§12.4 Fourier 积分和 Fourier 变换

12.4.1 Fourier 积分

回顾 Fourier 级数:

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

对于 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 有 Dirichlet 收敛性定理. 一般地,

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

当 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积函数时, 如果只考虑 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 这一段的值, 再用 Fourier 级数的方法来讨论, 就不合适了. 为了整体地研究 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的性质. 仿照 Fourier 级数的做法, 令

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt,\quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt, \tag{1}$$

称为 $f(x)$ 的 Fourier **积分的系数**, 而积分

$$\int_{0}^{+\infty}\big(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\big)\,d\lambda$$

称为 $f(x)$ 的 Fourier **积分**, 记为

$$f(x)\sim\int_{0}^{+\infty}\big(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\big)\,d\lambda. \tag{2}$$

问题 1　上式右端中的 Fourier 积分何时收敛? 收敛时是否收敛到 $f(x)$?

引理 1 若 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积函数, 则

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx,\quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx,$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 且当 $\lambda\to+\infty$ 时, $a(\lambda),b(\lambda)$ 都趋于零.

证明 因为 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积函数, 所以对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $A>0$ 使得

$$\int_{A}^{+\infty}|f(x)|\,dx+\int_{-\infty}^{-A}|f(x)|\,dx<\frac{\pi\varepsilon}{4}.$$

记

$$M=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx.$$

因为 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 所以存在 $\delta_1>0$ 使得当 $|x_1-x_2|<\delta_1$ 时, 有 $|\cos x_1-\cos x_2|<\frac{\pi\varepsilon}{2M}$, 因而取 $\delta=\frac{\delta_1}{A}$. 则当 $|\lambda_1-\lambda_2|<\delta$ 时, 有

$$|\cos\lambda_1 x-\cos\lambda_2 x|<\frac{\pi\varepsilon}{2M},\quad(|x|\leqslant A).$$

于是

$$
\begin{aligned}
|a(\lambda_1)-a(\lambda_2)| &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,|\cos\lambda_1 x-\cos\lambda_2 x|\,dx\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{A}^{+\infty}|f(x)|\,|\cos\lambda_1 x-\cos\lambda_2 x|\,dx\\
&\quad+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-A}|f(x)|\,|\cos\lambda_1 x-\cos\lambda_2 x|\,dx\\
&\quad+\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}|f(x)|\,|\cos\lambda_1 x-\cos\lambda_2 x|\,dx\\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\int_{A}^{+\infty}|f(x)\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{-A}|f(x)|\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}|f(x)|\frac{\pi\varepsilon}{2M}\,dx\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

这就证明了 $a(\lambda)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续. 同理, 可证 $b(\lambda)$ 也在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

根据 Riemann-Lebesgue 引理可知, 当 $\lambda\to+\infty$ 时, $a(\lambda), b(\lambda)$ 都趋于零.

引理 2 若 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积函数, 则

$$\int_0^u\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right)d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^u f(t)\cos\lambda(t-x)d\lambda\right)dt.$$

证明 只需证明右端的广义积分收敛到左端的积分. 因为

$$\left|\int_{-A}^{A}\left(\int_0^u f(t)\cos\lambda(t-x)d\lambda\right)dt-\int_0^u\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right)d\lambda\right|$$

$$=\left|\int_0^u\left(\int_{-A}^{A} f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right)d\lambda-\int_0^u\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right)d\lambda\right|$$

$$=\left|\int_0^u\left(\int_{A}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{-A} f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right)d\lambda\right|$$

$$\leqslant\int_0^u\left(\int_{A}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|dt\right)d\lambda=u\left(\int_{A}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|dt\right)$$

$$\to 0\quad(A\to+\infty),$$

所以引理得证.

定理 1 若 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积函数, $a(\lambda), b(\lambda)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 积分的系数, 记

$$S(u,x)=\int_0^u \big(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\big)\,d\lambda,$$

则

$$S(u,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\big(f(x+t)+f(x-t)\big)\frac{\sin ut}{t}\,dt. \tag{3}$$

证明 将 (1) 代入 $S(u,x)$ 中, 并由引理 2, 得

$$\begin{aligned}
S(u,x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^u\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\big(\cos\lambda t\cos\lambda x+\sin\lambda t\sin\lambda x\big)dt\right)d\lambda\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^u\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right)d\lambda\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^u f(t)\cos\lambda(t-x)d\lambda\right)dt.
\end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
S(u,x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin u(t-x)}{t-x}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin ut}{t}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin ut}{t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x+t)\frac{\sin ut}{t}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin ut}{t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(x-t)\frac{\sin ut}{t}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \big(f(x+t)+f(x-t)\big)\frac{\sin ut}{t}\,dt.
\end{aligned}
$$

注　此定理将 Fourier 积分的部分积分转化为不包含 $a(\lambda), b(\lambda)$ 的表示. 这相当于 Fourier 级数的讨论中将 Fourier 级数的部分和表示为积分.

定理 2 (**Fourier 积分局部化定理**) 若 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积函数, 则 $f(x)$ 的 Fourier 积分在某点 x 是否收敛, 以及收敛到什么值, 仅与 f 在 x 附近的函数值有关.

证明 设 $\delta>0$. 将 (3) 右端中的部分积分的表达式分成两段:

$$\begin{aligned} S(u,x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\big(f(x+t)+f(x-t)\big)\frac{\sin ut}{t}\,dt\\ &\quad+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty}\big(f(x+t)+f(x-t)\big)\frac{\sin ut}{t}\,dt\\ &=I_1+I_2. \end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积, 所以 $\varphi(t)=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上绝对收敛. 根据 Riemann-Lebesgue 引理, 有 $\lim\limits_{u\to+\infty}\int_{\delta}^{+\infty}\varphi(t)\sin ut\,dt=0$. 因此 $\lim\limits_{u\to+\infty}I_2=0$. 这就说明 $\lim\limits_{u\to+\infty}S(u,x)$ 是否收敛仅与 I_1 有关. 而 I_1 仅与 f 在 x 附近的值有关. 证毕

返回　全屏　关闭　退出

定理 3 (Dini 定理) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积函数, s 是任意实数. 对固定的 x, 记

$$\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2s.$$

若存在 $\delta>0$ 使得 $\frac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\delta]$ 上可积且绝对可积, 则 f 的 Fourier 积分在 x 处收敛于 s.

证明 因为 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ut}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$, 即, $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin ut}{t}\,dt=1$, 所以由 (3), 得

$$\begin{aligned}
S(u,x)-s&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\big(f(x+t)+f(x-t)-2s\big)\frac{\sin ut}{t}\,dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\varphi(t)}{t}\sin ut\,dt-\frac{2s}{\pi}\int_\delta^{+\infty}\frac{\sin ut}{t}\,dt\\
&\quad+\frac{1}{\pi}\int_\delta^{+\infty}\big(f(x+t)+f(x-t)\big)\frac{\sin ut}{t}\,dt\\
&=I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}$$

返回 全屏 关闭 退出

在定理 2 中已经说明 $\lim\limits_{u\to+\infty} I_3 = 0$.

若存在 $\delta > 0$ 使得 $\frac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\delta]$ 上可积且绝对可积, 则根据 Riemann-Lebesgue 引理, 有 $\lim\limits_{u\to+\infty} I_1 = 0$.

对于 I_2 中的积分, 作变换 $v = ut$, 得

$$\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin ut}{t}\,dt = \int_{u\delta}^{+\infty} \frac{\sin v}{v}\,dv.$$

因为 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin v}{v}\,dv$ 收敛, 所以

$$\lim_{u\to+\infty} \int_{u\delta}^{+\infty} \frac{\sin v}{v}\,dv = 0.$$

因而 $\lim\limits_{u\to+\infty} I_2 = 0$. 于是

$$\lim_{u\to+\infty} S(u,x) = s.$$

这表示 f 的 Fourier 积分在 x 处收敛于 s. 证毕

定理 4 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积. 若 f 在 x 处有广义的左导数和右导数, 则 $f(x)$ 的 Fourier 积分在 x 收敛于 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, 即,

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int_0^{+\infty}\big(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\big)\,d\lambda. \tag{4}$$

证明 令 $s=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, $\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2s$. 若 f 在 x 处有广义的左导数和右导数, 则容易验证 $f(x)$ 在 x 附近满足 Lipschitz 条件. 从而 $\frac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\delta]$ 上可积且绝对可积. 根据 Dini 定理, $f(x)$ 的 Fourier 积分在 x 收敛于 s, 即, (4) 成立. 证毕

推论 1 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积. 若 f 在 x 处可导, 则 $f(x)$ 的 Fourier 积分在 x 收敛于 $f(x)$, 即,

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\big(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\big)\,d\lambda. \tag{5}$$

定理 4 的条件可以做一些修改, 得到

定理 5 设 $f(x)$ 在任意有限区间上可积且绝对可积, 且存在 $M > 0$ 使得当 $|x| \geqslant M$ 时, $f(x)$ 是单调的, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. 若 f 在 x 处有广义的左导数和右导数, 则 $f(x)$ 的积分表示在 x 收敛于 $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$, 即,

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \int_0^{+\infty} \big(a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\big)\, d\lambda, \tag{6}$$

其中

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi.$$

返回 全屏 关闭 退出

例 1 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ 试由 f 的 Fourier 积分导出

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u\cos ux}{u}du=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |x|<1,\\ \frac{\pi}{4}, & |x|=1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

解 因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $b(u)=0$,

$$a(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(x)\cos ut\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}\cos ut\,dt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin u}{u}.$$

于是根据定理 5, 有

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin u}{u}\cos ux\,du.$$

由此可得出结论.

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ 试求 f 的 Fourier 积分.

解 $f(x)$ 是偶函数, 满足定理 5 的条件. $b(\lambda)=0$.

$$\begin{aligned}a(\lambda)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}(1-t)\cos\lambda t\,dt\\&=\frac{2}{\pi}\left[(1-t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\Big|_{t=0}^{t=1}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\,dt\right]\\&=\frac{2}{\pi\lambda}\cdot\frac{-\cos\lambda t}{\lambda}\Big|_{t=0}^{t=1}=\frac{2(1-\cos\lambda)}{\pi\lambda^2}.\end{aligned}$$

于是 f 的 Fourier 积分是

$$\int_0^{+\infty}\frac{2(1-\cos\lambda)}{\pi\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda=f(x).$$

因此, 有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\cos 2xt\,dt=\begin{cases}\frac{\pi}{2}(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$