与数学分析课里的实值函数一样，在复变函数里，我们要学习复变函数及其极限、连续、微分、积分、级数展开等.

第二章 复变函数

2.1 复变函数的概念

- 复变函数的定义:

设 E 是复平面上的点集,

若$\forall z = x + \mathrm{i}\,y \in E$, $(x, y \in \mathbb{R})$, 按一定规律,

z与唯一的一个复数 $w = u + \mathrm{i}\,v$ 对应, $(u, v \in \mathbb{R})$,

则称在E上定义了一个复变单值函数,

$$f: \ z = x + \mathrm{i}\,y \longrightarrow w = u + \mathrm{i}\,v, \quad z \in E,$$

记作 $w = f(z)$, $z \in E$; 称z为自变量.

如果自变量的一个值z对应两个或以上的复数 w,

则称在E上定义了一个复变多值函数, 也记作 $w = f(z)$, $z \in E$.

单值函数(每个自变量$z=x+\mathrm{i}\,y$与唯一的一个复数$w=u+\mathrm{i}v$ 对应)

如$w=\bar{z}$, $w=z+2\mathrm{i}$, $w=z^3$, $w=\dfrac{z}{2z+1}\left(z\neq-\dfrac{1}{2}\right)$, $w=|z|$, ...

多值函数 (一个自变量值z对应两个或以上的复数 w)

如$w=\sqrt[n]{z}$, $n\geq 2$, (n个不同值), $w=\mathrm{Arg}\,z$(无穷多值), $\cdots$

今后未作特殊说明的函数，指单值函数.

- **复变函数与自变量之间的关系**

例如，函数$w=z^2$，设$z=x+\mathrm{i}\,y$，$w=u+\mathrm{i}v$，则

$$w=\underline{u+\mathrm{i}v}=(x+\mathrm{i}\,y)^2\ \underline{=x^2-y^2+2xy\,\mathrm{i}},\quad \text{故}$$

$$u=x^2-y^2,\quad v=2xy,$$

即 $w=z^2$相当于两个实二元函数: $u=x^2-y^2$, $v=2xy$.

设 $z = x + \mathrm{i}\, y$,

任一复函数 $w = u + \mathrm{i} v = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i} v(x, y)$,

相当于两个关系式: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$,

即确定了两个以 x, y 为自变量的二元实变数函数:

$$u(x, y), \quad v(x, y).$$

若z用指数形式: $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 则

$$w = u + \mathrm{i} v = f(z) = f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = u(r, \varphi) + \mathrm{i} v(r, \varphi),$$

即确定了两个以 r, φ 为自变量的二元实变数函数:

$$u(r, \varphi), \quad v(r, \varphi).$$

• 复变函数的几何意义

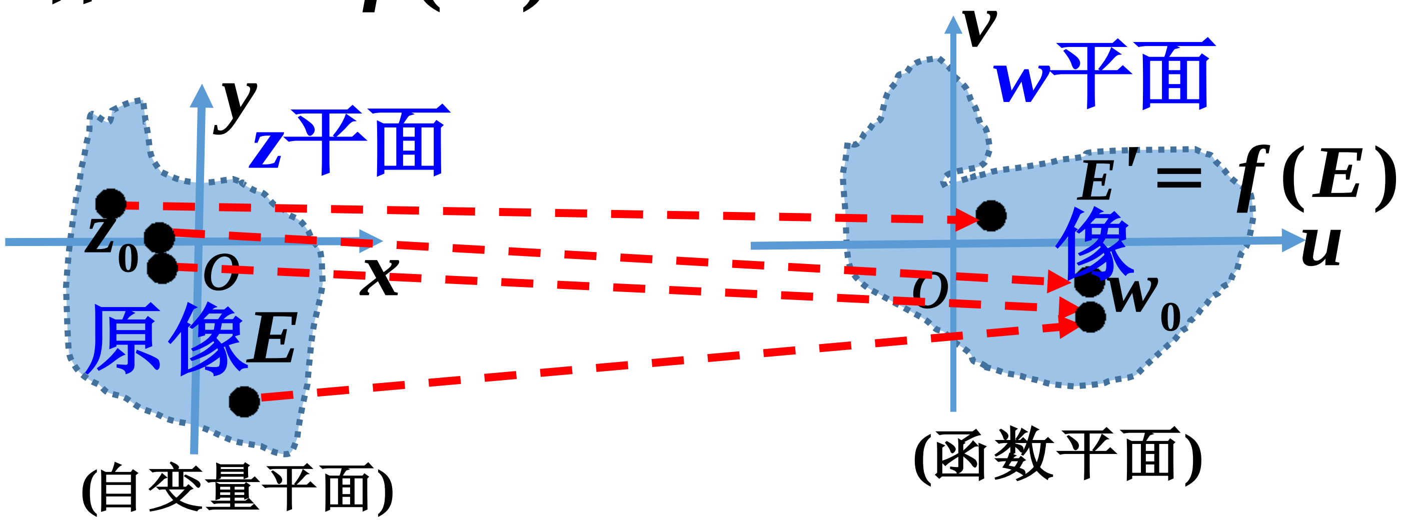
取两个复平面： z 平面 和 w 平面,

分别表示自变量 z 的值和函数 w 的值,

则 $w = f(z)$ 可看作：

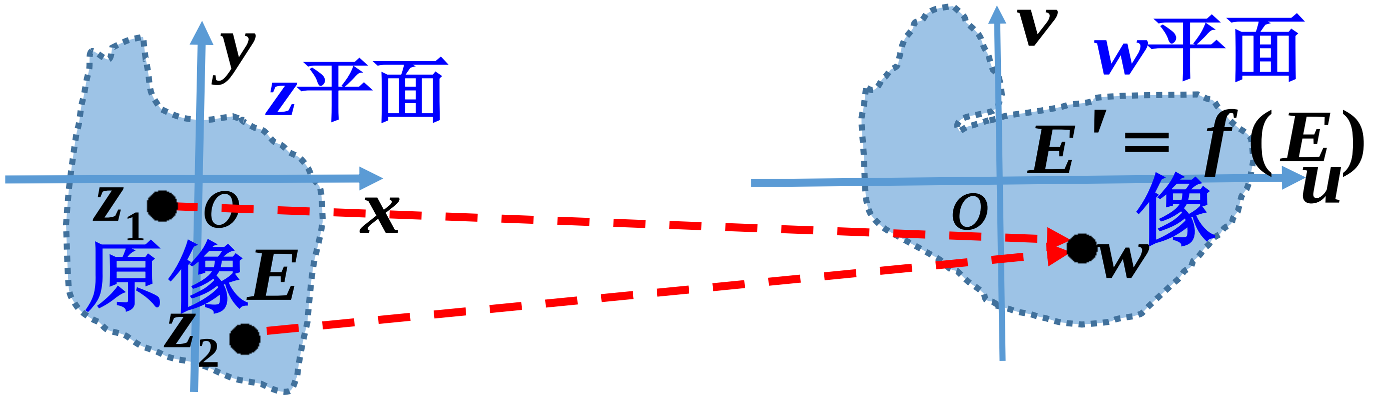
把 z 平面上的点集E 变换成 w 平面上的一个点集 E' .

记作 $E' = f(E)$. 称E'为E 的像，称E为E'的原像.



若$w_0 = f(z_0)$，则称w_0为z_0的像，称z_0为w_0的原像.

单值函数$w=f(z)$：一个原像点z只对应一个像点$w=f(z)$，但是每一个像点w可能是由一个以上的原像点z对应．

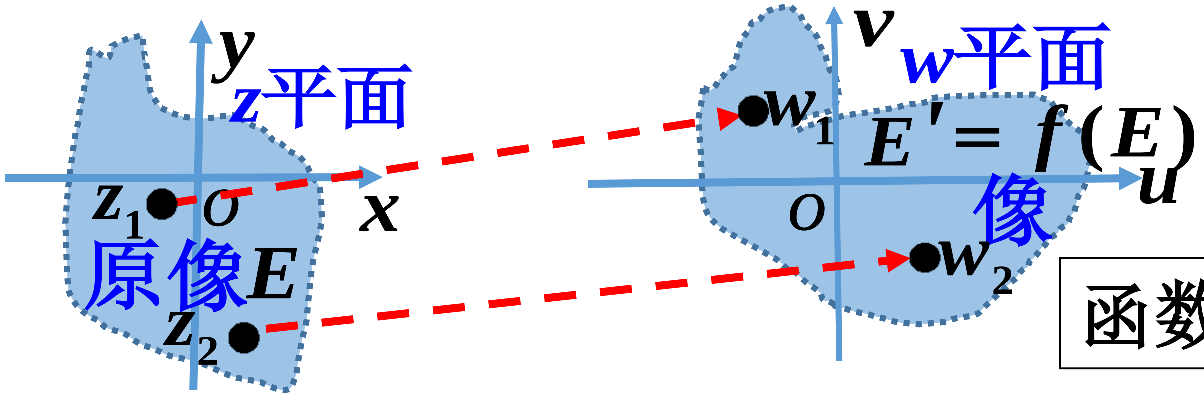


- 一一映照(即双方单值映照)

设$w=f(z)$是E上的单值函数,

如果$\forall z_1,z_2\in E,\ z_1\neq z_2$，有$f(z_1)\neq f(z_2)$，

则称$w=f(z)$是E中的一一映照(或双方单值映照).



函数与映照不加区别

例1 函数 $w=az$,其中$a\neq 0,\ \infty$,是已知的复常数,

每个z,只对应一个w(单值), 且$z_1\neq z_2$时, $az_1\neq az_2$(一一).

它是z平面到w平面的一一映照.

因$a\cdot\infty=\infty$, 故它也是整个闭z平面到整个闭w平面的一一映照.

设$a=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\ r>0$,则$w=az=r\{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)z\}$,

是由$\omega=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)z$和$w=r\omega$复合而成.

把z,ω,w画在同一个平面上，则

$\omega=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)z$是旋转映照 (将原向量$z$逆时针旋转$\theta$角),

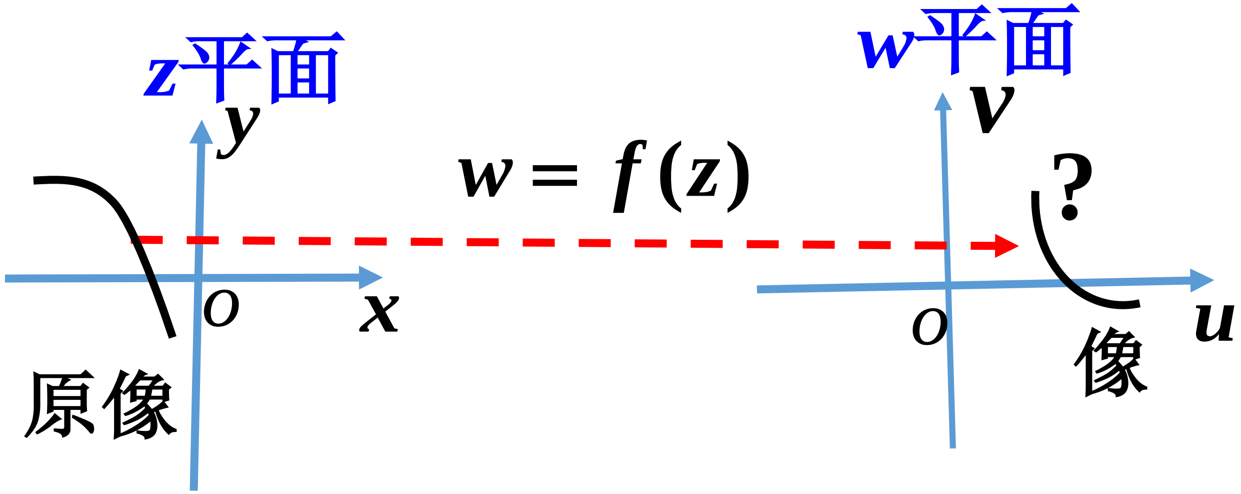
$w=r\omega$是相似映照 (模放缩为原ω模 的r 倍).

$w=az$是由旋转映照和相似映照复合而成.

z平面的一条给定的曲线

$$\Downarrow w = f(z)$$

w平面的什么图形呢？



例2(P22) 求下列曲线在映照 $w=z^2$ 下的像:

1) 平行于坐标轴的直线; 2) $x^2-y^2=c_1$和$2xy=c_2$.

一般求解思路:

(I) 先求映照$w=u+\mathrm{i}v=f(z)$确定的两个二元实值函数

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y);\qquad (\Delta)$$

(II) 将原像曲线方程与(Δ)联立, 消x,y,

得出关于u,v 的方程, 即所求的像曲线方程.

解 令$z=x+\mathrm{i}\,y, w=u+\mathrm{i}v,\ x,y,u,v\in\mathbb{R}$, 则

$$w=z^2=(x+\mathrm{i}\,y)^2=\left(x^2-y^2\right)+2xy\,\mathrm{i}.\quad 故$$

$$u=x^2-y^2,\qquad v=2xy.\qquad (2.0)$$

例2(P22). 求下列曲线在映照 $w=z^2$ 下的像：1) 平行于坐标轴的直线；…

解　令$z=x+\mathrm{i}\,y, w=u+\mathrm{i}\,v,\ x,y,u,v\in\mathbb{R}$, 则

$w=z^2=(x^2-y^2)+2xy\,\mathrm{i}.$　故$u=x^2-y^2,\ v=2xy.$　(2.0)

1) (1)平行于虚轴的直线：$x=c_1$，其中c_1是任意给定的实常数.

方法: 将 $x=c_1$与(2.0)联立消x, y.

将$x=c_1$ 代入(2.0), 得$u=c_1^2-y^2,\ v=2c_1y.$　再消去y.

a). 当$c_1\neq 0$时, 由$v=2c_1y$, 得 $y=\dfrac{v}{2c_1}$, 再代入$u=c_1^2-y^2$得

$$u=c_1^2-\frac{v^2}{4c_1^2},$$ 是w平面的一族抛物线.

b). 当$c_1=0$时, $x=0$(虚轴), 代入(2.0)得 $u=-y^2\leq 0,\ \underline{v=0}.$

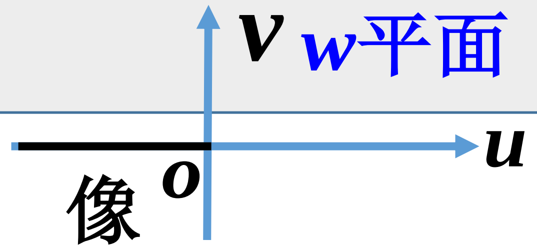
这是w 平面的含有原点的负实轴.

例2(P22). 求下列曲线在映照 $w=z^2$ 下的像：1) 平行于坐标轴的直线；…

$$u=x^2-y^2,\qquad v=2xy.\qquad (2.0)$$

b). 当$c_1=0$时, $x=0$(虚轴), 代入(2.0)得 $u=-y^2\le 0,$ $v=0.$

这是w 平面的含有原点的负实轴.



(2). 类似地可求平行于实轴直线$y=c_2$ 的像.

方法：将$y=c_2$与(2.0)联立消去x,y.

a). 当$c_2\neq 0$时，$y=c_2$ 的像为w平面上的抛物线$u=\dfrac{v^2}{4c_2^2}-c_2^2.$

b). 当$C_2=0$时，$y=0$(实轴)的像 为w平面的含有原点的正实轴.

例2. 求下列曲线在映照 $w=z^2$ 下的像：2) $x^2-y^2=c_1$ 和$2xy=c_2$;

解 令$z=x+\mathrm{i}\,y, w=u+\mathrm{i}\,v,\ x,y,u,v\in\mathbb{R}$,则

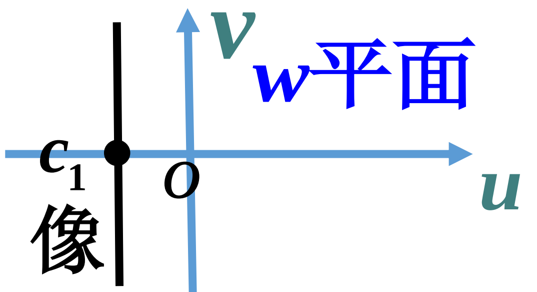
$w=z^2=\left(x^2-y^2\right)+2xy\,\mathrm{i}$. 故$u=x^2-y^2,\ v=2xy$. (2.0)

2) (1). 先求$x^2-y^2=c_1$的像. 方法：将$x^2-y^2=c_1$与(2.0)联立消x,y.

将$x^2-y^2=c_1$代入(2.0)，得$u=c_1$，$v=2xy$可取到任意实数.

故$x^2-y^2=c_1$的像为w平面的直线

$u=c_1$(平行于虚轴直线).

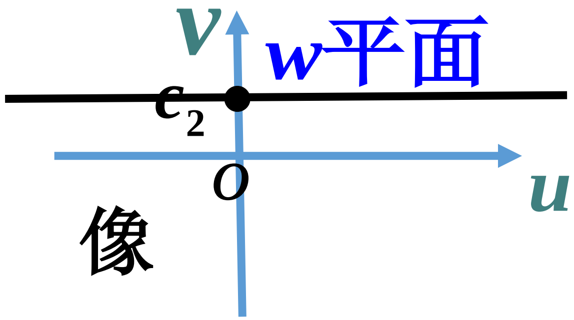


(2) 再求$2xy=c_2$的像. 将$2xy=c_2$代入(2.0)，得$v=c_2$,

$u=x^2-y^2$可以取到任意实数.

故$2xy=c_2$ 的像为w平面的直线

$v=c_2$(平行于实轴直线).



例2. 求下列曲线在 $w=z^2$ 下的像：3) $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

解 3) 先求指数形式下$w=z^2$ 确定的两个实值函数.

令$w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,则 $w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=z^2=r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$, 故

$$\rho=r^2，\quad \varphi=2\theta\in(0,\pi).$$

因此(第一象限以原点为圆心的四分之一圆弧)$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

在映照$w=z^2$下, 像是w 平面上

以原点为中心、r^2 为半径的上半圆弧：

$$w=r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}，\quad \varphi\in(0,\pi). \ \#$$

例. 求直线 $x=2$ 在映照 $w=\frac{1}{z}$ 下的像.

解 令$z=x+\mathrm{i}\,y, w=u+\mathrm{i}\,v$, 则$w=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}$,

故$u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\frac{y}{x^2+y^2}$. (#)

将$x=2$与(#)联立，消x, y.

将$x=2$代入(#)得 $u=\frac{2}{4+y^2}$, $v=-\frac{y}{4+y^2}$. 下面消y.

$u^2+v^2=\frac{1}{4+y^2}=\frac{u}{2}$，得 $u^2+v^2-\frac{u}{2}=0$, 即$\left(u-\frac{1}{4}\right)^2+v^2=\frac{1}{16}$.

因此直线 $x=2$ 在映照 $w=\frac{1}{z}$ 下的像为w平面的

以点$\left(\frac{1}{4}, 0\right)$为中心、以$\frac{1}{4}$为半径的圆周：$\left(u-\frac{1}{4}\right)^2+v^2=\frac{1}{16}$. #

例. 求圆周$x^2+(y-2)^2=2$在映照 $w=\frac{1}{z}$ 下的像. 解1见此PPT的P43.

解2 因为从$w=\frac{1}{z}$可以解得$z=\frac{1}{w}$.

方法2: 先将$x^2+(y-2)^2=2$写成复数形式, 再代入$z=\frac{1}{w}$.

由 $x^2+(y-2)^2=2$知原像是 以$z=0+2\mathrm{i}$为圆心、$\sqrt{2}$为半径的圆周,

故原像复数形式为$|z-2\mathrm{i}|=\sqrt{2}$. 平方后再代入$z=\frac{1}{w}$得

$$2=\left|\frac{1}{w}-2\mathrm{i}\right|^2=\frac{|1-2\mathrm{i}w|^2}{|w|^2}=\frac{1+2\,\mathrm{Re}(1\cdot 2\mathrm{i}\,\overline{w})+4|w|^2}{|w|^2}.$$

P5例5

$1+2\,\mathrm{Re}(2\mathrm{i}\,\overline{w})+2|w|^2=0.$ 代入$w=u+\mathrm{i}v$得

$1+4v+2u^2+2v^2=0,$ 即 $u^2+(v+1)^2=\frac{1}{2}.$

故所求像为w平面以点$(0,-1)$ 为中心、以$\frac{\sqrt{2}}{2}$为半径的圆周. #

2.2 函数极限和连续性

函数极限的定义:

设$w=f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义.

如果$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)\in(0,\rho)$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$时,

有$|f(z)-w_0|<\varepsilon$, 则称当 z 趋向于 z_0 时，$f(z)$ 的极限值为w_0 ，

记作 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$.（或 $f(z)\xrightarrow{z\to z_0} w_0$）

几何意义：当变点z 无论以什么方式或路径

进入 z_0 的一个充分小的去心δ 邻域时,

它们的像点都相应地落入w_0 的一个给定的ε 邻域.

函数的连续性定义(P23)

定义4 如果 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, 那么称$f(z)$ 在 z_0 连续.

$f(z)$ 在 z_0 连续 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z \to z_0} \left| f(z) - f(z_0) \right| = 0.$

连续的三要素:

(1) $f(z)$在z_0处有定义;

(2) $f(z)$在z_0处有极限;

(3) $f(z)$在z_0处的极限值等于函数在此点的值.

定义4 如果$f(z)$ 在 区域D 中的每点都连续,

则称$f(z)$在 区域D 中连续.

记为: $f(z) \in C(D)$.

连续的充要条件

定理1(P23). 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$, $z_0=x_0+\mathrm{i}\,y_0$, 则

$f(z)$在z_0连续的充要条件是$u(x,y)$,$v(x,y)$在点(x_0,y_0)连续, 即

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u(x_0,y_0),\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v(x_0,y_0)$$都成立.

证明: 因$f(z)-f(z_0)=\{u(x,y)-u(x_0,y_0)\}+\mathrm{i}\{v(x,y)-v(x_0,y_0)\}$. $(**)$

故 $$\left.\begin{array}{l}|u(x,y)-u(x_0,y_0)| \\ |v(x,y)-v(x_0,y_0)|\end{array}\right\}\le|f(z)-f(z_0)|\le|u(x,y)-u(x_0,y_0)|+|v(x,y)-v(x_0,y_0)|.$$

由此可以证明定理1(P 23).

注：

定理1(P23)将复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 的连续性问题，转化为两个二元实变函数 $u(x,y)$和 $v(x,y)$ 的连续性问题.

例如，$f(z)=\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}(x^2-y^2)$,

$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 除在原点(0,0)外处处连续，

$v(x,y)=x^2-y^2$ 在复平面内处处连续，

则由定理1得

$f(z)$ 在复平面内除原点外处处连续.

连续函数的性质

因为复变函数极限和连续的定义与实变数函数极限和连续的定义在形式上完全相同，因此可以完全类似地证明复变函数的极限与连续具有相同形式的运算性质.

定理：(1) 在 z_0 连续的两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差、积、商 (分母不为零时) 在 z_0 处仍连续.

(2) 如果函数 $g(z)$在 z_0 连续, 函数 $f(h)$ 在 $h_0=g(z_0)$ 连续, 则复合函数 $f\big(g(z)\big)$ 在 z_0 处连续.

⇒ 当$n\in\mathbb{Z}^+$时, $w=z^n$在全平面连续.

定理：(1) 在 z_0 连续的两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差、积、商 (分母不为零时) 在 z_0 处仍连续.

当 $n\in\mathbb{Z}^+$ 时, $w=z^n$ 在全平面连续.

(1) 有理整函数(多项式)

$$w=P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

在整个复平面处处连续(P 24);

(2) 有理分式函数

$$w=\frac{P(z)}{Q(z)},$$ 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是多项式,

在复平面内除去使分母Q(z)=0的点外, 处处都连续(P24).

函数极限运算法则

定理 设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在，$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$ 存在，则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\pm\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=\left(\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\right)\left(\lim\limits_{z\to z_0} g(z)\right)$;

(3) 当 $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)\neq 0$时，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}$.

特殊函数的连续性

例3 研究辐角主值函数

$$f(z)=\begin{cases}\arg z, & z\neq 0,\ -\pi<\arg z\le\pi\\ 0, & z=0\end{cases}$$ 在各点的连续性.

解 1) 若$z_0=0$, $f(z_0)=0$, 但是当 z 沿射线$\arg z=\theta_0$

$(-\pi<\theta_0\le\pi)$趋于原点0时, $f(z)=\theta_0\to\theta_0$.

故$f(z)$沿不同的直线趋于0 时, 极限不一样.

所以 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在, 故$f(z)$在原点$z=0$处不连续.

2) 若z_0是负实轴上的点, 即$z_0=x_0<0$, 则$f(z_0)=\pi$.

当 z 从上半平面 趋于点 z_0 时, $f(z)$ 趋于π;

当 z 从下半平面 趋于点 z_0 时, $f(z)$ 趋于$-\pi$.

所以 $\lim\limits_{\substack{z\to x\\ 且x<0}} f(z)$ 不存在, 故$f(z)$在负实轴处处不连续.

例3 研究辐角主值函数

$$f(z)=\begin{cases}\arg z, & z\neq 0,\ -\pi<\arg z\leq\pi\\ 0, & z=0\end{cases}$$ 在各点的连续性.

3) 对于其他点z_0，即 z_0 既不是负半实轴的点，也不是原点，

$$f(z_0)=\arg z_0.$$

$\forall\varepsilon>0$, 作一个以z_0为中心、正数δ为半径的圆，

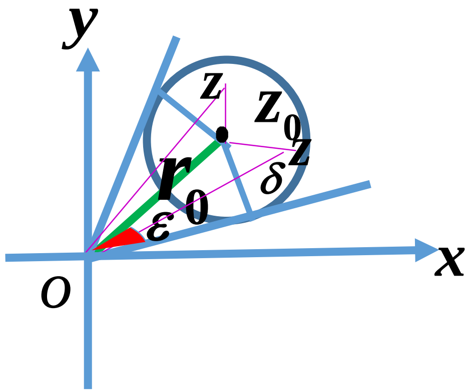
只要$\delta>0$充分小，此圆就与负实轴和原点都不相交.

且从原点向此圆引两条切线, 两条切线夹角$\leq 2\varepsilon$.

当z落入此圆中, 即$0<|z-z_0|<\delta$ 时，

$$|f(z)-f(z_0)|=|\arg z-\arg z_0|<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, $f(z)$在$z=z_0$处连续.



$f(z)$除原点和负实轴上点外处处连续. #

例证明 $f(z)=\dfrac{z}{\bar{z}}\ (z\neq 0)$ 当 $z\to 0$ 时极限不存在.

证明：令 $z=x+\mathrm{i}\,y$，$f(z)=u+\mathrm{i}v=\dfrac{z^2}{|z|^2}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，

则 $u(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，　$v(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

当 z 沿直线 $y=kx$ 趋于于零，即$y=kx$，$x\to 0$时，

$$v(x,y)=\frac{2x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}\to\frac{2k}{1+k^2}$$，随 k 的变化而变化，

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y)$ 不存在.

根据定理1(P23)可知，$\lim\limits_{z\to 0} f(z)$不存在.　#

P 47习题2可参考本例题.

设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$，$n\geq 1$，$a_0\neq 0$,

则 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$(P47习题3).

证明：当$|z|>1$时,$|f(z)|\geq|a_0z^n|-|a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n|$

$$\geq\left\{|a_0||z|^n-|a_1||z|^{n-1}-|a_2||z|^{n-2}-\cdots-|a_{n-1}||z|-|a_n|\right\}.$$

记$A=\max\limits_{1\leq j\leq n}\left\{|a_j|\right\}$，则当$|z|>1$时，$|a_j||z|^{n-j}\leq A|z|^{n-1}$, $j=1,2,\cdots,n$.

故当$|z|>1$时，$|f(z)|\geq|a_0||z|^n-nA|z|^{n-1}=|z|^{n-1}\left(|a_0||z|-nA\right)$.

令$|a_0||z|-nA\geq\frac{1}{2}|a_0||z|$, 解得当$|z|>\max\left\{1,\frac{2nA}{|a_0|}\right\}$时，$|f(z)|\geq\frac{|a_0|}{2}|z|^n$.

因$n\geq 1$，$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{|a_0|}{2}|z|^n=\infty$，　故 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$. #

2.3 复变函数的导数与解析函数的概念

1.导数的定义:

设$w=f(z)$ 在z 的某个领域U 内有定义，$z+\Delta z\in U$.

$\boxed{\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\ \Delta y}$

如果 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ 存在, 则称 $f(z)$ 在z可微(或可导).

称 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ 为 $f(z)$ 在 z 的导数或微商.

记作 $f'(z)=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\tilde{z}\to z}\dfrac{f(\tilde{z})-f(z)}{\tilde{z}-z}$.

注: $\Delta z\to 0$(即$z+\Delta z\to z$)的方式是任意的.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$意味着：

$\forall \varepsilon>0,\quad \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0,\quad$ 当$0<|\Delta z|<\delta$时，

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)\right|<\varepsilon.$$

$f(z)$在z可微 $\Leftrightarrow$ $z+\Delta z$在z邻域内以任意方式趋于z 时，

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$都趋于同一个复数.

解析

- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点可微，则称 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数.
- 如果 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内 $\{z \,|\, |z-z_0|<\delta\}$ 内可微，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析. ★★★
- 如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析，即 $f(z)$ 在 z_0 的任一邻域内都有不可微的点，则称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点.
- 对闭区域 $\bar{D}$，若 $f(z)$ 在包含 $\bar{D}$ 的某个区域 G(开) 内解析，

$$(\bar{D} \subset G)$$

则称 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D}$ 上解析.

解析是跟区域联系在一起的概念.

函数在**区域D内解析** $\Longleftrightarrow$ 函数在**区域D内可微**

函数在z_0点解析 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 函数在z_0点可微

- 若$f(z)$在z可微，则$f(z)$在z连续. (P 25)

证明　若$f(z)$在z可微，记$\alpha \equiv \dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)$,

则 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha=0$，进而 $\alpha\Delta z=o\left(|\Delta z|\right)$.

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\alpha\Delta z. \quad (*)$$

故 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}(f(z+\Delta z)-f(z))=\lim\limits_{\Delta z\to 0}(f'(z)\Delta z+\alpha\Delta z)=0$,

故 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}f(z+\Delta z)=f(z)$，故$f(z)$在$z$连续. #

$$\boxed{f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+o\left(|\Delta z|\right), \qquad (2.2)}$$

例4(P 26) 求证 $f(z)=z^n$是解析函数, n是任意正整数.

证明：$\forall z\in\mathbb{C}$，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}$

$\boxed{\text{二项式定理}}$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left\{\cancel{z^n}+C_n^1 z^{n-1}\Delta z+C_n^2 z^{n-2}(\Delta z)^2+\cdots+C_n^n(\Delta z)^n-\cancel{z^n}\right\}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left\{C_n^1 z^{n-1}+C_n^2 z^{n-2}\Delta z+C_n^3 z^{n-3}(\Delta z)^2+\cdots+(\Delta z)^{n-1}\right\}$$

$$=C_n^1 z^{n-1}=nz^{n-1}.$$

故 $f(z)=z^n$ 处处可微, 且 $(z^n)'=nz^{n-1}$.

故 $f(z)=z^n$在全平面解析.

由于复函数导数定义与微积分中实函数导数定义类似，故类似地有如下求导法则：

条件：等式两边导数都存在.

(1) $(c)'=0$, c是复常数.

(2) $(z^n)'=nz^{n-1}$, $n\in\mathbb{Z}^+$.

(3) $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$.

(4) $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$.

(5) $g(z)\neq 0$时，$\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$.

(6) $\{f(g(z))\}'=\left\{f'(w)\big|_{w=g(z)}\right\}g'(z)$.

(7) $f'(z)=\dfrac{1}{\phi'(w)}$, 其中 $w=f(z)$与$z=\phi(w)$是两个互为反函数的单值函数，且$\phi'(w)\neq 0$.

(1) $(c)'=0$，c为复常数.

(2) $(z^n)'=nz^{n-1}$，$n\in\mathbb{Z}^+$.

(3) $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$.

(4) $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$.

(5) $g(z)\neq 0$时，$\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$.

(1) 多项式 $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots+a_nz^n$，全平面解析，

$$\boxed{P'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots+na_nz^{n-1}.}$$

(2) 有理函数 $w=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是 z 的多项式，

在全复平面，除掉使分母Q(z)=0的点外，处处可微.

$Q(z)\neq 0$时，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{P(z)}{Q(z)}\right)=\dfrac{P'(z)Q(z)-P(z)Q'(z)}{Q^2(z)}$.

背熟

• 若$P(z)$ 和 $Q(z)$ 在全平面解析，则此结论也成立，

此时使得$Q(z)=0$的点是$\dfrac{P(z)}{Q(z)}$仅有的奇点. ★★★★★

(2) 有理函数 $w=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$， $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是 z 的多项式，

在全复平面，除掉使分母$Q(z)=0$的点外，处处可微.

$Q(z)\neq 0$时，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{P(z)}{Q(z)}\right)=\dfrac{P'(z)Q(z)-P(z)Q'(z)}{Q^2(z)}$. 背熟

• 若$P(z)$ 和 $Q(z)$ 在全平面解析，则此结论也成立，

此时使得$Q(z)=0$的点是$\dfrac{P(z)}{Q(z)}$仅有的奇点.

$\dfrac{P(z)}{Q(z)}$在区域D的奇点有$\begin{cases}1.\ P(z)\text{在}D\text{内的奇点,}\\ 2.\ Q(z)\text{在}D\text{内的奇点,}\\ 3.\ \text{在}D\text{内使分母}Q(z)=0\text{的点.}\end{cases}$

例 研究函数 $w=\dfrac{z}{(z-\mathrm{i})^2}$ 的解析性.

解 由 $(z-\mathrm{i})^2=0$ 解得 $z=\mathrm{i}$.

当 $z\neq \mathrm{i}$ 时，$\dfrac{z}{(z-\mathrm{i})^2}$ 可微，解析，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\frac{z}{(z-\mathrm{i})^2}\right\}=\frac{1\cdot(z-\mathrm{i})^2-z\cdot 2(z-\mathrm{i})}{(z-\mathrm{i})^4}=-\frac{z+\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})^3}.$$

$z=\mathrm{i}$ 是 $\dfrac{z}{(z-\mathrm{i})^2}$ 的唯一奇点． #

例　研究函数 $w=\frac{1}{z}$ 的解析性.

解　$w=\frac{1}{z}$ 在复平面内除 $z=0$ 外，处处可微，且

$$z\neq 0\text{时，}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{1}{z^2}.$$

故 $w=\frac{1}{z}$ 在复平面内除 $z=0$ 外，处处解析，

$z=0$ 是 $\frac{1}{z}$ 的唯一奇点．　#

例 研究函数 $w=\dfrac{z}{(z+\mathrm{i})(z+3)}$ 的解析性.

解 由 $(z+\mathrm{i})(z+3)=0$ 解得 $z_1=-\mathrm{i},\ z_2=-3.$

故当 $z\neq-\mathrm{i}$ 且 $z\neq-3$ 时，$w=\dfrac{1}{(z+\mathrm{i})(z+3)}$ 可微，解析.

它只有 $z_1=-\mathrm{i}$ 和 $z_2=-3$ 两个奇点 .

当 $z\neq-\mathrm{i}$ 且 $z\neq-3$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{(z+\mathrm{i})(z+3)}\right)=\frac{1\cdot(z+\mathrm{i})(z+3)-z\cdot\{1\cdot(z+3)+(z+\mathrm{i})\cdot 1\}}{(z+\mathrm{i})^2(z+3)^2}$$

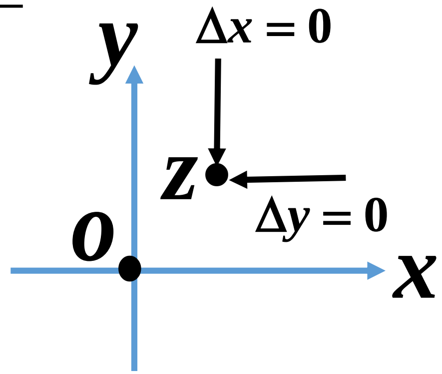
$$=\frac{(z+\mathrm{i})(z+3)-z(2z+3+\mathrm{i})}{(z+\mathrm{i})^2(z+3)^2}=\frac{-z^2+3\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i})^2(z+3)^2}.\quad \#$$

例5(P 26) 设$z=x+\mathrm{i}\,y,\ \lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq 1$,则

则$f(z)=x+\mathrm{i}\,\lambda y$在$z$平面处处连续, 但处处不可微.

解 (2) 关于可微性： $\forall z=x+\mathrm{i}\,y,\ x,y\in\mathbb{R}$,

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\{x+\Delta x+\mathrm{i}\,\lambda(y+\Delta y)\}-(x+\mathrm{i}\,\lambda y)}{\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y}$$



$$=\frac{\Delta x+\mathrm{i}\,\lambda\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y}=\begin{cases}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1, & \text{当}\Delta y=0,\ \Delta x\neq 0\text{时},\\[2ex] \dfrac{\mathrm{i}\,\lambda\Delta y}{\mathrm{i}\,\Delta y}=\lambda, & \text{当}\Delta x=0,\ \Delta y\neq 0\text{时},\\ \cdots\cdots & \end{cases}$$

故当$\lambda\neq 1$时， $f(z)=x+\mathrm{i}\,\lambda y$ 在z平面处处不可微. #

特别是, 取$\lambda=-1$, $f(z)=\bar{z}$, 处处不可微.

$\boxed{\text{记下背熟}}$

由$f(z)=x+\mathrm{i}\lambda y(\lambda\neq 1$时),特别是$f(z)=\bar{z}$在全平面处处不可微发现:

$u(x,y)$和$v(x,y)$都在点(x_0,y_0)可微时,

$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$仍有可能在点$z_0=x_0+\mathrm{i}\,y_0$不可微.

如何直接判断一个复函数在某一点是否可微?
(按定义分析有点麻烦)

2.4 柯西-黎曼方程

将给出:
直接判断一个复函数在某一点是否可微的方法.

作业

P 47

1, 2, 3(参见此PPT的P 26),

7 $\left(\text{提示：由条件知，} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}, \text{两边取极限.} \right)$

P 48

11（先求使分母为0的点来确定解析区域，
再用求导公式求导）

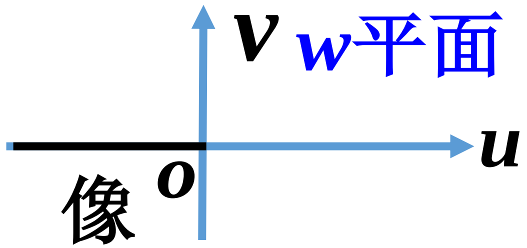
例2. 求下列曲线在映照 $w=z^2$ 下的像：1) 平行于坐标轴的直线；…

$$u=x^2-y^2,\qquad v=2xy. \qquad (2.0)$$

b). 当$c_1=0$时, $x=0$, 代入(2.0)得

$$u=-y^2\le 0,\quad v=0,$$

这是w 平面的含有原点的负实轴.



(2). 类似地可求$y=c_2$ 的像. 将$y=c_2$与(2.0)联立消去x,y.

将$y=c_2$代入(2.0), 得 $u=x^2-c_2^2$, $v=2c_2x$. 再消去x.

a). 当$c_2\ne 0$时，$x=\dfrac{v}{2c_2}$，代入$u=x^2-c_2^2$, 得$u=\dfrac{v^2}{4c_2^2}-c_2^2$.

这也是w平面的一族抛物线.

b). 当$C_2=0$时，$y=0$(x轴), 代入(2.0)得$u=x^2\ge 0$, $v=0$.

这是w平面的含有原点的正实轴.

例. 求圆周$x^2+(y-2)^2=2$在映照 $w=\frac{1}{z}$ 下的像. 解1见此PPT的P15.

解2 令$z=x+\mathrm{i}\,y, w=u+\mathrm{i}\,v$，则$w=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}$,

故$u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\frac{y}{x^2+y^2}$. (#) 将$x^2+(y-2)^2=2$与(#)联立, 消x, y.

由$x^2+(y-2)^2=2$得$x^2+y^2=4y-2$, 代入(#)得

$u=\frac{x}{4y-2}$, $v=\frac{y}{2-4y}$. 由第二式解得$y=\frac{2v}{4v+1}$.

在$x^2+(y-2)^2=2$上$2-\sqrt{2}\le y\le 2+\sqrt{2}$, 故$v\neq-\frac{1}{4}$.

由第一式得 $x=u(4y-2)=u\left(\frac{8v}{4v+1}-2\right)=-\frac{2u}{4v+1}$.

代入$x^2+y^2=4y-2$得 $\frac{4u^2+4v^2}{(4v+1)^2}=\frac{8v}{4v+1}-2$,整理得 $u^2+(v+1)^2=\frac{1}{2}$.

故所求像为w平面以点$(0,-1)$ 为中心,以$\frac{\sqrt{2}}{2}$为半径的圆周. #