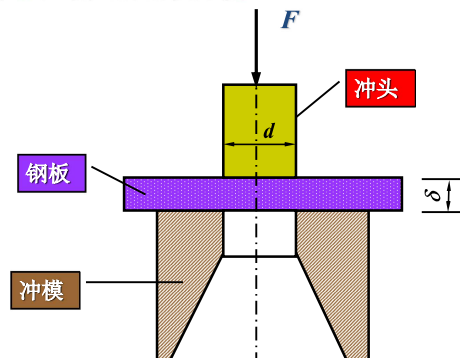


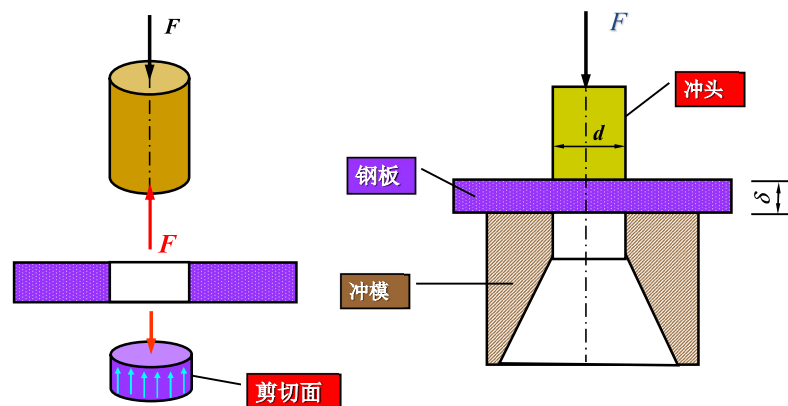
思考题

- (1) 销钉的剪切面积  $A$
- (2) 销钉的挤压面积  $A_{bs}$



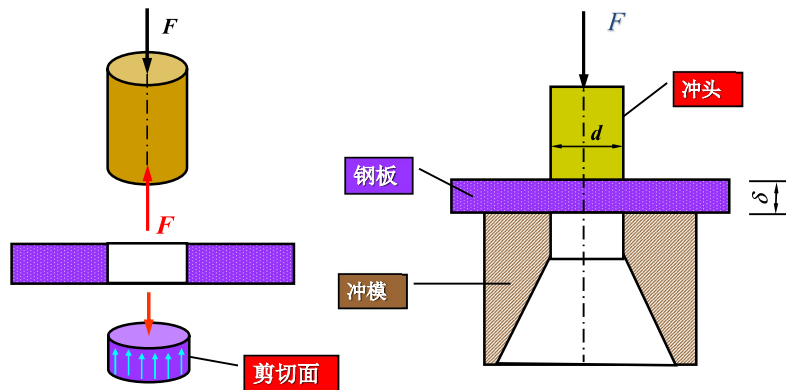
例14 冲床的最大冲压力  $F=400\text{kN}$ , 冲头材料的许用压应力  $[\sigma]=440\text{MPa}$ , 钢板的剪切强度极限  $\tau_0=360\text{MPa}$ , 试求冲头能冲剪的最小孔径  $d$  和最大的钢板厚度  $\delta$ .





解：(1) 冲头为轴向压缩变形

$$\frac{F}{A} = \frac{F}{\pi d^2/4} \leq [\sigma] \quad d=34\text{mm}$$

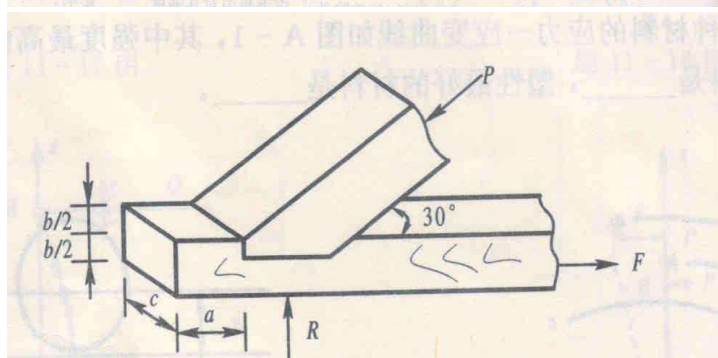


解：(2) 由钢板的剪切破坏条件

$$\frac{F}{A} = \frac{F}{\pi d \delta} \geq \frac{[\sigma]}{\tau} \quad \delta=10.4\text{mm}$$

《辅导》p244题二

木榫接头如图 A-5 所示，已知  $P=20\text{ kN}$ ， $a=10\text{ cm}$ ， $b=8\text{ cm}$ ， $c=15\text{ cm}$ ，木材顺纹许用剪应力  $[\tau]=1\text{ MPa}$ ，顺纹许用挤压应力  $[\sigma_w]=10\text{ MPa}$ ，试校核木榫接头顺纹方向的剪切和挤压强度。(15分)



二、解：取木榫接头为研究对象(图 A-11(a))。

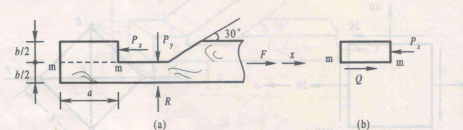


图 A-11

根据受力情况，榫头由  $P_x$ 、 $F$  力的作用将沿  $m-m$  截面错动，发生剪切变形，同时  $P_x$  还将引起挤压变形。同样， $P_y$  也将引起剪切和挤压变形，但依题意仅考虑顺纹方向(即  $x$  方向)的剪切和挤压强度。

取  $m-m$  以上部分为分离体图(b)，由平衡方程容易求出

$$Q = P_x = P \cdot \cos 30^\circ$$

$$\text{故有 } \tau = \frac{Q}{A} = \frac{P \cos 30^\circ}{ac} = \frac{20 \times 10^3 \times \cos 30^\circ}{10 \times 15 \times 10^{-4}} = 1.15\text{ MPa} > [\tau] = 1\text{ MPa}$$

$$\text{计算 } \frac{\tau - [\tau]}{[\tau]} \times 100\% = \frac{1.15 - 1.0}{1} \times 100\% = 15\% > 5\%$$

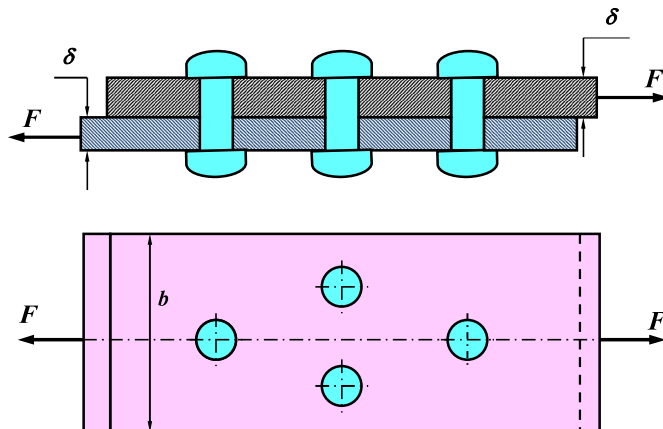
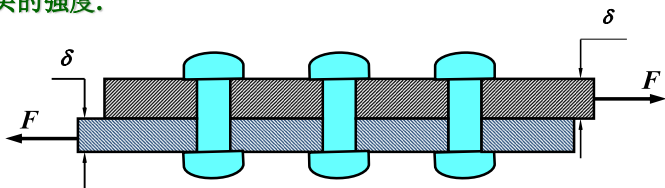
故榫头不满足剪切强度

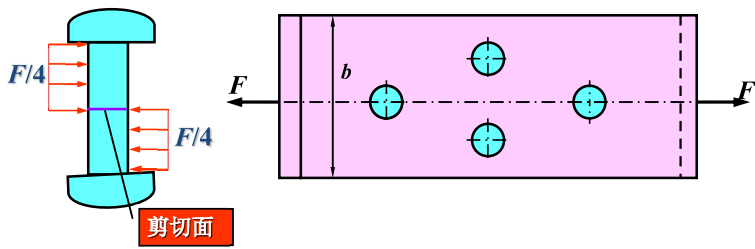
$$\text{挤压应力 } \sigma_w = \frac{P_x}{A_w} = \frac{P \cos 30^\circ}{\frac{b}{2} \cdot c} = \frac{20 \times 10^3 \times \cos 30^\circ}{4 \times 15 \times 10^{-4}} = 2.89\text{ MPa} < [\sigma_w]$$

故榫头满足挤压强度。

结论：木榫头不安全。

例题15 一铆钉接头用四个铆钉连接两块钢板。钢板与铆钉材料相同。铆钉直径  $d=16\text{mm}$ ，钢板的尺寸为  $b=100\text{mm}$ ， $\delta=10\text{mm}$ ， $F=90\text{kN}$ ，铆钉的许用应力是  $[\tau]=120\text{MPa}$ ， $[\sigma_w]=120\text{MPa}$ ，钢板的许用拉应力  $[\sigma]=160\text{MPa}$ 。试校核铆钉接头的强度。





解：(1) 校核铆钉的剪切强度 每个铆钉受力为  $F/4$

每个铆钉受剪面上的剪力为

$$F_s = \frac{F}{4} = 22.5 \text{ kN}$$

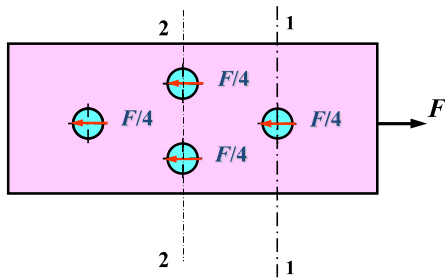
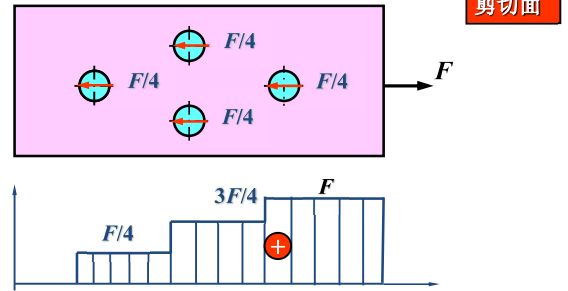
$$\tau = \frac{F_s}{A} = \frac{F_s}{\pi d^2/4} = 112 \text{ MPa} \leq [\tau]$$

(2) 校核铆钉的挤压强度

每个铆钉受挤压力为  $F/4$

$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}} = \frac{F/4}{\delta d} = 141 \text{ MPa} \leq [\sigma_{bs}]$$

(3) 校核钢板的拉伸强度



$$\sigma_{1-1} = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{F}{(b-d)t} = 107 \text{ MPa} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{2-2} = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{3F/4}{(b-2d)t} = 99.3 \text{ MPa} \leq [\sigma]$$

整个接头是安全的

## 第四章 扭转

## Chapter 4 Torsion

### 第四章 扭转 (Torsion)

#### ► § 4-1 扭转的概念和实例

(Concepts and example problem of torsion)

#### ► § 4-2 扭转内力的计算

(Calculating internal force of torsion)

#### ► § 4-3 薄壁圆筒的扭转

(Torsion in thin-wall circular tube)

#### ► § 4-4 圆轴扭转的应力分析及强度条件

(Analyzing stress of circular bars & strength condition)

#### ► § 4-5 圆杆在扭转时的变形 · 刚度条件 (Torsional deformation of circular bars & stiffness condition)

#### ► § 4-6 密圈螺旋弹簧的应力和变形

(Calculation of the stress and deformation in close-coiled helical springs)

#### ► § 4-7 非圆截面杆的扭转

(Torsion of noncircular prismatic bars)

#### ► § 4-8 开口和闭合薄壁截面杆的自由扭转

(Free torsion of open and closed thin-walled members)



## § 4-1 扭转的概念及实例 (Concepts and example problem of torsion)

### 一、工程实例(Example problems)

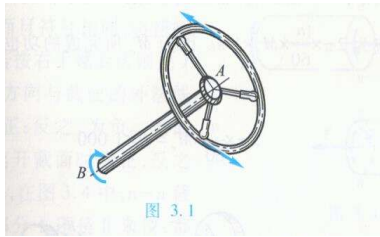
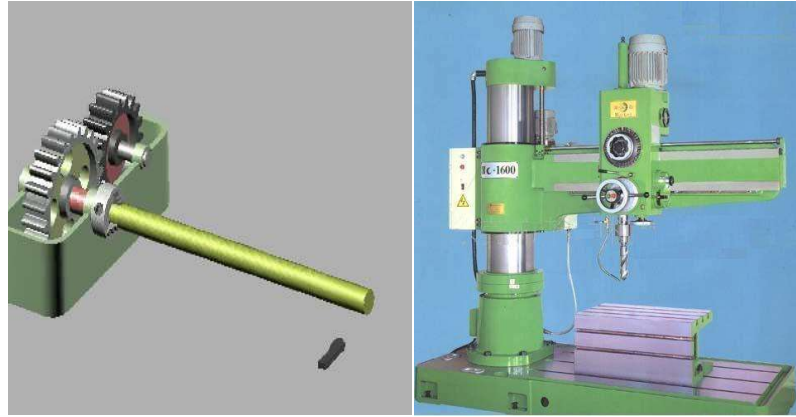
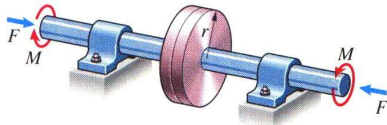


图 3.1

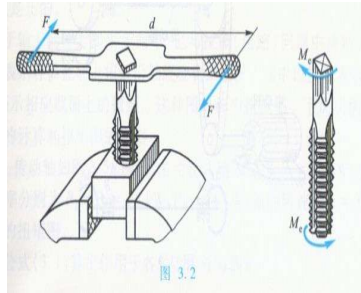


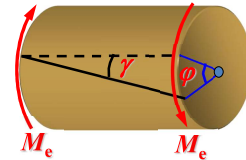
图 3.2

### 二、受力特点(Character of external force)

杆件的两端作用两个大小相等、方向相反、且作用平面垂直于杆件轴线的力偶。

### 三、变形特点(Character of deformation)

杆件的任意两个横截面都发生绕轴线的相对转动。



## § 3-2 扭转的内力的计算 (Calculating internal force of torsion)

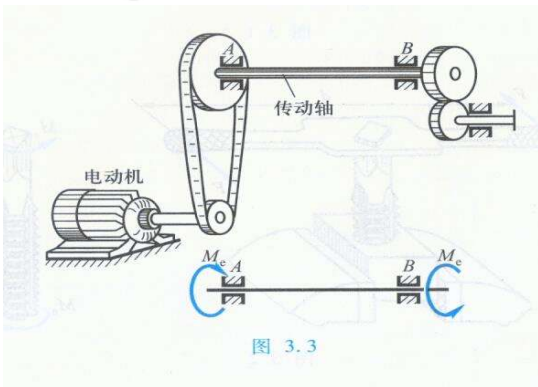


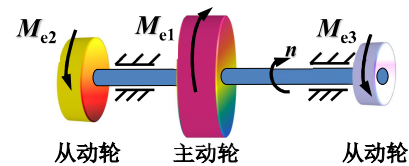
图 3.3

### 一、外力偶矩的计算 (Calculation of external moment)

$$2\pi \times \frac{n}{60} \times M_e = P \times 1000$$

$$\{M_e\}_{\text{N}\cdot\text{m}} = 9549 \frac{\{P\}_{\text{kW}}}{\{n\}_{\text{r}/\text{min}}}$$

$$\{M_e\}_{\text{N}\cdot\text{m}} = 7024 \frac{\{P\}_{\text{马力}}}{\{n\}_{\text{r}/\text{min}}}$$



$M_e$ —作用在轴上的力偶矩(N·m)  $n$ —轴的转速(r/min)

$P$ —轴传递的功率(kW)

1马力=735.5W



## 二、内力的计算 (Calculation of internal force)

### 1. 求内力 (Calculating internal force)

#### 截面法 (Method of sections)

在  $n-n$  截面处假想将轴截开取左侧为研究对象

$$\sum M_x = 0$$

$$T = M_e$$

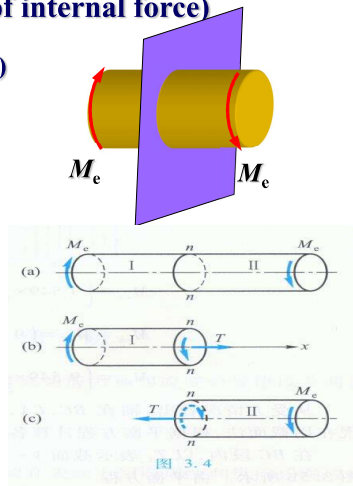
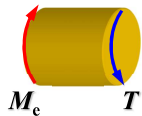
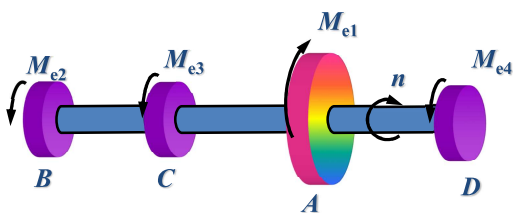


图 3.4

例题1 一传动轴如图所示,其转速  $n = 300 \text{ r/min}$ ,主动轮A输入的功率为  $P_1 = 500 \text{ kW}$ . 若不计轴承摩擦所耗的功率,三个从动轮输出的功率分别为  $P_2 = 150 \text{ kW}$ ,  $P_3 = 150 \text{ kW}$ ,  $P_4 = 200 \text{ kW}$ . 试做扭矩图.



计算 CA 段内任横一截面 2-2 截面上的扭矩,假设  $T_2$  为正值.

由平衡方程

$$\sum M_x = 0$$

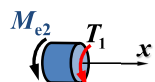
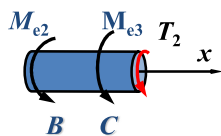
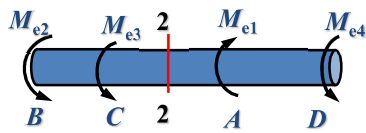
$$M_{e2} + M_{e3} + T_2 = 0$$

$$T_2 = -(M_{e2} + M_{e3}) = -9549 \text{ N}\cdot\text{m}$$

结果为负号,说明  $T_2$  应是负值扭矩

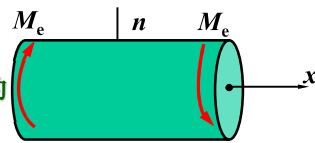
同理,在 BC 段内

$$T_1 = -M_{e2} = -4774.5 \text{ N}\cdot\text{m}$$



### 2. 扭矩符号的规定 (Sign convention for torque)

采用右手螺旋法则,当力偶矩矢的指向背离截面时扭矩为正,反之为负.

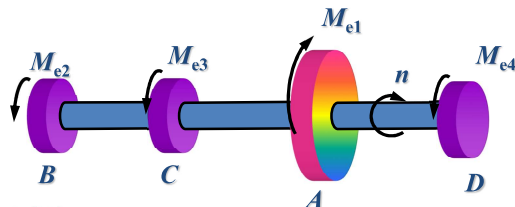


### 3. 扭矩图 (Torque diagram)

用平行于杆轴线的坐标  $x$  表示横截面的位置;用垂直于杆轴线的坐标  $T$  表示横截面上的扭矩,正的扭矩画在  $x$  轴上方,负的扭矩画在  $x$  轴下方.



设正法



解: 计算外力偶矩

$$\{M_e\} = 9549 \frac{\{P\}_{\text{kW}}}{\{n\}_{\text{r/min}}}$$

$$M_{e1} = 15915 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{e2} = M_{e3} = 4774.5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{e4} = 6366 \text{ N}\cdot\text{m}$$

同理,在 BC 段内

$$T_1 = -M_{e2} = -4774.5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

在 AD 段内

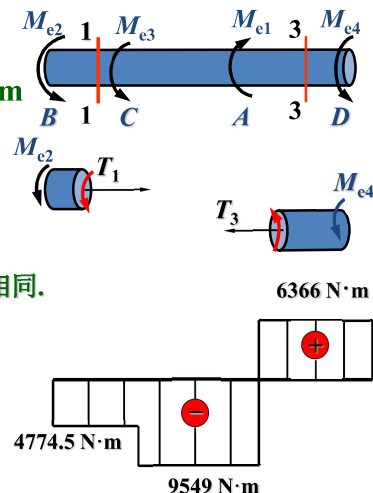
$$T_3 = M_{e4} = 6366 \text{ N}\cdot\text{m}$$

注意: 若假设扭矩为正值,则扭矩的实际符号与计算符号相同.

作出扭矩图

从图可见,最大扭矩在 CA 段内.

$$T_{\max} = 9549 \text{ N}\cdot\text{m}$$



### § 3-3 薄壁圆筒的扭转

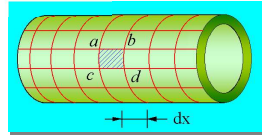
#### (Torsion of thin-walled cylindrical Vessels)

薄壁圆筒：壁厚  $\delta \leq \frac{1}{10} r_0$  ( $r_0$ —圆筒的平均半径)

#### 一、应力分析 (Analysis of stress)

##### 1. 实验前

- (1) 画纵向线, 圆周线;
- (2) 施加一对外力偶。



##### 2. 实验后

- (1) 圆筒表面的各圆周线的形状、大小和间距均未改变, 只是绕轴线作了相对转动;
- (2) 各纵向线均倾斜了同一微小角度  $\gamma$ ;
- (3) 所有矩形网格均歪斜成同样大小的平行四边形。

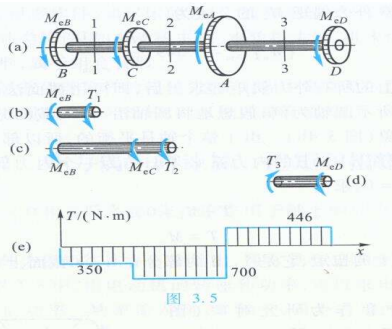
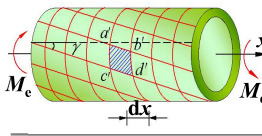


图 3.5

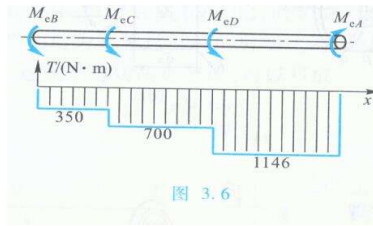
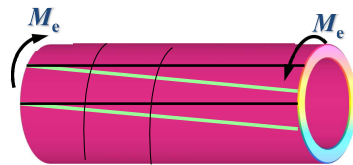


图 3.6

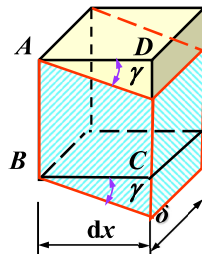
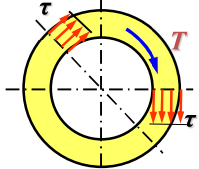
#### 3. 推论 (Inference)

(1) 横截面上无正应力, 只有切应力;

(2) 切应力方向垂直半径或与圆周相切。



圆周各点处切应力的方向于圆周相切, 且数值相等, 近似的认为沿壁厚方向各点处切应力的数值无变化。



#### 4. 推导公式 (Derivation of formula)

$$\int_A \tau dA \cdot r = \tau \cdot r \int_A dA = \tau \cdot r (2\pi \cdot r \cdot \delta) = T$$

$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 \cdot \delta}$$

此式为薄壁圆筒扭转时横截面上切应力的计算公式。

薄壁筒扭转时横截面上的切应力均匀分布, 与半径垂直,

指向与扭矩的转向一致。

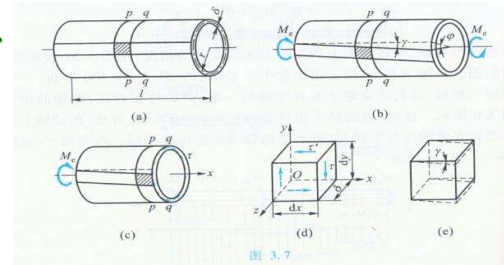
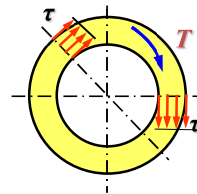


图 3.7

#### 二、切应力互等定理 (Shearing Stress Theorem)

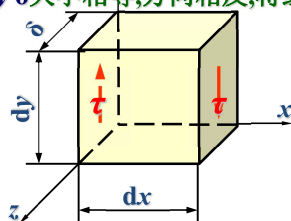
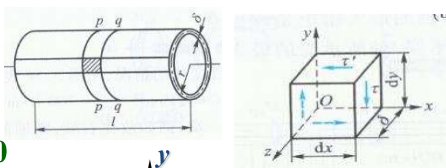
1. 在单元体左、右面 (杆的横截面) 只有切应力, 其矩为  $(\tau dy \delta) dx$

其方向于  $y$  轴平行。

由平衡方程

$$\sum F_y = 0$$

两侧面的内力元素  $\tau dy \delta$  大小相等, 方向相反, 将组成一个力偶。



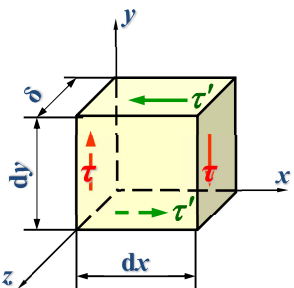
2. 要满足平衡方程

$$\sum M_z = 0 \quad \sum F_x = 0$$

在单元体的上、下两平面上必有大小相等, 指向相反的一对内力元素它们组成力偶, 其矩为  $(\tau' dx \delta) dy$

此力偶矩与前一力偶矩  $(\tau dy \delta) dx$

数量相等而转向相反, 从而可得  $\tau' = \tau$



#### 3. 切应力互等定理 (Shearing stress theorem)

单元体两个相互垂直平面上的切应力同时存在, 且大小相等, 都指相 (或背离) 该两平面的交线。

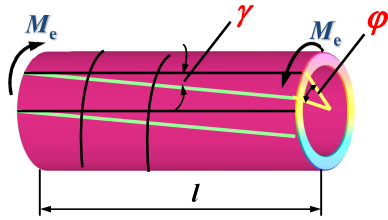
#### 4. 纯剪切单元体 (Element in pure shear)

单元体平面上只有切应力而无正应力, 则称为纯剪切单元体。

### 三、剪应变与剪切胡克定律 (Hooke's law for shear)

由图所示的几何关系得到

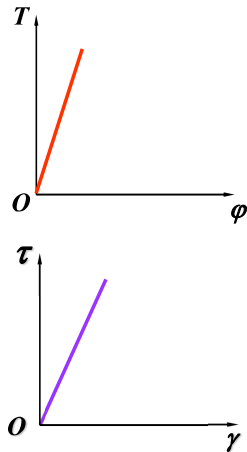
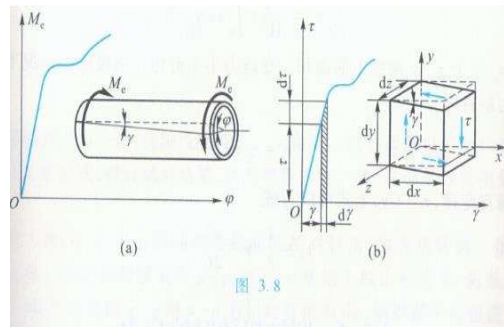
$$\gamma = \frac{r\phi}{l}$$



式中,  $r$  为薄壁圆筒的外半径.

薄壁圆筒的扭转试验发现, 当外力偶  $M_e$  在某一范围内时, 与  $M_e$  (在数值上等于  $T$ ) 成正比.

$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 \delta} \quad \gamma = \frac{r\phi}{l}$$



$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 \delta} \quad \gamma = \frac{r\phi}{l}$$

从  $T$  与  $\phi$  之间的线性关系, 可推出  $\tau$  与  $\gamma$  间的线性关系.

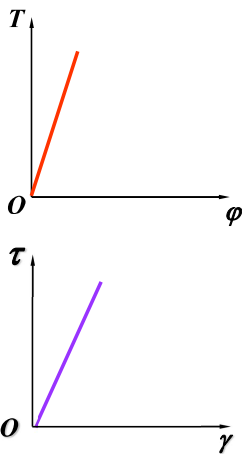
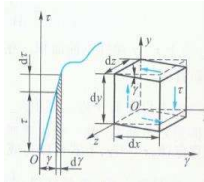
$$\tau = G\gamma$$

该式称为材料的 **剪切胡克定律**

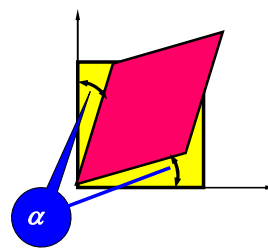
(Hooke's law for shear)

$G$  - 剪切弹性模量

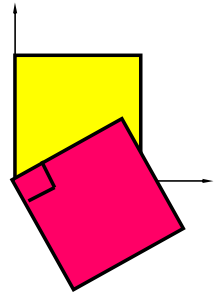
三个弹性常数的关系  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$



思考题: 指出下面图形的切应变

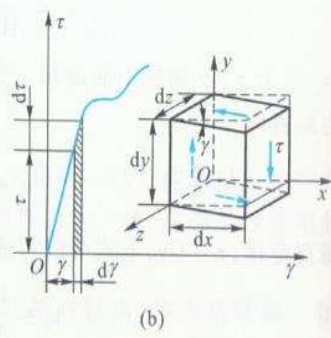


切应变为 2α



切应变为 0

### 四、剪切应变能



面向下错动的距离为  $\gamma dx$ . 若切应力有一增量  $d\tau$ , 切应变的相应增量为  $d\gamma$ , 侧面下位移的增量则应为  $d\gamma dx$ . 剪力  $\tau dy dz$  在位移  $d\gamma dx$  上完成的功为  $\tau dy dz \cdot d\gamma dx$ . 在应力从零开始逐渐增加到  $\tau$  (相应切应变为  $\gamma$ ) 的过程中, 右面上剪力  $\tau dy dz$  总共完成的功为

$$dW = \int_0^{\gamma} \tau dy dz \cdot d\gamma dx$$

$dW$  等于单元体内储存的应变能  $dV_s$ , 故

$$dV_s = dW = \int_0^{\gamma} \tau dy dz \cdot d\gamma dx = \left( \int_0^{\gamma} \tau dy \right) dV$$

式中  $dV = dx dy dz$  是单元体的体积. 以  $dV$  乘  $dV_s$  得单位体积内的剪切应变能度为

$$v_s = \frac{dV_s}{dV} = \int_0^{\gamma} \tau dy \quad (3.5)$$

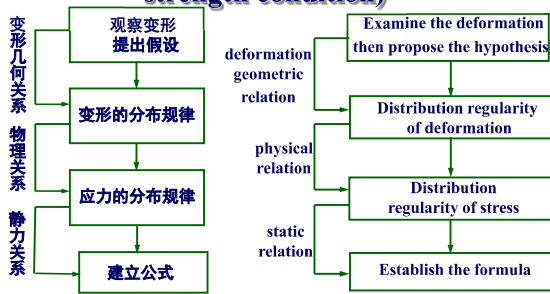
这表明,  $v_s$  等于  $\tau-\gamma$  曲线下的面积. 在应力小于剪切比例极限的情况下,  $\tau$  与  $\gamma$  的关系为斜直线,

$$\tau = G\gamma$$

由剪切胡克定律,  $\tau = G\gamma$ , 上式可以写成

$$v_s = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{\tau^2}{2G} \quad (3.6)$$

### § 3-4 圆杆扭转的应力分析 · 强度条件 (Analyzing stress of circular bars & strength condition)

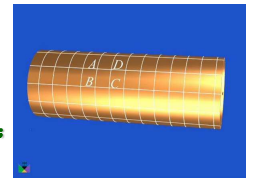


#### 一、变形几何关系(Geometrical Relationship of Deformation)

##### 1. 变形现象

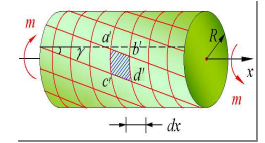
(Deformation phenomenon)

- (1) 轴向线仍为直线,且长度不变;
- (2) 横截面仍为平面且与轴线垂直;
- (3) 径向线保持为直线,只是绕轴线旋转.



##### 2. 平面假设(Plane assumption)

变形前为平面的横截面,变形后仍保持为平面.

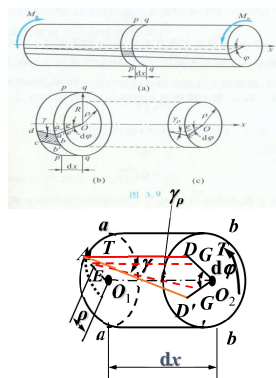


#### 3. 几何关系(Geometrical relationship)

倾角  $\gamma$  是横截面圆周上任一点  $A$  处的切应变,  $d\varphi$  是  $b-b$  截面相对于  $a-a$  截面象刚性平面一样绕杆的轴线转动的一个角度.

经过半径  $O_2D$  上任一点  $G$  的纵向线  $EG$  也倾斜了一个角度  $\gamma_\rho$ , 也就是横截面半径上任一点  $E$  处的切应变

$$\gamma_\rho \approx \tan \gamma_\rho = \frac{GG'}{EG} = \frac{\rho d\varphi}{dx}$$



#### 二、物理关系(Physical Relationship)

由剪切胡克定律

$$\tau = G\gamma$$

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

同一圆周上各点切应力  $\tau_\rho$  均相同,且其值与  $\rho$  成正比,  $\tau_\rho$  与半径垂直.

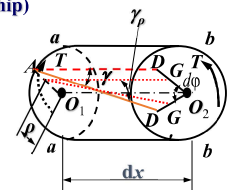


图 3.10

#### 三、静力关系 (Static Relationship)

##### 1. 公式的建立(Establish the formula)

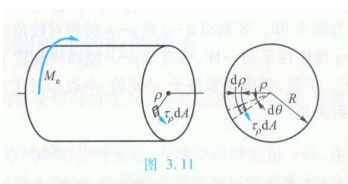
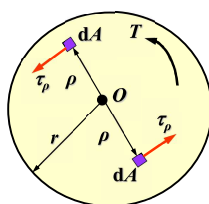


图 3.11



$$\int_A \rho \tau_\rho dA = T$$

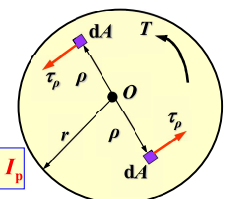
$$\int_A \rho \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot dA = T$$

$$G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA = T$$

$$\int_A \rho^2 dA = I_p$$

结论  $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p}$      $\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$

代入物理关系中得到  $\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_p}$  式中:  $T$ —横截面上的扭矩  
 $\rho$ —求应力的点到圆心的距离  
 $I_p$ —横截面对圆心的极惯性矩

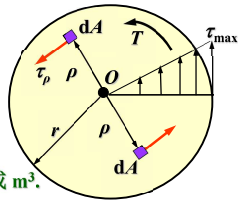




## 2. $\tau_{\max}$ 的计算 (Calculation of $\tau_{\max}$ )

$$\tau_{\max} = \frac{T\rho_{\max}}{I_p} = \frac{T}{\frac{I_p}{\rho_{\max}}} = \frac{T}{W_t}$$

$$W_t = \frac{I_p}{\rho_{\max}}$$



$W_t$  称作抗扭截面系数, 单位为  $\text{mm}^3$  或  $\text{m}^3$ .

公式适用条件

以上各式是以平面假设为基础导出的。试验结果表明, 只有对横截面不变的直圆轴, 平面假设才是正确的。所以这些公式只适用于等直圆杆。对圆截面沿轴线变化缓慢的小锥度锥形杆, 也可近似地用这些公式计算。此外, 导出以上诸式时使用了胡克定律, 因而只适用于  $\tau_{\max}$  低于剪切比例极限的情况。

## 3. 极惯性矩和抗扭截面系数的计算 (calculating the polar moment of inertia & section modulus under torsion)

### (1) 实心圆截面

$$I_p = \int \rho^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^3 d\rho d\theta = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \quad (3.12)$$

式中  $D$  为圆截面的直径。再由式 (f) 求出

$$W_t = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16} \quad (3.13)$$

### (2) 空心圆截面

对于空心圆轴 (图 3.12), 由于截面的空心部分没有内力, 所以式 (d) 和式 (e) 的定积分不应包括空心部分, 于是

$$I_p = \int \rho^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_{d/2}^{D/2} \rho^3 d\rho d\theta = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \quad (3.14)$$

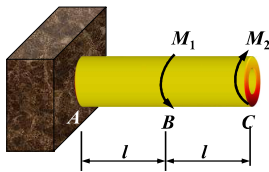
$$W_t = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi}{16D} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$

式中  $D$  和  $d$  分别为空心圆截面的外径和内径,  $R$  为外半径,  $\alpha = d/D$ 。

例题2 图示空心圆轴外径  $D=100\text{mm}$ , 内径  $d=80\text{mm}$ ,  $M_1=6\text{kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_2=4\text{kN}\cdot\text{m}$ , 材料的切变模量  $G=80\text{GPa}$ 。

(1) 画轴的扭矩图;

(2) 求轴的最大切应力, 并指出其位置。



解: (1) 画轴的扭矩图

BC段  $T_1 + M_{e2} = 0$

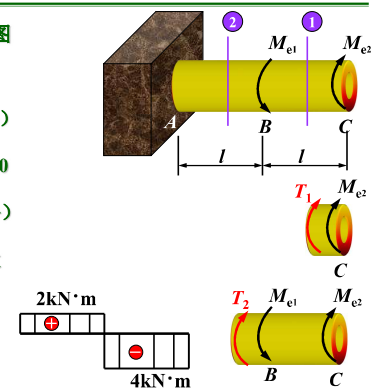
$$T_1 = -4\text{kN}\cdot\text{m} \quad (-)$$

AB段  $T_2 + M_{e2} - M_{e1} = 0$

$$T_2 = 2\text{kN}\cdot\text{m} \quad (+)$$

最大扭矩发生在BC段

$$T_{\max} = 4\text{kN}\cdot\text{m}$$

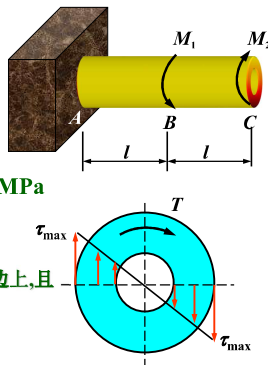


(2) 求轴的最大切应力, 并指出其位置

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t}$$

$$= \frac{T_{\max}}{\frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)} = 34.5\text{MPa}$$

最大切应力发生在截面的周边上, 且垂直于半径。

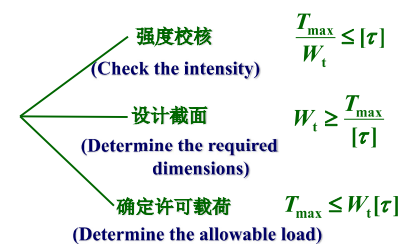


## 四、强度条件 (Strength Condition)

### 1. 数学表达式

(Mathematical formula)  $\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} \leq [\tau]$

### 2. 强度条件的应用 (Application of strength condition)



例題3 圖示階梯圓軸, AB段的直徑 $d_1=120\text{mm}$ , BC段的直徑 $d_2=100\text{mm}$ . 扭轉力偶矩為 $M_A=22\text{kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B=36\text{kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_C=14\text{kN}\cdot\text{m}$ . 已知材料的許用切應力 $[\tau]=80\text{MPa}$ , 試校核該軸的強度.

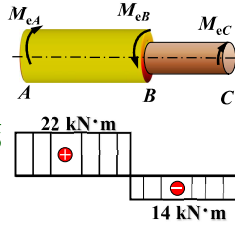
解: 作軸的扭矩圖

分別校核兩段軸的強度

$$\tau_{1\max} = \frac{T_1}{W_{t1}} = \frac{T_1}{\pi d_1^3 / 16} = \frac{22 \times 10^3}{\pi (0.12^3) / 16} = 64.84 \text{MPa} < [\tau]$$

$$\tau_{2\max} = \frac{T_2}{W_{t2}} = \frac{T_2}{\pi d_2^3 / 16} = \frac{14 \times 10^3}{\pi (0.1^3) / 16} = 71.3 \text{MPa} < [\tau]$$

因此, 該軸滿足強度要求.

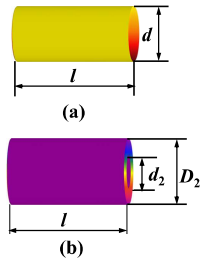


例題4 實心圓軸1和空心圓軸2 (圖a、b) 材料, 扭轉力偶矩 $M$ 和長度 $l$ 均相等, 最大切應力也相等. 若空心圓軸的內外徑之比 $\alpha=0.8$ , 試求空心圓軸的外徑和實心圓軸直徑之比及兩軸的重量比.

分析: 設實心圓軸直徑為 $d_1$ , 空心圓軸的內、外徑分別為 $d_2$ 、 $D_2$ ; 又扭轉力偶矩相等, 則兩軸的扭矩也相等, 設為 $T$ .

已知:  $\tau_{\max 1} = \tau_{\max 2}$

$$\tau_{\max 1} = \frac{T}{W_{t1}} \quad \tau_{\max 2} = \frac{T}{W_{t2}}$$



$$\frac{T}{W_{t1}} = \frac{T}{W_{t2}} \quad W_{t1} = W_{t2} = \frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{\pi D_2^3 (1 - \alpha^4)}{16}$$

因此  $\frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{\pi D_2^3 (1 - \alpha^4)}{16}$

解得  $\frac{D_2}{d_1} = \sqrt[3]{\frac{1}{1 - 0.8^4}} = 1.194$

兩軸材料、長度均相同, 故兩軸的重量比等於兩軸的橫截面面積之比

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{\pi}{4} (D_2^2 - d_2^2)}{\frac{\pi}{4} d_1^2} = \frac{D_2^2 (1 - \alpha^2)}{d_1^2} = 1.194^2 (1 - 0.8^2) = 0.512$$

在最大切應力相等的情况下空心圓軸比實心圓軸輕, 即節省材料.

例

例 3.2 由無縫鋼管製成的汽車傳動軸 AB (圖 3.13), 外徑  $D=90\text{mm}$ , 壁厚  $\delta=2.5\text{mm}$ , 材料為 45 鋼. 工作時的最大扭矩為  $T=1.5\text{kN}\cdot\text{m}$ . 如材料的  $[\tau]=60\text{MPa}$ , 試校核 AB 軸的扭轉強度.

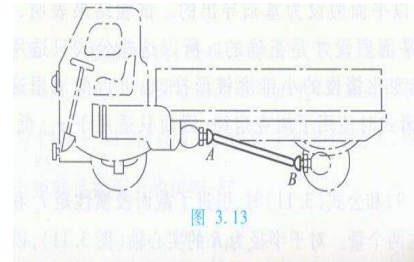


圖 3.13

解: 由 AB 軸的截面尺寸計算抗扭截面係數,

$$\alpha = \frac{d}{D} = \frac{90 \times 10^{-3} \text{m} - 2 \times 2.5 \times 10^{-3} \text{m}}{90 \times 10^{-3} \text{m}} = 0.9444$$

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi (90 \times 10^{-3} \text{m})^3}{16} (1 - 0.9444^4) = 29.276 \times 10^{-9} \text{m}^3$$

軸的最大切應力為

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{1500 \text{N}\cdot\text{m}}{29.276 \times 10^{-9} \text{m}^3} = 51.2 \times 10^6 \text{Pa} = 51.2 \text{MPa} < [\tau]$$

所以 AB 軸滿足強度條件.

例 3.3 如把上例中的傳動軸改為實心軸, 要求它與原來的空心軸強度相同, 試確定其直徑, 並比較實心軸和空心軸的重量.

解: 當實心軸和空心軸的最大應力同為  $[\tau]$  時, 兩軸的許可扭矩分別為

$$T_1 = W_t [\tau] = \frac{\pi D^3}{16} [\tau]$$

$$T_2 = \frac{\pi D_1^3}{16} (1 - \alpha^4) [\tau] = \frac{\pi}{16} (90 \text{mm})^3 (1 - 0.9444^4) [\tau]$$

式中,  $D_1$  為實心軸的直徑. 若兩軸的強度相同, 則  $T_1$  應與  $T_2$  相等, 于是有

$$D_1^3 = (90 \text{mm})^3 (1 - 0.9444^4)$$

$$D_1 = 53.0 \text{mm} = 0.053 \text{m}$$

實心軸橫截面面積是

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi (0.053 \text{m})^2}{4} = 2.2 \times 10^{-4} \text{m}^2$$

空心軸的橫截面面積為

$$A_2 = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} [(90 \times 10^{-3} \text{m})^2 - (85 \times 10^{-3} \text{m})^2] = 6.87 \times 10^{-4} \text{m}^2$$

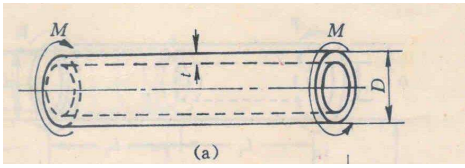
兩軸長度相等, 材料相同的情況下, 兩軸重量之比等於橫截面面積之比:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{6.87 \times 10^{-4} \text{m}^2}{2.2 \times 10^{-4} \text{m}^2} = 0.31$$

✶ 節省材料

《辅导》p37例3-3

例 3-3 一外径  $D=250$  mm, 壁厚  $t=12.5$  mm 的空心薄壁圆轴, 承受转矩  $M=100$  kN·m (图 3-7(a)), 试求:  
 (1) 轴中的最大剪应力和横截面的剪应力分布图;  
 (2) 若假定横截面上的剪应力沿壁厚均匀分布, 则剪应力为多大? 该剪应力与最大剪应力的相对误差为多大?



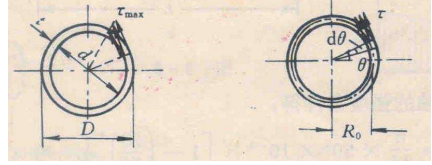
解: (1) 最大剪应力及剪应力分布图。  
 圆轴横截面的几何尺寸:

外半径  $R = \frac{D}{2} = \frac{250}{2} = 125$  mm  
 内半径  $r = R - t = 125 - 12.5 = 112.5$  mm

最大剪应力为  

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{TR}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} = \frac{2 \times (100 \times 10^3) \times 0.125}{\pi \times (0.125^4 - 0.1125^4)} = 94.8 \text{ MPa}$$

横截面上的剪应力分布如图 3-7(b) 所示。



(2) 假设均匀分布时的剪应力及其误差。  
 由静力条件, 剪应力对圆轴轴线的力矩之和即为横截面上的扭矩。若用  $R_0$  表示圆轴的平均半径 (图 3-7(c)), 则

$$R_0 = \frac{R+r}{2}$$

$$\int_A (\tau dA) R_0 = \int_0^{2\pi} \tau R_0 (R_0 d\theta) = \tau (2\pi R_0^2) = T$$

故得剪应力

$$\tau = \frac{T}{2\pi R_0^2} = \frac{T}{2\omega}$$

式中  $\omega$  为壁厚中心线所围的总面积。代入具体数值, 得

$$\tau = \frac{100 \times 10^3}{2\pi \times \left(\frac{0.125 + 0.1125}{2}\right)^2 \times 0.0125} = 90.3 \text{ MPa}$$

$$\frac{\tau_{\max} - \tau}{\tau_{\max}} = \frac{94.8 - 90.3}{94.8} = 4.7\%$$

可见, 当  $t/R=1/10$  时, 应用剪应力沿壁厚均匀分布的假设, 其误差仅为 4.7%, 这在工程中是完全允许的。

§ 3-5 杆在扭转时的变形 · 刚度条件  
 (Torsional deformation of circular bars & stiffness condition)

一、扭转变形 (Torsional deformation)

1. 圆轴扭转时的变形是用相对扭转角  $\varphi$  来度量的

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p}$$

其中  $d\varphi$  代表相距为  $dx$  的两横截面间的相对扭转角。

长为  $l$  的一段杆两端面间的相对扭转角  $\varphi$  可按下式计算

$$\varphi = \int_l d\varphi = \int_l \frac{T}{GI_p} dx$$

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p} \quad \varphi \text{—扭转角}$$

$$GI_p \text{ 称作抗扭刚度}$$

2. 单位长度扭转角 (Angle of twist per unit length)

$$\varphi' = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_p} \quad (\text{rad/m})$$

3. 刚度条件 (Stiffness condition)

$$\varphi'_{\max} \leq [\varphi']$$

$$\varphi'_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \leq [\varphi'] \quad (\text{rad/m})$$

$[\varphi']$  称作许可单位长度扭转角  
 (Allowable angle of twist per unit length)

例 3.4 图 3.14a 为某组合机床主轴箱内第 4 轴的示意图。轴上有 II、III、IV 三个齿轮, 由 I 轴的齿轮带动 II 轴, 再由 II 轴带动 III 轴, 再由 III 轴带动 IV 轴。I 轴和 II 轴同时输入, 共消耗功率 0.756 kW。III 轴和 IV 轴同时输出, 共消耗功率 0.58 kW。若 4 轴转速为 183.5 r/min, 材料为 45 钢,  $G=80$  GPa, 取  $[\tau]=40$  MPa,  $[\varphi]=1.5$  (°)/m。若第 4 轴为实心圆轴, 试设计轴的直径。

解: 为了分析 4 轴的受力情况, 先由公式 (3.1) 计算作用在齿轮 II 和 IV 上的转矩:

$$M_{II} = \left( \frac{0.756}{183.5} \right) \text{ N}\cdot\text{m} = 39.3 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{IV} = \left( \frac{0.58}{183.5} \right) \text{ N}\cdot\text{m} = 155.1 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$M_{II}$  和  $M_{IV}$  同方向, 故转向相同。若 5 轴经齿轮带动 4 轴, 则 4 轴的主动力矩为  $M_4$ , 则  $M_4$  的转向应与驱动力矩的转向相反 (图 3.14b)。于是由平衡方程  $\sum M_i = 0$ , 得

$$M_4 - M_{II} - M_{IV} = 0$$

$$M_4 = M_{II} + M_{IV} = (39.3 + 155.1) \text{ N}\cdot\text{m} = 194.4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

根据作用于4轴上的  $M_B$ 、 $M_C$  和  $M_D$  的数值,作扭矩图如图 3.14e 所示。从扭矩图看出,在齿轮 III 和 IV 之间,轴的任一横截面上的扭矩皆为最大值,且

$$T_{\max} = 155.1 \text{ N}\cdot\text{m}$$

由强度条件,

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} = \frac{16T_{\max}}{\pi D^3} \leq [\tau]$$

得

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi[\tau]}} = 0.027 \text{ m}$$

其次,由刚度条件,

$$\varphi_{\max} = \frac{T_{\max} \times 180^\circ}{GI_p \pi} = \frac{T_{\max}}{G \times \frac{\pi}{32} D^4} \times \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\varphi']$$

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32T_{\max} \times 180^\circ}{G\pi^2[\varphi']}} = 0.029 \text{ m}$$

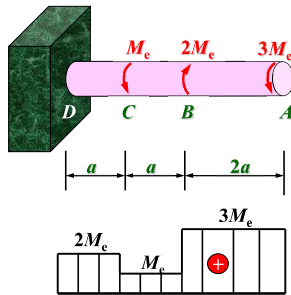
$$M_c = 292 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

(1) AD杆的最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} = 69.7 \text{ MPa}$$

(2) 扭转角  $\varphi_{CA}$

$$\varphi_{CA} = \varphi_{BA} + \varphi_{CB} = \left( \frac{3M_c \cdot 2a}{GI_p} + \frac{M_c \cdot a}{GI_p} \right) \times \frac{180^\circ}{\pi} = 2.33^\circ$$



例5 图示等直杆,已知直径  $d=40\text{mm}$ ,  $a=400\text{mm}$ ,材料的剪切弹性模量  $G=80\text{GPa}$ ,  $\varphi_{DB}=1^\circ$ . 试求:

(1) AD杆的最大切应力;

(2) 扭转角  $\varphi_{CA}$

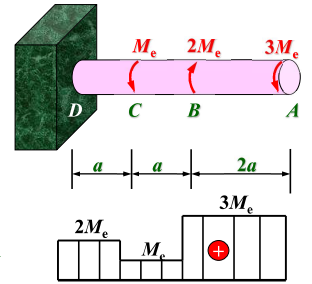
解: 画扭矩图

$$T_{\max} = 3M_c$$

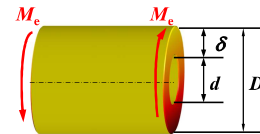
计算外力偶矩  $M_c$

$$\varphi_{DB} = \varphi_{CB} + \varphi_{DC} = 1^\circ$$

$$\left( \frac{M_c a}{GI_p} + \frac{2M_c a}{GI_p} \right) \times \frac{180^\circ}{\pi} = 1$$



例6 某汽车的主传动轴是用40号钢的电焊钢管制成,钢管外径  $D=76\text{mm}$ ,壁厚  $\delta=2.5\text{mm}$ ,轴传递的转矩  $M_c=1.98\text{kN}\cdot\text{m}$ ,材料的许用切应力  $[\tau]=100\text{MPa}$ ,切变模量为  $G=80\text{GPa}$ ,轴的许可扭角  $[\varphi']=2^\circ/\text{m}$ . 试校核轴的强度和刚度.



解: 轴的扭矩等于轴传递的转矩

$$T = M_c = 1.98 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

轴的内、外径之比

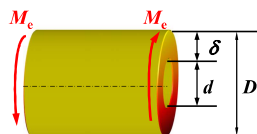
$$\alpha = \frac{d}{D} = \frac{D-2\delta}{D} = 0.934$$

$$I_p = \frac{\pi D^4 (1-\alpha^4)}{32} = 7.83 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$W_t = \frac{I_p}{D/2} = 2.06 \times 10^4 \text{ mm}^3$$

由强度条件  $\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} = 96.1 \text{ MPa} < [\tau]$

由刚度条件  $\varphi_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 1.81^\circ/\text{m} < [\varphi']$



将空心轴改为同一材料的实心轴,仍使  $\tau_{\max}=96.1\text{MPa}$

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{\pi d^3 / 16} = 96.1 \text{ MPa}$$

实心轴的直径为  $d=47.2\text{mm}$

其截面面积为  $A_{\text{实}} = \frac{\pi d^2}{4} = 1749 \text{ mm}^2$

空心轴的截面面积为  $A_{\text{空}} = \frac{\pi(76^2 - 71^2)}{4} = 577 \text{ mm}^2$

两轴材料、长度均相同,故两轴重量比等于两轴的横截面积比,

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{577}{1749} = 0.329$$

在最大切应力相等的情况下空心圆轴比实心圆轴轻,即节省材料.



《辅导》p40例3-5

例 3-5 图 3-9 所示为阶梯状受扭圆轴。若  $m$ 、 $d$ 、 $a$ 、 $G$  已知，求轴中最大剪应力及截面 A 的扭转角。

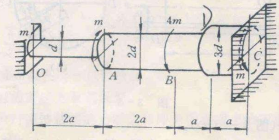
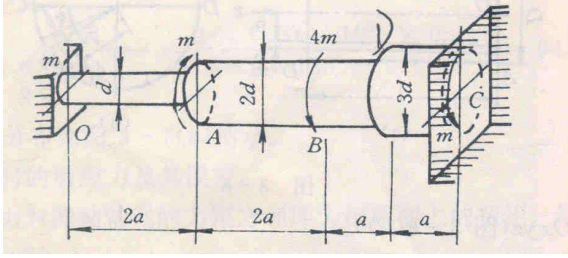


图 3-9

解：直径为  $d$ 、 $2d$ 、 $3d$  之截面的极惯性矩分别为

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad I_p = \frac{\pi (2d)^4}{32} = 16I_p \quad I_p = \frac{\pi (3d)^4}{32} = 81I_p$$

设作用于阶梯轴 O 端的反力偶矩  $m'$ ，C 端的反力偶矩  $m''$  方向如图 3-9 所示。因有两个未知量，故为静不定问题。

(1) 变形协调条件。

由于轴两端固定，所以两端截面无相对扭转角，即  $\phi_{OC} = 0$ ，或

$$\phi_{OA} + \phi_{AB} + \phi_{BC} = 0 \quad (1)$$

由截面法知，OA、AB、BC 段截面扭矩分别为  $m'$ 、 $m' + m$ 、 $m' + m - 4m$ 。于是有

$$\phi_{OA} = \frac{m' \cdot 2a}{GI_p}$$

$$\phi_{AB} = \frac{(m' + m) \cdot 2a}{16GI_p} \quad (2)$$

$$\phi_{BC} = \frac{(m' + m - 4m) \cdot a}{16GI_p} + \frac{(m' + m - 4m) \cdot a}{81GI_p}$$

将 (2) 代入 (1) 得补充方程

$$2m' + 2(m' + m) \cdot \frac{1}{16} + (m' + m - 4m) \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{81} \right) = 0 \quad (3)$$

(2) 平衡条件。

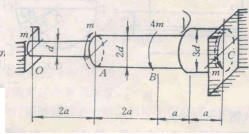
$$m' + m - 4m - m'' = 0 \quad (4)$$

联解 (3)、(4) 得

$$m' = 0.05m$$

$$m'' = -2.95m$$

此处负号表示实际方向与原假定方向相反。



$m' = 0.05m$   
 $m'' = -2.95m$

此处负号表示实际方向与原假定方向相反。

因为  $\frac{|T_1|}{|T_2|} = \frac{2.95}{0.05} = 59$

而  $\frac{W_{11}}{W_{12}} = \frac{\frac{\pi (2d)^3}{16}}{\frac{\pi (d)^3}{16}} = 8$

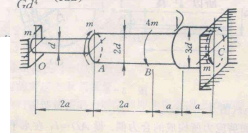
所以，最大剪应力一定在直径为  $2d$  的第三段轴上，其大小为

$$\tau_{max} = \frac{T_1}{W_{11}} = \frac{2.95m}{\frac{\pi (2d)^3}{16}} = 1.88 \frac{m}{d^3}$$

截面 A 相对于固定端的扭转角为

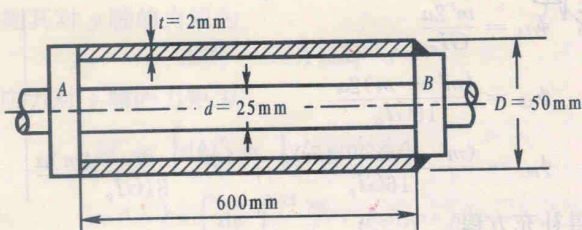
$$\phi_{OA} = \frac{T_1 \cdot 2a}{GI_p} = \frac{0.05m \times 2a}{G \frac{\pi d^4}{32}} = \frac{ma}{Gd^3} \text{ (rad)}$$

Handwritten calculations for maximum shear stress and twist angle are also present.



《辅导》p41例3-6

例 3-6 如图 3-10 所示，在直径为 25 mm 的钢轴上，有凸缘 A 和 B，凸缘相距长度为 600 mm，一外径为 50 mm、壁厚 2 mm 的钢管套在两个凸缘之间，在装配时，轴被 200 N·m 的外力偶矩扭转着与钢管焊接在一起，然后将作用在轴上的外力偶矩除去，求此时钢管内剪应力之值。钢的  $G=80 \text{ GPa}$ ，并设凸缘不变形。



解：(1) 静力平衡方程。

装配时受到  $M_0=200 \text{ N} \cdot \text{m}$  的外力偶矩作用，装配后除去  $M_0$ ，此时根据平衡关系得

$$M_{管} = M_{轴} = M$$

(2) 变形关系。

在  $M_0$  作用下，轴两端相对扭转角为

$$\phi_0 = \frac{M_0 l}{GI_{p,轴}}$$

除去  $M_0$  后，假设轴的两端相对扭转角为  $\phi_{轴}$ ，管子两端相对扭转角为  $\phi_{管}$ ，那么

$$\phi_{管} + \phi_{轴} = \phi_0$$

(3) 物理关系。

将相对扭转角的公式代入变形几何关系式，得到

$$\frac{Ml}{GI_{p,管}} + \frac{Ml}{GI_{p,轴}} = \frac{M_0 l}{GI_{p,轴}}$$

整理得

$$\frac{M_c l}{GI_{p\text{轴}}} = \frac{Ml}{GI_{p\text{管}}} \left( \frac{I_{p\text{轴}}}{I_{p\text{管}}} + 1 \right)$$

因为

$$I_{p\text{轴}} = \frac{\pi d^4}{32}, I_{p\text{管}} = \frac{\pi d^4}{32} (1 - \alpha^4), \alpha = \frac{46}{50}$$

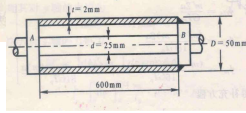
所以

$$\frac{I_{p\text{轴}}}{I_{p\text{管}}} = \frac{\pi \times 25^4}{32} \times \frac{32}{\pi \times 50^4 \times \left[ 1 - \left( \frac{46}{50} \right)^4 \right]} = 1.22$$

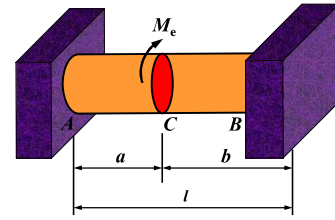
$$M = \frac{M_c}{1.22} = \frac{200}{1.22} = 163.93 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_{\text{管}} = \frac{M}{2\pi r^2 l} = \frac{163.93 \times 10}{2 \times \pi \times 24^2 \times 2} = 22.65 \text{ MPa}$$

(参阅例 3-3,  $r$  为钢管中径。)



例题7 两端固定的圆截面杆AB,在截面C处受一个扭转力偶矩 $M_c$ 的作用,如图所示.已知杆的抗扭刚度 $GI_p$ ,试求杆两端的支反力偶矩.



解:去掉约束,代之以约束反力偶矩

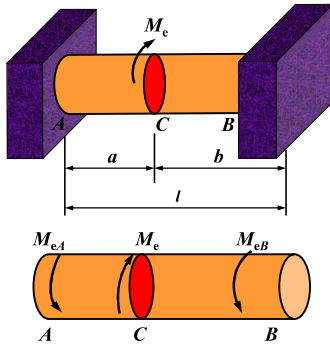
$$\sum M_x = 0$$

$$M_{eA} + M_{eB} - M_c = 0$$

这是一次超静定问题,须建立一个补充方程

杆的变形相容条件是

C截面相对于两固定端A和B的相对扭转角相等.



(1) 变形几何方程

$$\varphi_{AC} = \varphi_{BC}$$

(2) 由物理关系建立补充方程

$$\varphi_{AC} = \frac{T_1 a}{GI_p} = \frac{M_{eA} a}{GI_p}$$

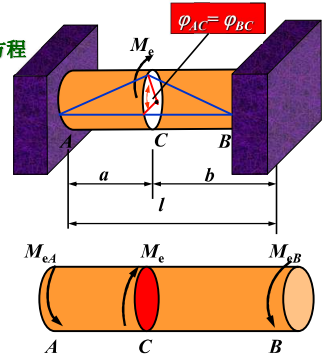
$$\varphi_{BC} = \frac{T_2 b}{GI_p} = \frac{M_{eB} b}{GI_p}$$

$$M_{eB} = \frac{M_{eA} a}{b}$$

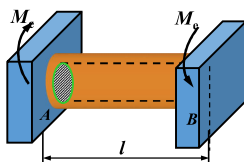
$$M_{eA} + M_{eB} - M_c = 0$$

$$M_{eA} = Mb/l$$

$$\text{解得 } M_{eB} = Ma/l$$



例题8 图 示一长为  $l$  的组合杆,由不同材料的实心圆截面杆和空心圆截面杆组成,内外两杆均在线弹性范围内工作,其抗扭刚度 $G_a I_{pa}$ 、 $G_b I_{pb}$ . 当此组合杆的两端各自固定在刚性板上,并在刚性板处受一对矩为  $M_c$  的扭转力偶的作用. 试求分别作用于内、外杆上的扭转偶矩.



解:列平衡方程

$$\sum M_x = 0$$

$$M_a + M_b = M_c$$

这是一次超静定问题.

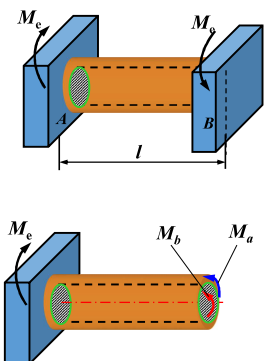
变形相容条件是内、外杆

的扭转变形应相同.

变形几何方程是  $\varphi_A = \varphi_B$

物理关系是

$$\varphi_A = \frac{M_a l}{G_a I_{pa}} \quad \varphi_B = \frac{M_b l}{G_b I_{pb}}$$

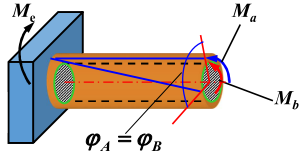
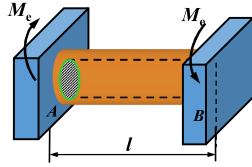


代入变形几何方程,得补充方程

$$M_a = \frac{G_a I_{pa}}{G_b I_{pb}} M_b$$

$$M_a = \frac{G_a I_{pa}}{G_a I_{pa} + G_b I_{pb}} M_e$$

$$M_b = \frac{G_b I_{pb}}{G_a I_{pa} + G_b I_{pb}} M_e$$



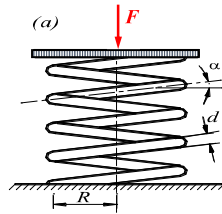
### § 3-6 密圈螺旋弹簧的应力和变形 (Calculation of the stress and deformation in close-coiled helical springs)

#### 一、弹簧丝横截面上的应力 (Calculation of the stress on spring wire cross section)

弹簧的螺旋角  $\alpha < 5^\circ$ , 且  $D \gg d$ , 这样的弹簧称为密圈螺旋弹簧. 推导这种弹簧的应力与变形的计算公式.

##### 1. 内力的计算

(Calculation of internal force)

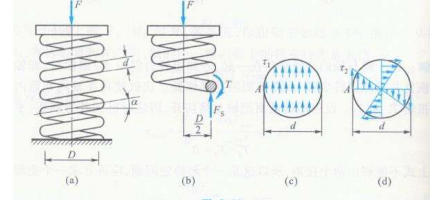
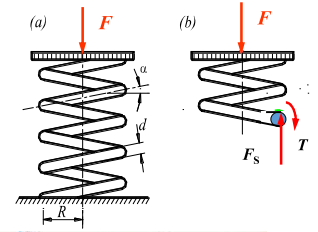


截面法

为便于分析, 将杆的斜度视为  $0^\circ$

簧丝的横截面上有两个内力分量即

$$F_s = F \quad T = \frac{FD}{2}$$



##### 2. 应力的计算

(Calculation of stress)

切应力  $\tau_1$  的大小与分布情况, 认为与等直圆轴 [为

$$\tau_1 = \frac{F_s}{A} = \frac{4F}{\pi d^2}$$

$$\tau_{2max} = \frac{T}{W_t} = \frac{8FD}{\pi d^3}$$

簧点的总应力, 应是剪切和扭转两种切应力的矢也,  $\tau_1$  和  $\tau_{2max}$  方向一致, 总应力达到最大值, 且

$$\tau_{max} = \tau_1 + \tau_{2max} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{8FD}{\pi d^3} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left( \frac{d}{2D} + 1 \right)$$

作为近似计算, 通常可略去与剪力  $F_s$  相应的  $\tau$ , 且  $D/d$  很大时, 还可略去簧圈曲率的影响, 所以簧杆横截面上最大切应力为

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_t} = \frac{FD/2}{\pi d^3/16} = \frac{8FD}{\pi d^3}$$

公式修正的原因: (1) 当  $D/d$  较小, 会引起很大的误差;

(2) 假定剪切引起的切应力是均匀分布的.

$$\tau_{max} = \left( \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c} \right) \frac{8FD}{\pi d^3} = k \frac{8FD}{\pi d^3}$$

式中  $c = \frac{D}{d}$ ,  $k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c}$

$c$  为弹簧指数,  $k$  为曲度系数, 可查教材中的表3.1

c	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10	12	14
k	1.40	1.35	1.31	1.28	1.25	1.23	1.21	1.20	1.18	1.17	1.16	1.15	1.14	1.12	1.10

##### 3. 强度条件(Strength condition)

$$\tau_{max} \leq [\tau]$$

### 二、弹簧的变形

(Deformation of the spring)

#### 1. 应变能的计算

(Calculation of strain energy)

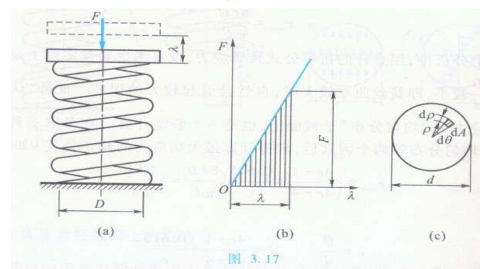


图 3.17



## 二、弹簧的变形 (Deformation of the spring)

### 1. 应变能的计算 (Calculation of strain energy)

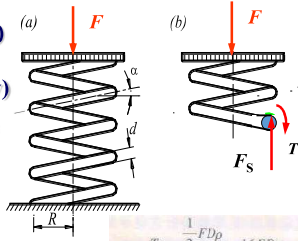
若只考虑簧杆扭转的影响,

可得簧杆内的应变能为

$$v_\varepsilon = \frac{T^2 l}{2GI_p} \quad T = \frac{FD}{2}$$

$$l = n\pi D$$

$$v_\varepsilon = \frac{4F^2 D^3 n}{Gd^4}$$



$$\tau_r = \frac{T\rho}{I_p} = \frac{1}{2} \frac{FD\rho}{\pi d^4} = \frac{16FD\rho}{\pi d^4}$$

$$v_\varepsilon = \frac{\tau_r^2}{2G} = \frac{128F^2 D^3 \rho^2}{G\pi^2 d^4}$$

$$V_\varepsilon = \int_V v_\varepsilon dV = \frac{128F^2 D^3}{G\pi^2 d^4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \rho^2 d\rho d\theta ds = \frac{4F^2 D^3 n}{Gd^4}$$

## 2. 外力做的功 (Work of the external force)

当弹簧的变形为  $\lambda$  时, 外力所做的功为

$$W = \frac{1}{2} F\lambda$$

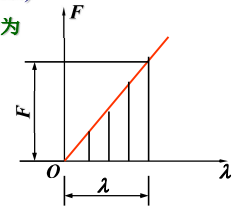
## 3. 功能原理 $V_\varepsilon = W$

(Work-energy principle)

$$\frac{1}{2} F\lambda = \frac{4F^2 D^3 n}{Gd^4}$$

$$\lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4} = \frac{64FR^3 n}{Gd^4} \quad \text{令 } c = \frac{Gd^4}{8D^3 n} = \frac{Gd^4}{64R^3 n}$$

得  $\lambda = \frac{F}{c}$   $c$  — 弹簧刚度



例9 某柴油机的气阀弹簧, 簧圈平均半径  $R=59.5$  mm, 簧丝横截面直径  $d=14$  mm, 有效圈数  $n=5$ . 材料的  $[\tau]=350$  MPa,  $G=80$  GPa, 弹簧工作时总压缩变形 (包括预压变形) 为  $\lambda=55$  mm

试校核弹簧的强度.

解: 求出弹簧所受的压力  $F$  为

$$F = \frac{\lambda G d^4}{64 R^3 n} = \frac{(55 \times 10^{-3})(80 \times 10^9)(14 \times 10^{-3})^4}{64(59.5 \times 10^{-3})^3} = 2510 \text{ N}$$

由  $R$  及  $d$  求出  $c = \frac{D}{d} = \frac{2R}{d} = \frac{2 \times (59.5 \times 10^{-3})}{14 \times 10^{-3}} = 8.5$

查表 3.1 查得弹簧的曲度系数  $k=1.17$

$$\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3} = 1.17 \frac{8(2510 \times 59.5 \times 2 \times 10^{-3})}{\pi(14 \times 10^{-3})^3} = 325 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$= 325 \text{ MPa} < [\tau] \quad \text{弹簧满足强度要求.}$$

## § 3-7 非圆截面杆的扭转

### (Torsion of noncircular prismatic bars)

#### 一、基本概念 (Basic concepts)

非圆杆, 如矩形截面杆扭转后横截面将发生翘曲 (warping) 而不再是平面.

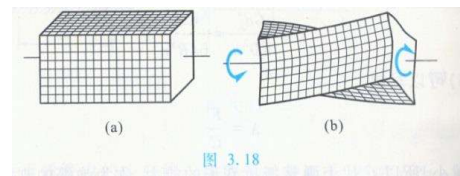
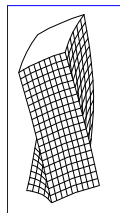


图 3.18

(1) 等直非圆杆在扭转时横截面虽发生翘曲 (warping), 但当等直杆在两端受外力偶作用, 且端面可以自由翘曲时, 其相邻两横截面的翘曲程度完全相同. 横截面上仍然只有切应力而没有正应力. 这一情况称为 **纯扭转 (pure torsion)**, 或 **自由扭转 (free torsion)**.



(2) 若杆的两端受到约束而不能自由翘曲, 则相邻两横截面的翘曲程度不同, 这将在横截面上引起附加的正应力. 这一情况称为 **约束扭转 (constraint torsion)**.

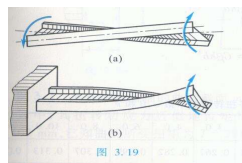


图 3.19

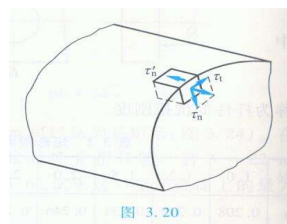


图 3.20

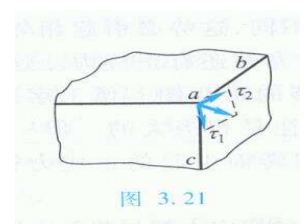


图 3.21

## 二、矩形截面(Rectangular cross section)

矩形截面扭转时,横截面切应力

如图所示,边缘上各点的切应力形成与边界相切的顺流。

整个横截面上的最大切应力发生在长边的中点。

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} \quad W_t = \alpha h b^2$$

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_t} \quad I_t = \beta h b^3$$

短边中点的切应力 $\tau$ 是短边上的最大切应力,且  $\tau = \nu \tau_{\max}$

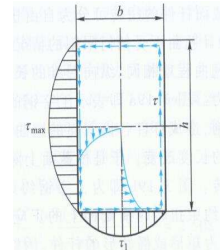
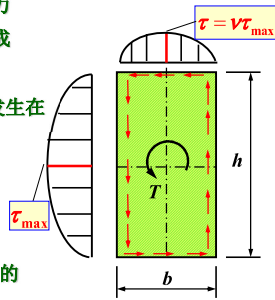


表3-1 矩形截面杆在纯扭转时的系数  $\alpha \beta \nu$

$h/b$	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0	$\infty$
$\alpha$	0.208	0.219	0.231	0.246	0.256	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
$\beta$	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
$\nu$	1.000	0.930	0.858	0.796	0.767	0.753	0.745	0.743	0.743	0.743	0.743

## 三、狭长矩形 (Long narrow rectangle)

狭长矩形截面上切应力的分布情况见图

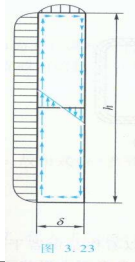
切应力在沿长边各点处的方向均与长边相切,其数值除在靠近顶点处以外均相等。

狭长矩形截面的  $I_t$  和  $W_t$

$$I_t = \frac{1}{3} h \delta^3 \quad W_t = \frac{1}{3} h \delta^2$$

表3-1 矩形截面杆在纯扭转时的系数  $\alpha \beta \nu$

$h/b$	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0	$\infty$
$\alpha$	0.208	0.219	0.231	0.246	0.256	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
$\beta$	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
$\nu$	1.000	0.930	0.858	0.796	0.767	0.753	0.745	0.743	0.743	0.743	0.743



例题10 一矩形截面的等直圆杆,其横截面尺寸  $h=100\text{mm}$ ,  $b=$

$50\text{mm}$ , 长度  $l=2\text{m}$ , 在杆两端作用一对矩  $M=4\text{kN}\cdot\text{m}$  的扭转力偶。钢的许用切应力  $[\tau]=100\text{MPa}$ , 切变模量  $G=80\text{GPa}$ , 许可单位长度扭转角  $[\varphi]=1^\circ/\text{m}$ 。试校核该杆的强度和刚度。

解: 横截面上的扭矩  $T=M=4\text{kN}\cdot\text{m}$

由表 3-1 查得  $\alpha=0.246 \quad \beta=0.229$

$$I_t = \beta h b^3 = 0.229 \times 0.1 \times 0.05^3 = 286 \times 10^{-8} \text{m}^4$$

$$W_t = \alpha h b^2 = 0.246 \times 0.1 \times 0.05^2 = 61.6 \times 10^{-6} \text{m}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{4000}{61.6 \times 10^{-6}} = 65 \text{MPa} < [\tau]$$

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_t} = \frac{4000}{80 \times 10^9 \times 286 \times 10^{-8}} = 0.01745 \text{rad/m} = 1^\circ/\text{m} < [\varphi']$$

例 3.7 某柴油机曲轴的曲柄截面  $m-m$  可以认为是矩形(图 3.24)。在实际计算中,其扭转切应力近似地按矩形截面杆受扭计算。若  $b=22\text{mm}$ ,  $h=102\text{mm}$ , 已知曲柄所受扭矩为  $T=281\text{N}\cdot\text{m}$ , 试求这一矩形截面上的最大切应力。

解: 由截面  $m-m$  的尺寸求得

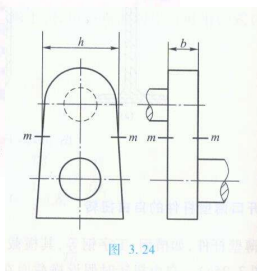
$$\frac{h}{b} = 4.64$$

查表 3.2, 并利用线性插值法, 求出

$$\alpha = 0.287$$

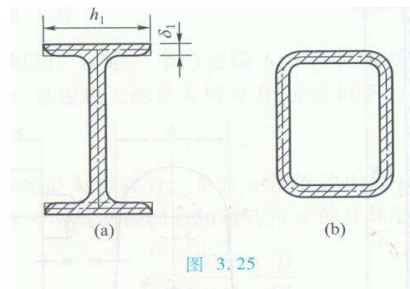
于是, 由公式(3.26)得

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha h b^2} = 19.8 \text{MPa}$$



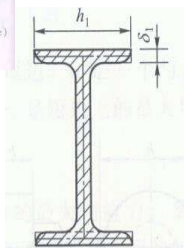
## § 3-8 薄壁杆件的自由扭转

(Free torsion of thin-walled members)



## 一、开口薄壁截面杆

$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_n = \dots$  (a)  
 若以  $T$  表示整个截面上的扭矩,  $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$  分别表示截面各组成部分上分担的扭矩, 则因整个截面上的扭矩应等于各组成部分上的扭矩之和, 故有  
 $T = T_1 + T_2 + \dots + T_n + \dots = \sum T_i$  (b)  
 因为是薄壁杆件, 因此各组成部分可以看作是狭长矩形, 由公式 (3.29), 有  
 $\varphi_1 = \frac{T_1 l}{G \cdot \frac{1}{3} h_1 \delta_1^3}, \varphi_2 = \frac{T_2 l}{G \cdot \frac{1}{3} h_2 \delta_2^3}, \dots, \varphi_n = \frac{T_n l}{G \cdot \frac{1}{3} h_n \delta_n^3}, \dots$  (c)  
 由式 (c) 解出  $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ , 代入式 (b), 并注意到由式 (a) 得  
 $T = \varphi \cdot \frac{G}{l} \left( \frac{1}{3} h_1 \delta_1^3 + \frac{1}{3} h_2 \delta_2^3 + \dots + \frac{1}{3} h_n \delta_n^3 + \dots \right)$   
 $= \varphi \cdot \frac{G}{l} \sum \frac{1}{3} h_i \delta_i^3$   
 引用记号  
 $J_t = \sum \frac{1}{3} h_i \delta_i^3$   
 式 (d) 又可写成  
 $\varphi = \frac{T l}{G J_t}$   
 式中  $G J_t$  即为开口薄壁杆件的抗扭刚度。



## 一、开口薄壁截面杆

在组成截面的任一狭长矩形上, 长边各点的切应力可由公式 (3.29) 的等式计算。  
 $\tau_i = \frac{T_i}{\frac{1}{3} h_i \delta_i^2} = \frac{T_i}{\frac{1}{3} h_i \delta_i^2} \cdot \frac{1}{\delta_i} = \frac{T_i}{\frac{1}{3} h_i \delta_i^3}$  (e)  
 由于  $\varphi = \varphi_i$ , 故由式 (c) 及式 (f) 两式得  
 $\frac{T_i}{G \cdot \frac{1}{3} h_i \delta_i^3} = \frac{T}{G J_t}$   
 由此解出  $T_i$ , 代入式 (e) 得  
 $\tau_i = \frac{T}{J_t} \cdot \frac{1}{3} h_i \delta_i^2$  (h)  
 由式 (h) 看出, 当  $\delta_i$  为最大时, 切应力  $\tau_i$  达到最大值。故  $\tau_{max}$  发生在宽度最大的狭长矩形的长边上, 且  
 $\tau_{max} = \frac{T}{J_t} \cdot \frac{1}{3} h_i \delta_i^2$  (3.30)  
 沿截面的边缘, 切应力与边界相切, 形成顺流, 如图 3.26 所示, 因而在同一厚度线的两端, 切应力方向相反。  
 计算工字钢等开口薄壁杆件的  $J_t$  时, 应对式 (c) 略加修正, 这是因为在这些形截面上, 各狭长矩形是接处有圆角, 圆角内则有斜度, 这增加了杆件的抗扭刚度。修正公式为  
 $J_t = \eta \cdot \sum \frac{1}{3} h_i \delta_i^3$  (i)  
 式中  $\eta$  为修正因数。对角钢  $\eta = 1.00$ , 槽钢  $\eta = 1.12$ , T 字钢  $\eta = 1.15$ , 工字钢  $\eta = 1.20$ 。

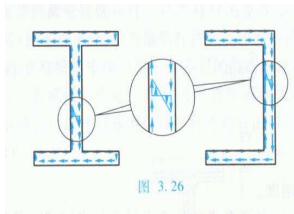
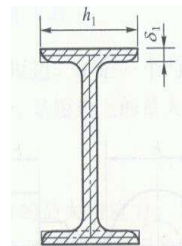


图 3.26

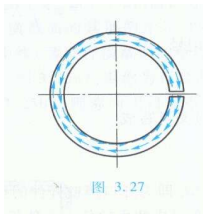


图 3.27

开口薄壁截面杆在自由扭转时的切应力分布如图 (a), 厚度中点处, 切应力为零;

二、闭口薄壁截面杆在自由扭转时的切应力分布如图 (b), 同一厚度处, 切应力均匀分布。

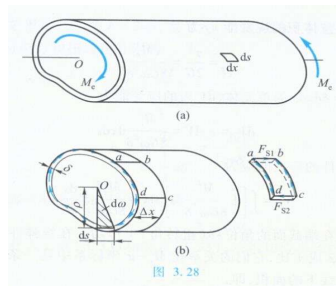


图 3.28

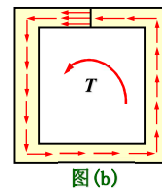
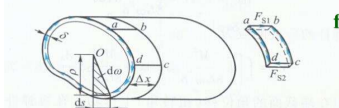


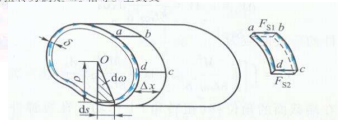
图 (b)

$F_{s1} = \tau_1 \delta_1 \Delta x$   
 $F_{s2} = \tau_2 \delta_2 \Delta x$   
 自由扭转时, 横截面上无正应力,  $bc$  和  $ad$  两侧面上没有平行于杆件轴线的力。将作用于  $abcd$  部分上的力沿杆件轴线方向投影, 由平衡方程可知  
 $F_{s1} = F_{s2}$   
 把  $F_{s1}$  和  $F_{s2}$  代入上式, 可知  
 $\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2$   
 $a$  和  $d$  是横截面上的任意两点, 这说明在横截面上的任意点, 切应力与壁厚的乘积不变。若以  $f$  代表这一乘积, 则  
 $f = \tau \delta = \text{常量}$  (3.31)



$f$  称为剪力流

$T = \int f \rho ds = \int \tau \delta \rho ds$   
 式中  $\rho$  为由  $O$  点到截面中线的切线的垂直距离,  $\rho ds$  等于图中画阴影线的三角形面积  $d\omega$  的 2 倍, 所以积分  $\int \rho ds$  是截面中线所围面积  $\omega$  的 2 倍, 即  
 $T = 2f\omega$   
 $f = \frac{T}{2\omega}$  (3.32)  
 又  $f = \tau \delta$ , 故在  $\delta$  最小处, 切应力最大, 即  
 $\tau_{max} = \frac{f}{\delta_{min}} = \frac{T}{2\omega \delta_{min}}$  (3.33)  
 现在讨论闭口薄壁杆件自由扭转的变形。由公式 (3.32) 求得横截面上一点的切应力为  
 $\tau = \frac{f}{\delta} = \frac{T}{2\omega \delta}$  (用微分法)  
 在自由扭转的情况下, 横截面上的扭矩  $T$  与外加扭转力偶矩  $M_e$  相等。上式又可写成  
 $\tau = \frac{M_e}{2\omega \delta}$



由公式(3.6), 单位体积的应变能  $v_e$  为

$$v_e = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{M^2}{8G\omega^2\delta^2}$$

在杆件内取  $dV = \delta dx ds$  的单元体,  $dV$  内的应变能为

$$dV_e = v_e dV = \frac{M^2}{8G\omega^2\delta^2} \delta dx ds$$

整个闭口薄壁杆件的应变能应为

$$V_e = \int \int \left[ \frac{M^2}{8G\omega^2\delta^2} \delta \right] dx ds = \frac{M^2 l}{8G\omega^2\delta}$$

外加扭转力偶矩在端截面的角位移(扭转角)上作功。在线性弹性范围内, 外力偶矩  $M_e$  与扭转角  $\varphi$  成正比, 它们的关系在  $M_e - \varphi$  坐标系中是一条斜直线,  $M_e$  所作的功等于斜直线下的面积, 即

$$W = \frac{1}{2} M_e \varphi$$

由  $V_e = W$ , 便可求得

$$\varphi = \frac{M_e l}{4G\omega^2\delta} \quad (3.34)$$

若杆件的壁厚  $\delta$  不变, 上式化为

$$\varphi = \frac{M_e l S}{4G\omega^2\delta} \quad (3.35)$$

式中  $S = \oint ds$ , 是截面中线的长度。

$$T = \oint (\tau \delta ds) \rho = \tau \delta \int_{\omega} 2d\omega = 2\tau\delta\omega$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2\delta_{\min}\omega}$$

$$\omega = \oint \frac{1}{2} \rho ds = \int_{\omega} d\omega \text{ 为厚度中线所包围面积}$$

例12 图示椭圆形薄壁截面杆, 横截面尺寸为:  $a=50 \text{ mm}$

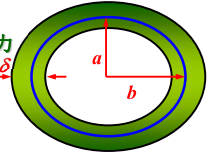
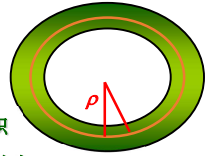
$b=75 \text{ mm}$ , 厚度  $\delta=5 \text{ mm}$ , 杆两端受扭转力偶  $T=5000 \text{ N}\cdot\text{m}$ , 试求

此杆的最大切应力。

解: 闭口薄壁杆自由扭转时的最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2\delta_{\min}\omega} = \frac{T}{2\delta\pi ab}$$

$$= \frac{5000}{2\pi \times 5 \times 50 \times 75 \times 10^{-9}} = 42.5 \text{ MPa}$$



例 3.8 截面为圆环形的开口和闭口薄壁杆件如图 3.29 所示。设两杆具有相同的平均半径  $r$  和壁厚  $\delta$ , 试比较两者的扭转强度和刚度。

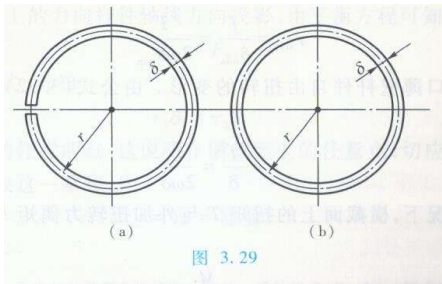


图 3.29

形扭转。这时矩形的长为  $h=2\pi r$ , 宽为  $\delta$ , 当横截面上的扭矩为  $T$  时, 由公式(3.29), 求得切应力和扭转角分别为

$$\tau_1 = \frac{T}{\frac{1}{3} 4\delta^3} = \frac{3T}{2\pi r\delta^2}$$

$$\varphi_1 = \frac{Tl}{G \cdot \frac{1}{3} 4\delta^3} = \frac{3Tl}{2\pi r\delta^3 G}$$

环形闭口薄壁截面的  $\omega$  和  $S$  分别是

$$\omega = \pi r^2, \quad S = 2\pi r$$

以  $\omega$  和  $S$  分别代入公式(3.33)和公式(3.35), 求得切应力和扭转角分别为

$$\tau_2 = \frac{T}{2\omega\delta} = \frac{T}{2\pi r\delta}$$

$$\varphi_2 = \frac{TlS}{4G\omega^2\delta} = \frac{Tl}{4\pi r\delta}$$

圆环形闭口薄壁杆件也可以作为空心圆轴计算。由于  $\delta$  很小, 故  $I_p \approx 2\pi r^3\delta$ ,

$W_p \approx \frac{I_p}{r} \approx 2\pi r^2\delta$ , 这将得到与上面相同的结果。

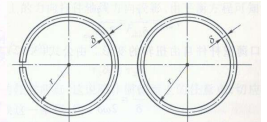
在  $T$  和  $l$  相同的情况下, 两者切应力之比是

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = 3 \left( \frac{r}{\delta} \right)$$

扭转角之比是

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = 3 \left( \frac{r}{\delta} \right)^2$$

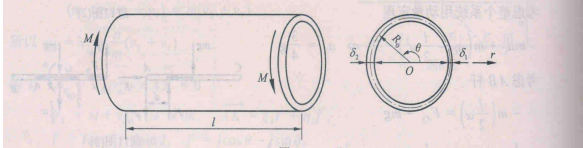
由于  $r$  远大于  $\delta$ , 所以开口薄壁杆件的应力和变形, 都远大于同样情况下的闭口薄壁杆件。



密封性能好:  
加工方便  
(各同时...)

## 《竞赛》p298

2. (10分) 一变厚度薄壁圆管如图2所示, 在两端承受扭转力偶矩  $M$  作用。已知管长  $l$ , 平均半径为  $R_0$ , 最小壁厚为  $\delta_1$ , 最大壁厚为  $\delta_2$ , 壁厚  $\delta$  随  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) 呈线性变化(上下对称), 管材料的切变模量为  $G$ 。试求方位角为  $\theta$  处的扭转切应力  $\tau(\theta)$  与圆管两端相对转角  $\varphi$ 。



答 2.1) 求  $\tau(\theta)$

由  $\delta(\theta) = \delta_1 + \frac{\delta_2 - \delta_1}{\pi} \theta$ , 得

$$\tau(\theta) = \frac{T}{2\pi R_0^2 \delta(\theta)} = \frac{M}{2\pi R_0^2 \left( \delta_1 + \frac{\delta_2 - \delta_1}{\pi} \theta \right)}$$

2) 求  $\varphi$

据  $v_e = \frac{\tau^2}{2G}$ , 有

$$dV_e = \frac{1}{2G} \left[ \frac{M}{2\pi R_0^2 \left( \delta_1 + \frac{\delta_2 - \delta_1}{\pi} \theta \right)} \right]^2 l \delta(\theta) R_0 d\theta = \frac{M^2 l}{8G\pi^2 R_0^3 \left( \delta_1 + \frac{\delta_2 - \delta_1}{\pi} \theta \right)} d\theta$$

$$\text{及 } V_e = \int V_e = \frac{2M^2 l}{8G\pi^2 R_0^3} \int_0^\pi \frac{1}{\delta_1 + \frac{\delta_2 - \delta_1}{\pi} \theta} d\theta = \frac{M^2 l}{4G\pi R_0^3 (\delta_2 - \delta_1)} \ln \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

据  $W = \frac{1}{2} M\varphi = v_e$ , 得

$$\varphi = \frac{Ml}{2G\pi R_0^3 (\delta_2 - \delta_1)} \ln \frac{\delta_2}{\delta_1}$$



## 第四章结束



## 第五章 弯曲内力

### Chapter 5 Internal forces in beams



#### 第五章 弯曲内力

#### (Internal forces in beams)

- ▶ § 5-1 基本概念及工程实例  
(Basic concepts and example problems)
- ▶ § 5-2 梁的剪力和弯矩(Shear- force and bending- moment in beams)
- ▶ § 5-3 剪力方程和弯矩方程·剪力图和弯矩图  
(Shear-force& bending-moment equations ; shear-force & bending- moment diagrams)

- ▶ § 5-4 剪力、弯矩与分布荷载集度间的关系(Relationships between load,shear force,and bending moment)
- ▶ § 5-5 叠加原理作弯矩图  
(Drawing bending-moment diagram by superposition method)
- ▶ § 5-6 平面刚架和曲杆的内力图  
(Internal diagrams for frame members & curved bars)

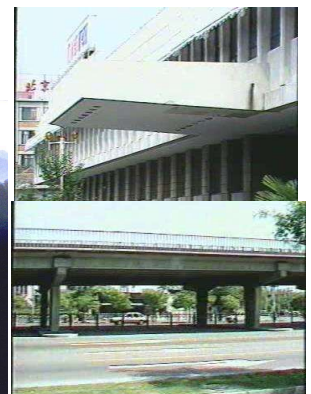
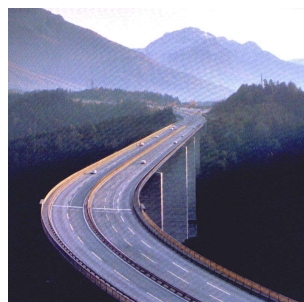
#### § 5-1 基本概念及工程

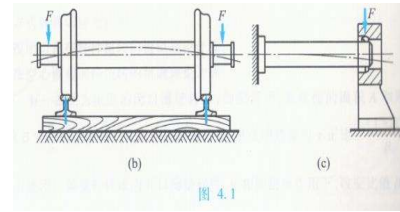
#### (Basic concepts and example problems)

##### 一、工程实例(Example problem)



##### 工程实例(Example problem)





## 二、基本概念(Basic concepts)

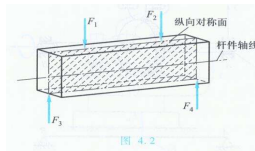
### 1. 弯曲变形(Deflection)

#### (1) 受力特征

外力(包括力偶)的作用线垂直于杆轴线。

#### (2) 变形特征

变形前为直线的轴线,变形后成为曲线。

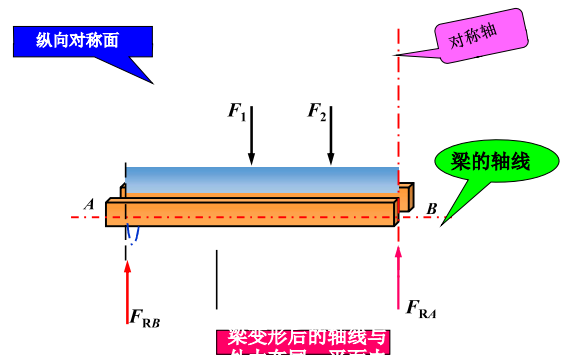


### 2. 梁 (Beam)

以弯曲变形为主的杆件

### 3. 平面弯曲(Plane bending)

作用于梁上的所有外力都在纵向对称面内,弯曲变形后的轴线是一条在该纵向对称面内的平面曲线,这种弯曲称为平面弯曲。

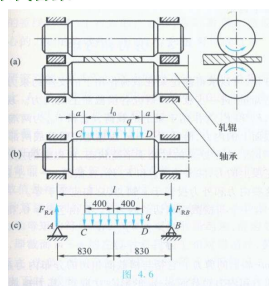


### 4. 梁的力学模型的简化(Representing a real structure by an idealized model)

#### (1) 梁的简化 通常取梁的轴线来代替梁

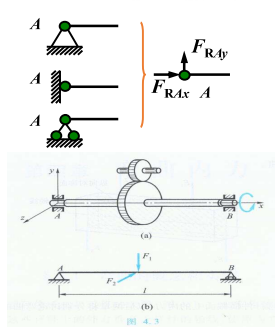
#### (2) 载荷类型

- 集中力
- 集中力偶
- 分布载荷
- 载荷集度

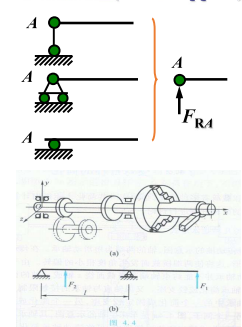


#### (3) 支座的类型

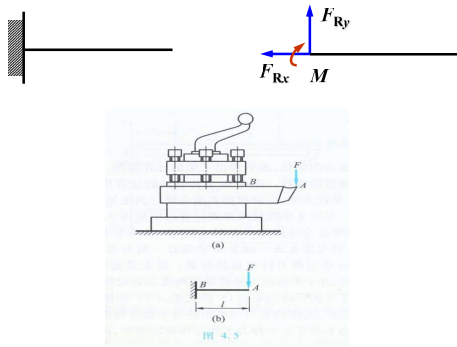
##### 固定铰支座 (pin support)



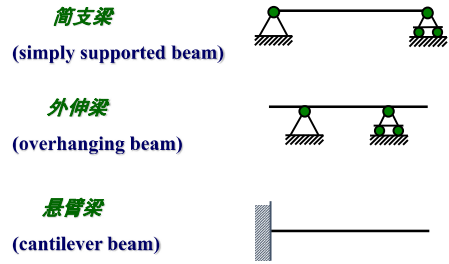
##### 可动铰支座 (roller support)



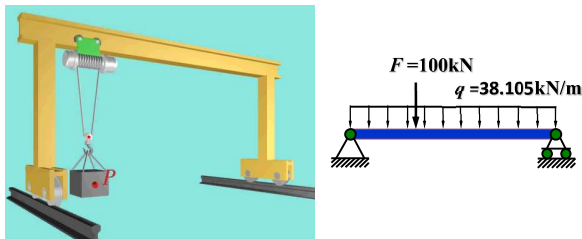
**固定端 (clamped support or fixed end)**



**5. 静定梁的基本形式 (Basic types of statically determinate beams)**



起重机大梁为No.25a工字钢, 如图所示, 梁长 $L=10\text{m}$ , 单位长度的重量为 $38.105\text{kg/m}$ , 起吊重物的重量为 $100\text{kN}$ , 试求起重机大梁的计算简图.



**§ 4-2 梁的剪力和弯矩**

**(Shear force and bending moment in beams)**

**一、内力计算 (Calculating internal force)**

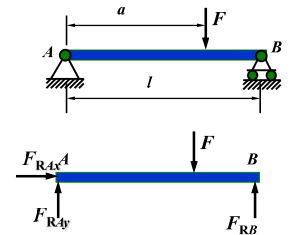
[举例] 已知 如图,  $F, a, l$ .  
求距A端x处截面上内力.

解: 求支座反力

$$\sum F_x = 0, \quad F_{R_{Ax}} = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_{RB} = \frac{Fa}{l}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{R_{Ay}} = \frac{F(l-a)}{l}$$



**求内力——截面法**

$$\sum F_y = 0, \quad F_S = F_{R_{Ay}} = \frac{F(l-a)}{l}$$

$$\sum M_C = 0, \quad M = F_{R_{Ay}} \cdot x$$

弯曲构件内力  $\left\{ \begin{array}{l} \text{剪力} \\ \text{弯矩} \end{array} \right.$

**1. 弯矩 (Bending moment) M**

构件受弯时, 横截面上其作用面垂直于截面的内力偶矩.

**2. 剪力 (Shear force)  $F_S$**

构件受弯时, 横截面上其作用线平行于截面的内力.

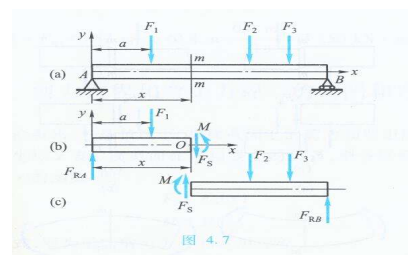
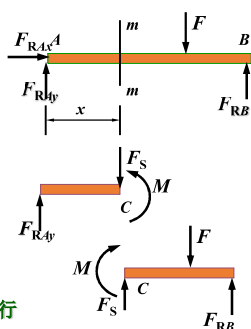


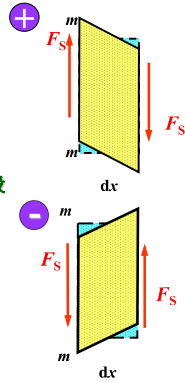
图 4.7

## 二、内力的符号规定 (Sign convention for internal force)

### 1. 剪力符号 (Sign convention for shear force)

使dx微段有左端向上而右端向下的相对错动时,横截面m-m上的剪力为正.或使dx微段有顺时针转动趋势的剪力为正.

使dx微段有左端向下而右端向上的相对错动时,横截面m-m上的剪力为负.或使dx微段有逆时针转动趋势的剪力为负.

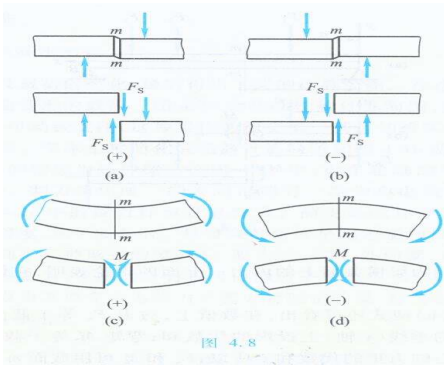
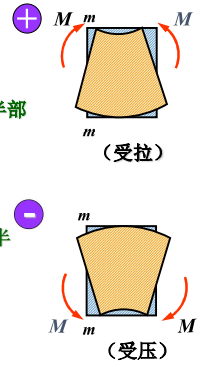


### 2. 弯矩符号

(Sign convention for bending moment)

当dx微段的弯曲下凸(即该段的下半部受拉)时,横截面m-m上的弯矩为正;

当dx微段的弯曲上凸(即该段的下半部受压)时,横截面m-m上的弯矩为负.



例2 图示梁的计算简图.已知  $F_1$ 、 $F_2$ ,且  $F_2 > F_1$ ,尺寸  $a$ 、 $b$ 、 $c$  和  $l$  亦均为已知.试求梁在  $E$ 、 $F$  点处横截面处的剪力和弯矩.

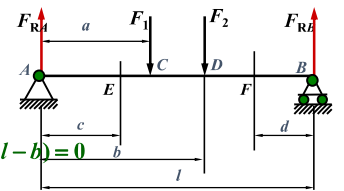
解: (1) 求梁的支反力  $F_{RA}$  和  $F_{RB}$

$$\sum M_A = 0$$

$$F_{RB}l - F_1a - F_2b = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-F_{RA}l + F_1(l-a) + F_2(l-b) = 0$$



$$F_{RA} = \frac{F_1(l-a) + F_2(l-b)}{l} \quad F_{RB} = \frac{F_1a + F_2b}{l}$$

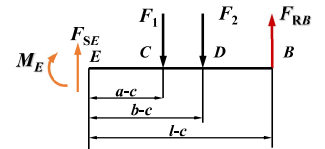
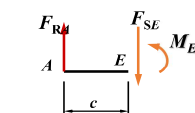
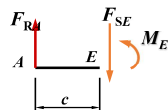
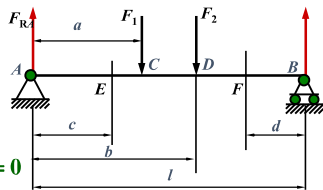
记  $E$  截面处的剪力为  $F_{SE}$  和弯矩  $M_E$ , 且假设  $F_{SE}$  和弯矩  $M_E$  的指向和转向均为正值.

$$\sum F_y = 0, \quad F_{RA} - F_{SE} = 0$$

$$\sum M_E = 0, \quad M_E - F_{RA} \cdot c = 0$$

$$\text{解得 } F_{SE} = F_{RA}$$

$$M_E = F_{RA} \cdot c$$



取右段为研究对象

$$\sum F_y = 0 \quad F_{SE} + F_{RB} - F_1 - F_2 = 0$$

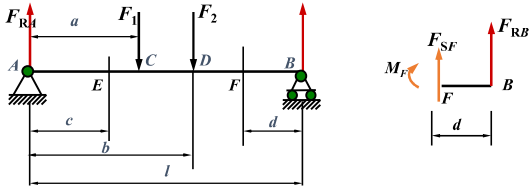
$$\sum M_E = 0 \quad F_{RB}(l-c) - F_1(a-c) - F_2(b-c) - M_E = 0$$

解得

$$F_{SE} = F_{RA} \quad (+)$$

$$M_E = F_{RA} \cdot c \quad (+)$$





计算F点横截面处的剪力 $F_{SF}$ 和弯矩 $M_F$ 。

$$\sum F_y = 0, \quad F_{SF} + F_{RB} = 0 \quad \text{解得: } F_{SF} = -F_{RB} \quad (-)$$

$$\sum M_F = 0, \quad -M_F + F_{RB}d = 0 \quad M_F = F_{RB}d \quad (+)$$

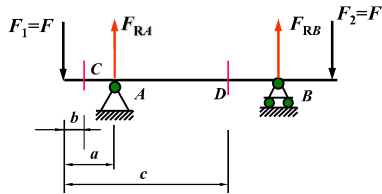
(2) 计算C横截面上的剪力 $F_{SC}$ 和弯矩 $M_C$

看左侧  $F_{SC} = -F_1 = -60\text{kN}$   $M_C = -F_1b = -6.0\text{kN}\cdot\text{m}$

(3) 计算D横截面上的剪力 $F_{SD}$ 和弯矩 $M_D$

看左侧  $F_{SD} = F_{RA} - F_1 = 60 - 60 = 0$

$$M_D = F_{RA}(c-a) - F_1c = -Fa = -13.8\text{kN}\cdot\text{m}$$



### 三、计算规律 (Simple method for calculating shear force and bending moment)

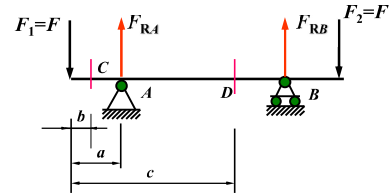
#### 1. 剪力 (Shear force)

$$F_S = \sum_{i=1 \text{左} \text{右}}^n F_i$$

左侧梁段: 向上的外力引起正值的剪力  
向下的外力引起负值的剪力

右侧梁段: 向下的外力引起正值的剪力  
向上的外力引起负值的剪力

例题3 轴的计例算简图如图所示, 已知  $F_1 = F_2 = F = 60\text{kN}$ ,  $a = 230\text{mm}$ ,  $b = 100\text{mm}$  和  $c = 1000\text{mm}$ . 求 C、D 点处横截面上的剪力和弯矩。



解: (1) 求支座反力

$$F_{RA} = F_{RB} = F = 60\text{kN}$$

例题4 求图示梁中指定截面上的剪力和弯矩。

解:

(1) 求支座反力

$$F_{RA} = 4\text{kN} \quad F_{RB} = -4\text{kN}$$

(2) 求1-1截面的内力

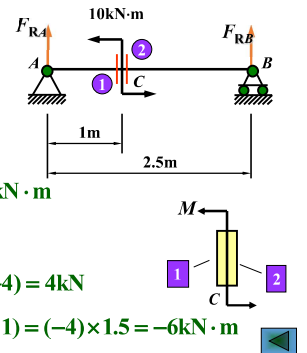
$$F_{S1} = F_{SC左} = F_{RA} = 4\text{kN}$$

$$M_1 = M_{C左} = F_{RA} \times 1 = 4\text{kN}\cdot\text{m}$$

(3) 求2-2截面的内力

$$F_{S2} = F_{SC右} = -F_{RB} = -(-4) = 4\text{kN}$$

$$M_2 = M_{C右} = F_{RB} \times (2.5 - 1) = (-4) \times 1.5 = -6\text{kN}\cdot\text{m}$$



#### 2. 弯矩 (Bending moment)

$$M = \sum_{i=1 \text{左} \text{右}}^n F_i a_i + \sum_{k=1 \text{左} \text{右}}^m M_k$$

不论在截面的左侧或右侧向上的外力均将引起正值的弯矩, 而向下的外力则引起负值的弯矩。

左侧梁段 顺时针转向的外力偶引起正值的弯矩  
逆时针转向的外力偶引起负值的弯矩

右侧梁段 逆时针转向的外力偶引起正值的弯矩  
顺时针转向的外力偶引起负值的弯矩

§ 4-3 剪力方程和弯矩方程·剪力图和弯矩图  
(Shear-force & bending-moment equations;  
shear-force & bending-moment diagrams)

一、剪力方程和弯矩方程 (Shear-force & bending-moment equations)

用函数关系表示沿梁轴线各横截面上剪力和弯矩的变化规律, 分别称作剪力方程和弯矩方程。

1. 剪力方程 (Shear-force equation)  $F_S = F_S(x)$

2. 弯矩方程 (Bending-moment equation)  $M = M(x)$

方程应注明适用区间

例题5 如图所示的悬臂梁在自由端受集中荷载  $F$  作用, 试作此梁的剪力图和弯矩图。

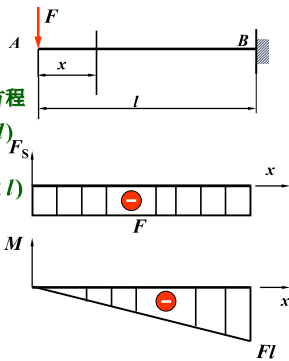
解: 列出梁的剪力方程和弯矩方程

$$F_S(x) = -F \quad (0 < x < l)$$

$$M(x) = -Fx \quad (0 \leq x < l)$$

$$F_{SA左} = 0$$

$$F_{SA右} = -F$$



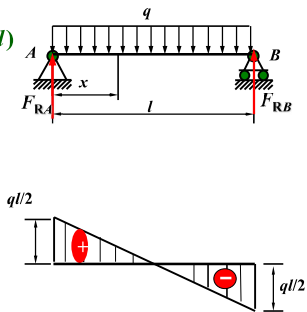
$$F_S(x) = \frac{ql}{2} - qx \quad (0 < x < l)$$

剪力图为一倾斜直线

$$x=0 \text{ 处, } F_S = \frac{ql}{2}$$

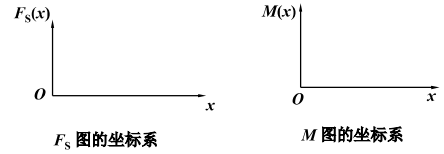
$$x=l \text{ 处, } F_S = -\frac{ql}{2}$$

绘出剪力图



二、剪力图和弯矩图  
(Shear-force & bending-moment diagrams)

以平行于梁轴的横坐标  $x$  表示横截面的位置, 以纵坐标表示相应截面上的剪力和弯矩. 这种图线分别称为剪力图和弯矩图



剪力图为正值画在  $x$  轴上侧, 负值画在  $x$  轴下侧

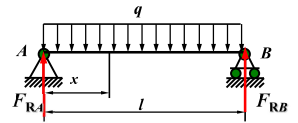
弯矩图为正值画在  $x$  轴上侧, 负值画在  $x$  轴下侧

例题6 图示的简支梁, 在全梁上受集度为  $q$  的均布荷载作用. 试作此梁的剪力图和弯矩图。

解:

(1) 求支反力

$$F_{RA} = F_{RB} = \frac{ql}{2}$$



(2) 列剪力方程和弯矩方程。

$$F_S(x) = F_{RA} - qx = \frac{ql}{2} - qx \quad (0 < x < l)$$

$$M(x) = F_{RA}x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$M(x) = F_{RA}x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad (0 \leq x \leq l)$$

弯矩图为一二次抛物线

$$x=0, \quad M=0$$

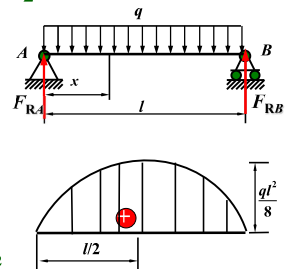
$$x=l, \quad M=0$$

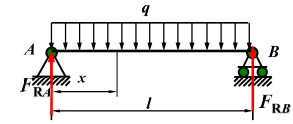
$$\text{令 } \frac{dM(x)}{dx} = \frac{ql}{2} - qx = 0$$

$$\text{得驻点 } x = \frac{l}{2}$$

$$\text{弯矩的极值 } M_{\max} = M_{x=l/2} = \frac{ql^2}{8}$$

绘出弯矩图

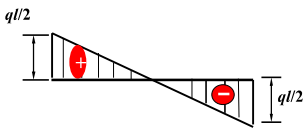




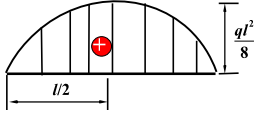
由图可见，此梁在跨中截面上的弯矩值为最大

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$

但此截面上  $F_S = 0$



两支座内侧横截面上剪力绝对值为最大



$$F_{S\max} = \frac{ql}{2}$$