《复变函数 A》知识点整理

2021 秋季学期　授课教师：李书敏老师　整理者：徐小航

简介：

《复变函数 A》课程是物院、核院、工院、地空物理类在二年级秋季学期的必修课程。在期末复习该课程的过程中，我根据李书敏老师的课件整理了这份《知识点整理》。这份《知识点整理》囊括了所有该课程应对期末考试所需要掌握的知识点，使用者需要理解其中的概念并背诵其中的定理与公式。

由于《知识点整理》是按照李书敏老师的课件整理的，本文档按李老师课件顺序分划章节，不完全按照书上顺序。另外，《复变函数 A》期末考试不仅考察计算，也考察一些证明，因此如果你想要在期末考试获得高分，需要去理解教材上重要定理的证明思路，也需要自己去做题积累经验，这是本文档所不能给予你的。

最后，由于复变函数 A 内容较多，《知识点整理》整理时较为仓促，难免出现错误，如果你在使用过程中发现了错误或疑点，请通过 QQ：1370520469 联系我，我会校对、解答你的问题并在下一个版本中改正。在本文档最后，我附上了我整理的 2021 秋季学期复变函数 A 期末考试试卷回忆版，供有需要的同学取用。

20 级　少转地空　徐小航

2022.1.23

复数、平面点集与复变函数

1. $\operatorname{Re} z=(z+\bar{z})/2$，$\operatorname{Im} z=(z-\bar{z})/2i$，$x^2+y^2=|z|^2=z\bar{z}$。用于将平面曲线$F(x,y)$表示成复数形式。

2.

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), k=0,1,2,\dots,n-1$$

3. 复数列极限的定义：

$$\lim_{n\to+\infty} z_n=z_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}|z_n-z_0|=0$$

4.

$$\lim_{n\to+\infty} z_n=z_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n=x_0, \lim_{n\to+\infty} y_n=y_0$$

$$\lim_{n\to+\infty} z_n=z_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} r_n=r_0, \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arg} z_n=\operatorname{Arg} z_0$$

5. 在复平面引进一个**理想点**，称为**无穷远点**，使它与复球面的北极对应，记作∞。**扩充复平面**，也称为**闭复平面**，是增加了无穷远点的复平面。**开复平面**，简称**复平面**，是不含无穷远点的复平面。与**扩充复平面**对应的球面称为**复数球面**或**黎曼球面**。
$\operatorname{Re}\infty, \operatorname{Im}\infty, \operatorname{Arg}\infty$都没有意义；$|\infty|=+\infty$；若$a\neq 0$，则$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty, a/0=\infty$；若$a\neq\infty$，则$a\pm\infty=\infty, a/\infty=0, \infty/a=\infty$；$\{z||z|>R,\forall R>0\}$被称为无穷远点的邻域。

6. $\{z||z-z_0|<\rho\}$被称为z_0的ρ**邻域**；
若一个点存在一个邻域完全属于点集E，则该点称为E的**内点**；
如果M的任一邻域内既有E的点，也有非E的点，则称M为E的**边界点**；
若M有一个邻域完全不属于E，则M是E的**外点**；
边界是E全部边界点的集合；
如果E的点都是E的内点，则称E为**开集**；
如果E的边界全部属于E，则称E为**闭集**；
如果E可以被包含在原点的某个邻域内，则称为**有界集**，否则为**无界集**。

7. <u>连通</u>（即D中任两点可用一条完全属于D中的折线连结起来）的<u>非空开集</u>D称为**区域**；
区域与它的边界C合称**闭域**，记为$\bar{D}=D+C$；
连续实值函数$x(t),y(t),t\in[\alpha,\beta]$决定点集$l$称为复平面上的**连续曲线**，也可以记为$z(t)=x(t)+iy(t),t\in[\alpha,\beta]$;
若曲线l没有重点（两端点重合除外），则称该曲线为**约当曲线**或**简单曲线**；
若约当曲线的两端点重合，则称为**约当闭曲线**或**简单闭曲线**；
任意一条简单闭曲线l把复平面唯一地分为两个没有公共交点的<u>区域</u>，有界的与无界的分别称为l的**内区域**与**外区域**，两者边界都是l；
如果<u>区域</u>D中任做一条简单闭曲线，其内区域属于D，则称D为**单连通区域**，否则为**多连通区域**。

8. 一个复变函数$w(z)$确定两个二元实变函数$u(x,y),v(x,y)$或$u(r,\varphi),v(r,\varphi)$。

9. 若$w(z)$把z平面上的E变换为w平面上的E'，则记为$E'=w(E)$，称E'/w_0为E/z_0的**像**，反向则称为**原像**。
函数与映照不加区别；**一一映照**（**双方单值映照**）。

10. 实系数多项式的根共轭存在。

11. 求解曲线在映照w下的像的一般思路：
1° 求映照w下的两个二元实值函数$u(x,y),v(x,y)$；
2° 将原像曲线方程与上两个函数联立，消去x,y即可得到像曲线方程。

*主值首字母都是小写，一般值是大写！

复变函数的极限和连续

1. 复变函数极限的定义：
设$w=f(z)$在z_0的去心邻域$0<|z-z_0|<\rho$内有定义，则：

$$(\forall\varepsilon>0)\big(\exists\delta=\delta(\varepsilon)\in(0,\rho)\big)(\forall 0<|z-z_0|<\delta)(|f(z)-w_0|<\varepsilon)\triangleq\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0$$

几何意义是，当变点z无论以什么方式或路径进入z_0的一个充分小去心δ邻域时，它们的像点都会相应地落入w_0的给定的ε邻域。

2. 复变函数连续的定义：

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)\Leftrightarrow f(z)\text{在}z_0\text{连续}$$

连续定义的三要素：$f(z)$在z_0处有定义；$f(z)$在z_0处有极限；$f(z)$在z_0的极限值等于函数值。
若$f(z)$在<u>区域</u>D中的每一点都连续，则称$f(z)$在区域D中连续，记为$f(z)\in C(D)$。

3. 连续的充要条件：
若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则$f(z)$在z_0连续$\Leftrightarrow u(x,y),v(x,y)$在$(x_0,y_0)$连续。

4. 连续复变函数的性质：
(1) 在z_0连续的两个函数$f(z),g(z)$的和、差、积、分母不为 0 时的商，在z_0仍连续。
(2) 若$g(z)$在z_0连续，$f(h)$在$h_0=g(z_0)$连续，则复合函数$f\big(g(z)\big)$在z_0连续。
(3) 有理整函数$w=P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$在整个复平面处处连续。
(4) 有理分式函数$w=P(z)/Q(z)$在复平面除使$Q(z)=0$的点外处处连续，其中P,Q是多项式。

5. 复变函数极限运算法则：若$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$, $\lim\limits_{z\to z_0}g(z)$存在，则：

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)\pm g(z))=\lim_{z\to z_0}f(z)\pm\lim_{z\to z_0}g(z)\ ,\lim_{z\to z_0}(f(z)g(z))=\left(\lim_{z\to z_0}f(z)\right)\left(\lim_{z\to z_0}g(z)\right)$$

$$\lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0 \Longrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)}$$

6. $\arg z$（此处定义$\arg 0 = 0$）在原点和负实轴外处处连续。

7. $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$在$z \to \infty$时趋于$\infty$。

复变函数的导数与解析函数的概念、C-R 方程

1. 可微与导数的定义：

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(\mathrm{z})}{\Delta z}\text{存在} \Leftrightarrow f(\mathrm{z})\text{在可微/可导}$$

并称左侧极限为$f(z)$在z的**导数**或**微商**，记为$f'(z) = \mathrm{d}\,f\,/\,\mathrm{d}\,z$。需要注意，此处$\Delta z \to 0$的方式是任意的。

2. 解析函数的定义：
若$f(z)$在区域D内的每一点可微，则称$f(z)$是D内的**解析**函数；
若闭区域$\overline{D} \subset G$，且f在区域G上解析，则f在闭区域$\overline{D}$上解析；
若$f(z)$在z_0的某个邻域内处处可微，则称$f(z)$在z_0解析；
若$f(z)$在z_0不解析，则称z_0为$f(z)$的**奇点**。

3. 若$f(z)$在z可微，则$f(z)$在z连续。

4. 复变函数的求导运算法则与实变函数相同。注：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z}\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{P'Q - Q'P}{Q^2}\text{，}P'\text{在前}Q'\text{在后！}$$

5. 有理函数在除了使得$Q(z) = 0$的点外处处可微且解析；
函数P/Q在区域D的奇点有P的奇点、Q的奇点、D内使$Q = 0$的点，在其它点解析；
加减乘除不改变函数的解析性，若$h = f(z), g(h)$解析则$g\big(f(z)\big)$解析。

6. 当$f(z) = \operatorname{Re} z + i\lambda \operatorname{Im} z\ (\lambda \neq 1)$在$z$平面上处处不可微，且当$\lambda = -1$时，$f(z) = \bar{z}$处处不可微。（即使$u(x,y), v(x,y)$都可微，$u + iv$也可能不可微）

7. 柯西-黎曼方程：$f(z) = u + iv$在区域D内可微的充要条件是：
(1) u, v都在D可微；
(2) u, v在D内满足：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

以上两者同时成立。将区域D替换为点z_0，或将可微替换为解析，该定理仍成立。

8. $|z|^2$只在$z = 0$可微，在复平面处处不解析。

9. 在区域D内满足$|f(z)| = \mathrm{Const.}$的解析函数f必然是常数。
证法：$u^2 + v^2 = C^2$，两边分别关于x, y求偏导，代入 C-R 方程。

10. 如果$w = f(z)$是区域D内的一一解析映照，则称$f(z)$为D内的**单叶函数**，D为$f(z)$**单叶性区域**。

11. 整数次幂函数的定义为$w = z^n = |z|^n e^{in \arg z}$。它在复平面处处可微、解析。若角域$\alpha < \arg z < \beta$满足$\beta - \alpha \leq 2\pi/n$，则该角域是整数次幂函数的单叶性区域。

根式函数及指数函数

1. 若连续曲线l的起点为a，终点为b，若从a到b时$\operatorname{Arg} z$是连续变化的，则称$\Delta_l \arg z = \operatorname{Arg} b - \operatorname{Arg} a$为$z$沿$l$的**辐角变化**；
对于连续闭曲线l，若原点在l内部且逆时针（正向）绕原点旋转k圈，则$\Delta_l \arg z = 2k\pi$；若原点在l外部，则$\Delta_l \arg z = 0$。
若$w = f(z)$是多值函数，在$z = a$的充分小邻域内，作一条包围该点a的简单闭曲线C，若z从C上某点出发，沿C逆时针转一圈回到出发点后，$f(z)$变为不同的值，则称a是$f(z)$的**支点**。
若$w = f(z)$是多值函数，则连接$f(z)$任意两支点的简单曲线称为$f(z)$的**支割线**。
用$f(z)$的支割线将闭复平面割成多连通区域G，使得G内任意简单闭曲线上$f(z)$绕转一圈值不变。在G内取一简单曲线l，则z从z_0沿l连续变化到z时，$f(z)$从$f_k(z_0)$连续变化到以确定值$f_k(z)$，这样确定的单值函数$f_k(z)$叫做$f(z)$的一个**单值连续分支**。显然，单值连续分支依赖于支割线的选取。
设$w = F(z)$是区域D内的多值函数，$f(z)$是D内的单值解析函数，且D内$f(z)$永远是$F(z)$在z点的一个值，则称$f(z)$是$F(z)$在D内的一个**单值解析分支**。
支割线两侧，根据逆时针顺序，分别称为支割线**下岸**与**上岸**。

2. 整数次幂函数的反函数$w = \sqrt[n]{z}$称为**根式函数**，当$z \neq 0, \infty$时它是n值函数，$\sqrt[n]{0} = 0, \sqrt[n]{\infty} = \infty$，有：

$$w = \sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{|z|}\right) e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{n}} = \left(\sqrt[n]{|z|}\right) e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

它的支点是$z = 0, \infty$，任一从原点出发的射线都可作为它的支割线，它有n个单值连续分支。导数为：

$$\frac{\mathrm{d}\, w_k}{\mathrm{d}\, z} = \left(\frac{\mathrm{d}\, z}{\mathrm{d}\, w_k}\right)^{-1} = \frac{1}{n {w_k}^{n-1}} = \frac{\left(\sqrt[n]{z}\right)_k}{nz}$$

3. **指数函数**定义为$e^z = \exp z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$，其中$x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$。$e^z$有如下性质：
(1) e^z是单值函数。
(2) e^∞无意义，$\forall e^z \neq 0$。
(3) $e^{a+b} = e^a e^b$。
(4) e^z是周期函数，周期为$2\pi i$。
(5) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$。

(6) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$。
(7) e^z全平面解析且$e^{z\prime} = e^z$。
(8) e^z的单叶性区域是条形域$a < \operatorname{Im} z < b, b - a \leq 2\pi$。

4.
1° 根据函数特征，找出可能是支点的点。例如$f = \sqrt{g}$，则支点可能是$g(z) = 0$的点。
2° 根据支点定义判断它们到底是不是支点。例如说，假设需要验证的点是$a \neq \infty$，函数是f，则求$\alpha = \Delta_{|z-a|=\varepsilon\to 0} \arg(f - a)$，若$e^{\alpha i} = 1$，则$a$不是支点，若$e^{\alpha i} \neq 1$，则$a$是支点。若$a = \infty$，则用$\Delta_{|z-a|=R\to\infty} \arg f$来判断。
3° 连接支点，取支割线，分出单值解析分支。
4° 规定支割线某岸的函数取值，确定各分支形式$f_k(z)$。

对数函数、三角函数、双曲函数、反三角函数

1. 满足$e^w = z, z \neq 0$的函数$w = f(z)$称为z的**对数函数**，记为$w = \operatorname{Ln} z$，这是无穷多值函数，有$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$，称其主值为$k = 0$的一支，即$\ln z = \ln|z| + i \arg z$。任意非零复数都有对数。对数函数的性质：
(1) $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, z_1 z_2 \neq 0$。
(2) $\operatorname{Ln} z_1/z_2 = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$，$\operatorname{Ln} 1/z = -\operatorname{Ln} z$。
(3) $\operatorname{Ln} z$有且仅有两个支点$0, \infty$，$\arg z$取值范围依赖于支割线取法。（同$\operatorname{Arg} z, \sqrt[n]{z}$）
(4) $\operatorname{Ln} z$在沿支割线割开的复平面内，$\operatorname{Ln} z$的每一个单值连续分支解析。
(5) $(\operatorname{Ln} z)_k' = 1/z$。

2. 各种三角函数与双曲函数：

$$\cos z \equiv \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \sin z \equiv \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$\cosh z \equiv \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \sinh z \equiv \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

性质：
(1) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$（复变三角函数的定义方法）
(2) $\sinh z = -i \sin iz$,$\sin z = -i \sinh iz$,$\cos iz = \cosh z$,$\cosh iz = \cos z$。
(3) $\cos z, \sin z, \cosh z, \sinh z$在全平面处处解析。
(4) $\cos z, \sin z$以2π为周期，$\cosh z, \sinh z$以$2\pi i$为周期。
(5) 四个函数的零点分别为$(n + 0.5)\pi, n\pi, (n + 0.5)\pi i, n\pi i$。
(6) $\sin z, \cos z$分别是奇函数与偶函数，且有$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$。在计算$\sin(x + yi)$时，可以把$x + yi$当作$z_1 = x, z_2 = yi$处理，再结合(2)即可方便地计算出三角函数值。
(7) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_1$。$\sinh z, \cosh z$分别是奇函数与偶函数。
(8) 复变三角函数的导函数形式与其对应实变函数相同。
(9) $\tan z, \cot z$以π为周期，$\tanh z, \coth z$以πi为周期。
(10) 根据(6)，有公式$\sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$。由此推得$|\sin z|^2 = \cosh^2 y - \cos^2 x$。同理可以推得$\cos z$的求值公式与模。

(11) $|\cos z|, |\sin z|, |\cosh z|, |\sinh z|$是无界的。

3. 反三角函数:

$$\operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$$

$$\operatorname{Arctan} z=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},\operatorname{Arccot} z=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

$$\operatorname{Arccosh} z=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),\operatorname{Arcsinh} z=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)$$

$$\operatorname{arctanh} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z},\operatorname{arccoth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}$$

公式推导方式(以$\operatorname{Arccos} z$为例):把方程$w=\operatorname{Arccos} z$化为关于$e^{iw}$的一元二次方程求解。

一般幂函数、复变函数积分

1. 对$\forall\alpha\in\mathbb{R}$,定义**一般幂函数**为$z^\alpha=e^{\alpha\operatorname{Ln} z}=e^{\alpha(\ln|z|+i\arg z+i2k\pi)}, k\in\mathbb{Z}$。当$\alpha\in\mathbb{N}$,与乘方一致;当$\alpha^{-1}\in\mathbb{N}$,与开方一致。当$\alpha$是既约有理数$m/n$,是$n$值函数。当$\alpha$是一般复数,$k\alpha$不会是整数,因此$z^\alpha$是无穷多值函数。

2. 复变函数积分的定义:设C是z平面上一条从z_0到Z的逐段光滑有向曲线,设$w=f(z)$是C上的单值连续复函数,则:
1° (分割)在C中任意插入$n-1$个分点,加上z_0和Z依次记为$z_0,z_1,\dots,z_{n-1},z_n=Z$。
2° (取近似值)在每个弧段$z_{k-1}z_k$上任取一点ξ_k,$k=1,2,\dots,n$,用$f(\xi_k)$近似$f(z)$在$z_{k-1}z_k$上每一点的值。
3° (作和)记$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$,作和:

$$\sum_{k=a}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$$

4° (求极限)记$\lambda=\max\{|\Delta z_k|\}$,若极限:

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ \lambda\to 0}}\sum_{k=a}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$$

存在且与C的分段法和ξ_k的取法无关,则称$f(z)$在曲线C上**可积**,上述极限值称为$f(z)$沿C自z_0到Z的积分,记作:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\triangleq\lim_{\substack{n\to+\infty\\ \lambda\to 0}}\sum_{k=a}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$$

2. 若$f(z)$在C上连续,C逐段光滑,则$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$存在,且:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_C u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y+i\int_C v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y=\int_C(u+iv)(\mathrm{d}x+i\,\mathrm{d}y)$$

3. 若$C: z(t), a \le t \le b$是简单光滑曲线，则：

$$\mathrm{d}\,z = z'(t)\,\mathrm{d}\,t\ , \int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_a^b f\big(z(t)\big) z'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

4. 复积分具有**被积函数线性可加性**与**积分路径可加性**。
*直线$y = kx + b$的复数形式为$z = t + i(kt + b)$。

5. 对以a为中心的圆周，$\int_C (z-a)^{-1}\,\mathrm{d}\,z = 2\pi i$，$n \in \complement_{\mathbb{Z}}\{1\} \Longrightarrow \int_C (z-a)^{-n}\,\mathrm{d}\,z = 0$。

6. $\mathrm{d}\,s \triangleq |\mathrm{d}\,z|$，且：

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}\,s = \int_C |f(z)||\mathrm{d}\,z| \equiv \int_a^b f\big(z(t)\big)|z'(t)|\,\mathrm{d}\,t$$

7. 长大不等式：若C的长度为L，且在C上有$\forall f(z) \le A$，则：

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le AL$$

8. 设$\rho > 0$充分小，$f(z)$在$C_\rho: z = a + \rho e^{i\theta}, \alpha \le \theta \le \beta$上连续，且$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) = k$，则：

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,\mathrm{d}\,z = i(\beta - \alpha)k$$

柯西积分定理、原函数、N-L 公式

1. （Cauchy 积分定理）设D是简单闭曲线（简称**闭路**）C围成的单连通区域，$f(z)$在<u>闭域$\overline{D} = D + C$</u>上<u>解析</u>，则：

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

推论：若f在单连通区域D内，对于简单曲线$C \subset D$，$\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z$仅仅依赖于$C$的起点与终点，与路径无关。
推论：（多连通区域 Cauchy 定理）Cauchy 定理对复闭路也成立。

2. 复闭路的定义：设简单闭曲线$C_1, C_2, \dots, C_n$都在简单闭曲线C_0的内部，且$C_1, C_2, \dots, C_n$中每一条都在其余各条的外部，则$C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$围成一个多连通区域$D$，它的全部边界$C$称为一个**复闭路**。记复闭路$C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$，今后复积分中复闭路的方向默认为正向。

3. 若$f(z)$在<u>单连通区域D</u><u>解析</u>，则变上限积分函数：

$$F(z) \triangleq \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

是D内的<u>单值解析</u>函数，且$F(z)$是$f(z)$在D内的原函数。
推论：（N-L 公式）若$H(z)$是$f(z)$的任一原函数，则，$F(z) = H(z) - H(z_0)$。

柯西积分公式、解析函数的性质

1. （Cauchy 积分公式）如果$f(z)$在闭路C对应的闭域$\overline{D}$上处处解析，则对$\forall z_0 \in D$有：

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\,\mathrm{d}\,\xi$$

推论：

$$\int_C \frac{f(z)}{g(z)(az-b)}\,\mathrm{d}\,z=\int_C \frac{f(z)/ag(z)}{z-b/a}\,\mathrm{d}\,z=2\pi i\cdot\frac{f(b/a)}{ag(b/a)}$$

推论：解析函数在区域内任一点的值可以由区域边界的值完全确定；如果两解析函数区域边界上处处相等，则在区域内处处相等。

2. （解析函数的高阶导数 Cauchy 积分公式）在与 Cauchy 积分公式相同的条件下，有：

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\xi\,,n=0,1,2,3,\dots$$

推论：解析函数有任意阶导数，即解析函数的任意阶导数解析。

3. 平均值公式：设$f(z)$在闭圆$|z-a|\le R$解析，则：

$$f(a)=\frac{1}{2\pi R}\int_{|z-a|=R} f(z)\,\mathrm{d}\,s\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+Re^{i\theta}\right)\mathrm{d}\,\theta$$

4. 最大模原理（平均值公式的推论）：设$f(z)$在有界域D内解析，在D对应闭域$\overline{D}$上连续，$f(z)$在D内不恒等于常数，则$|f(z)|$只能在边界C上取到它在$\overline{D}$上的最大值。

*圆链法：将曲线用无数多个无限小圆周覆盖，圆心都在曲线上，每一个圆心都在另一个圆周上。用这样的方式可以将曲线上一个圆心的性质传递到其它圆心，从而得出整个曲线的性质。

5. Cauchy 不等式：若$f(\xi)$在D内解析，$\forall z\in D$，以z为圆心任一含在D内的圆周C:$|\xi - z|=R$满足：

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!\,M(R)}{R^n}\,,n=0,1,2,\dots$$

其中$M(R)$是$|f(z)|$在圆周C上的最大值。

6. 刘维尔 Liouville 定理：如果$f(z)$是整函数，且$(\exists M>0)(\forall z\in\mathbb{C})(|f(z)|\le M)$，则$f(z)$在整个开复平面必是常数。

***整函数**是在开复平面上处处解析的函数。

推论：不是恒常数的整函数的模在开复平面无界。

7. 代数学基本定理：任意n次复多项式必有零点，且有n个根，重根按重数计算。

8. 莫雷拉 Morera 定理（柯西积分定理逆定理）：若$f(z)$在单连通区域D中连续且对D内任一闭路C都有$\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z$，则$f(z)$在$D$内解析。

解析函数与调和函数的关系、调和函数的性质

1. 若实函数$u(x,y)$在区域D内有二阶连续偏导数，且在D内满足**二维 Laplace 方程**：

$$\nabla u \triangleq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\equiv 0$$

则称$u(x,y)$为区域D内的**调和函数**。

2. 若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在D内解析，则u,v都是D内的调和函数。
*若u,v都是D内的调和函数，且满足柯西-黎曼方程，则称u,v为**共轭调和函数**。

3. 若u,v共轭调和，则等值曲线族$u(x,y)=K_1, v(x,y)=K_2$在其公共点上永远正交，即法线互相垂直。

4. 平均值定理：调和函数在圆心的值等于它在圆周上的平均值。

5. 调和函数的极值原理：闭域$\overline{D}$上连续的D中的调和函数如果不恒等于常数，则只能在边界上取到整个闭域内的最大与最小值。

6. 泊松积分公式：若u是闭圆$|z-z_0|\le R$上的调和函数，则对圆内任意一点$z=z_0+re^{i\varphi}$：

$$u\left(z_0+re^{i\varphi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)u\left(z_0+Re^{i\theta}\right)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\mathrm{d}\,\theta$$

7. Dirichlet 问题的定义：已知区域边界的调和函数$u(x,y)$值，求整个区域的$u(x,y)$值，即解方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ u(x,y)|_C=\varphi(x,y)|_C\end{cases}$$

当区域是个圆时，可以使用泊松积分公式解这个问题。

8. Dirichlet 问题的解是稳定的，即，若u_1,u_2都是有界区域D内的调和函数，u_1,u_2在闭域$\overline{D}$连续，则$(\forall\xi\in C)(u_1(\xi)-u_2(\xi)\le\varepsilon)\Longrightarrow(\forall z\in\overline{D})(u_1(z)-u_2(z)\le\varepsilon)$。
*该定理隐含了 Dirichlet 问题解的唯一性。

9. 已知$u(x,y)$是单连通区域D的调和函数，则其确定的如下v使$f(z)=u+iv$在D内解析：

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}\,x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}\,y+C$$

反向地：

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}\,x+\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}\,y+C$$

可利用 C-R 方程对这两式进行记忆，因为这两式也由 Green 公式和 C-R 方程推出。

复级数的基本性质

1. 称$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$为**复数项无穷级数**，$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$称为$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$的**部分和**，若**部分和列**$\{S_n\}$有极限且$S_n \to S$，称$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$**收敛**，称S为$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$的**和**，否则称$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$**发散**。

2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + ib_n) = S = a + ib \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a \,, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = b$$

3. Cauchy 收敛准则: $\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$收敛的充要条件是: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall n > N, p \in \mathbb{Z}^+)\left(\left|z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}\right| < \varepsilon\right)$。
推论：$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$收敛的必要条件是$z_n \to 0$。此推论可用于证明级数发散。

4. 若$\sum_{k=1}^{+\infty} |z_k|$收敛，则称$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$**绝对收敛**。
$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k = \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k + ib_k)$绝对收敛的充要条件是$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$与$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$都绝对收敛。
推论：绝对收敛⟹收敛。
推论：实正项级数的收敛判别法，都可用来判别复数项级数绝对收敛性。

5. 当$|z| < 1$，$\sum_{k=1}^{+\infty} z^k = (1-z)^{-1}$绝对收敛，$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k z^k = (1+z)^{-1}$；当$|z| \geq 1$，$\sum_{k=1}^{+\infty} z^k$发散。

6. 绝对收敛的复数项级数各项任意重新排序后求和，仍然绝对收敛且其和不变。另外：

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{z}_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{z}_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}(\tilde{z}_1\hat{z}_{n-1} + \cdots + \tilde{z}_{n-1}\hat{z}_1)$$

复变函数项级数

1. 对复平面点集E上的复变函数列$\{f_n(z)\}$，称$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$为$E$上的一个**复变函数项级数**。若$z_0 \in E$且复数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z_0)$收敛，则称复变函数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$在点$z_0$上**收敛**，若$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$在$E$上每一点都收敛，则称$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$在$E$上收敛。我们记$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$，$S_n(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z_0)$。
若$(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists N = N(\varepsilon)\right)(\forall n \geq N, z \in E)(|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon)$，则称$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$在$E$上**一致收敛**于$f(z)$。

2. Cauchy 收敛准则：$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$在$E$上一致收敛⟺ $(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists N = N(\varepsilon)\right)(\forall n \geq N, z \in E, p \in \mathbb{Z}^+)\left(\left|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)\right| < \varepsilon\right)$。

3. Weierstrass 判别法/比较判别法: 若$\exists M_n > 0, n = 1,2,\ldots$使得$\forall |f_n(z)| \leq M_n$且$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$在$E$上绝对一致收敛。$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$称为$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$的**强级数**。

4. 若区域内$f_n(z)$都<u>连续</u>，$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z_0)$一致收敛于$f(z)$，则和函数$f(z)$在区域内连续。

把区域改为曲线C，则有$\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_C \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z$。

（Weierstrass 定理）若区域内$f_n(z)$都<u>解析</u>，$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$一致收敛于$f(z)$，则和函数$f(z)$在区域内解析，且$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^k(z)$。

5. 若$\{a_n\}, a$都是复常数，称$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$为**幂级数**。

6. Abel 定理：若$I = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$是幂级数，则：

(1) 若I在z_0收敛，则I在圆$|z-a| < |z_0 - a|$内绝对收敛；

(2) 若I在z_0收敛，则对$\forall 0 < \rho < |z_0 - a|$，在$|z-a| \le \rho$上$I$绝对一致收敛；

(3) 若I在z_1发散，则圆外域$|z-a| > |z_1 - a|$处处发散。

7. 若$J = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n, x \in \mathbb{R}$的收敛半径为$R$，$I = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$，则：

(1) 若$0 < R < +\infty$，则I在$|z-a| < R$内绝对收敛，在$|z-a| > R$处处发散；

(2) 若$R = +\infty$，则I在全平面内收敛；

(3) 若$R = 0$，则I在全平面内除$z = a$外处处发散。

我们称$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n$的收敛半径是$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$的**收敛半径**；若$0 < R \le +\infty$，称$|z-a| < R$为$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$的**收敛圆**。

幂级数及其收敛圆、解析函数 Taylor 展开

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$的收敛半径为$R = 1/r$，其中：

$$r = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

2. $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$的收敛半径若为$R > 0$，则在$|z-a| < R$内：

(1) 幂级数和函数$f(z)$解析，且可以逐项求任意阶导数；

(2) $a_k k! = f^{(k)}(a)$。

3. 设$f(z)$在a解析，以a为圆心作圆$D: |z-a| < R$，并令圆D的半径R不断扩大，直至D边界$|z-a| = R$首次碰上$f(z)$奇点为止，则在D内$f(z)$可展开为幂级数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n \ , a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$f(z)$在任一解析点a的泰勒展开式是唯一的。

4. $f(z)$在区域D内解析的充要条件是$f(z)$在D内任一点a可以展开成$(z-a)$的幂级数。

5. 无界区域 Cauchy 积分公式：设$f(z)$在闭路C及其外区域D解析，$\lim_{z\to\infty} f(z) = A \ne \infty$，则：

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - a} \mathrm{d}\,\xi = \begin{cases} -f(a) + A, a \in D \\ A, a \in C\text{的内区域} \end{cases}$$

6. z_0是解析函数$f(z)$的m阶零点的充要条件是在z_0某个（充分小）邻域内$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$，$g(z)$在z_0解析且$g(z_0) \ne 0$。

7. 解析函数零点孤立性：设$f(z)$在z_0解析，且$f(z_0)=0$，则要么在z_0某个邻域U内$f(z)\equiv 0$，要么存在z_0的一个邻域U使得U内z_0是$f(z)$唯一零点。

罗朗 Laurent 级数

1. $f(z)$在奇点$z=a$附近，可展开为如下形式的级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n$$

这样的双边级数称为**罗朗 Laurent 级数**。它由$n<0$的**负幂项部分**与$n\geq 0$ 的**非负幂项部分**组成。如果两部分都收敛，我们称该罗朗级数**收敛**。

2. 设罗朗级数的非负幂项部分收敛半径为R，$\sum_{n=1}^{+\infty}a_{-n}\xi^m$的收敛半径为$1/r$，则：
(1) $r<R\Longrightarrow$两收敛域有公共部分$0\leq r<|z-a|<R$。（包括特殊圆环域）
(2) $r=R\Longrightarrow$罗朗级数至多在$|z-a|=R$上某些点收敛。
(3) $r>R\Longrightarrow$两收敛域无公共部分，罗朗级数处处发散。

3. 若$f(z)$在圆环域$D:r<|z-a|<R$内解析，则对$\forall z\in D$存在$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n$，其中：

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\,\xi\ ,n\in\mathbb{Z}$$

其中C是D内任一绕a的逆时针简单闭路。$f(z)$在同一个圆环域内的罗朗展式是唯一的。
直接利用该式求圆环域内罗朗展开被称为直接展开法。

4. 圆环域内罗朗展开的间接展开法：（与解析圆域内幂级数展开非常类似）
*灵活利用$e^z,\cos z,\sin z$在$z=0$的泰勒展开式
*灵活应用$(1-z)^{-1},(1+z)^{-1}$的泰勒展开式

5. 常见函数的泰勒展开：

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots,|z|<1$$

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+\cdots,|z|<1$$

$$\mathrm{Ln}_k(1+z)=2k\pi i+z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}+\cdots$$

6. 若$f(z)$在点a不解析，即a是$f(z)$的奇点，但是$f(z)$在$0<|z-a|<\rho$内解析，则称a是$f(z)$的**孤立奇点**。若$f(z)$在a的罗朗展开无负次幂项，则称$z=a$是$f(z)$的**可去奇点**；若$f(z)$在a罗朗展开有且只有有限个（设有m个）负次幂项，则称$z=a$是$f(z)$的m阶/级**极点**；若罗朗展开有无限多负次幂项，则称a是$f(z)$的**本性奇点**。
如果$f(z)$在某个∞邻域$D: R<|z|<+\infty$内解析，则称∞是$f(z)$的孤立奇点。若0是$f(1/\xi)$的可去奇点，则称∞是$f(z)$的可去奇点；m级极点、本性奇点定义类似。

7. 非∞孤立奇点类型判定方法：
*可去奇点的判别法：
a是$f(z)$的可去奇点$\Leftrightarrow$存在a的去心邻域使$f(z)$在其中有界。
a是$f(z)$的可去奇点$\Leftrightarrow \lim_{z\to a} f(z)=a_0$存在且有限。
*极点的判别法：
a是$f(z)$的m阶极点$\Leftrightarrow$存在a的去心邻域使其中存在<u>于a解析</u>的函数$\varphi(z)$使得$\varphi(z)=f(z)(z-a)^m$，且$\varphi(a)\neq 0$。
a是$f(z)$的m阶极点$\Leftrightarrow$ a是$1/f(z)$的m阶零点。
a是$f(z)$的极点$\Leftrightarrow \lim_{z\to a} f(z)=\infty$。
*本性奇点的判别法：
a是$f(z)$的本性奇点$\Leftrightarrow \lim_{z\to a} f(z)$不存在。
*∞孤立奇点的判别方法类似。

8. Bessel 函数：

$$J_n(t) \triangleq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta - n\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$$

整数阶 Bessel 函数的**母函数**为：

$$\exp\left(\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\,\theta\right)z^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t)z^n$$

整数阶 Bessel 函数满足$J_{-n}(t)=(-1)^n J_n(t)$。它是n阶 Bessel 方程：

$$t^2y''+ty'+(t^2-n^2)y=0$$

在$|t|>0$的一个解。

留数定理

1. 留数/残数的定义：若a是$f(z)$的非∞孤立奇点，则存在一个去心邻域使$f(z)$解析，对邻域中任意围绕a的正向闭路C，$\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z$值相同，其值只与$f(z)$和$a$有关，记：

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

称为$f(z)$在a点的**留数/残数**。

2. 留数定理：设$f(z)$在闭路C上解析，在C内部除了n个孤立奇点$\{a_n\}$都解析，则：

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k]$$

利用留数定理可以求复积分。

3. 留数的常用计算方法

(1)

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z=\operatorname{Res}[f(z),a]$$

对级数很大的极点，需要用此定理求级数，并用待定系数法求a_{-1}。

(2) 若a是$f(z)$的m级极点，则：

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\,z^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right)$$

(3) 若a是$f(z)$可去奇点或解析点，$\operatorname{Res}[f(z),a]=0$。

(4) 若$P(z),Q(z)$都在a解析，且$P(a)\neq 0,Q(a)=0,Q'(a)\neq 0$，则：

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},a\right]=\frac{P(a)}{Q'(a)}$$

该方法是(2)的拓展，适合求 1 级极点的留数，在分母不易因式分解的情况下尤为方便。

*善用留数、复积分、罗朗级数之间互相计算！

留数定理的应用——积分计算

1. $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$型（或$\int_{-\pi}^{\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$）定积分的求解方法：

1° 令$z=e^{i\theta},0\leq\theta\leq 2\pi\ (-\pi\leq\theta\leq\pi)$，则$\mathrm{d}\,z=ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\,\theta=iz\,\mathrm{d}\,\theta$。

2° $\cos\theta=0.5(z+\bar{z})$，而$z=e^{i\theta}\Longrightarrow\bar{z}=1/z$，有：

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

3° 经过上述变换，积分路径由$0\leq\theta\leq 2\pi$变成逆时针的$|z|=1$，因此：

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta=\int_{|z|=1}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz}\,\mathrm{d}\,z$$

4° 利用留数定理求解上述积分。

2. 泊松积分：

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\,\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\frac{2\pi}{1-p^2}\quad 0<p<1$$

3. 广义积分的相关定义：

(1) 若$\lim_{A\to+\infty,B\to-\infty}\int_B^A f(x)\,\mathrm{d}\,x$存在，则称$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}\,x$**收敛**，记为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}\,x=\lim_{\substack{A\to+\infty\\B\to-\infty}}\int_B^A f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

(2) 若上述极限等于∞或不存在，则称该广义积分**发散**。

(3) 广义积分的**柯西积分主值**为：

$$\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}\,x\triangleq\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

当广义积分发散时，其柯西积分主值仍有可能收敛。

4. 求解有理函数型广义积分用的三条引理：

(1) 若$\exists R_0 > 0$，使得$R > R_0$时$f(z)$在圆弧$C_R: z = Re^{i\theta}, \alpha \le \theta \le \beta$上连续，则：

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0 \Longrightarrow \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

(2) （小圆弧引理）对充分小的ρ，$f(z)$在圆弧$C_\rho: z = a + \rho e^{i\theta}, \alpha \le \theta \le \beta$上连续且$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = k$，则：

$$\lim_{\rho\to0}\int_{C_\rho} f(z)\,\mathrm{d}\,z = i(\beta-\alpha)k$$

$k = 0$这一特殊情形是常见的。

(3) （约当引理）若对充分大的R，$g(z)$在圆弧$C_R: |z| = R, \operatorname{Im} z > -a$上连续，且$\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$，则对任何正数$\lambda$都有：

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}\,\mathrm{d}\,z = 0$$

5. 有理函数型广义积分求解：

1° 设有理函数$R(x) = P(x)/Q(x)$，$P(x), Q(x)$都是x的多项式，若$Q(x)$比$P(x)$次数高至少 2 次且$\forall Q(x) \ne 0$，则广义积分：

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} R(x)\,\mathrm{d}\,x$$

收敛。

2° 作半圆弧辅助闭路$C = C_A + [-A, A], C_A: z = Ae^{i\theta}, 0 \le \theta \le \pi$。$R(z)$在闭路$C$上解析。

3° 利用留数定理得到：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}\,x + \lim_{A\to+\infty}\int_{C_A} R(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[R(z), a_k]$$

其中，$\{a_n\}$是上半平面的全部极点。

4° 根据前面的引理(1)，我们得到：

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{C_A} R(z)\,\mathrm{d}\,z = 0 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}\,x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[R(z), a_k]$$

6. 若既约有理函数$R(x) = P(x)/Q(x)$：

(1) 分母比分子高 1 次或以上；

(2) R在实轴上除有l个实的 1 级极点$\{x_l\}$外处处解析；

(3) $R(z)e^{imz}, m > 0$在上半平面内有且仅有奇点$\{a_n\}$；

则：

$$\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{imx}\,\mathrm{d}\,x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[R(z)e^{imz}, a_k\right] + \pi i\sum_{k=1}^{l}\operatorname{Res}\left[R(z)e^{imz}, x_k\right]$$

由于$e^{imx} = \cos mx + i\sin mx$，上式可用于求$R(x)\cos mx\,, R(x)\sin mx$的广义积分。

7. 对特殊函数的广义积分，可以通过添加辅助闭路和辅助函数，利用留数定理计算，关键在

于合适的辅助函数$F(z)$与辅助闭路C。辅助函数要使得$z=x$时$F(x)=f(x)$或$\operatorname{Re}F(x)=f(x)$或$\operatorname{Im}F(x)=f(x)$。常见的辅助闭路包括半圆围道、四分之一圆围道、三角围道、长方围道等，辅助闭路不能过极点或本性奇点，必须绕过它们。
主要求解步骤：
1° 选取合适的辅助闭路和辅助函数。
2° 在辅助闭路上各段使用三条引理或利用参数法、估值不等式、长大不等式等求极限或精确计算。
3° 对辅助函数在辅助闭路上的积分用留数定理所得等式，两边取极限。
*在多值函数积分中，辅助闭路不能穿越被积函数的支割线，不能经过支点。

辐角原理

1. 设a是$f(z)$的m级零点，b是$f(z)$的n级极点，则a,b都是$f'(z)/f(z)$的 1 级极点，且：

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},a\right]=m,\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},b\right]=-n$$

2. 设$f(z)$在正向闭路C上解析, $\forall z\in C,f(z)\neq 0$, $f(z)$在C内部除去最多有限个极点外解析，则：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}\,z=N-P$$

N表示$f(z)$在C内部的零点级数之和，P表示$f(z)$在C内部的极点级数之和。

3. 辐角原理：设$f(z)$在正向闭路C上解析，$\forall z\in C,f(z)\neq 0$，$f(z)$在$C$内部除去最多有限个极点外解析，则：

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg f(z)$$

4. 儒歇 Rouché 定理：设$f(z)$与$\varphi(z)$在正向闭路C及其内部解析且在C上$|f(z)|>|\varphi(z)|$，则C的内部$f(z)+\varphi(z)$的零点个数与$f(z)$相等。
利用 Rouché 定理可以求解析函数零点个数。

5. 弗雷涅 Fresnel 积分：

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}\,x=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

6. 若$P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$在虚轴上无零点，如果当$z$自下而上沿虚轴从$-i\infty$走向$+i\infty$的过程中，$P(z)$绕着原点转了$k$圈，即$\Delta_{y\in(-\infty,+\infty)}\arg P(iy)=2k\pi$，则$P(z)$在左半平面共有$m=(n+2k)/2$个根。同理右半平面有$(n-2k)/2$个零点。
推论：若$P(z)$在实轴上也没有零点，$\Delta_{y\in(-\infty,+\infty)}\arg P(iy)=2k\pi$，$P(z)$的所有系数都是实常数，则$P(z)$在第一象限和第四象限各有$(n-2k)/4$个零点，在第二象限与第三象限各有$(n+2k)/4$ 个零点。
*以上零点数都按重数计算。

解析开拓

1. 唯一性定理：$f(z)$和$g(z)$在区域D上解析，若它们在D内一串互不相同的点列$\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots$上的值相等，且该点列收敛到$D$内某点$a$，则在$D$内$f(z) \equiv g(z)$。
*这种证明区域内函数唯一性的定理通常使用圆链法！
*使用零点的孤立性证明，即零点要么孤立要么有一个恒 0 邻域。
推论：$f(z)$和$g(z)$在区域D上解析，若它们在D内某曲线l上有$f(z) = g(z)$，则D内$f(z) \equiv g(z)$。
推论：$f(z)$和$g(z)$在全平面上解析，若实轴上$f(x) \equiv g(x)$，则全平面内$f(z) \equiv g(z)$。
*因此，实变函数的三角函数公式、双曲函数公式都能推广到复平面。

2. 设$f(z)$定义在非空集合E上，$E \subseteq D$且$E \neq D$，如果存在D上的解析函数$F(z)$，使得在E内，$F(z) = f(z)$，则称$F(z)$是$f(z)$在D中的**解析开拓**。
如果E内部存在一列彼此不同的收敛于E中一点的收敛点列，则上述解析开拓若存在则唯一。
若$f_1(z)$是区域D_1内的解析函数，D_2是与D_1相交且使$D_1 \cap D_2 = D \neq \emptyset$，且存在$D_2$内解析的函数$f_2(z)$使得在$D$内$f_1(z) = f_2(z)$，则称$f_2(z)$是$f_1(z)$在$D_2$内的**直接解析开拓**，称$f_1(z), f_2(z)$**互为直接解析开拓**。直接解析开拓是唯一的。

3. 幂级数解析开拓法：对D内的解析函数$f(z)$，可将$f(z)$在$\forall z_0 \in D$展开成幂级数。对不同的展开点，收敛半径不同，会将函数解析开拓到不同的地方。

4. 证明$f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$与$f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-b)^n$互为直接解析开拓的思路：
1° 分别求出$f_1(z), f_2(z)$的和函数和收敛圆D_1和D_2。
2° 判断D_1和D_2的交集是否非空。
3° 若交集非空，根据和函数证明$f_1(z), f_2(z)$在交集上相等即可；若交集是空集，则在D_1, D_2圆心连线的中分线上取$f_1(z)$的和函数的一个解析点z_3，将$f_1(z)$和函数在z_3展开，求收敛圆D_3，再延拓到D_2。

5. 复平面上的Γ函数：

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \,\mathrm{d}\, t \ , t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$$

此函数在$\mathrm{Re}\, z > 0$解析，其中多值函数t^{z-1}取主值$e^{(z-1)\ln t}$，是实变函数$\Gamma(x)$在右半平面的解析开拓。有性质：
(1) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$。
(2) 当$z \neq 0, -1, -2, \dots$，$\Gamma(z)$解析。$(-n)$是$\Gamma(z)$的 1 级极点，且$\mathrm{Res}[\Gamma(z), -n] = (-1)^n (n!)^{-1}$。
(3) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z$。推论是$\Gamma(z)$无零点。
(4)

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

6. 若$f(\xi)$在逐段光滑有限曲线C上连续，则当$z \notin C$时：

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\, \xi$$

关于z解析，且：

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\,\xi$$

7. 解：若$f(t,z)$在$t\in[a,b],z\in D$连续，且对$\forall t\in[a,b]$，f在D内解析，则：

$$F(z)=\int_a^b f(t,z)\,\mathrm{d}\,t\ ,F'(z)=\int_a^b\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}\,t$$

在D内解析。

保形变换及其应用、分式线性变换

1. $\arg f'(z_0)$是变换$w=f(z)$在z_0的**旋转角**。若$f'(z_0)\neq 0$，则解析变换$w=f(z)$不更改两条线的夹角与方向，但是会旋转这个夹角。这称为**保角性**。
$|f'(z_0)|$是变换$w=f(z)$在z_0的**伸张系数**，它表示变换前后曲线在z_0的$|\Delta w|/|\Delta z|$。

2. 区域内单叶函数的导数恒不为 0。
*因此，单叶函数所确定的变换具有保持图形近似相似性。

3. 区域D内单叶函数所确定的变换称为**保形变换**。它有如下性质：
(1) 保形变换的乘积（$w=g\big(f(z)\big)$）仍然是保形变换。
(2) 保形变换有逆变换，且逆变换也是保形变换。
(3) 若z平面区域D与w平面区域G都能保形变换为单位圆，则两者间可以相互变换。

4. Riemann 定理：若D是z闭复平面上的一个单连通区域，D的边界至少包含两个点（∞只算一个点），则必然存在单叶函数$w=f(z)$把D变换为w平面的单位圆内部$|w|<1$。
若给定$f(z_0)=w_0,\arg f'(z_0)=\alpha_0$，则这个单叶函数是唯一的。
Riemann 逆定理：若存在单叶函数使D能够变换为w平面的单位圆内部$|w|<1$，则D必然是闭复平面上边界至少包含两个点的单连通区域。

5. 形如：

$$M{:}\,w=\frac{az+b}{cz+d}$$

的变换称为**分式线性变换**，其中a,b,c,d为复常数且$ad\neq bc$。当$c=0$时：

$$w=\frac{az+d}{d}\triangleq\alpha z+\beta$$

称$L{:}\,\alpha z+\beta$为**整线性变换**。分式线性变换是从闭z复平面到闭w复平面的双方单值变换。
定义，若$t=1/f(z)$把$z=z_0$的一个邻域保形映照成$t=0$的一个邻域，则称$w=f(z)$把$z=z_0$的一邻域保形映照成$w=\infty$的一个邻域。

6. 四类特殊的分式线性变换：
(1) 平移变换：$T{:}\,w=z+b$，图像整体平移向量b，形状大小不变。
(2) 旋转变换：$R{:}\,w=e^{i\theta}z$，图像绕原点逆时针正向旋转θ，形状大小保持不变。
(3) 相似变换：$S{:}\,w=rz,r>0$，是以原点为相似中心、伸张系数r的相似变换。
(4) 倒数变换：$I{:}\,w=1/z$，将逆时针单位圆周变为顺时针单位圆周，将单位圆外变为单位圆

内。
任意分式线性变换课分解为以上四种变换的乘积。

7. 分式线性变换具有**保圆性**，即把圆周变成圆周。直线相当于过∞的圆周。
设$C: |z-z_0|=R, 0<R<+\infty$，若有限点$z_1, z_2$都在自圆心$z_0$的同一条射线上，且$|z_1-z_0|\cdot|z_2-z_0|=R^2$，则称$z_1$及$z_2$关于圆周$C$**对称**。在这里我们规定$z_0, \infty$对称。易于发现，对称点一个在圆周内一个在圆周外，且圆周上任一点与自己对称。
关于原像圆周对称的两点，在分式线性变换后，会变成关于像圆周对称的两点。

8. 任给z平面三个互不相同的点z_1, z_2, z_3，再任给w平面三个互不相同的点w_1, w_2, w_3，则存在唯一的分式线性变换$w=f(z)$使这三对一一对应。这个分式线性变换满足：

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

两点法：若我们只知道两点，则上式替换为：

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2}, k\text{是复常数}$$

若z_1, z_2, w_1, w_2中某个是∞时，将上式中含∞的因子都替换为 1 即可继续二点法运算。

初等函数的映照

1. 幂函数变换$w=z^n$可以将角域$\alpha<\arg z<\beta, (\beta-\alpha<2\pi/n)$变换为$n\alpha<\arg w<n\beta$。不过在$z=0$处没有保角性。
根式函数变换$w=z^{1/n}$、分式幂函数变换$w=z^{n/m}$也可做角域变换，但要确定分支。

2. 称任意两相交圆弧所界区域为**二角形区域**。先用分式线性变换，将两圆弧变为直线，从而使二角形区域变为角域；再利用幂变换，即可拓展到全平面。

3. 指数函数变换$w=e^z$可以将条形域$a<\operatorname{Im} z<b$变换为$a<\arg w<b$。特别是可以将$0<\operatorname{Im} z_0<\pi$变换为上半平面，可以先把$z$变换为满足$z_0$边界条件的形式。
相反地，对数函数将角域变换为条形区域。
*在求变换时认真画出示意图!

4. 需要注意，条形域与角域都是一种二角形区域。灵活联合运用分式线性变换、幂变换、指数函数变换、对数函数变换。

5. 除$z=0$外的**儒可夫斯基变换**：

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

可以把单位圆内部单叶地变为w全平面除去实轴线段$[-1,1]$剩下的区域，将上半单位圆保形变为下半w平面，把下班单位圆保形地变为上半w平面。

拉氏变换

1. 设$t>0$，$f(t)$是t的实值或复值函数，若:

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t$$

在$p=\sigma+is$的某区域内收敛，则称:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t$$

为$f(t)$的**拉普拉斯变换**，也称为$f(t)$的拉氏变换**像函数**。简记为:

$$L[f(t)] \triangleq F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t$$

称$f(t)$为$F(p)$的**拉氏反变换**或**本函数**。记为:

$$f(t)h(t)=L^{-1}[F(p)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}\,\mathrm{d}\,p=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(p)e^{pt}\,\mathrm{d}\,s$$

在这里，$f(t)$默认为$f(t)h(t)$，$h(t)=1,t>0;h(t)=0,t\le 0$。做题求逆变换的时候不能遗忘$h(t)$!

2. 设$f(t)$在t轴任意有限区间逐段光滑，且$f(t)$是指数增长函数，即存在常数$K>0,c\ge 0$，使得$|f(t)|\le Ke^{ct},\forall t\in[0,+\infty)$，则像函数$F(p)$在$p$平面的半平面$\mathrm{Re}\,p>c$内有意义且解析。

3.

$$L[e^{at}]=\frac{1}{p-a}\,,L^{-1}\left[\frac{1}{p-a}\right]=e^{at}h(t)\,,L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]=h(t)$$

$$L[\cos\omega t]=\frac{p}{p^2+\omega^2},L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$L[\cosh\omega t]=\frac{p}{p^2-\omega^2}\,,L[\sinh\omega t]=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$$

$$L[t^\alpha]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$$

4. 拉氏变换和拉氏反变换都是线性的。

5.

$$L[t^n f(t)]=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,p^n}L[f(t)]\,,L[tf(t)]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,p}L[f(t)]$$

$$L[t^n]=\frac{n!}{p^{n+1}},L^{-1}\left[\frac{1}{p_m}\right]=\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}h(t)$$

6. 本函数微分公式:

$$L[f'(t)]=pL[f(t)]-f(0^+)$$

$$L\left[f^{(n)}(t)\right]=p^nL[f(t)]-p^{n-1}f(0^+)-p^{n-2}f'(0^+)-\cdots-pf^{(n-2)}(0^+)-f^{(n-1)}(0^+)$$

求解微分方程初值问题可以利用该公式。

7. 本函数积分公式：

$$L\left[\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}\,s\right]=\frac{1}{p}L[f(t)]$$

8. 位移定理：设$F(p)=L[f(t)]$，则$L\left[e^{\lambda t}f(t)\right]=F(p-\lambda)$，$L^{-1}[F(p-\lambda)]=e^{\lambda t}L^{-1}[F(p)]$。
推论：

$$L\left[e^{\lambda t}\cos\omega t\right]=\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}\,,L\left[e^{\lambda t}\sin\omega t\right]=\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}\,,L\left[t^n e^{\lambda t}\right]=\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$$

9. 利用拉氏变换求解微分方程初值问题步骤：
1° 对方程两边作拉氏变换，应用拉氏变换微分公式和方程初值条件，得到关于$Y(p),p$的代数方程。
2° 求解上述关于$Y(p),p$的代数方程，解出$Y(p)$。
3° $y(t)=L^{-1}[Y(p)]$。解出。

10. 相似定理：若$L[f(t)]=F(p)$，则对任意正实常数$\alpha>0$，则：

$$L[f(\alpha t)]=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)\,,\mathrm{Re}\,p>\alpha c\,,c\text{是增长指数}$$

11. 延迟定理：$L[f(t-\tau)h(t-\tau)]=e^{-pt}L[f(t)]$。同理$L^{-1}\left[e^{-p\tau}L[f(t)]\right]=f(t-\tau)h(t-\tau)$。

12. 卷积定义：

$$f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi\triangleq(f*g)(x)$$

卷积的运算满足交换律、结合律、分配律。
卷积定理：如果f_1,f_2满足 2 中条件，则：

$$f_1(t)*f_2(t)=h(t)\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(t)\,\mathrm{d}\,\tau\,,L[f_1*f_2]=L[f_1]L[f_2]$$

13. 拉氏变换反演公式：设$F(p)=L[f(t)]$，若：
(1) 在$\mathrm{Re}\,p\le\sigma,\sigma>0$内有奇点$p_1,p_2,\dots,p_n,\sigma>0$，除了这些奇点外，$F(p)$在$p$平面处处解析。
(2) $\lim_{p\to\infty}F(p)\to 0$。
则：

$$f(t)=L^{-1}[F(p)]=h(t)\sum_{k=a}^{n}\mathrm{Res}[F(p)e^{pt},p_k]$$

2021 秋季学期复变函数 A 期末考试试卷回忆版

一、填空题（30 分）

1. $\operatorname{Ln}\frac{1+i}{\sqrt{2}}=$______________。

2. 曲线$|z-1|=1$在函数$f(x)=\frac{1}{x}$下的像为______________（写出表达式）。

3. 若函数$f(x)=my^3+nx^2y+i(x^2+lxy^2)$是复平面上的解析函数，那么实数常数$m,n,l$的值分别是______________________________________。

4. 如果函数$f: D\to G$是区域D到$G=\{w\in\mathbb{C}: \operatorname{Re} w>0\}$的解析函数，则函数$\arg f(z)$______（填写“是”或“否”）是调和函数。

5. $u(x,y)=y^2-x^2+2021y$，则其共轭调和函数$v(x,y)=$_________________。

6. 设级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$的收敛半径为$R$，则级数$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)a_nz^n$的收敛半径为____________。

7. 设$f(z)=\frac{\exp\frac{3}{z-2}}{z(1-e^{-z})}$，给出$f(z)$不包括$\infty$的全体奇点，并指出每个奇点的类型，如果是极点请指出阶数：____。

8. 留数计算：$\operatorname{Res}\left[z^2\cos\frac{1}{z-2},2\right]=$______________________________。

如果n是正整数，则$\operatorname{Res}\left[z^n\sin\frac{1}{z},0\right]=$__________________________________。

9. 方程$2z^5-z^3+3z^2-z+8=0$在区域$|z|<1$内根的个数是：________________。

二、计算题（40 分）

1. 求函数$f(x)=\frac{z^2}{(z+1)^2}$在$z=0$处的泰勒展开，并且给出所得幂级数的收敛半径。

2. 将函数$f(x)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$在区域$\{z\in\mathbb{C}: 1<|z|<2\}$内展开为罗朗级数。

3. 设$D=\left\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} z>-\frac{1}{2}\right\}$，设$\gamma$是区域$D$内从0到1且不经过$i$的任意曲线，计算积分$\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$。

4. 计算积分$\int_C\frac{e^z\,\mathrm{d}z}{z(1-z)^3}$，其中$C$是不过0和1的简单闭曲线。

5. 计算积分$\int_0^{\pi}\cot(x+1-2i)\,\mathrm{d}x$。

6. 利用留数计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x$。

三、综合题（30 分）

1. 利用拉氏变换求解微分方程：

$$\begin{cases} y'(t)-4y(t)+4\int_0^t y(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{t^3}{3} \\ y(0)=0 \end{cases}$$

2. 设$f: D\to C$是区域D内的解析函数，γ是D内的简单闭曲线，其内部包含于D，设a为$f(z)$在γ内部的n阶零点，b为$f(z)$在γ内部的m阶极点，$f(z)$在γ内部除了b没有其它奇点，$f(z)$在γ

上没有任何零点和奇点。证明:

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \sin z \, \mathrm{d} z = 2\pi i(n \sin a - m \sin b)$$

3. 求一保形变换$w = f(z)$，将区域$D = \{z \in \mathbb{C}: |z-1| > 1, |z| < 2\}$映为单位圆盘$|w| < 1$，且满足$f(-1) = 0$。在求解过程中，需要画出必要的示意图。

4. 设函数$f(z)$在$|z| < 2$内解析，且满足$\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi$；$\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \leq 3, \pi \leq \theta \leq 2\pi$。证明:

$$|f(0)| \leq \sqrt{6}$$