物理学中的群论样卷

一、　(6%) 列出全部 2023 阶 Abel 群。

二、　(24%) 在实数对的集合

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \{(a,b) | a \neq 0, b \in \mathbb{R}\}$$

上定义乘法

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac, ad + b)$$

可得G是群。

现在引进三分量的矢量

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

作为群的作用空间，群元(a,b)对应线性变换$T(a,b)$定义为

$$T(a,b)\vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay + b \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1)　李群G的维数是多少？是否紧致？是否连通？

(2)　验证$T(a,b)$构成群G的线性表示。

(3)　求李群G的左不变积分测度ρ_L和右不变积分测度ρ_R。

(4)　求$T(a,b)$的无穷小生成元I_a, I_b。

(5)　计算对易子$[I_a, I_b]$。

(6)　作函数空间的表示

$$\hat{T}(a,b) f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} f\left(\frac{x}{a}, \frac{1}{a}(y - b)\right)$$

求无穷小生成元$\hat{I}_a, \hat{I}_b$。

(7)　记李代数G对应的李代数为$\mathcal{G}$。李代数$\mathcal{G}$有哪些非平凡理想？

三、　(20%) 已知D_7群的展示

$$\langle \sigma, \tau | \tau^7 = e, \sigma^2 = e, \sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^{-1} \rangle$$

(1) 确定D_7群的共轭类。

(2) 判断D_7群有几个不等价不可约表示，表示的维数分别是多少。

(3) 求出全部一维不可约表示。

四、　(10%) D_3群的类算符是

$$\hat{K}_1 = e, \qquad \hat{K}_2 = d + f, \qquad \hat{K}_3 = a + b + c$$

利用矩阵函数的相关定理，计算并化简$\sin \hat{K}_2$。

五、　(15%) 对转动群 SO(3)，求三阶张量表示的特征标

$$\chi(\psi) = \mathrm{tr}\left(R(\vec{\psi}) \otimes R(\vec{\psi}) \otimes R(\vec{\psi})\right)$$

以及

$$(\chi, \chi) = ?$$
$$(\chi, \chi^{(0)}) = ?$$
$$(\chi, \chi^{(1)}) = ?$$
$$(\chi, \chi^{(2)}) = ?$$
$$(\chi, \chi^{(3)}) = ?$$

六、　　（15%）按规则，

（1）画出S_6群杨图$[3^2]$的所有标准杨表，按字典排序编号。

（2）写出标准表示矩阵$\mathrm{U}^{[3^2]}\big((23)\big)$。

七、　　（10%）利用惯性传感器采集加速度数据，可以对人员进行步态识别。

不同的人在行走时，脚步落地的轻重、间隔以及摆动角度都有所不同，取决于步行人的体格、健康状态和性格习惯。

惯性测量单元（IMU）包括陀螺仪和加速度计，已经微型化并使用于手环、手机或专用穿戴设备。IMU 可收集行人的（随体坐标系）加速度数据$\vec{a}(t_j)$和角速度数据$\vec{\omega}(t_j)$。当采样率（每秒采集距的次数）较高时，采样间隔

$$\Delta t = t_{j+1} - t_j$$

很小，可近似为连续信号$\vec{a}(t), \vec{\omega}(t)$。

为了节电，实用时通常会关闭陀螺仪，只采集一个时间窗口

$$t \in [0, T]$$

内的加速度值$\vec{a}(t)$。时间窗口比较长（几分钟量级），可以近似看成取得的数据是无限长的，

$$\vec{a}(t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

从采得数据构造特征识别行人的身份。一般来说，特征x是裸数据$\vec{a}(t)$的泛函

$$x = x[\vec{a}]$$

考虑宗量$\vec{a}$的三次泛函，

$$x[\vec{a}] \overset{\text{def}}{=} \iiint_{\mathbb{R}^3} \sum_{j,k,l=1}^{3} \psi_{jkl}(t_1, t_2, t_3) a_j(t_1) a_k(t_2) a_l(t_3) dt_1 dt_2 dt_3$$

其中$\psi_{jkl}(t_1, t_2, t_3)$是展开系数。

在频域讨论问题会比较方便，作傅立叶变换，

$$\vec{a}(f) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{a}(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

特征可改写成

$$x[\vec{a}] = \iiint_{\mathbb{R}^3} \sum_{j,k,l=1}^{3} \varphi_{jkl}(f_1, f_2, f_3) a_j(f_1) a_k(f_2) a_l(f_3) df_1 df_2 df_3$$

其中$\varphi_{jkl}(f_1, f_2, f_3)$是频域的展开系数。

下面我们来分析特征泛函$x[\vec{a}]$的对称性。

（1）当 IMU 安装或佩戴的角度不同时，测得的原始数据$\vec{a}(t)$的三个轴被旋转了一个角度，即数据变为

$$\vec{a}(t) \to R\vec{a}(t)$$

其中

$$R \in \mathrm{SO}(3)$$

是转动矩阵。用旋转后测得的裸数据$R\vec{a}(t)$计算，特征$x[\vec{a}]$应该保持不变，即对任意信号$\vec{a}(f)$，

$$x[R\vec{a}] \equiv x[\vec{a}]$$

这一对称性要求展开系数$\varphi_{jkl}(f_1, f_2, f_3)$具有什么样的形式？

（2）使用者可能会在任意时刻打开加速度计，开始收集数据，也就是说采样的时间窗口是可以平移的。特征$x[\vec{a}]$在时间平移

$$\vec{a}(t) \to \vec{a}(t + \tau)$$

下必须保持不变。这对展开系数$\varphi_{jkl}(f_1, f_2, f_3)$的函数形式有什么限制？

一、6%

$$\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_{289}$$
$$\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_{17}^2$$

每个 3 分

二、24%

（1） 2 维。非紧致。不连通。2×3=6 分

（2） 2 分

$$T(a,b)T(c,d)=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 & 0\\ 0 & c & d\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac & 0 & 0\\ 0 & ac & ad+b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=T(ac,ad+b)$$

是同态。且为同构。

（3） 2×2=4 分

$$\rho_L \propto \frac{1}{a^2}$$

$$\rho_R \propto \frac{1}{a}$$

（4） 2×2=4 分

$$I_a=\left.\frac{\partial T(a,b)}{\partial a}\right|_{a=1,b=0}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$I_b=\left.\frac{\partial T(a,b)}{\partial b}\right|_{a=1,b=0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

（5） $[I_a, I_b]=I_b$ 2 分

（6） 2×2=4 分

$$\hat{I}_a=-x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\hat{I}_a=-\frac{\partial}{\partial y}$$

（7） $\mathrm{span}\{I_b\}$ 2 分

三、20%

（1）$\{e\},\{\tau,\tau^6\},\{\tau^2,\tau^5\},\{\tau^3,\tau^4\},\{\sigma,\sigma\tau,\sigma\tau^2,\sigma\tau^3,\sigma\tau^4,\sigma\tau^5,\sigma\tau^6\}$

（2）有 5 个不等价不可约表示，

$$14=1^2+1^2+2^2+2^2+2^2$$

2 个一维表示，3 个二维表示。

（3）2 个一维表示为

$$T^{(1)}(\sigma)=1,\qquad T^{(1)}(\tau)=1$$
$$T^{(2)}(\sigma)=-1,\qquad T^{(2)}(\tau)=1$$

（1）共 10 分，写错 1 个共轭类扣 2 分；（2）共 5 分，两个结果各 2 分，无步骤扣 1 分；（3）共 5 分，两个结果各 2 分，无步骤扣 1 分。

四、10%

$$\sin \hat{K}_2 \equiv c_0 e + c_1 \hat{K}_2 + c_2 \hat{K}_2^2$$

3 分

$\hat{K}_2$特征值$\{2,2,-1\}$，得

$$\begin{cases} \sin 2 = c_0 + 2c_1 + 4c_2 \\ \cos 2 = c_1 + 4c_2 \\ -\sin 1 = c_0 - c_1 + c_2 \end{cases}$$

解出

$$c_0 = \frac{1}{9}(-6\cos 2 - 4\sin 1 + 5\sin 2), \qquad c_1 = \frac{1}{9}(-3\cos 2 + 4\sin 1 + 4\sin 2),$$

$$c_2 = \frac{1}{9}(3\cos 2 - \sin 1 - \sin 2)$$

3 分

即

$$\sin \hat{K}_2 = \frac{1}{3}(-2\sin 1 + \sin 2)\hat{K}_1 + \frac{1}{3}(\sin 1 + \sin 2)\hat{K}_2$$

4 分

五、15%

$$\chi(\psi) = \chi^{(0)}(\psi) + 3\chi^{(1)}(\psi) + 2\chi^{(2)}(\psi) + \chi^{(3)}(\psi)$$
$$(\chi,\chi) = 1^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 15$$
$$(\chi,\chi^{(0)}) = 1, \qquad (\chi,\chi^{(1)}) = 3, \qquad (\chi,\chi^{(2)}) = 2, \qquad (\chi,\chi^{(3)}) = 1$$

每个结果 3 分

六、15%

（1）5 个标准杨表：

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \quad T_3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 6 \\ \hline \end{array} \quad T_4 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \quad T_5 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline \end{array}$$

（2）

$$\mathrm{U}^{[3^2]}((23)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

（1）共 10 分，每个杨表 2 分；（2）共 5 分，每错一个矩阵元扣 1 分。

七、10%

（1）$\varphi_{jkl}(f_1,f_2,f_3) \equiv \phi(f_1,f_2,f_3)\varepsilon_{jkl}$

（2）$\varphi_{jkl}(f_1,f_2,f_3) \equiv \xi_{jkl}(f_1,f_2)\delta(f_1+f_2+f_3)$

每小题 5 分，结果每个 3 分，无步骤分别扣 2 分