第一章：偏微分方程定解问题：

一本章概述和学习要求：

这一章是数学物理方程的基础部分，主要以三个基本方程为例子介绍了数学物理方程来源和背景，提出方程的**特解**和**通解**的基本概念以及定解问题的概念和分类。最后介绍了两个基本原理：叠加原理和齐次化原理，并用这两个原理推导出了非齐次弦振动方程初值问题的一般解公式。本章还详细介绍了最基础的求解一阶线性偏微分方程和化简二阶线性偏微分方程标准型的特征线方法。我们要通过本章的学习，理解数学物理方程这门课程所研究的基本方程，理解基本的定解问题的概念和分类。能应用微积分手段求解一些简单的偏微分方程。掌握并能运用叠加原理和齐次化原理解决一些定解问题。还要能熟练掌握一阶和二阶线性偏微分方程特征线研究法，求解一阶线性偏微分方程，对二阶线性偏微分方程能进行分类和化标准型工作，并能通过化简方程的方法求出某些二阶线性偏微分方程的通解。

1.1 三个基本方程介绍，意义和导出背景

1) **熟知三个最基本方程形式：**

$$(1)\text{弦振动方程}:\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x)$$

$$(2)\text{一维热传导方程}:\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x)$$

$$(3)\text{拉普拉斯方程(场位方程)}:\quad \Delta_3 u=f(x,y,z).$$

其中$\Delta_3=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, Δ_3又称为3 维$Laplace$算子

三个最基本方程分别属于的三个基本方程类：

$$(1)\text{波动方程类}:\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+f(t,\vec{x})$$

$$(2)\text{热传导方程类}:\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(t,\vec{x})$$

$$(3)\text{场位方程类}:\Delta u=f(t,\vec{x})$$

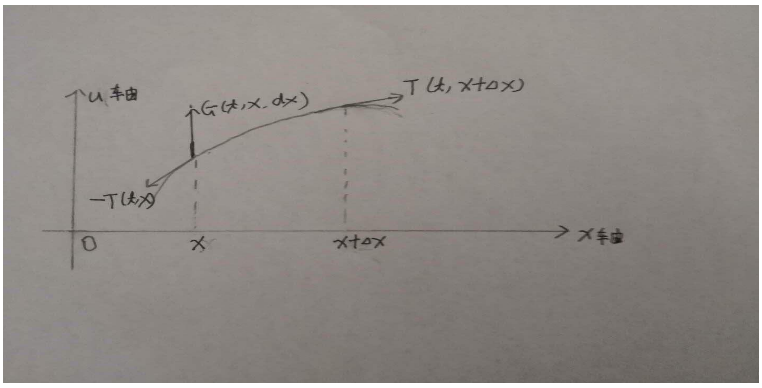
其中$\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n),\quad \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+...+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$,特别:

三维情形：$\Delta_3 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,二维情形：$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

也就是说：弦振动方程是波动方程类的最基础方程，一维热传导方程是热传导方程类的最基础方程，三维拉普拉斯方程是场位方程类中的最基础方程。

2) **物理背景理解** 在本节中，为了对这三个方程的加强理解，书中给出了三个方程的物理背景和一些导出过程。我们以下将进行一些归纳，首先我们先详细分析一下弦振动方程的建立过程：

我们假定有一个线密度为常数ρ的弦，其平衡位置为x轴，弦受某种扰动后它平衡位置附近振动，$u(t,x)$是在时刻t时坐标为x的点相对于平衡位置的位移(我们假定位移方向垂直于x轴方向)，并假定随时间变化有一个垂直于x 轴的密度为$g(t,x)$的受迫力(如没有受迫力$g(t,x)=0$)，我们取弦的一个微元[x, x+dx]来分析受力，并进一步建立$u(t,x)$ 的方程，如图：



微元受力有：绳子两端的张力和密度为$g(t,x)$的受迫力，弦的张力$\vec{T}=(T_1,T_2)$,其中T_1,T_2分别为$\vec{T}$在x轴和u轴的分量，在$\vec{x_0}$的方向和$\vec{u_0}$方向分别建立方程，

$$\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{0}:\ T_1(t,x+\Delta x)-T_1(t,x)=0 \Longrightarrow \frac{\partial T_1}{\partial x}=0$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{0}:\quad \text{合外力} F=ma=T_2(t,x+\Delta x)-T_2(t,x)+G(t,x,dx) \tag{1.1.1}$$

其中微元质量的$m=\rho dx$,加速度$a=\dfrac{d^2u}{dt^2}$,受迫力$G(t,x,dx)=g(t,x)dx$,而

$$T_2(t,x+\Delta x)-T_2(t,x)=\frac{\partial T_2}{\partial x}dx+o(\Delta x)$$

以上数据代入方程并两边除以$dx=\Delta x$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial T_2}{\partial x}+g(t,x)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \tag{1.1.2}$$

由于张力沿弦的切线方向，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{T_2}{T_1}\Longrightarrow T_2=T_1\frac{\partial u}{\partial x},$$

此T_2的表示式代入上式(1.1.2)，并令$\Delta x\longrightarrow 0$得到$u(t,x)$满足方程：

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(t,x)$$

我们进一步假定弦是微小振动，这样$T_1\approx T$,又在绳子不形变的理想假定下，张力T为常数。所以最后有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x),\ \left(a^2=\frac{T}{\rho},\ f(t,x)=\frac{g(t,x)}{\rho}\right)$$

热传导方程描写以下物理过程：物体由于温度分布不均匀，引起热量流动以及温度变化。根据热传导定律和能量守恒定律，可建立热量u随着时空变化满足的热传导方程：如一维热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2u_{xx}+f(t,x)$$

其中$a^2=\dfrac{k}{c\rho},\ f(t,x)=\dfrac{g(t,x)}{c\rho}$ c为比热容，k为热传导系数，ρ为质量密度。

进一步，教材中还给出了电荷的静电场电位满足方程，即场位方程：

$$\Delta_3 u=-\frac{\rho}{\epsilon}.$$

其中ρ为所研究区域的电荷密度，ϵ为介电常数。

1.2 通解和特解的概念以及定解问题

一般来说，偏微分方程在不加其它限制的条件下有解可能有很多，这就产生了通解和特解的区分：

通解和特解: 通解：包含一般形式的解。特解指某个解或具有某种性质的解。以下，我们用具体例子来理解通解和特解

例1.2.1 :求以下方程的通解：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\quad 其中u=u(x,y)$$

解:原方程化为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,$$

上式说明$\frac{\partial u}{\partial y}$是与$x$无关的量，这样：

$$\frac{\partial u}{\partial y}=h(y)\Longrightarrow u=\int h(y)dy+f(x)$$

记$g(y)=\int h(y)dy$并整理得：

$$u=f(x)+g(y)$$

其中$f(x),g(y)$为任意可微函数。

例1.2.2 求$\Delta_2 u=0$形如$u=e^{ax+by}$的解，a,b可以是复数。

解：本题就是求解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

形如$u=e^{ax+by}$形式的解, 实际上利用复合求导得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2e^{ax+by},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=b^2e^{ax+by}$$

代入方程得到：

$$(a^2+b^2)e^{ax+by}=0\Longrightarrow a^2+b^2=0\Longrightarrow b=\pm ai$$

于是得到特解：

$$u_1=e^{ax+iay},\ \ u_2=e^{ax-iay}$$

如果利用方程的线性性质，取$u_1^*=\frac{1}{2}(u_1+u_2),u_2^*=\frac{1}{2i}(u_1-u_2)$可得到实形式的解:

$$u_1^*(x,y)=e^{ax}cosay,\ \ u_2^*(x,y)=e^{ax}\sin ay$$

例1.2.3 **求**$\Delta_2 u=0$**的**$u=u(r)$**形式的解**。($r=\sqrt{x^2+y^2}$)

解：本题就是求解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

形如$u=u(r)$形式的解。因为$u=u(r)$,所以利用复合求导并反复使用条件$r=\sqrt{x^2+y^2}$得到：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{du}{dr}\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{x}{r}+\frac{du}{dr}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{d^2u}{dr^2}(\frac{x}{r})^2+\frac{du}{dr}(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3})$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{y}{r}+\frac{du}{dr}\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{r}\right)=\frac{d^2u}{dr^2}(\frac{y}{r})^2+\frac{du}{dr}(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3})$$

由于$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 因此把以上两式相加，并利用$r^2=x^2+y^2$，我们得到$u=u(r)$满足的常微分方程：

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=0$$

于是解得$u=u(r)$形式的解：

$$u=A+B\ln r.\ (A,B\text{为任意常数})$$

另外，**齐次方程**和**非齐次方程**是个贯穿全书的概念, 我们用以下例题来理解这个概念：

例1.2.4 写出弦振动方程，一维热传导方程和三维场位方程的数学表达式，并说明这三个方程的齐次方程和非齐次方程物理意义上区别。

解：

$$\text{弦振动方程是：}\quad u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x)\,(t>0)$$
$$\text{一维热传导方程是：}\quad u_t=a^2u_{xx}+f(t,x)\,(t>0)$$
$$\text{场位方程是：}\quad \Delta_3 u=f(x,y,z)$$

以上三个方程右边的函数$\mathbf{f}=\mathbf{0}$时就对应它们的**齐次方程**，反之$\mathbf{f}\neq\mathbf{0}$时就对应它们的**非齐次方程**。 弦振动方程的齐次方程描写自由弦振动，即弦在振动过程中没有附加外力作用在弦身上，而非齐次弦振动方程则代表运动过程中弦上有受迫力。如果在热传导过程中，内部没有热源就用齐次热传导方程描写，内部有热源就对应非齐次热传导方程。类似地，如果所研究空间区域无电荷分布，那么静电场的电位满足齐次场位方程，如果所研究空间区域有电荷分布，那么根据电荷密度，就可以列出相应的非齐次场位方程。

2)**偏微分方程定解问题：**

偏微分方程定解问题：简而言之，偏微分方程定解问题就是偏微分方程附加了限定条件：如边值条件，初值条件等定解条件形成的问题。

定解问题的三类基本问题：即**初值问题**, **边值问题**，**混合问题**。

(1)**初值问题的例子**(无界自由弦振动初值问题)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x). \end{cases}$$

(2)**边值问题的例子**(三维$Laplace$方程球的第一边值问题)

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \, (r < a, \, r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\ u \mid_{r=a} = \varphi(x,y,z) \end{cases}$$

(3)**混合问题的例子**(两端固定的有界弦振动混合问题)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t > 0, 0 < x < l) \\ u(t,0) = 0, u(t,l) = 0, \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x). \end{cases}$$

我们发现，一个定解问题要有以下**两个要素：泛定方程**和相应的**定解条件**。

比如，在以上第(1)个自由弦振动初值问题中，**泛定方程**为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t > 0, -\infty < x < +\infty)$$

而定解条件为初值条件，共有两个：

1. $u(0,x) = u \mid_{t=0} = \varphi(x)$, 此条件理解为$t=0$时的初始位移

2. $u_t(0,x) = \dfrac{\partial u}{\partial t} \mid_{t=0} = \psi(x)$, 此条件理解为$t=0$时的初始速度

在以上第(2)个三维$Laplace$方程的球的第一边值问题中，**泛定方程**为

$$\Delta_3 u = 0, \, (r < a, \, r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

表示电场电位在球的内部分布满足$Laplace$方程. $u \mid_{r=a} = \varphi(x,y,z)$表示在半径为$a$的的球面上函数值指定为$\varphi(x,y,z)$, 这实际上就是在球面上的边界条件。

边界条件还有以下细分:第一，第二和第三类边界条件, 三类边界条件的笼统表达式为：

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \varphi(x,y,z)$$

1. 在$\alpha \neq 0, \beta = 0$时候，以上为第一类边界条件, 比如，在上面弦振动混合问题中，$u(t,0)=0$是在$x=0$ 点附加第一类边界条件.

2. 在$\alpha = 0, \beta \neq 0$时候，以上为第二类边界条件, 在上面弦振动混合问题中，如在l点条件改为$u_x(t,l)=0$就是在$x=l$点附加了第二类边界条件。

3.在$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$时候，以上为第三类边界条件

注1.2.1： 以上$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$是指函数在方向$\vec{n}$的方向导数，如方向$\vec{n}=(\alpha,\beta,\gamma)$, 其中$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, 则有$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z}$.

热传导方程的三类边界条件有明显的物理意义：

1) 当边界的温度已知函数$\varphi(t,x,y,z)$, 这时$u(t,x,y,z)\mid_{\partial v}=\varphi(t,x,y,z)$为第一类边界条件($\partial v$ 表示边界)。特别，如果已知边界的温度为0，则为第一类齐次边界条件。

2) 当边界上沿外法向有热流密度$q(t,x,y,z)$时候，则由热学定律，有表达式

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mid_{\partial v} = -\frac{q(t,x,y,z)}{k}\mid_{\partial v}$$

其中k为热传导系数。特别$q(t,x,y,z)=0$时，说明边界绝热，这样在边界上$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mid_{\partial v}=0$，对应第二类齐次边界条件。

3)当物体通过边界与外界自由热交换，在边界上成立

$$\left[hu + k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right]\mid_{\partial v} = h\theta$$

其中h为两个物质之间的热交换系数，$\theta=\theta(x,y,z)$为外界温度。

例1.2.5 长为l的导热细杆子，杆身侧面绝热，内部无热源，杆的左端绝热，杆的另一端与外界温度保持零度的介质自由热交换，杆子的初始温度已知，写出有界杆子的温度分布的满足的定解问题.

解:这个长为l导热杆子为细杆子，杆身侧面绝热，随着时间变化的温度分布可以用一维热传导方程来描写，设杆子的左端点对应坐标为$x=0$,因此，定解问题对应的**泛定方程**为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \ (0<x<l)$$

另外由于左端点绝热，因此左端点$x=0$满足第二类齐边界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mid_{x=0} = -\frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=0} = 0$$

另一端$x=l$与外界温度保持零度的介质自由热交换，因此在$x=l$解u满足齐次的第三类边界条件。即$(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\gamma u)\mid_{x=l}=0$, 其中$\gamma=\frac{k}{h}$, k为杆的热传导系数,h为杆的热交换系数。初始温度已知，不妨设初始温度为$\varphi(x)$, 即有$u\mid_{t=0}=\varphi(x)$. 根据以上论述我们就建立了u满足的定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (t>0,\ 0<x<l)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=0}=0,\ \ (\dfrac{\partial u}{\partial x}+\gamma u)\mid_{x=l}=0\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

其中$\gamma=\dfrac{k}{h}$, k 为杆的热传导系数, h为杆的热交换系数。

例1.2.6 一根长为l而两端$x=0$和$x=l$ 固定的弦，用手把它的中点横向拨开距离h,然后放手让其自由振动，写出此弦振动的定解问题。

解：根据题目条件，弦的位移$u(t,x)$满足以下条件:

1)由于是放手让弦自由振动，所以运动对应自由弦振动方程：

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad (0<x<l)$$

2)弦的两端$x=0$和$x=l$固定，所以$u(t,0)=u(t,l)=0$.

3)在(x,u)坐标系中，两个端点坐标分别为：$A(0,0),B(0,1)$, 弦的中点横向拨开距离h后，对应点坐标为$C=(\dfrac{l}{2},h)$, 通过解三角形ABC, 易求得弦各点在$t=0$时位移, 即初始位移

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2h}{l}x,\ \text{当}0\le x\le\dfrac{l}{2},\\ \dfrac{2h}{l}(l-x),\ \text{当}\dfrac{l}{2}<x\le l.\end{cases}$$

而弦的初始速度为0，因此$u_t(0,x)=0$

综上，弦振动满足的的定解问题是：

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx},\ \ (0<x<l)\\ u(t,0)=u(t,l)=0,\\ u(0,x)=\begin{cases}\dfrac{2h}{l}x,\ \text{当}0\le x\le\dfrac{l}{2},\\ \dfrac{2h}{l}(l-x),\ \text{当}\dfrac{l}{2}<x\le l.\end{cases}\\ u_t(0,x)=0.\end{cases}$$

1.3一阶线性偏微分方程的特征线求通解方法

我们知道，对于一阶线性常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$$

它有一般解公式：

$$y(x) = e^{\int P(x)dx}\left(\int e^{-\int P(x)dx}Q(x)\,dx + m\right)$$

在本节中，我们将进一步考虑一阶线性偏微分方程的求解问题，我们以下将根据方程上的自变量数目逐步考虑：

含有两个自变量的一阶线性偏微分方程为：

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y) \tag{1.3.1}$$

这个方程含有两种一阶导数：即$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial u}{\partial y}$。如果能通过适当的坐标变换使得这个一阶偏微分方程只含有对一个自变量的偏导数，即通过自变量替换$\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, 使得新方程中只含有$\frac{\partial u}{\partial \xi}$和$\frac{\partial u}{\partial \eta}$的其中一项，那么方程形式就化简了。我们不妨设变换后方程中$\frac{\partial u}{\partial \xi}$的项没有了，那么方程就化为以下简单形式

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + c'(\xi,\eta)u = F(\xi,\eta) \tag{1.3.2}$$

这个方程(1.3.2)虽然是个偏微分方程，但却是一阶线性常微分方程的形式，我们是可以利用已知的一阶线性常微分方程的一般解公式来求解(积分过程中把ξ当成常数来处理)，以下我们就给出寻找变量替换$\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$的方法和结论：

设有变量替换：$\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, 这样

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

以上两式代入一阶线性偏微分方程(1.3.1), 得到：

$$(a\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b\frac{\partial \varphi}{\partial y})\frac{\partial u}{\partial \xi} + (a\frac{\partial \psi}{\partial x} + b\frac{\partial \psi}{\partial y})\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = f \tag{1.3.3}$$

上式(1.3.3)中，要使$\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$的系数为0，则要求方程

$$a(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0 \tag{1.3.4}$$

成立。所以，只要找到以上方程(1.3.4)的某一个解$\varphi(x,y)$, 并**任意取**和$\varphi(x,y)$不相关的函数$\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})$, 相应的变换就找到了。但问题来了，怎样找到一个解$\varphi(x,y)$呢？

定理1.3.1设$\varphi(x,y)=c$(常数)是以下常微分方程

$$\frac{dx}{a(x,y)}=\frac{dy}{b(x,y)},$$

的**隐式解**，则$\xi=\varphi(x,y)$是一阶线性偏微分方程(1.3.4)的解。

证明：略（参看教材，也可直接验证）

注1.3.1 :常微分方程的**隐式解**也称为**首次积分**，是微分方程解的一种表示形式，比如对于常微分方程$\dfrac{dy}{dx}=-1$, 它的解为$y=-x+c$, 但也可表示成隐式解:$x+y=c$. 或者说方程有首次积分$x+y=c$.

综上，我们就得出了**求解含有两个自变量的一阶偏微分方程的步骤**：为

1.首先列出特征线方程： $$\frac{dx}{a(x,y)}=\frac{dy}{b(x,y)} \tag{1.3.5}$$

2. 求出特征线方程首次积分形式的解： $\varphi(x,y)=c$, c为常数

3. 作自变量替换： $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$

其中$\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})$是**任意取**的函数（只要$\varphi(x,y)$和$\psi(x,y)$两个函数彼此独立，即函数不相关即可）

4. 利用新自变量ξ, η 代替x,y化简原方程。

最后，对应新自变量ξ,η的一阶线性偏微分方程不再含有对于自变量ξ的偏导数项, 只含有对自变量η的偏导数项, 已变成了一阶线性常微分方程的形式。就可以借助一阶线性常微分方程公式来求解了。

例1.3.1 求方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ (t>0,\ -\infty<x<+\infty,\ \ a\,\text{为常数})$$

的通解。

解：方程的特征线方程为

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{a},$$

积分得到首次积分

$$x - at = c$$

作变量替换

$$\xi = x - at, \quad \text{并取}\, \eta = x$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -a\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

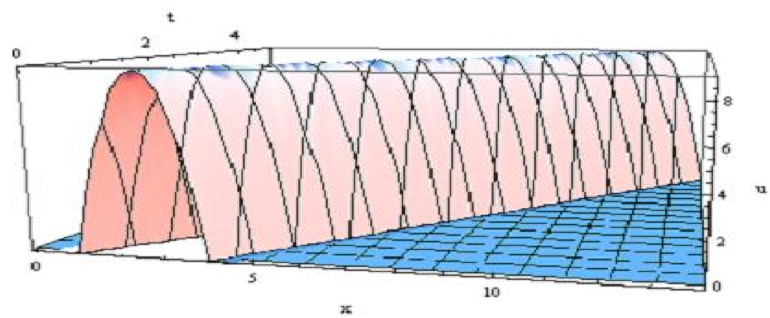
代入方程后，方程化简为

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow u = f(\xi)$$

也就是

$$u = f(x - at), \quad f\text{为任意一次可微函数}$$

注1.3.2 :这个例子中形如$u = f(x - at)$的解称为**行波解**, 从形式上看，在$x - at = c_1$这个直线上(c_1是某个取定的常数), 函数值u是常数，就像在这根直线的上方涌起一列等高的波浪，因此称这样的解为**行波解**。以下是行波解的优美的三维图：



例1.3.2 求方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

通解

解：方程的特征线方程为

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y},$$

两边积分得到$\ln x + \ln y = c_1$, 这样得到特征线方程的首次积分

$$xy = c, \ \ (c = e^{c_1})$$

作变量替换

$$\xi = xy, \eta = x$$

由复合求导：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

以上代入原方程化简得：

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow u = f(\xi)$$

也就是

$$u = f(xy)$$

以上给出了求解含有两个自变量的一阶线性偏微分方程的特征线法，下面我们将进一步给出**含三个自变量的一阶线性偏微分方程的特征线法**：

$$a(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} + d(x,y,z)u = f(x,y,z) \qquad (1.3.6)$$

类似地，用特征线化简或求解含有3个自变量的一阶线性偏微分方程(1.3.6)的步骤是：

1.列出特征线方程： $\dfrac{dx}{a(x,y,z)} = \dfrac{dy}{b(x,y,z)} = \dfrac{dz}{c(x,y,z)}$

2. 从以上特征方程可求出2个彼此独立的首次积分：

$$\varphi(x,y,z) = c_1, \ \psi(x,y,z) = c_2,$$

3. 作自变量替换：

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y,z), \\ \eta = \psi(x,y,z) \end{cases}$$

再**取**$\tau = \theta(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$（其中$\theta(x,y,z)$可**任取**，只要与$\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$函数不相关即可）

4. 利用新自变量ξ, η, τ 代替x, y, z化简原方程, 则新的一阶线性偏微分方程不再含有对于自变量ξ, η的偏导数项, 而只含有对自变量τ 的一阶偏导数项, 所以原一阶线性偏微分方程变成了一阶线性常微分方程的形式，就可以借助一阶线性常微分方程公式来求解了。

例1.3.3 求以下方程通解：

$$\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

解：特征方程为：

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{z}$$

上式等价于以下两式成立

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}},\quad \frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{z}$$

解得两个独立首次积分：

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=c_1,\quad 2\sqrt{y}-\ln z=c_2$$

作变换

$$\xi=\sqrt{x}-\sqrt{y},\ \ \eta=2\sqrt{y}-\ln z,\ \ \text{并取}\tau=z$$

原方程化为

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=0\Rightarrow u=g(\xi,\eta)$$

解得

$$u=g(\sqrt{x}-\sqrt{y},\,2\sqrt{y}-\ln z)$$

进一步, 对于含有n个自变量的一阶线性偏微分方程：

$$\sum_{j=1}^{n}b_j(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_j}=f(x_1,x_2,...x_n)$$

类似得可给出相应的特征线解法一般步骤为：

1.列出特征线方程： $\dfrac{dx_1}{b_1}=\dfrac{dx_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{dx_n}{b_n}$

2. 从以上特征方程求出n-1个彼此独立的首次积分：

$$\varphi_k(x_1,x_2...,x_n)=h_k,\ \ k=1,2,...,n-1$$

3. 作自变量替换：

$$\begin{cases}\xi_j=\varphi_j(x_1,x_2,...x_n), & (j=1,2,...,n-1)\\ \xi_n=\varphi_n(x_1,x_2,...x_n)\end{cases}$$

(其中$\varphi_n(x_1,x_2,...x_n)$是任取的与$\varphi_k(x_1,x_2,...x_n)$ $(k=1,2,...n-1)$独立的任意函数)

4. 利用新自变量$\xi_j(j=1,2,...,n)$ 代替$x_1,x_2,...,x_n$化简原方程。

最后，新的一阶线性偏微分方程不再含有对于自变量$\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-1}$ 的偏导数项, 而只含有对自变量ξ_n 的一阶偏导数项, 所以原一阶线性偏微分方程变成了一阶线性常微分方程的形式，就可以借助一阶线性常微分方程公式来求解了。

例1.3.4 求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+u+xy,\ (t>0,\ -\infty<x<+\infty,\ a\text{为常数}).\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x,y)\end{cases}$$

解：方程的特征线方程为

$$\frac{dt}{1}=-\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y},$$

解得两个独立的首次积分：

$$xe^t=c_1,\ ye^t=c_2$$

作变量替换

$$\xi=xe^t,\quad \eta=ye^t,\text{并取}\,\tau=t$$

方程化简为

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=u(\xi,\eta,\tau)+\xi\eta e^{-2\tau}$$

对上式利用一阶线性常微分方程的公式(积分时把τ看成变量，把ξ, η当作常数。

$$u=e^{\tau}\left[\int\xi\eta e^{-2\tau}\,.\,e^{-\tau}d\tau+g(\xi,\eta)\right]=-\frac{1}{3}\xi\eta e^{-2\tau}+g(\xi,\eta)e^{\tau}=-\frac{1}{3}xy+g(xe^t,ye^t)e^t$$

代入初始条件：

$$u\mid_{t=0}=-\frac{1}{3}xy+g(x,y)=\varphi(x,y)\Longrightarrow g(x,y)=\frac{1}{3}xy+\varphi(x,y)$$

最后得到定解问题

$$u=-\frac{1}{3}xy+g(xe^t,ye^t)e^t=-\frac{1}{3}xy+e^t\left(\frac{1}{3}xye^{2t}+\varphi(xe^t,xe^t)\right).$$

1.4 自由弦振动方程的通解以及达朗贝尔公式

自由弦振动方程是：

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\,(t > 0)$$

我们是否能求出它的通解？标准方法是利用下一节的二阶线性方程的特征线方法，但我们也可以采用以下方法：把这个二阶线性方程化为一阶线性方程组，然后用上一节的一阶线性的方法求解：

首先，自由弦振动

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\quad (t > 0)$$

可改写形式变为：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0.$$

令$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right)u = v$, 上式变为：$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)v = 0$, 因此自由弦振动方程可以等价于以下一阶线性偏微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + a\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, & (1.4.1.a) \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial u}{\partial x} = v & (1.4.1.b) \end{cases}$$

式(1.4.1.a)和(1.4.1.b)的特征线方程分别为：

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{1} = \dfrac{dx}{a} \Longrightarrow x - at = c_1 \\ \\ \dfrac{dt}{1} = \dfrac{dx}{-a} \Longrightarrow x + at = c_2 \end{cases}$$

因此可取变量替换

$$\xi = x - at,\ \ \eta = x + at$$

方程组(1.4)化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \\ -2a\,\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = v \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} = 0 \Longrightarrow u = f(\xi) + g(\eta) = f(x - at) + g(x + at)$$

于是我们有以下结论：自由弦振动方程 $\mathbf{u_{tt} = a^2 u_{xx}}\,(t > 0)$的通解为；

$$\mathbf{u = f(x - at) + g(x + at)}$$

有了自由弦振动方程的通解公式，我们就可以求解以下初值问题：

例1.4.1. **求解无限长的弦的自由振动初值问题**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ (t > 0, \ -\infty < x < +\infty) \\ u\mid_{t=0} = \varphi(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

解: 泛定方程为自由弦振动方程，其通解为：

$$u = f(x - at) + g(x + at), \ f, g \in C^2(\mathbf{R})$$

代入初值条件得到：

$$u\mid_{t=0} = f(x) + g(x) = \varphi(x), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = -af'(x) + ag'(x) = \psi(x). \tag{2}$$

对以上的(2)积分得到：

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)d\xi + c, \tag{3}$$

由式(1), (3)解得

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x) - \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)d\xi - c\Big],$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x) + \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)d\xi + c\Big].$$

从而解得自由弦振动初值问题的解的表示式(即**达朗贝尔公式**)：

$$u = \frac{1}{2}\big[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)\big] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi.$$

例1.4.2. 求解初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ \ (t > 0, \ -\infty < x < +\infty) \\ u\mid_{t=0} = x^2, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0} = 2x \end{cases}$$

解：此问题是无限长自由弦振动对应的齐次初值问题，可以用达朗贝尔公式来求解，对应达朗贝尔公式中参量$a = 2, \varphi(x) = x^2, \psi(x) = 2x$, 利用达朗贝尔公式，即：

$$u(t, x) = \frac{1}{2}\big[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)\big] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{2}\big[(x-2t)^2 + (x+2t)^2\big] + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} 2\xi d\xi$$

于是求得此初值问题的解：

$$u(t,x) = x^2 + 4t^2 + 2xt$$

例1.4.3 求解初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos x (t > 0, -\infty < x < +\infty), \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = 4x. \end{cases}$$

解题提示:这是一个弦振动方程的非齐次初值问题，我们可以先求出泛定方程一个特解，先把泛定方程齐次化，再利用达朗贝尔公式求出齐次问题的解，最后求出此初值问题的解。

解：泛定方程显然有特解：$u_1 = \cos x$, 作变换$u = v + u_1 = v + \cos x$, 这样v 满足齐次方程初值问题：

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, \ (t > 0, -\infty < x < +\infty), \\ v(0,x) = -\cos x, \ v_t(0,x) = 4x. \end{cases}$$

利用达朗贝尔公式：

$$v = \frac{1}{2}\left(-\cos(x+t) - \cos(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 4\xi d\xi = -\cos x \cos t + 4xt$$

最后我们得出原初值问题解：

$$u = v + u_1 = \cos x - \cos x \cos t + 4xt$$

例1.4.4 对于弦振动方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t > 0, \ -\infty < x < +\infty) \\ u\mid_{t=0} = \varphi(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

1)求证：如果$\varphi(x), \psi(x)$都是奇函数，则初值问题的解$u(t,x)$关于x为奇函数, 即$u(t,x) = -u(t,-x)$

2)求证：如果$\varphi(x), \psi(x)$都是偶函数，则初值问题的解$u(t,x)$关于x为偶函数。即$u(t,x) = u(t,-x)$

证明:根据达朗贝尔公式, 弦振动初值问题的解为：

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\big] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \tag{1}$$

因而

$$u(t,-x)=\frac{1}{2}\big[\varphi(-x-at)+\varphi(-x+at)\big]+\frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at}\psi(\xi)d\xi \tag{2}$$

当函数φ,ψ为奇函数时，

$$\varphi(-x-at)=-\varphi(x+at),\ \varphi(-x+at)=-\varphi(x-at) \tag{3}$$

另外有

$$\int_{-x-at}^{-x+at}\psi(\xi)d\xi=\int_{-x-at}^{-x+at}\left(-\psi(-\xi)\right)d\xi$$

令$-\xi=\eta$, 上式变为：

$$\int_{-x-at}^{-x+at}\left(-\psi(-\xi)\right)d\xi=\int_{x+at}^{x-at}\psi(\eta)d\eta=-\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi,$$

因此

$$\int_{-x-at}^{-x+at}\psi(\xi)d\xi=-\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi. \tag{4}$$

把(3), (4)代入(2), 并和(1)式比较，就可得出$u(t,-x)=-u(t,x)$, 这样结论1)就得到了证明，类似可证明结论2).

下面进一步讨论一些衍生性问题：

例1.4.5 古尔萨(Gousat)问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ u\mid_{x-at=0}=\varphi(x),\ u\mid_{x+at=0}=\psi(x),\\ \varphi(0)=\psi(0)\end{cases}$$

解：方程的通解为：

$$u=f(x-at)+g(x+at),$$

代入定解条件得到：

$$u\mid_{x-at=0}=f(0)+g(2x)=\varphi(x),$$

$$u\mid_{x+at=0}=f(2x)+g(0)=\psi(x),$$

作替换：$\xi=2x$, 则解得：

$$f(\xi)=\psi(\frac{\xi}{2})-g(0),\ \ g(\xi)=\varphi(\frac{\xi}{2})-f(0)$$

特别取$\xi=0$时可得到：

$$f(0)+g(0)=\varphi(0)$$

综上，故有

$$u=f(x-at)+g(x+at)=\varphi(\frac{x+at}{2})+\psi(\frac{x-at}{2})-\varphi(0)$$

半直线上的达朗贝尔公式：

考虑以下半无界弦的自由振动

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (t>0,\ x>0) & (1.4.2.a)\\ u(t,0)=0, & (1.4.2.b)\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0}=\psi(x) & (1.4.2.c)\end{cases}$$

分析: 由于$\varphi(x)$, $\psi(x)$仅仅在$x>0$有定义，所以不能直接使用达朗贝尔公式，必须要把初值的定义域延拓到全直线，由于$u(t,0)=0$, 这符合奇函数性质，所以我们可以尝试奇延拓，事实上，如果我们把$\varphi(x)$和$\psi(x)$分别延拓成定义在直线的奇函数$\Phi(x)$和$\Psi(x)$,则由达朗贝尔公式：

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\big[\Phi(x-at)+\Phi(x+at)\big]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi. \qquad (1.4.3)$$

另外，可直接验证在$x=0$点$u(t,x)$满足边界条件，即：

$$u(t,x)\mid_{x=0}=\frac{1}{2}\big[\Phi(-at)+\Phi(at)\big]+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\Psi(\xi)d\xi=0.$$

因此，我们把初值延拓后利用达朗贝尔公式求出的解$u(t,x)$限制在$x\geq 0$就是此半无界弦的自由振动定解问题(1.4.2)的解.

具体步骤如下:, 先补充定义$\varphi(0)=0=\psi(0)$,再取

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq 0\\ -\varphi(-x), & x<0\,.\end{cases}\qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\geq 0\\ -\psi(-x), & x<0\,.\end{cases}$$

再由达朗贝尔公式：

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\big[\Phi(x-at)+\Phi(x+at)\big]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi.$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\big[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\big]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, & t\leq\dfrac{x}{a}\,,\\ \dfrac{1}{2}\big[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)\big]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, & t>\dfrac{x}{a}\,.\end{cases}\qquad (1.4.3)$$

注 1.4.1 若以上半无界弦自由振动定解问题(1.4.2)中在$x=0$的边界条件改为：$\mathbf{u_x(t,0)=0}$, 这对应于偶函数性质，那么相应的延拓改为**偶延拓**。

例1.4.6 求解三维波动方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta_3 u, \quad (t>0,\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0) \\ u\mid_{t=0}=\varphi(r),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0}=\psi(r). \end{cases}$$

解：由初值条件的球对称性，可设$u=u(t,r)$, 这样

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(\frac{x}{r})^2+\frac{\partial u}{\partial r}(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3})$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(\frac{y}{r})^2+\frac{\partial u}{\partial r}(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3})$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(\frac{z}{r})^2+\frac{\partial u}{\partial r}(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3})$$

由于$\Delta_3 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, 泛定方程化为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

为了化简此方程，作未知函数替换$u=h(r)V(t,r)$, $h(r)$待定, 则

$$u_{tt}=hV_{tt},\ \ u_r=h_rV+hV_r,\ \ u_{rr}=h_{rr}V+2h_rV_r+hV_{rr}$$

代入得到：

$$hV_{tt}=a^2\left[h_{rr}V+2h_rV_r+hV_{rr}+\frac{2}{r}(h_rV+hV_r)\right]$$

我们欲使在此$V(t,r)$的方程中V和V_r 的项的系数全为0，即有

$$V_r\text{的系数}: 2h_r+\frac{2}{r}h=0,\ \ V\text{的系数}: h_{rr}+\frac{2}{r}h_r=0\,.$$

可取$h(r)=\dfrac{1}{r}$, 这样，$u=\dfrac{V}{r}$(或$V=ru$), 相应有：

$$V\mid_{t=0}=r\varphi(r),\ \ \frac{\partial V}{\partial t}\mid_{t=0}=r\psi(r),\ \ V\mid_{r=0}=ru\mid_{r=0}=0\,.$$

于是$V(t,r)$满足以下定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial r^2},\ \ (t>0, r>0) \\ V\mid_{r=0}=0, \\ V\mid_{t=0}=r\varphi(r), \dfrac{\partial V}{\partial t}\mid_{t=0}=r\psi(r)\,. \end{cases}$$

由于此定解问题符合以上的半无界弦的自由振动定解问题模型(注意$r>0$),依条件可采用奇延拓，由已推出的公式(1.4.3)得到

$$V(t,r)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Big[(r+at)\varphi(r+at)+(r-at)\varphi(r-at)\Big]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{r-at}^{r+at}\xi\psi(\xi)\,d\xi, & t\le\dfrac{r}{a}\\ \dfrac{1}{2}\Big[(r+at)\varphi(r+at)-(at-r)\varphi(at-r)\Big]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-r}^{r+at}\xi\,\psi(\xi)d\xi\,. & t>\dfrac{r}{a}\end{cases}$$

最后由变换关系$u=\dfrac{V}{r}$, 解得原定解问题的解：

$$u(t,r)=\begin{cases}\dfrac{1}{2r}\Big[(r+at)\varphi(r+at)+(r-at)\varphi(r-at)\Big]+\dfrac{1}{2ar}\displaystyle\int_{r-at}^{r+at}\xi\psi(\xi)\,d\xi, & t\le\dfrac{r}{a}\\ \dfrac{1}{2r}\Big[(r+at)\varphi(r+at)-(at-r)\varphi(at-r)\Big]+\dfrac{1}{2ar}\displaystyle\int_{at-r}^{r+at}\xi\,\psi(\xi)d\xi\,. & t>\dfrac{r}{a}\,.\end{cases}$$

例1.4.7求解半无界弦振动问题：

$$\begin{cases}u_{tt}=4u_{xx}, \quad (t>0,\ x>0)\\ u(t,0)=0,\\ u(0,x)=2x,\ u_t(0,x)=1-\cos x.\end{cases}$$

解题提示：由于在$x=0$处的边界条件符合奇函数性质，因此对半直线上初值条件进行奇延拓，利用求解弦振动初值的达朗贝尔公式解决。

解：对初值函数作奇延拓，即取初值

$$\Phi(x)=2x\ (-\infty<x<+\infty)\,,\qquad \Psi(x)=\begin{cases}1-\cos x,\ (x>0)\\ \cos x-1\,(x<0)\end{cases}$$

这样考虑延拓后的定解问题：

$$\begin{cases}U_{tt}=4U_{xx}\quad (t>0,\ -\infty<x<+\infty)\\ U(0,x)=\Phi(x),\ U_t(0,x)=\Psi(x)\end{cases}$$

由于$\Phi(x),\Psi(x)$是奇函数，这样解$U(t,x)$就是关于x的奇函数，自然满足$U(t,0)=0$,而初值在$x>0$时也满足原问题定解条件,因此,求出$U(t,x)$后,把x限制在$x>0$ 就是所求解定解问题的解$u(t,x)$,根据达朗贝尔公式,

$$U(t,x)=\frac{1}{2}[\Phi(x-2t)+\Phi(x+2t)]+\frac{1}{2\times2}\int_{x-2t}^{x+2t}\Psi(\xi)d\xi \qquad (1)$$

相应地，$x>0$时，$u(t,x)=U(t,x)$,即定解问题解为

$$u(t,x)=\frac{1}{2}[\Phi(x-2t)+\Phi(x+2t)]+\frac{1}{2\times2}\int_{x-2t}^{x+2t}\Psi(\xi)d\xi \qquad (2)$$

其中$x \ge 2t$时

$$\int_{x-2t}^{x+2t} \Psi(\xi)d\xi = \int_{x-2t}^{x+2t}(1-\cos\xi)d\xi = 4t - 2\sin 2t\cos x,\ (x \ge 2t,\ x>0)$$

$x < 2t$时，

$$\int_{x-2t}^{x+2t} \Psi(\xi)d\xi = \int_{x-2t}^{0}(\cos\xi - 1)d\xi + \int_{0}^{x+2t}(1-\cos\xi)d\xi = 2x - 2\sin x\cos 2t,\quad (x<2t, x<0)$$

而

$$\Phi(x-2t) + \Phi(x+2t) = 2(x-2t) + 2(x+2t) = 4x$$

以上的3个结论代入(2)式并化简后，就得到定解问题的解

$$u(t,x) = \begin{cases} 2x + t - \dfrac{1}{2}\cos x\sin 2t,\ (t, x>0\ x \ge 2t) \\ \dfrac{5}{2}x - \dfrac{1}{2}\sin x\cos 2t.\ (t, x>0,\ x<2t) \end{cases}$$

例1.4.8 已知半无界弦振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} \quad (t>0,\ x>0) \\ u_x(t,0) = 0, \\ u(0,x) = x^3,\ u_t(0,x) = \cos x \end{cases}$$

解题提示：由于在$x=0$处的边界条件$u_x=0$符合偶函数性质，因此对半直线上初值条件进行偶延拓，利用求解弦振动初值的达朗贝尔公式解决。

解：可对初值作偶延拓，即取初值

$$\Phi(x) = \begin{cases} x^3,\ (x \ge 0) \\ -x^3\ (x<0) \end{cases} \qquad \Psi(x) = \cos x,\ (-\infty < x < +\infty).$$

考虑延拓后的定解问题：

$$\begin{cases} U_{tt} = 4U_{xx} \quad (t>0,\ -\infty<x<+\infty) \\ U(0,x) = \Phi(x),\ U_t(0,x) = \Psi(x) \end{cases}$$

根据达朗贝尔公式,

$$U(t,x) = \frac{1}{2}[\Phi(x-2t) + \Phi(x+2t)] + \frac{1}{2\times 2}\int_{x-2t}^{x+2t}\Psi(\xi)d\xi$$

相应地，$x>0$时，$u(t,x)=U(t,x)$,这样解出此定解问题的解：

$$u(t,x)=\begin{cases} x^3+12xt^2+\dfrac{1}{2}\cos x\sin 2t, & (t,x>0\; x\geq 2t) \\ 8t^3+6x^2t+\dfrac{1}{2}\cos x\sin 2t. & (t,x>0,\; x<2t) \end{cases}$$

1.5 两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类和标准型

含有两个自变量的二阶线性偏微分方程是：

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0 \qquad (1.5.1)$$

其中，a_{11},a_{12},a_{22}不同时为0. 而函数$a_{i,j},b_j\ (i,j=1,2)$以及c的自变量为x,y. 取变量替换$\xi=\varphi(x,y),\ \eta=\psi(x,y)$, 经过计算，此方程变为以下形式：

$$A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2A_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+A_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+B_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+B_2\frac{\partial u}{\partial \eta}+Cu=0$$

其中

$$A_{11}=a_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2,$$

$$A_{12}=a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+a_{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+a_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$A_{22}=a_{11}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2.$$

其它系数也可用$\varphi,\ \psi$或它们的导数表示出。如果以$\xi,\ \eta$为自变量的新方程中的二阶导数的系数A_{11},A_{12},A_{22}有一个或者两个变为0，这样方程就化简了。首先观察到使$A_{11}=0$ 的方程和使$A_{22}=0$的方程形式是一致的，即为以下方程形式：

$$a_{11}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0 \qquad (1.5.2)$$

所以，如果我们能求出以上方程(1.5.2)的一个解$z=z(x,y)$,就能使A_{11}, A_{22}中的某个变为0，如果能求出方程(1.5.2)的两个独立解，则A_{11} 和A_{22}同时变为0, 但怎样求 (1.5.2)的解$z=z(x,y)$ 呢？为此，我们考虑$z(x,y)$ 的等值线$C:z(x,y)=h$, (或称C为特征线), 在C 上, 两边取微分得到：

$$dz=dh=0,\quad\Longrightarrow\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=0\Longrightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} \qquad (1.5.3)$$

上式 (1.5.3)的结论代入方程 (1.5.2) :

$$a_{11}\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^2+2a_{12}(-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx})\frac{\partial z}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0$$

此方程两边约掉$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$的公因式, 整理得**常微分方程**:

$$a_{11}(dy)^2-2a_{12}dxdy+a_{22}(dx)^2=0. \tag{1.5.4}$$

此方程(1.5.4)也称为二阶线性偏微分方程(1.5.1)的**特征方程**，由以上推导过程有:

定理1.5.1 如$\varphi(x,y)=h$是特征方程(1.5.4)的隐式解(或首次积分)，则$z=\varphi(x,y)$是偏微分方程(1.5.2) 的解。

特征方程(1.5.4)形式可改写为

$$a_{11}(\frac{dy}{dx})^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0. \tag{1.5.5}$$

因此特征方程可以看成是以$\frac{dy}{dx}$为变元的一元二次代数方程，其判别式

$$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$$

根据Δ的不同取值，可以对二阶线性偏微分方程(1.5.1)进行如下分类:

(1) $\Delta>0$,这时二阶线性偏微方程(1.5.1)分类为**双曲型**，相应的特征方程分解成两个一阶常微分方程，不妨设$a_{11}\neq 0$, 此时，有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{\Delta}}{a_{11}}\ \text{和}\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$

对应两族**实**特征线:

$$\varphi(x,y)=h_1,\ \ \psi(x,y)=h_2$$

作自变量替换

$$\xi=\varphi(x,y),\ \ \ \eta=\psi(x,y)$$

原线性偏微分方程(1.5.1)以ξ,η自变量时，$A_{11}=A_{22}=0$, 即方程标准型:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+C_1u_\xi+C_2u_\eta+C_3u=0$$

其中C_1,C_2 以及C_3是ξ,η的函数。

(2) $\Delta=0$, 这时方程分类为**抛物型**，特征方程对应唯一的一个一阶常微分方程，不妨设$a_{11}\neq 0$, 此时，有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}}{a_{11}}$$

对应唯一特征线族：

$$\varphi(x,y)=h$$

作自变量替换

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y)$$

其中$\psi(x,y)$可选与函数$\varphi(x,y)$相互独立的任意函数。利用新自变量ξ,η代替原二阶线性偏微分方程的自变量x,y, 则$A_{11}=0$. 另外由

$$\varphi(x,y)=h\longrightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0\ \text{和}\ \frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}}{a_{11}}$$

推出

$$a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

结合条件

$$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0\implies a_{12}^2=a_{11}a_{22},$$

A_{12}改写为：

$$A_{12}=\frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(a_{11}\frac{\partial\psi}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0$$

这样$A_{11}=0, A_{12}=0$, 即标准型为以下形式：

$$\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+D_1u_\xi+D_2u_\eta+D_3u=0$$

其中D_1,D_2 以及D_3是ξ,η的函数。

(3) $\Delta<0$,这时方程分类为**椭圆型**，相应的特征方程复数域分解成两个一阶常微分方程，不妨设$a_{11}\neq 0$, 相应的一阶方程为：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+i\sqrt{-\Delta}}{a_{11}}\ \text{和}\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-i\sqrt{-\Delta}}{a_{11}}$$

对应两族成共扼形式的隐式解：

$$\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=h_1,\quad \varphi(x,y)-i\psi(x,y)=h_2$$

作自变量替换

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y)$$

则原二阶线性偏微分方程以ξ,η 为新自变量必然化为以下形式，即椭圆型的标准型：

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+E_1u_\xi+E_2u_\eta+E_3u=0$$

其中E_1,E_2 以及E_3是ξ,η的函数。

例1.5.1 利用二阶线性的特征线法求自由弦振动方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ (t>0,\ -\infty < x < +\infty)$$

的通解。

解：首先列出特征线方程为：

$$(dx)^2 = a^2(dt)^2,$$

于是得到两个首次积分：

$$x - at = c_1,\ x + at = c_2,$$

由这两个首次积分,我们得到自变量变换：

$$\xi = x - at,\ \eta = x + at$$

方程化为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

于是得到通解：

$$u = f(\xi) + g(\eta) = f(x - at) + g(x + at).$$

例1.5.2求方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

的通解。

解：$\Delta = (xy)^2 - x^2y^2 = 0$, 方程为抛物型，特征线方程为：

$$x^2(dy)^2 + 2xydxdy + y^2(dx)^2 = (xdy + ydx)^2 = 0,$$

即：

$$xdy + ydx = 0 \Longrightarrow \text{唯一首次积分} xy = c$$

作自变量变换：

$$\xi = xy,\ \eta = y$$

则经过复合求导得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial \xi},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

代入原方程化为：

$$\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}=0\,.$$

此方程有两个基本解：$u=1$和$u=\ln\eta$, 于是得到此方程的通解：

$$u=\varphi(\xi)\ln\eta+\psi(\xi)=\varphi(xy)\ln y+\psi(xy)$$

例1.5.3 求特里科米方程

$$yu_{xx}+u_{yy}=0,\quad (y\neq 0)$$

的标准形。

解：$\Delta=0^2-y=-y$, 特征方程为：

$$y(dy)^2+(dx)^2=0$$

当$y<0$, 这时$\Delta>0$, 方程为双曲型，特征方程分解为：

$$(dx+\sqrt{-y}dy)(dx-\sqrt{-y}dy)=0,$$

解得两族特征曲线：

$$x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=c_1,\;\; x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=c_2$$

作变量替换：

$$\xi=x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}},\;\; \eta=x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}$$

得到方程标准型：

$$u_{\xi\eta}+\frac{1}{6(\xi-\eta)}(u_{\eta-}u_{\xi})=0$$

当$y>0$, 这时$\Delta<0$, 方程为椭圆型，特征方程分解为：

$$(dx+i\sqrt{y}dy)(dx-i\sqrt{y}dy)=0,$$

解得两族特征曲线：

$$x+i\frac{2}{3}(y)^{\frac{3}{2}}=c_1,\;\; x-i\frac{2}{3}(y)^{\frac{3}{2}}=c_2$$

作变量替换：

$$\xi=x,\;\; \eta=\frac{2}{3}(y)^{\frac{3}{2}}$$

代入原方程得到标准型：

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\eta}u_{\eta}=0$$

例1.5.4 求方程

$$u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=0$$

的通解，并求满足$u(x,0)=3x^2, u_y(x,0)=0$的特解u.

解:方程的特征线方程为：

$$dy^2-2dxdy-3dx^2=0$$

解得两族特征线：

$$x+y=c_1, y-3x=c_2$$

作变量替换

$$\xi=x+y,\ \eta=y-3x,$$

则通过复合求导计算得到

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}-6u_{\xi\eta}+9u_{\eta\eta},\ u_{xy}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}-3u_{\eta\eta},\ u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}.$$

代入原方程后：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0\Rightarrow u=f(\xi)+g(\eta)$$

也就是方程通解

$$u=f(x+y)+g(y-3x)$$

再由定解条件：

$$u(x,0)=f(x)+g(-3x)=3x^2,$$

$$u_y(x,0)=f'(x)+g'(-3x)=0\Rightarrow f(x)-\frac{1}{3}g(-3x)=c\,(c\text{为任意常数})$$

解得在定解条件下：

$$f(\xi)=\frac{3}{4}\xi^2+\frac{3}{4}c,\ \ g(\eta)=\frac{1}{4}\eta^2-\frac{3}{4}c.$$

这样求得满足定解条件解

$$u=\frac{3}{4}(x+y)^2+\frac{3}{4}c+\frac{1}{4}(y-3x)^2-\frac{3}{4}c=3x^2+y^2$$

1.6 叠加原理，齐次化原理

L是 **二阶线性微分算子**表示为：

$$L=\sum_{k,l=1}^{n}a_{k,l}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}+\sum_{l=1}^{m}b_l\frac{\partial}{\partial x_l}+c\,.$$

这样，含有n 个自变量的二阶线性微分方程可以表示为：

$$Lu(\vec{x})=f(\vec{x}),\quad \vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\tag{1.6.1}$$

例如:

1. 取$n=2, x_1=t, x_2=x,$ 并取$a_{11}=1,\ a_{22}=-a^2$,而L中其它系数全取为0, 这时，$L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, 方程具体化为：

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x) \qquad \text{(弦振动方程)}$$

2. 取$n=2, x_1=t, x_2=x,$ 并取$a_{22}=-a^2,\ b_1=1$,而L中其它系数全取为0, 这时，$L=\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$,方程具体化为：

$$u_t=a^2u_{xx}+f(t,x) \qquad \text{(一维热传导方程)}$$

3. 取$n=3, x_1=x, x_2=y, x_3=z,$ 并取$a_{11}=a_{22}=a_{33}=1,\ \ f=0$, 并且$L$中其它系数全取为0, 这时，$L=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 方程具体化为：

$$\Delta_3 u=0. \qquad (Laplace\text{方程})$$

直接验证，二阶线性微分算子有以下线性性质：即取定义域内任意两个函数u_1，u_2 有

$$L[\lambda_1u_1+\lambda_2u_2]=\lambda_1L[u_1]+\lambda_2L[u_2].$$

线性微分算子可进一步推广到**线性积分算子**，如$Fourier$变换：

$$F[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx\,.$$

显然算子F具有线性性质：$F[\lambda_1f_1+\lambda_2f_2]=\lambda_1F[f_1]+\lambda_2F[f_2]$.

一. 叠加原理:

(1) 叠加原理一 设u_i满足线性方程:

$$L\,u_i=f_i,\ (i=1,2,3...n)$$

那么, 它们的线性组合$u=\sum\limits_{i=1}^{n}c_iu_i$满足方程:

$$L\,u=\sum_{i=1}^{n}c_i\,f_i,\ (i=1,2,3...n)$$

(2) 叠加原理二 设u_i满足线性方程系列:

$$L\,u_i=f_i,\ (i=1,2,3...)$$

那么, 级数$u=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}c_iu_i$满足方程:

$$L\,u=\sum_{i=1}^{+\infty}c_i\,f_i,\ (i=1,2,3......)$$

（其中级数$u=\sum\limits_{i=1}^{+\infty} c_iu_i$ 收敛，并且满足算子L中出现的偏导数与求和记号交换次序所需要的条件）

(3)叠加原理三 ：设$u(M,M_0)$满足线性方程(或线性定解条件):

$$L\,u=f(M,M_0)$$

其中M表示自变量组, M_0表示参数组.又积分$U(M)=\displaystyle\int_v u(M,M_0)dM_0$收敛，那么$U(M)$满足：

$$LU(M)=\int_v f(M,M_0)dM_0$$

叠加原理一的证明： $L\,u=L\left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_iu_i\right)$

$$=\sum_{i=1}^{n} c_iLu_i=\sum_{i=1}^{n} c_i\,f_i,\ (i=1,2,3....,n)$$

利用叠加原理1可以得出以下结论：

推论1.6.1对于线性偏微分方程

$$Lu(\vec{x})=f(\vec{x}),\quad \vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$$

其非齐次方程通解等于齐次方程通解加非齐次方程的一个特解。

证明:设u_1是非齐次特解，而V是齐次方程通解，即

$$Lu_1(\vec{x})=f(\vec{x}),\quad LV(\vec{x})=0$$

由叠加原理1, $u=u_1+V$是原非齐次方程的解.(在使用叠加原理1时，把V看成u_2, 把f 看成f_1, 把0看成f_2)

设u是非齐次方程的任意一个解，记$v_1=u-u_1$,则

$$Lv_1=L(u-u_1)=Lu-Lu_1=f-f=0$$

所以，v_1是齐次方程的解。这就证明我们的结论。

例1.6.1 求解狄利克雷(Dirichlet)问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=1,\\ u\mid_{x^2+y^2=1}=x^2\,.\end{cases}$$

解： 易见$u_1=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$是泛定方程的特解，作变换$u=V+u_1$, 则V满足齐次狄利克雷边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0,\\ V\mid_{x^2+y^2=1}=x^2-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

而此齐次狄利克雷边值问题我们将在第二章将给出标准解法。

二 齐次化原理(冲量原理).

我们先说明弦振动方程的齐次化原理：

定理1.6.1 对于弦的纯受迫弦振动问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x),\ \ (t>0,-\infty<x<+\infty) & (1.6.2.a)\\ u\mid_{t=0}=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0}=0. & (1.6.2.b)\end{cases}$$

则其解

$$u(t,x)=\int_0^t w(t,x,\tau)d\tau, \tag{1.6.3}$$

而$w(t,x,\tau)$满足齐次化方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ (t>\tau,-\infty<x<+\infty) & (1.6.4.a)\\ w\mid_{t=\tau}=0,\quad \dfrac{\partial w}{\partial t}\mid_{t=\tau}=f(\tau,x). & (1.6.4.b)\end{cases}$$

证明:$u\mid_{t=0}=\displaystyle\int_0^0 w(t,x,\tau)d\tau=0$, 而

$$\frac{\partial u}{\partial t}=w(t,x,\tau)\mid_{\tau=t}+\int_0^t\frac{\partial w(t,x,\tau)}{\partial t}d\tau=\int_0^t\frac{\partial w(t,x,\tau)}{\partial t}d\tau,$$

因此$\dfrac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0}=\displaystyle\int_0^0\frac{\partial w(t,x,\tau)}{\partial t}d\tau=0$. 进一步

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial w(t,x,\tau)}{\partial t}\mid_{\tau=t}+\int_0^t\frac{\partial^2 w(t,x,\tau)}{\partial t^2}d\tau=f(t,x)+a^2\int_0^t\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}d\tau$$

$$=f(t,x)+a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t w(t,x,\tau)d\tau=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x)$$

这就证明了结论。

由以上定理，只要求出问题(1.6.4)的解$w(t,x,\tau)$, 相应的u就求出了。为此作自变量平移变换：$t_1=t-\tau$, 问题(1.6.4)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial {t_1}^2}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ \ (t_1>0,-\infty<x<+\infty) & (1.6.5.a)\\ w\mid_{t_1=0}=0,\ \dfrac{\partial w}{\partial t_1}\mid_{t_1=0}=f(\tau,x). & (1.6.5b)\end{cases}$$

由达朗贝尔公式：

$$w(t_1,x,\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-at_1}^{x+at_1}f(\tau,\xi)d\xi=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi$$

于是

$$u=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi$$

以上解决了弦的纯受迫振动问题，下面进一步求解**弦振动非齐次方程初值问题**:

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x), \ \ (t>0,-\infty<x<+\infty) & (1.6.6.a)\\ u(0,x)=\varphi(x),\ u_t(0,x)=\psi(x) & (1.6.6.b)\end{cases}$$

为此利用叠加原理可知

$$u=u_1+u_2$$

其中u_1满足原问题对应的齐次问题：

$$\begin{cases}u_{1tt}=a^2u_{1xx}, \ \ (t>0,-\infty<x<+\infty)\\ u_1(0,x)=\varphi(x),\ u_{1t}(0,x)=\psi(x)\end{cases} \qquad (1.6.7)$$

而u_2满足相应的非齐次但初值为0的纯受迫振动问题：

$$\begin{cases}u_{2tt}=a^2u_{2xx}+f(t,x), \ \ (t>0,-\infty<x<+\infty)\\ u_2(0,x)=0,\ \ u_{2t}(0,x)=0\,.\end{cases} \qquad (1.6.8)$$

齐次问题(1.6.7)的解u_1可由达朗贝尔公式解出, 即

$$u_1=\frac{1}{2}\big[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\big]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

问题(1.6.8)的解u_2以上已经用齐次化原理求出，即：

$$u_2 = \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi$$

综上，就得出求解此定解问题的解$u(t,x)$的公式：

$$\begin{aligned} u(t,x) &= u_1(t,x) + u_2(t,x) \\ &= \frac{1}{2}\big[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\big] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \\ &+ \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi \end{aligned}$$

例 1.6.2 求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + x + 3t, \ \ (t>0, -\infty < x < +\infty) \\ u(0,x) = x^2, \ u_t(0,x) = sinx \end{cases}$$

等价于本例中参量具体取为:

$$a=2, \ f(t,x) = x+3t, \ \varphi(x) = x^2, \ \psi(x) = \sin x.$$

因此，直接使用以上得到的一般解公式得到：

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[(x-2t)^2 + (x+2t)\right]^2 + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\sin\xi d\xi + \frac{1}{4}\int_0^t d\tau\int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}(\xi+3\tau)d\xi$$

化简得到：

$$u(t,x) = x^2 + 4t^2 + \frac{1}{2}\sin x\sin 2t + \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{2}t^3$$

齐次化原理的物理解释：

我们任取一个瞬间时间微元$[\tau, \tau+d\tau]$, 由力的独立作用原理，纯受迫振动引起的位移$u(t,x)$可以看成前后相继的瞬间外力作用冲量引起的位移$H(t,x,\tau,d\tau)$的叠加。并假定此瞬时弦上外力恒定为$G(\tau,x)$, 并记由此瞬间外力作用而产生的速度为v_τ, 由动量定理，得到：

$$mv_\tau = G(\tau,x)d\tau \Longrightarrow v_\tau = \frac{G(\tau,x)}{m}d\tau = f(\tau,x)d\tau$$

又由于此瞬间外力在$t=\tau$才开始作用，所以引起的独立位移在$t=\tau$时候为0 这样，此瞬间外力作用冲量引起的位移$H(t,x,\tau,d\tau)$满足方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \ \ (t>\tau, -\infty<x<+\infty) \\ H\mid_{t=\tau} = 0, \quad \dfrac{\partial H}{\partial t}\mid_{t=\tau} = f(\tau,x)\,d\tau. \end{cases} \tag{1.6.9}$$

比较问题(1.6.4)和(1.6.9), 显然有：$H(t,x,\tau,d\tau)=w(t,x,\tau)\,d\tau$,, 把瞬间外力作用冲量引起的位移$H(t,x,\tau,d\tau)$的叠加, 并令$\Delta\tau\to 0$我们有

$$\mathbf{u}(\mathbf{t},\mathbf{x})=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}H(t,x,\tau_k,d\tau)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}w(t,x,\tau)\,d\tau=\int_0^t\mathbf{w}(\mathbf{t},\mathbf{x},\tau)\mathbf{d}\tau\,.$$

一般线性发展方程初值问题的齐次化原理结论：

对于非齐次初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}=Lu+f(t,\vec{x})\quad(t>0,\ \vec{x}\in R^n)\\ u\mid_{t=0}=\dfrac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0}=...=\dfrac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}\mid_{t=0}=0\end{cases}$$

其解

$$u(t,x)=\int_0^t w(t,x,\tau)d\tau$$

而$w(t,x,\tau)$满足齐次化方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^m w}{\partial t^m}=Lw\quad(t>\tau>0,\ \vec{x}\in R^n)\\ w\mid_{t=\tau}=\dfrac{\partial w}{\partial t}\mid_{t=\tau}=...=\dfrac{\partial^{m-2}w}{\partial t^{m-2}}\mid_{t=\tau}=0\\ \dfrac{\partial^{m-1}w}{\partial t^{m-1}}\mid_{t=\tau}=f(\tau,x)\end{cases}$$

通过叠加原理和齐次化原理的学习，可初步掌握求解非齐次问题的思路:

由于许多线性方程的非齐次问题不容易直接解决，但相应的齐次化问题要容易解决，所以把非齐次方程化为齐次方程来求解，这是求解非齐次方程的一个重要思路，经过本节的学习，我们可以学到求解非齐次问题的两个常用思路：

(1)根据叠加原理，非齐次方程的通解u等于齐次方程通解v加上非齐次方程的特解u_1。所以可以通过观察等简单手段得出非齐次方程特解，然后就能把非齐次方程齐次化，这一方法叫**特解法**

(2)利用**齐次化原理**(即冲量原理)，这一原理不仅适用于本章出现的非齐次线性发展方程的初值问题，将来还能推广用于解决非齐次混合问题。

其它一些齐次化原理应用的例子:

1) 对于以下**一阶线性非齐次定解问题：**

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=f(t,x),\ (t>0,-\infty<x<+\infty,\ a\neq 0\text{为常数})\\ u\mid_{t=0}=0.\end{cases}$$

$$u(t,x)=\int_0^t w(t,x,\tau)d\tau,$$

而$w(t,x,\tau)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}+a\dfrac{\partial w}{\partial x}+w=0,\ (t>\tau,-\infty<x<+\infty,\ a\neq 0\text{为常数})\\ u\mid_{t=\tau}=f(\tau,x).\end{cases}$$

2) 对于**任意初值非齐次的一维热传导方程初值问题**:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x),\ (t>0,-\infty<x<+\infty,\ a>0\text{为常数})\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

先利用叠加原理，把以上问题分解成$\mathbf{u}=\mathbf{u_1}+\mathbf{u_2}$, 其中$u_1$满足相应的齐次方程(但初值任意):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},\ (t>0,-\infty<x<+\infty,\ a>0\text{为常数})\\ u_1\mid_{t=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

而u_2满足非齐次方程，但初值为0：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_2}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+f(t,x),\ (t>0,-\infty<x<+\infty,\ a>0\text{为常数})\\ u_2\mid_{t=0}=0.\end{cases}$$

我们将在第四章中利用Fourier变换求解出u_1满足的齐次热传导问题，u_2可用齐次化原理求解, 即

$$u_2(t,x)=\int_0^t w(t,x,\tau)d\tau,$$

其中$w(t,x,\tau)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ (t>\tau,-\infty<x<+\infty,\ a>0\text{为常数})\\ w\mid_{t=\tau}=f(\tau,x).\end{cases}$$

利用$t_1=t-\tau$的代换，以上w的定解问题就化为了已解决的齐次定解问题形式。

第一章习题课

第1题(p45.10) 有一个长,宽,高分别为a,b,c的长方形金属槽，槽内无自由电荷分布，底面与四侧接地，顶盖为非金属板与四侧壁绝缘，其电位已知为$\varphi(x,y)$

(1)求此金属槽电位满足的定解问题。

(2)若把槽改为无限长$(-\infty < y < +\infty,)$, 两侧及底面接地，顶盖电位为常数u_0, 写出槽内电位分布满足的定解问题

解：1)在空间建立直角坐标系，并不妨假设金属槽底面在XOY面内，由于槽内无自由电荷分布，所以电场分布满足齐次$Laplace$方程；

$$\Delta_3 u = 0, \quad (0 < x < a,\, 0 < y < b,\, 0 < z < c,\,)$$

由于底面与四侧接地，因此

$$u\mid_{x=0} = u\mid_{x=a} = u\mid_{y=0} = u\mid_{y=b} = 0, \quad u\mid_{z=0} = 0$$

而顶盖电位为$u\mid_{z=c} = \varphi(x,y)$.综上，电位$u$满足边值问题：

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \quad (0 < x < a,\, 0 < y < b,\, 0 < z < c,\,) \\ u\mid_{x=0} = u\mid_{x=a} = u\mid_{y=0} = u\mid_{y=b} = 0 \\ u\mid_{z=0} = 0,\; u\mid_{z=c} = \varphi(x,y). \end{cases}$$

2)若把槽改为无限长$(-\infty < y < +\infty,)$, 则这时$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 因此方程约束为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

依条件，顶盖电位调整为：$u\mid_{z=c} = u_0$, 则u满足定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (0 < x < a,\, 0 < z < c,\ ) \\ u\mid_{x=0} = u\mid_{x=a} = 0 \\ u\mid_{z=0} = 0,\; u\mid_{z=c} = b. \end{cases}$$

第2题 求解定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{2} x^2 y, \\ u(x,0) = x^2, u(0,y) = y^2. \end{cases}$$

解：直接积分可得到泛定方程特解：$u_1 = \frac{1}{12}x^3y^2$, 令$u = v + u_1$, 则v满足对应的齐次方程：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

齐次方程通解为$v = f(x) + g(y)$,这样

$$u = v + u_1 = f(x) + g(y) + \frac{1}{12}x^3y^2.$$

再由定解条件$u(x,0) = f(x) + g(0) = x^2, u(0,y) = f(0) + g(y) = y^2$, 得到

$$f(x) = x^2 - g(0), \quad g(y) = y^2 - f(0), \quad f(0) + g(0) = 0,$$

最后我们得到此定解问题的解：

$$u(x,y) = f(x) + g(y) + \frac{1}{12}x^3y^2$$
$$= x^2 + y^2 + \frac{1}{12}x^3y^2$$

第3题 (p45 4. (1)) 求方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{2}{y}\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

的通解。

解题提示：这是个二阶线性偏微分方程，但我们注意到把$\frac{\partial u}{\partial x}$当成一个新的变量，这样此方程可以降阶为一阶线性微分方程,从而求出通解。

解: 令$H = \frac{\partial u}{\partial x}$, 原方程化为：

$$\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{2}{y}H = 2x,$$

利用一阶线性常微分方程求解公式(积分过程中把x当成常数), 解得：

$$H = e^{-\int \frac{2}{y}dy}\left(\int e^{\int \frac{2}{y}dy} 2x\,dy + f(x)\right) = \frac{2xy}{3} + \frac{f(x)}{y^2},$$

再积分得到原方程通解：

$$u = \frac{x^2y}{3} + \frac{f(x)}{y^2} + g(y),\ \text{其中}f(x), g(y)\text{为一次可微函数。}$$

第4题 (p45 12 (2)) 求通解：

$$yu_x - xu_y = x^2 - y^2$$

解：作变换：$u = V - xy$ 方程变为：

$$yV_x - xV_y = 0$$

列出特征线方程：

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Longrightarrow xdx + ydy = 0.$$

解得首次积分

$$x^2 + y^2 = c$$

作自变量变换：$\xi = x^2 + y^2,\ \eta = y$, 方程化为：

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \Longrightarrow V = f(\xi) = f(x^2 + y^2)\,.$$

所以方程通解为

$$u = f(x^2 + y^2) - xy, \quad f \in C^1(R)$$

P45 12 (1)　求以下一阶线性方程通解：

$$(y+z)u_x + (z+x)u_y + (x+y)u_z = 0$$

解：此一阶线性方程的特征线方程是：

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y} \tag{1}$$

由上式利用合分比定理得到:

$$\frac{dx - dy}{y - x} = \frac{dy - dz}{z - y}$$

相应得到一个首次积分：

$$\frac{x-y}{y-z} = C_1 \tag{2}$$

类似地，由(1)式还可以得到:

$$\frac{dx + dy + dz}{2(x+y+z)} = \frac{dx - dy}{y - x}$$

积分得到另外一个独立的首次积分

$$(x-y)^2(x+y+z) = c_2 \tag{3}$$

因此方程一般解为

$$u = f\left(\frac{x-y}{y-z}, (x-y)^2(x+y+z)\right), \quad f \in C^1(R)$$

第5题 (p45 12 (3)) 求通解：

$$(x-y)u_{xy}-u_x+u_y=0$$

解：作变换$u=\frac{V}{x-y}$,则

$$u_x=V_x(x-y)^{-1}-V(x-y)^{-2},\ \ u_y=V_y(x-y)^{-1}+V(x-y)^{-2},$$

$$u_{xy}=V_{xy}(x-y)^{-1}+V_x(x-y)^{-2}-V_y(x-y)^{-2}-2V(x-y)^{-3}$$

代入原方程得到：

$$V_{xy}=0\Longrightarrow V=f(x)+g(y)$$

这样

$$u=\frac{f(x)+g(y)}{x-y}.$$

第6题 求解初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}=f(t,x),\ (t>0,-\infty<x<+\infty,\ a\neq 0\text{为常数})\\ u\ |_{t=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

解法1：由叠加原理:$u=u_1+u_2$, 其中u_1满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+a\dfrac{\partial u_1}{\partial x}=0,\ (t>0,-\infty<x<+\infty,\ a\neq 0\text{为常数})\\ u_1\ |_{t=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

而u_2满足；

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+a\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=f(t,x),\ (t>0,-\infty<x<+\infty,\ a\neq 0\text{为常数})\\ u_2\ |_{t=0}=0.\end{cases}$$

为求解u_1,作自变量替换：

$$\xi=x-at,\ \eta=t$$

u_1满足方程化为：

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta}=0$$

解得

$$u_1=f(\xi)=f(x-at)$$

再利用初值条件$u_1\ |_{t=0}=f(x)=\varphi(x)$,得

$$u_1=\varphi(x-at)$$

为求解u_2,我们先使用齐次化原理(冲量原理),取$W(t,x,\tau)$满足：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t} + a\dfrac{\partial W}{\partial x} = 0, \ (t > \tau, -\infty < x < +\infty, \ a \neq 0\text{为常数}) \\ W \mid_{t=\tau} = f(\tau, x). \end{cases}$$

则

$$u_2 = \int_0^t W(t,x,\tau) d\tau$$

作自变量替换$t_1 = t - \tau$, 则W满足齐次问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t_1} + a\dfrac{\partial W}{\partial x} = 0, \ (t_1 > 0, -\infty < x < +\infty, \ a \neq 0\text{为常数}) \\ W \mid_{t_1=0} = f(\tau, x). \end{cases}$$

类似于求解u_1的过程,（把$f(\tau,x)$看成u_1问题中的初值条件的$\varphi(x)$）,求得W为：

$$W(t,x,\tau) = f(\tau, x - at_1) = f(\tau, x - a(t-\tau)),$$

综合以上解得此定解问题解：

$$u(t,x) = \varphi(x - at) + \int_0^t f(\tau, x - a(t-\tau)) d\tau.$$

解法2作自变量替换：

$$\xi = x - at, \eta = t$$

泛定方程化为

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta, \xi + a\eta)$$

上式两边积分得到：

$$u = \int_0^\eta f(\tau, \xi + a\tau) d\tau + g(\xi) = \int_0^t f(\tau, x - at + a\tau) d\tau + g(x - at).$$

又

$$u \mid_{t=0} = \int_0^t f(\tau, x - at + a\tau) d\tau + g(x) = g(x) = \varphi(x)$$

所以

$$u = \int_0^\eta f(\tau, \xi + a\tau) d\tau + g(\xi) = \varphi(x - at) + \int_0^t f(\tau, x - at + a\tau) d\tau\,.$$

第7题 对以下二阶偏微分方程分类并化为相应的标准型

1. $\lambda_1\lambda_2 u_{xx} - (\lambda_1 + \lambda_2)u_{xy} + u_{yy} = 0, (\lambda_1 \neq \lambda_2)$

$$2.\ x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x = 0,$$
$$3.\ y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0.\ (xy \neq 0)$$

解：1) 方程1的特征方程为：

$$\lambda_1\lambda_2(dy)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)dxdy + (dx)^2 = 0$$

得到两族实的特征曲线：

$$x + \lambda_1 y = c_1,\ \ x + \lambda_2 y = c_2$$

这样方程所属分类是双曲型。作变量替换：

$$\xi = x + \lambda_1 y,\ \eta = x + \lambda_2 y$$

经过复合求导：

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$
$$u_{xy} = \lambda_1 u_{\xi\xi} + (\lambda_1 + \lambda_2)u_{\xi\eta} + \lambda_2 u_{\eta\eta},$$
$$u_{yy} = \lambda_1^2 u_{\xi\xi} + 2\lambda_1\lambda_2 u_{\xi\eta} + \lambda_2^2 u_{\eta\eta}.$$

代入得到方程1的标准型：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0.$$

2) 方程2的特征方程为：

$$x^2dy^2 + 2xydxdy + y^2dx^2 = 0$$

即

$$(ydx + xdy)^2 = 0$$

积分得唯一特征线族：

$$xy = c$$

这样方程是抛物型方程。作变量替换：

$$\xi = xy, \eta = y$$

这样利用复合求导计算我们有：

$$u_x = yu_\xi, u_y = xu_\xi + u_\eta\ u_{xx} = y^2u_{\xi\xi}$$

$$u_{xy} = u_\xi + y(xu_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}),\ u_{yy} = x(xu_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + xu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

代入原方程并把xy替换为ξ, y替换为η, 化简后我们得到方程2 的标准型：

$$\eta^2u_{\eta\eta} - \xi u_\xi = 0 \Longrightarrow u_{\eta\eta} - \frac{\xi}{\eta^2}u_\xi = 0.$$

3) 方程3的特征方程为：

$$y^2(dy)^2+x^2(dx)^2=0$$

由特征方程得到一对共轭隐式通解,所以此方程是椭圆型方程, 共轭隐式通解具体为：

$$y^2+ix^2=c_1,\ y^2-ix^2=c_2$$

取所得到共轭函数的实部和虚部作变量替换，即取

$$\xi=y^2,\,\eta=x^2$$

类似地，经过复合求导计算并化简得标准型：

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{2\xi}u_\xi+\frac{1}{2\eta}u_\eta=0.$$

第8题 求解弦振动非齐次方程初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+2xt,\ \ (t>0,-\infty<x<+\infty) \\ u(0,x)=x^2,\,u_t(0,x)=\sin 2x \end{cases}$$

解法1：泛定方程有显然解$u_1=\frac{1}{3}xt^3$, 作变换$u=V+u_1=V+\frac{1}{3}xt^3$,这样

$$\begin{cases} V_{tt}=a^2V_{xx},\ \ (t>0,-\infty<x<+\infty) \\ V(0,x)=x^2,\,V_t(0,x)=\sin 2x \end{cases}$$

利用达朗贝尔公式

$$V=\frac{1}{2}\big[(x-at)^2+(x+at)^2\big]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin 2\xi\,d\xi=x^2+a^2t^2+\frac{1}{2a}\sin 2x\sin 2at$$

相应地，原定解问题的解：

$$u(t,x)=x^2+a^2t^2+\frac{1}{2a}\sin 2x\sin 2at+\frac{1}{3}xt^3$$

解法2：利用叠加原理和齐次化原理所得出的弦振动初值问题公式为：

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\big[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\big]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi$$

在本问题中，$\varphi(x)=x^2$, $\psi(x)=\sin 2x$, $f(t,x)=2xt$, 则

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\Big[(x-at)^2+(x+at)^2\Big]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin 2\xi\,d\xi++\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}2\xi\tau\,d\xi$$

计算整理得到：

$$u(t,x)=x^2+a^2t^2+\frac{1}{2a}\sin 2x\sin 2at+\frac{1}{3}xt^3$$

第9题 求解以下二阶常系数线性常微分方程：

$$1.\ \ y''+\omega^2y=0,\quad(\omega>0,\ y'=\frac{dy}{dx})$$

$$2.\ \ y''-\omega^2y=0,$$

$$3.\ \ y''-2y'+2y=0.$$

解： 1)方程的特征方程为：

$$\lambda^2+\omega^2=0\Longrightarrow\lambda=\pm\omega i$$

所以方程通解：

$$y=A\cos\omega x+B\sin\omega x$$

2)方程的特征方程为：

$$\lambda^2-\omega^2=0\Longrightarrow\lambda=\pm\omega$$

所以方程通解：

$$y=Ae^{\omega x}+Be^{-\omega x}$$

3)

$$\lambda^2-2\lambda+2=0\Longrightarrow\lambda=1\pm i$$

所以方程通解：

$$y=Ae^x\cos x+Be^x\sin x$$

附：

二阶线性常系数微分方程为:

$$y''+py'+qy=0,\quad p,q\text{为常数}$$

其特征方程为：

$$\lambda^2+p\lambda+q=0$$

1)如果特征方程有两个不同实根λ_1, λ_2, 则方程有通解：

$$y=Ae^{\lambda_1x}+Be^{\lambda_2x}$$

2)如果特征方程有唯一实根λ_0, 则方程有通解：

$$y = Ae^{\lambda_0 x} + Bxe^{\lambda_0 x}$$

3)如果特征方程有一对共轭复根$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, 则方程有通解：

$$y = Ae^{\alpha x}\cos\beta x + Be^{\alpha x}\sin\beta x$$

欧拉方程:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + px\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

可按以下步骤化为二阶常系数方程：

令$t = \ln x$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\,.$$

代入欧拉方程：

$$x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\right) + px\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) + qy = 0$$

于是化为常系数方程：

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = 0,\ \text{其中} t = \ln x$$

第二章：分离变量法：

一本章概述和学习要求：

本章介绍了分离变量法这一求解数学物理方程的重要方法。首先通过用分离变量法求解自由弦振动方程和圆柱体稳态温度分布问题等典型例子演示了分离变量法的适用问题和基本步骤。然后对分离变量中出现的固有值问题进行了一般性的讨论，即$Sturm-Liouville$定理。最后又对非齐次混合问题齐次化给出了一般性的方法，从而使得齐次化问题能用分离变量方法解决。

通过本章学习，我们要能理解分离变量法的适用问题和基本步骤，能用分离变量法求解某些典型区域上的定解问题。能熟练解决一些基本固有值问题。理解Sturm-Liouville 定理对二阶固有值问题及其衍生性问题的指导意义。能理解固有函数系的正交性和完备性等重要性质，会利用固有函数系作广义$Fourier$展开。掌握把非齐次混合问题以及边值问题齐次化的方法,最终结合分离变量求解。

学前应掌握的预备知识难点：

1)求解二阶齐次常系数微分方程：二阶常系数微分方程

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

其中p, q为常数。它的特征方程：

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{2}$$

根据特征方程(2)解的不同情况，二阶常系数微分方程(1)有不同的解, 具体为：

1. 特征根有两个不同实根λ_1, λ_2 则通解

$$y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$$

2. 特征根有唯一重实根λ_0，则

$$y(x) = C_1e^{\lambda_0 x} + C_2xe^{\lambda_0 x}$$

3. 特征根有一对共轭复根$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, 则通解：

$$y(x) = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$$

2)欧拉方程以及解法：

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=0$$

其中p,q为常数。作变换：$t=\ln x$, 方程化为可解二阶齐次常系数微分方程：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=0.$$

3)余弦和正弦级数的展开：

(1) 余弦级数:

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{l},\ \ x\in[0,l]$$

其中系数

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ \ (n=0,1,2...)$$

(2) 正弦级数:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l},\ \ x\in[0,l]$$

其中系数

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ \ (n=1,2,3...)$$

2.1 分离变量法两个典型例子

本节先行问题：**固有值问题**：

固有值问题是指含有参数的微分方程在附加了边界条件或周期性条件等条件后得到的问题，当固有值问题有非零解时所对应的参数称为固有值，相应的非零解称为固有函数。以下是一些固有值问题的例子和解法：

例2.1.1 求解固有值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad (0 < x < l) \\ y(0) = 0, y(l) = 0 \end{cases}$$

解题提示: 按照常微分方程理论，对于任意λ,泛定方程都是有解，但是附加了边界条件后λ就受到限制，能符合边界条件的非零解对应的λ就是固有值，相应的非零解就是固有函数。

解: 对λ分情况讨论：

1) $\lambda < 0$, 记$\lambda = -\omega^2$，这时泛定方程的解是：$y = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$, 代入边界条件$y(0) = 0$, 得出$A + B = 0$. 再代入边界条件$y(l) = 0$, 则$Ae^{\omega l} + Be^{-\omega l} = 0$, 于是求出$A = B = 0$. 因此$\lambda < 0$时无固有值。

2)$\lambda = 0$时，泛定方程约化为：$y'' = 0 \Longrightarrow y = Ax + B$, 再代入边界条件得到$A = B = 0$, 可知$\lambda = 0$不是固有值。

3)$\lambda > 0$,令$\lambda = \omega^2$, 这时泛定方程的解是：$y = Acos\omega x + Bsin\omega x$, 代入边界条件$y(0) = 0$, 得出: $A = 0$,于是$y = Bsin\omega x$. 再代入边界条件$y(l) = 0$, 得出$Bsin\omega l = 0$, B不能再为0，因此只有$sin\omega l = 0$. 解得:

$$\omega l = n\pi \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{l},$$

这样得到：

$$\textbf{固有值}: \lambda_n = {\omega_n}^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad (n = 1, 2, ...)$$

$$\textbf{固有函数}: \quad y_n(x) = B_n sin\frac{n\pi x}{l}. \quad \left(\text{或} y_n(x) = sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

例2.1.2 求解固有值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad (0 < x < l) \\ y'(0) = 0, \ y'(l) = 0\,. \end{cases}$$

解: 对λ分情况讨论： 1) $\lambda < 0$, 记$\lambda = -\omega^2$，这时：$y = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$, 代入边界条件$y'(0) = 0$, 得出

$$\omega A - \omega B = 0 \Longrightarrow A - B = 0.$$

再代入边界条件$y'(l) = 0$, 则

$$Ae^{\omega l} - B\omega e^{-\omega l} = 0,$$

于是求出$A = B = 0$. 因此$\lambda < 0$时无固有值。

2)$\lambda = 0$时，泛定方程约化为：$y'' = 0 \Longrightarrow y = Ax + B$, 再代入边界条件$y'(0) = 0$得到$A = 0$, 因此$y = B$，在另一个端点$x = l$, 我们发现$y = B \neq 0$满足$y'(l) = 0$, 可知$\lambda = 0$ 是固有值。

3)$\lambda > 0$,令$\lambda = \omega^2$, 这时泛定方程的解是：$y = Acos\omega x + Bsin\omega x$,代入边界条件$y'(0) = 0$, 得出: $B = 0$,于是$y = A\cos\omega x$. 再代入边界条件$y'(l) = 0$,得出$Asin\omega l = 0$, A不能再为0，因此只有$sin\omega l = 0$. 解得:

$$\omega l = n\pi \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{l},$$

综上，我们得到：

$$\textbf{固有值}: \lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = {\omega_n}^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad (n = 1, 2, ...)$$

固有函数 : $y_0(x) = A_n \quad y_n(x) = A_n \cos\frac{n\pi x}{l}.$ $\left(\text{或}y_0(x) = 1, \quad y_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}\right)$

分离变量法典型例子一:

例2.1.3 求解弦振动的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ (0 < x < l, t > 0) & (2.1.1a) \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, & (2.1.1b) \\ u(0, x) = \varphi(x), \ u_t(0, x) = \psi(x)\,. & (2.1.1.c) \end{cases}$$

解：我们分以下四步求解此定解问题：

1. **作分离变量**: 令$u(t, x) = T(t)X(x)$, 代入此混合问题的泛定方程有：

$$T''(t)X(x) = a^2T(t)X''(x)$$

即

$$\frac{T''(t)}{a^2T} = \frac{X''(x)}{X}$$

上式左边是t的函数,右边是x的函数，所以左右两边只有等于常数，设此常数为$-\lambda$, 这样

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

得到$X(x)$和$T(t)$ 分别对应的常微分方程：

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda a^2T(t) = 0$$

2. **解固有值问题**： 把$u = T(t)X(x)$代入边界条件得到：

$$T(t)X(0) = 0, \ T(t)X(l) = 0$$

两边消去函数$T(t)$得到： $X(0)=0,\ X(l)=0$. 这样结合$X(x)$的常微分方程得到**固有值问题**：

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, \quad (0<x<l) \\ X(0)=0,\ X(l)=0. \end{cases}$$

求解此固有值问题，得到：

$$固有值\lambda_n=\omega_n^2=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ 固有函数X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

把$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$代入$T(t)$满足的方程，相应地得到：

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}$$

所以我们就得到一系列满足泛定方程(2.1.1.a)和边界条件(2.1.1.b)的分离变量形式的解：

$$u_n(t,x)=T_n(t)X_n(x)=\left(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},\ (n=1,2,3...)$$

3. 叠加：根据叠加原理，设此定解问题解：

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

4.确定富利叶系数C_n, D_n:

$$u(0,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x)\ \Rightarrow\ C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\ \sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi$$

以及

$$u_t(0,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}D_n\left(\frac{n\pi a}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x)$$

则

$$D_n\left(\frac{n\pi a}{l}\right)=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\ \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\Longrightarrow D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\ \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

整理后就得到此混合问题的解：

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\ \sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi.\ \cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi\ .\ \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

从上例可以看出，产生并求解固有值问题是分离变量法的关键步骤，以下我们进一步给出其它一些固有值问题：

例2.1.4 **求解固有值问题**

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, y(l) = 0 \end{cases}$$

解: 对λ分情况讨论：

1) $\lambda < 0$, 记$\lambda = -\omega^2$，这时泛定方程的解是：$y = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$, 代入边界条件$y'(0) = 0$, 得出$A = B$, 再代入边界条件$y(l) = 0$, 得出$Ae^{\omega l} + Be^{-\omega l} = 0$, 于是求出$A = B = 0$. 因此$\lambda < 0$时无固有值。

2)类似于以上讨论，可知$\lambda = 0$不是固有值。

3)$\lambda > 0$,令$\lambda = \omega^2$, 这时泛定方程的解是：$y = Acos\omega x + Bsin\omega x$, 代入边界条件$y'(0) = 0$,得出: $B = 0$,于是$y = Acos\omega x$. 最后利用边界条件$y(l) = 0$, 得出$Acos\omega l = 0$, A不能再为0，因此只有$cos\omega l = 0$. 解得:

$$\omega l = n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l},$$

这样得到：

$$\text{固有值}: \lambda_n = {\omega_n}^2 = \left(\frac{2n\pi + \pi}{2l}\right)^2, \quad (n = 0, 1, 2...)$$

$$\text{固有函数}: \quad y_n(x) = cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

例2.1.5 求解以下固有值问题的固有值,固有函数。

$$\begin{cases} (r^2 R')' + \lambda r^2 R = 0, (0 < r < a) \\ |R(0)| < +\infty, R(a) = 0. \end{cases}$$

解：作变因变量替换$Y = rR$, (或$R = \dfrac{Y}{r}$) ,则泛定方程化为

$$Y'' + \lambda Y = 0.$$

由于$|R(0)| < +\infty$, 则$Y(0) = \lim\limits_{r\to 0} rR(r) = 0$, 而$Y(a) = aR(a) = 0$，这样$Y(r)$满足固有值问题：

$$\begin{cases} Y''(r) + \lambda Y = 0, (0 < r < a) \\ Y(0) = 0, Y(a) = 0. \end{cases}$$

求解此固有值问题，解得

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, Y_n(r) = \sin\frac{n\pi}{a}r$$

即得原问题的固有值和固有函数：

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, R_n(r) = \frac{1}{r}\sin\frac{n\pi}{a}r$$

例2.1.6 求解以下固有值问题的固有值,固有函数。

$$\begin{cases} X''(x) + 2X'(x) + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

解：泛定微分方程的特征方程为：

$$k^2 + 2k + \lambda = 0$$

记$\Delta = \sqrt{1-\lambda}$, 则讨论有

1)$\Delta > 0$, 泛定方程通解为：$y = Ae^{(-1+\sqrt{\Delta})x} + Be^{(-1-\sqrt{\Delta})x}$代入边界条件，得到$A = B = 0$, 即$\Delta > 0$时无固有值。

2)类似地, $\Delta = 0$ 没有固有值。

3) $\Delta < 0$, 即$\lambda > 1$时：

$$X(x) = Ae^{-x}\cos\sqrt{-\Delta}\,x + Be^{-x}\sin\sqrt{-\Delta}\,x$$

代入边界条件$X(0) = 0$, 得出$A = 0$,再由边界条件

$$X(1) = Be^{-1}\sin\sqrt{-\Delta} = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{-\Delta} = 0$$

解得：

$$\sqrt{-\Delta} = n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda - 1} = n\pi\,(n = 1, 2....)$$

最后有

固有值:$\lambda_n = 1 + (n\pi)^2$, 固有函数:$X_n(x) = e^{-x}\sin n\pi\,x$

注2.1.1:将来在学过$Sturm - Liouville$定理后，也可参照$Sturm - Liouville$定理的结论来求解二阶常微分方程固有值问题,将有可能简化步骤

几种常见的固有值问题及相关结论:

1. 固有值问题 $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, y(l) = 0. \end{cases} \xrightarrow{\text{解得}} \begin{cases} \text{固有值: } \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \ (n = 1, 2...) \\ \text{固有函数: } y_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l} \end{cases}$

2. 固有值问题 $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=0, y'(l)=0. \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{解得}}$ $\begin{cases} \text{固有值: } \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \ (n=0,1,2...) \\ \text{固有函数: } y_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l} \end{cases}$

3. 固有值问题 $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=0, y'(l)=0. \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{解得}}$ $\begin{cases} \text{固有值: } \lambda_n=\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2, \ (n=0,1,2...) \\ \text{固有函数: } y_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \end{cases}$

4. 固有值问题 $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=0, y(l)=0. \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{解得}}$ $\begin{cases} \text{固有值: } \lambda_n=\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2, \ (n=0,1,2...) \\ \text{固有函数: } y_n(x)=\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \end{cases}$

5. 固有值问题 $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(\theta)=y(\theta+2l). \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{解得}}$ $\begin{cases} \text{固有值: } \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \ (n=0,1,2...) \\ \text{固有函数: } y_n(\theta)=A_n\cos\frac{n\pi\theta}{l}+B_n\sin\frac{n\pi\theta}{l} \end{cases}$

例2.1.7用分离变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \ (0<x<l, t>0) \\ u(t,0)=u_x(t,l)=0, \\ u(0,x)=0, u_t(0,x)=x. \end{cases}$$

解: 作分离变量，令$u(t,x)=T(t)X(x)$, 代入此混合问题的泛定方程有：

$$T''(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)$$

即

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

上式左边是t的函数,右边是x的函数，所以左右两边只有等于常数，设此常数为$-\lambda$, 这样得到$X(x)$和$T(t)$ 分别对应的常微分方程：

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$$

把$u=T(t)X(x)$代入边界条件得到：

$$T(t)X(0)=0, \ T(t)X'(l)=0$$

两边消去函数$T(t)$得到：

$$X(0)=0, \quad X'(l)=0$$

这样结合$X(x)$的常微分方程得到固有值问题：

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, \\ X(0)=0, X'(l)=0. \end{cases}$$

求解此固有值问题，得到：

$$\text{固有值}\lambda_n = \omega_n^2 = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2, \text{固有函数}X_n(x) = B_n \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

把已求出的λ_n代入$T(t)$满足的方程，相应地得到：

$$T_n(t) = C_n \cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l} + D_n \sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}$$

所以我们就得到一系列分离变量形式的解：$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x)(n = 0, 1, 2...)$，根据叠加原理，设

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(C_n \cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l} + D_n \sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

最后由初值条件确定富利叶系数C_n, D_n:

$$u(0,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} = 0 \Rightarrow C_n = 0$$

以及

$$u_t(0,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} D_n\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} = x$$

由正弦级数系数确定公式：

$$D_n\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right) = \frac{2}{l}\int_0^l x\,\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx$$

从而确定出：

$$D_n = \frac{16l^2(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3 a}$$

整理后就得到此混合问题的解：

$$u(t,x) = \frac{16l^2}{a\pi^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

我们以下将讨论用分离变量法求圆柱体稳态温度边值问题，为此，我们先给出以下两个准备性的例题：

例2.1.8 求解周期条件固有值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ (-\infty < \theta < +\infty) \\ y(\theta) = y(\theta + 2\pi) \end{cases}$$

解: 对λ分情况讨论：

1) $\lambda < 0$, 记$\lambda = -\omega^2$，这时泛定方程的解是：$y = Ae^{\omega\theta} + Be^{-\omega\theta}$, 代入周期条件求出$A = B = 0$. 因此$\lambda < 0$时无固有值。

2)$\lambda = 0$时，可对应固有函数 $y_0(\theta) = B_0 \neq 0$.

3)$\lambda > 0$,令$\lambda = \omega^2$,这时泛定方程的解是：$y(\theta) = Acos\omega\theta + Bsin\omega\theta$,此周期函数$y(\theta)$ 的最小正周期为$\dfrac{2\pi}{\omega}$,因此要满足周期为2π的条件，只要

$$2\pi = n\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \Longrightarrow \omega_n = n, \ \ (n = 1, 2, 3...)$$

综上得到此固有值问题的解：

固有值：$\lambda_0 = 0, \ \ \lambda_n = {\omega_n}^2 = n^2, \ (n = 1, 2...)$

固有函数：$y_0(\theta) = B_0 \neq 0, \ \ y_n(\theta) = A_n cosn\theta + B_n sinn\theta, \ (n = 1, 2...)$

例2.1.9 求解以下欧拉方程

$$r^2R''(r) + rR'(r) - n^2R(r) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, 3...)$$

解：作变换

$$t = \ln r \ \text{或} r = e^t$$

以上欧拉方程变为：

$$\frac{d^2R}{dt^2} - n^2R(t) = 0, \Longrightarrow \begin{cases} R = A_0 + B_0t, & \text{当} n = 0, \\ R = A_ne^{nt} + B_ne^{-nt}, & \text{当} n \geq 1. \end{cases}$$

因此方程解为：

$$R(r) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r, & \text{当} n = 0, \\ A_nr^n + B_nr^{-n} & \text{当} n > 0\,. \end{cases}$$

分离变量法典型例子之二: 无限长圆柱体稳态温度边值问题:

一个无限长的圆柱($x^2 + y^2 < a^2, -\infty < z < +\infty$),内部无热源，边界柱面温度为$F(x, y)$,则柱内稳态温度分布可满足以下定解问题:

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, \ \ (x^2 + y^2 < a^2) & (2.1.2.a) \\ u\,|_{x^2+y^2=a^2} = F(x, y). & (2.1.2.b) \end{cases}$$

此问题用极坐标等价于

$$\begin{cases} \Delta_2 u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial u}{\partial r}) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & (2.1.3.a) \\ u\mid_{r=a} = F(a\cos\theta, asin\theta) \overset{\Delta}{=} f(\theta). & (2.1.3.b) \end{cases}$$

为了解决此问题，我们先求用分离变量求出在极坐标下$\Delta_2 u = 0$的一般解：首先，作分离变量，设$u = R(r)\Theta(\theta)$, 代入$\Delta_2 u = 0$的极坐标方程：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \qquad (2.1.4)$$

分离变量并两边除以$R(r)\Theta(\theta)$得到：

$$\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = 0$$

令$\dfrac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda$, 相应地得到微分方程：

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad r^2R'' + rR' - \lambda R(r) = 0$$

由于在极坐标下成立条件：

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, \theta) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, \theta + \mathbf{2}\pi) \qquad (2.1.5)$$

得到

$$R(r)\Theta(\theta) = R(r)\Theta(\theta + 2\pi),$$

两边消去$R(r)$有$\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$. 结合$\Theta(\theta)$的微分方程得到固有值问题:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \end{cases}$$

求解此固有值问题, 得到:

固有值： $\lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = n^2, \ (n = 1, 2, 3...)$

固有函数：$\Theta_0(\theta) = 1, \ \Theta_n(\theta) = C_n\cos n\theta + D_n\sin n\theta$

把求出的固有值代入$R(r)$满足欧拉的方程，解出：

$$R_0(r) = A_0 + B_0\ln r, \quad R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n} \ (n = 1, 2, 3...)$$

这样就得到一列分离变量形式解:

$$u_0(r, \theta) = R_0(r)\Theta_0(\theta) = A_0 + B_0\ln r,$$

$$u_n(r,\theta)=R_n(r)\Theta_n(\theta)=(A_nr^n+B_nr^{-n})(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta).\,(n>0)$$

根据叠加原理，把这一系列分离变量形式解叠加，得到用极坐标表示的方程$\Delta_2 u=0$的满足周期性条件$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi)$的一般解：

$$u(r,\theta)=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{+\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n})(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta) \qquad (2.1.6)$$

以上虽然我们求出了方程$\Delta_2 u=0$的满足周期性条件$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi)$用极坐标表示的的一般解，但在具体使用时候要**注意以下事项：**

1. 由于我们的解要满足周期性条件$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi)$, 所以此求解公式不能直接使用于扇形区域（由于扇形区域角度变化不足2π), 对于矩形区域等不适用极坐标的区域也不宜使用此公式。

2.由于我们默认是取有界解，在以下三种适用区域公式有以下具体形式：

(1)在圆域$r<a$，由于r^{-n}和$\ln r$在$r=0$不满足有界性条件。所以r^{-n}项和$\ln r$ 的项要舍去，因此在圆内求解公式简化为

$$u(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}r^n(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta) \qquad (2.1.7)$$

(2)在圆外区域$r>a$，由于$\lim\limits_{r\to+\infty} r^n=+\infty$和$\lim\limits_{r\to+\infty}\ln r=+\infty$,因此$r^n$和$\ln r$类型项要从公式中舍去, 具体在圆外区域$r>a$适用公式为：

$$u(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}r^{-n}(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta) \qquad (2.1.8)$$

(3)在环形域$a<r<b$, 公式中所有类型项都有界，所以环形域一般公式仍然为：

$$u(r,\theta)=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{+\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n})(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)\,. \qquad (2.1.9)$$

有了以上这些讨论和相应结论，我们就可以最终解决无限长圆柱体稳态温度边值问题：

例 2.1.10 **求解无限长圆柱体稳态温度边值问题**

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0,\ \ (r<a) & (2.1.10.a)\\ u\,|_{r=a}=f(\theta). & (2.1.10.b)\end{cases}$$

解：泛定方程的一般解为：

$$u(r,\theta)=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{+\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n})(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)\,.$$

在圆内，相应的有界解可取以下形式：

$$u(r,\theta)=\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)\qquad(1)$$

上式(1)代入圆柱侧面的边界条件(2.1.10.b)有：

$$u\mid_{r=a}=\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)=f(\theta)$$

根据$Fourier$级数系数确定公式：

$$C_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,\ (n=0,1,2...)$$

$$D_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi\ \ (n=1,2,3..)$$

以上系数代入(1)后就得到圆柱体内部温度分布为：

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\,d\varphi+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\int_0^{2\pi}f(\varphi)[\cos n(\varphi-\theta)]\,d\varphi$$

在某些特殊情况下，可用比较系数确定Fourier 系数：

例2.1.11 求解圆内狄氏问题：

$$\begin{cases}\Delta_2u=0,(r<a)\\ u\mid_{r=a}=\sin 2\theta\cos\theta\end{cases}$$

解: 泛定方程的一般解为：

$$u(r,\theta)=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{+\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n})(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)\,.$$

在圆内，相应的有界解可表示为以下形式：

$$u=\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}r^n(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)$$

再利用边界条件

$$u\mid_{r=a}=\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a^n(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)=\sin 2\theta\cos\theta=\frac{1}{2}(\sin 3\theta+\sin\theta)$$

比较系数得到：

$$D_1=\frac{1}{2a},\ D_3=\frac{1}{2a^3},\text{其余的傅立叶系数都为}0$$

所以最后得到此边值问题的解：

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2a}r\sin\theta+\frac{1}{2a^3}r^3\sin 3\theta$$

除了两个典型例题外，分离变量法还可以求解其它许多问题，比如：

例2.1.12 如两端和侧面都绝热，长度为$2l$的均匀杆的温度分布问题为：

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}\quad(0<x<2l)\\ u_x(t,0)=u_x(t,2l)=0,\\ u(0,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2A}\ \ (|x-l|<A<l,)\\ 0,\quad \text{其余}x.\end{cases}\end{cases}$$

求$u(t,x)$并说明极限值$\lim\limits_{t\to\infty}u(t,x)$的物理意义

解：作分离变量$u=T(t)X(x)$, 代入泛定方程并结合边界条件得到固有值问题：

$$\begin{cases}X''+\lambda X(x)=0,\ (0<x<l)\\ X'(0)=X'(2l)=0.\end{cases}$$

和常微分方程：

$$T'(t)+\lambda a^2T=0.$$

求解固有值问题得到:

$$\text{固有值：}\lambda_0=0,\ \ \lambda_n=(\frac{n\pi}{2l})^2,\quad(n=1,2,3...)$$

$$\text{固有函数：}X_0(x)=1,\qquad X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{2l}x$$

相应地，

$$T_0(t)=A_0,\quad T_n(t)=C_ne^{-(\frac{n\pi a}{2l})^2t}$$

由叠加原理，可设

$$u(t,x)=\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}C_n e^{-(\frac{n\pi a}{2l})^2 t}\cos\frac{n\pi}{2l}x$$

又

$$u(0,x)=\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\cos\frac{n\pi}{2l}x=\varphi(x),\ \ \varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2A}\ \ (|x-l|<A<l,)\\ 0,\quad \text{其余}x.\end{cases}$$

由余弦级数系数的确定公式，定出

$$C_0=\frac{2}{2l}\int_0^{2l}\varphi(x)\,dx=\frac{2}{2l}\int_{l-A}^{l+A}\frac{1}{2A}=\frac{1}{l}$$

$$C_n=\frac{2}{2l}\int_0^{2l}\varphi(x)\cos\frac{n\pi}{2l}x\,dx=\frac{2}{2l}\int_{l-A}^{l+A}\frac{1}{2A}\cos\frac{n\pi}{2l}xdx$$

$$=\frac{2}{n\pi A}\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi A}{2l}=\begin{cases}0,\ \ n=2k+1,\\ \frac{(-1)^k}{k\pi A}\sin\frac{k\pi A}{l},\ \ \ n=2k.\end{cases}$$

最后整理得：

$$u(t,x)=\frac{1}{2l}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k\pi A}\sin\frac{k\pi A}{l}e^{-(\frac{n\pi a}{2l})^2 t}\cos\frac{k\pi}{l}x$$

让$t\to\infty$ 就得到

$$\lim_{t\to\infty}u(t,x)=\frac{1}{2l}$$

这个极限说明由于杆子是绝热的，内部无热源分布，所以当时间趋于无穷时，杆子各处温度趋于均匀。

例2.1.13 求解扇形区域内的狄氏问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0\ (r<d,\ 0<\theta<\alpha),\\ u(r,0)=u(r,\alpha)=0\\ u(d,\theta)=f(\theta)\end{cases}$$

解：使用极坐标，泛定方程化为：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0,(r<d,\ 0<\theta<\alpha)$$

作分离变量，令$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$, 代入方程得到：

$$\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta}=0$$

令$\dfrac{\Theta''}{\Theta}=-\lambda$, 代入上式得到微分方程：

$$\Theta''+\lambda\Theta=0,\quad r^2R''+rR'-\lambda R(r)=0$$

再利用齐次边界条件：$u(r,0)=u(r,\alpha)=0$,得出$\Theta(0)=\Theta(\alpha)=0$,于是对应有$\Theta$的固有值问题

$$\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0 \quad (0<\theta<\alpha),\\ \Theta(0)=\Theta(\alpha)=0\end{cases}$$

求解此固有值问题得到

$$\text{固有值：}\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2,\quad \text{固有函数：}\Theta_n(\theta)=sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}$$

相应地, 把$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2$,代入$R(r)$的欧拉方程，解得

$$R_n(r)=A_nr^{\frac{n\pi}{\alpha}}+B_nr^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\ \ (n=1,2,3...)$$

由于在圆内点$r=0$处$r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}$无界，所以取$B_n=0$. 由叠加原理，可得到满足泛定方程和齐次边界条件一般解：

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_nr^{\frac{n\pi}{\alpha}}sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}$$

再根据条件

$$u(d,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_nd^{\frac{n\pi}{\alpha}}sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}=f(\theta)$$

确定出$Fourier$系数：

$$A_n=\frac{2}{\alpha d^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\int_0^{\alpha}f(\theta)sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}d\theta$$

所以得到此定解问题解：

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}f(\theta)sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}d\theta\right]\left(\frac{r}{d}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}$$

2.2 固有值问题的一般性模型：$Strum-Liouville$定理

本节前序：分离变量求解法的一般步骤分析:

1. **寻求分离变量形式的解**： 把变量分组，如$u=u(t,x)$, 分离变量形式的解设为$u=T(t)X(x)$.又如$u=u(t,x,y,z)$, 分离变量形式的解既可设为$u=T(t)X(x)Y(y)Z(z)$, 也可先设为$u=T(t)V(x,y,z)$.

2. **确定固有值问题**：把分离变量形式解代入定解问题的泛定方程，产生各组函数对应的微分方程。再结合所给的边界条件或周期性条件产生对应的固有值问题。

3. **产生一系列分离变量形式解**：求解固有值问题，得到固有值和固有函数。并把固有值代入剩余各组微分方程求出相应函数，就得到一系列分离变量形式解，如$u_n(t,x)=T_n(t)X_n(x)$, $n=1,2....$

4. **叠加并最终求出定解问题的解**：根据叠加原理，分离变量变量形式解叠加后仍然满足泛定方程以及齐次边界条件（或周期性条件），所以可对分离变量形式解叠加得到一般解,如设$u(t,x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t,x)$. 再根据其它定解条件(如弦振动混合问题的初值条件)确定一般解中的任意常数, 从而最终解决定解问题。

由以上分析可见，在**分离变量中的固有值问题是核心性问题**，本节以下将讨论求解固有值问题的规律(方程限于2阶)，以及解的叠加的完备性，讨论怎样确定傅里叶系数等一般性问题。以下讨论先从一般性的二阶线性微分方程的分离变量展开讨论：

1.**Sturm – Liouville**型方程

对于一般的二阶齐次线性偏微分方程:

$$L_tu+C(t)L_xu=0 \quad (a\le x\le b) \tag{2.2.1}$$

其中L_t,L_x是二阶线性偏微分算子，具体为

$$L_t=a_0(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+a_1(t)\frac{\partial}{\partial t}+a_2(t), \qquad L_x=b_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b_1(x)\frac{\partial}{\partial x}+b_2(x)$$

其中$b_0(x)\neq 0$. 作分离变量$u=T(t)X(x)$,代入(2.2.1)后,$X(x)$产生的微分方程有如下形式:

$$L_xX(x)+\lambda X(x)=0 \tag{2.2.2}$$

以下为了叙述方便，我们把$X(x)$改写为$y(x)$, 这样,(2.2.2)具体表示为：

$$b_0(x)y''(x)+b_1(x)y'(x)+b_2(x)y(x)+\lambda y(x)=0 \tag{2.2.2}$$

上式两边同乘以待定权值$\rho(x)$, 方程变为

$$\rho(x)b_0(x)y''(x)+\rho(x)b_1(x)y'(x)+b_2(x)\rho(x)y(x)+\lambda\rho(x)y(x)=0,$$

为使以上方程前两项配成完全导数形式，要求权值$\rho(x)$满足：

$$\rho(x)b_1(x)=(\rho(x)b_0(x))'\Rightarrow\rho(x)=\frac{1}{b_0(x)}\exp\{\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}\,dx\}$$

方程就化成**Sturm − Liville标准形式**(或称为为$Sturm-Liville$型方程)：

$$[k(x)y'(x)]'-q(x)y(x)+\lambda\rho(x)y(x)=0,\ \ (a<x<b) \qquad (2.2.3)$$

其中$k(x)=\rho(x)b_0(x)$, $q(x)=-b_2(x)\rho(x)$,而$\rho(x)$为**权值**

2. **Sturm − Liouville型方程附加的边界条件形成固有值问题**：。

假定$Sturm-Liouville$方程系数满足：

(1) $k(x)\in C^1[a,b],\rho(x)\in C[a,b]$,在$(a,b)$上, $k(x),\rho(x)>0,$

且$q(x)\geq 0.$

(2)$q(x)$在(a,b)上连续,而且在端点处至多是一级极点,如$q(x)=\dfrac{1}{x-a}.$

则在以上对系数的假定下，$Sturm-Liouville$ 方程可根据以下情况附加以下五种常用的边界条件之一:

(1) $k(a)>0$(或$k(b)>0$), 且$q(x)$在a点(或b点)连续时候，对$y(x)$可给出以下形式的第一，二，三类边界条件形成固有值问题:

$$\alpha_1y'(a)-\beta_1y(a)=0,\ \ (\alpha_1,\ \beta_1\geq 0)$$
$$\alpha_2y'(b)+\beta_2y(b)=0.\ \ (\alpha_2,\ \beta_2\geq 0)$$

(2)当$k(a)=k(b)>0$, 还可以附加周期性条件：

$$y(a)=y(b),\ y'(a)=y'(b)$$

(3)当$k(x)$在某个端点为0，如$k(a)=0$, 则$y(x)$在点a可以附加自然边界条件, 即

$$|y(a)|<+\infty$$

附加完边界条件后，就形成了固有值问题，以下为了理解固有值问题的相关结论，我们先解释以下概念：

1) 函数的内积： 在解析几何中，向量$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$和$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$内积定义为:

$$\vec{a}\,.\,\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

可以验证内积有以下三个基本性质:

(1)正定性: $\vec{a}\,.\,\vec{a} \geq 0$, (2)交换性: $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{b}\,.\,\vec{a}$, (3)线性: $(k_1\vec{a_1}+k_2\vec{a_2})\,.\,\vec{b} = k_1(\vec{a_1}\,.\,\vec{b})+k_2(\vec{a_2}\,.\,\vec{b})$

以上内积的概念可推广为两个函数$f(x)$和$g(x)$的带权内积:

$$[f(x),\, g(x)] \overset{\text{定义为}}{=} \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$$

其中权值$\rho(x)$在$Sturm-Liouville$型方程(2.2.3)已给出。可验证运算$[f(x),\, g(x)]$满足内积的三个基本性质，所以可以理解为函数$f(x)$ 和$g(x)$ 的内积。

2) 函数的模的平方: 在解析几何中，向量$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, 则

$$\vec{a} \text{ 的长度平方} = \vec{a}\,.\,\vec{a} = {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2.$$

这一概念可推广为函数$f(x)$模的平方:

$$||f(x)||^2 = [f(x), f(x)] = \int_a^b f^2(x)\rho(x)dx$$

3) 函数的正交性: 在解析几何中，向量$\vec{a}$和向量$\vec{b}$内积为0, 则称向量$\vec{a}$和向量$\vec{b}$垂直，垂直这一概念推广就是正交。因此如函数$f(x)$和$g(x)$的内积$[f(x), g(x)] = 0$，则称$f(x)$和$g(x)$正交，即

$$\int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx = 0$$

有了这些相关解释，我们最后就可给出以下结论:

3. Sturm − Liouville方程固有值问题的相关结论:

$Sturm-Liouville$方程配以上叙述的五种边界条件之一，形成相应的固有值问题，则固有值和固有函数有以下结论:

(1)可数性:存在可数无穷多个固有值$\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...$,且$\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$; 除了附加周期性条件外，每个固有值只有唯一的固有函数与之对应。

(2)非负性: $\lambda_n \geq 0$, 有固有值$\lambda = 0$的充分必要条件是: $q(x) = 0$, 且在a, b两端都不取第一，三类边界条件，这时固有函数是非零常数。

(3)正交性: 设$\lambda_m \neq \lambda_n$, 则相应的固有函数$y_m(x), y_n(x)$在$[a, b]$上带权正交，即有:

$$\int_a^b \rho(x)y_m(x)y_n(x)dx = 0\,. \qquad (2.2.4)$$

(4)完备性:固有函数系$\{y_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$是完备的，即$\forall f(x) \in L_\rho^2[a, b]$, $f(x)$可在固有函数系$\{y_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$下展开为广义$Fourier$级数，即

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n y_n(x)\,. \qquad (2.2.5)$$

其中展开系数为

$$c_n = \frac{1}{||y_n(x)||^2} \int_a^b \rho(x) f(x) y_n(x)\, dx \quad (n = 1, 2, ...)$$

而

$$||y_n(x)||^2 = \int_a^b \rho(x) y_n^2(x) dx$$

以上给出了**Sturm − Liouville**方程固有值问题的相关结论, 但可数性和完备证明已经超出教材范围, 下面我们对非负性和正交性进行论证: 我们首先对**Sturm − Liouville**方程改写为算子形式(并重新把$y(x)$记回$X(x)$), 再配以边界条件形成以下的固有值问题:

$$\begin{cases} LX(x) = \lambda X(x), & \left(L = -\frac{1}{\rho(x)}\left(k(x)\frac{d}{dx}\right) + \frac{q(x)}{\rho(x)},\right) \\ \text{附加}X(x)\text{相应的五种边界条件之一} \end{cases}$$

1) 非负性证明: 以下, 我们仅对a, b两个端点附加一, 二或三类边界条件的情况进行证明: 由于$LX(x) = \lambda X(x)$, 所以

$$\lambda[X(x), X(x)] = [LX(x),\, X(x)] \,=\, [-\frac{1}{\rho(x)}\left(k(x)X'(x)\right)' + \frac{q(x)}{\rho(x)}X(x),\, X(x)]$$

$$= \int_a^b \left(-\frac{1}{\rho(x)}\left(k(x)X'(x)\right)' + \frac{q(x)}{\rho(x)}X(x)\right) X(x)\rho(x)\, dx = \int_a^b \left(-\left(k(x)X'(x)\right)' X(x) + q(x)X^2(x)\right) dx$$

$$= -k(x)X'(x)X(x)\mid_a^b + \int_a^b k(x)\left(X'(x)\right)^2 dx + \int_a^b q(x)X^2(x)\, dx \tag{2.2.6}$$

由于我们假定a, b两个端点附加条件为:

$$\alpha_1 X'(a) - \beta_1 X(a) = 0,\ \ (\alpha_1,\, \beta_1 \geq 0), \quad \alpha_2 X'(b) + \beta_2 X(b) = 0.\ \ (\alpha_2,\, \beta_2 \geq 0)$$

利用此条件得出:

$$X'(a) = \frac{\beta_1}{\alpha_1}X(a),\ \ X'(b) = -\frac{\beta_2}{\alpha_2}X(b)$$

此条件代入(2.2.6)式，得出其第一项非负，再由假定条件$k(x) > 0, q(x) \geq 0$, 同样得出第二，三项也非负。从而证明了$\lambda \geq \mathbf{0}$.

2)正交性的证明: 可验证L是个自共轭算子: 即任取函数$f(x),\, g(x) \in L^2_\rho[a, b]$, 则$[\mathbf{Lf(x)},\, \mathbf{g(x)}] = [\mathbf{f(x)},\, \mathbf{Lg(x)}]$. 这样, 取两个不同的固有值$\lambda_n, \lambda_m$, 并设 $X_n(x),\ X_m(x)$是对应的固有函数，即$LX_n = \lambda_n X_n,\, LX_m = \lambda_m X_m$, 由算子的自共轭性，有:

$$0 = [LX_n,\, X_m] - [X_n,\, LX_m] = [\lambda_n X_n,\, X_m] - [X_n,\, \lambda_m X_m]$$

$$= \lambda_n[X_n,\, X_m] - \lambda_m[X_n,\, X_m] = (\lambda_n - \lambda_m)[X_n,\, X_m]$$

由于$\lambda_n \neq \lambda_m$, 所以只有$[X_n,\, X_m] = 0$, 这就证明了正交性。

3)广义Fourier系数的求出过程: 以上，我们指出了利用完备的固有函数系$\{y_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$，$f(x)$ 的广义$Fourier$ 展开可表示为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_ny_n(x). \qquad (2.2.7)$$

以下我们给出确定广义Fourier系数c_k的方法： 事实上，对于任意取定的整数k, 在(2.2.7)式两边对$y_k(x)$作内积，并利用正交性$n\neq k$ 时，$[y_n(x),\, y_k(x)]=0$，则

$$[f(x),y_k(x)]=\sum_{n=1}^{+\infty}[c_ny_n(x),\, y_k(x)]=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n[y_n(x),\, y_k(x)]=c_k[y_k(x),\, y_k(x)]$$

$$=c_k||y_k(x)||^2\Longrightarrow c_k=\frac{[f(x),y_k(x)]}{||y_k(x)||^2}=\frac{1}{||y_k(x)||^2}\int_a^b\rho(x)f(x)y_k(x)\,dx$$

其中$||y_k(x)||^2=\displaystyle\int_a^b\rho(x)y_k^2(x)dx$

例2.2.1指出以下$Sturm-Liville$型方程的$k(x),q(x)$以及权值$\rho(x)$

$$(1)y''+\lambda y=0,$$

$$(2)\,[\,rR'(r)]'+\lambda\frac{1}{r}R(r)=0,$$

$$(3)\,(rR'(r))'+(\lambda r-\frac{1}{r})R(r)=0.$$

答:(1) $k(x)=1,\ q(x)=0,$权值$\rho(x)=1$

(2) $k(r)=r,\ q(r)=0,$权值$\rho(r)=\dfrac{1}{r}$

(3) $k(r)=r,\ q(r)=\dfrac{1}{r},$权值$\rho(r)=r.$

例2.2.2 利用$Sturm-Liville$定理的相关结论，证明正弦级数展开定理和余弦级数展开定理。即证明：

(1)$\forall f(x)\in L^2[0,l],\ x\in[0,l], f(x)$可展开为余弦级数，即

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

其系数$A_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\ \ (n=0,1,2,3...).$

(2) $\forall f(x) \in L^2[0,l],\ x \in [0,l], f(x)$可展开为正弦级数，即

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad (\forall f(x) \in L^2[0,l],\ x \in [0,l])$$

系数$B_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\ \ (n = 1,2,3...)$

证明：1)构造固有值问题：

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ \ (0 < x < l) \\ y'(0) = y'(l) = 0 \end{cases}$$

解此固有值问题，求得

$$\text{固有值：}\lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ (n = 1,2,3...)$$

$$\text{固有函数：}y_0(x) = 1, \quad y_n(x) = \cos\frac{n\pi}{l}x,\ (n = 1,2,3...)$$

按照$Sturm - Liville$定理的完备性理论，固有函数系$\{y_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$构成一个完备正交系，$\forall f(x) \in L^2[0,l], f(x)$ 在此正交系下有广义$Fourier$展开式

$$f(x) = C_0 y_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n y_n(x)\,.$$

而

$$C_0 = \frac{\displaystyle\int_0^l f(x)y_0(x)\,dx}{||y_0(x)||^2}, \quad C_n = \frac{\displaystyle\int_0^l f(x)y_n(x)dx}{||y_n(x)||^2}.$$

其中模的平方为$||y(x)||^2 = \displaystyle\int_0^l y^2(x)dx.$,具体把$y_0(x) = 1,\ y_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}$代入得到：

$$||y_0(x)||^2 = \int_0^l 1^2 dx = l,\ ||y_n(x)||^2 = \int_0^l \cos^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_0^l \frac{1+\cos\frac{2n\pi x}{l}}{2}\,dx = \frac{l}{2}\,.$$

相应地

$$C_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx,\ \ C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

相应的$f(x)$展开式变为：

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos\frac{n\pi x}{l}\,.$$

最后记$C_0=\dfrac{A_0}{2}, C_n=A_n$, 我们就得到了要证明的结论(1)。

2) 类似地，通过构造固有值问题：

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \ \ (0<x<1) \\ y(0)=y(l)=0 \end{cases}$$

求出固有函数系后，再把函数$f(x)$在固有函数系下展开就对应$f(x)$的正弦级数展开式。

例2.2.3 把下列三个二阶线性常微分方程配成$Sturm-Liville$标准型，并指出权值ρ

$$y''-2ay'+\lambda y=0 \tag{1}$$

$$r^2R''+rR'+\lambda R(r)=0 \tag{2}$$

$$r^2R''+rR'+(\lambda r^2-1)R(r)=0 \tag{3}$$

解题提示: 对于如下形式的含有参数λ的二阶线性微分方程

$$b_0(x)X''(x)+b_1(x)X'(x)+b_2(x)X(x)+\lambda X(x)=0,\ \text{其中}\lambda\text{为参数} \tag{4}$$

把它化为Sturm-Liville标准型的一般步骤是：方程两边同乘以待定权值$\rho(x)$：

$$\rho(x)b_0(x)X''(x)+\rho(x)b_1(x)X'(x)+b_2(x)\rho(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0, \tag{5}$$

为使方程(5)前两项配成完全导数形式，要求权值$\rho(x)$满足：

$$\rho(x)b_1(x)=(\rho(x)b_0(x))'\Rightarrow\rho(x)=\frac{1}{b_0(x)}\exp\{\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}\,dx\}$$

这样求出权值$\rho(x)$后，把(5)式的前两项合成一个完全导数项，方程就成为以下形式，即Sturm-Liville标准形式:

$$[k(x)X'(x)]'-q(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0,$$

其中$k(x)=\rho(x)b_0(x)$.

解：首先把方程(1)配成$Sturm-Liville$标准型,为此两边同乘以$\rho(x)$,则

$$-2a\rho(x)=\rho'(x)\Rightarrow\ \rho(x)=ce^{-2ax},$$

不妨取$c=1$, 即权值为$\rho(x)=e^{-2ax}$,这样(1)两边乘以$\rho(x)$变为：

$$e^{-2ax}y''-2ae^{-2ax}y'+\lambda e^{-2ax}y=0.$$

上式前两项合并成完全导数形式，即得$Sturm-Liville$标准型：

$$\left(e^{-2ax}y'\right)'+\lambda e^{-2ax}y=0.$$

再把方程(2)配成标准型:先求待定权值$\rho(r)$,则

$$r\rho(r)=(r^2\rho(r))'\Rightarrow\ \rho(r)=c\frac{1}{r},$$

不妨取$c=1$,即权值为$\rho(r)=\dfrac{1}{r}$. 这样,方程(2)两边同乘以$\rho(r)$ 后，方程配成了$Sturm-Liville$标准型：

$$[rR'(r)]'+\lambda\frac{1}{r}R(r)=0,$$

最后把方程(3)配成标准型,首先把方程改写成形如(4)式的一般形式：

$$R''+\frac{1}{r}R'+(\lambda-\frac{1}{r^2})R(r)=0 \qquad .$$

则权值$\rho(r)$满足：

$$\frac{1}{r}\rho(r)=\rho'(r)\Rightarrow\ \rho(r)=cr,$$

不妨取$c=1$,即权值为$\rho(r)=r$,这样,方程(3)两边同乘以$\rho(r)$后，方程配成了$Sturm-Liville$标准型：

$$(rR'(r))'+(\lambda r-\frac{1}{r})R(r)=0.$$

例2.2.4 求以下固有值问题的固有值,固有函数以及固有函数模的平方, 并且把函数$f(r)$在固有函数系下作广义$Fourier$展开。

$$\begin{cases}r^2R''+rR'+\lambda R(r)=0,\ \ (1<r<e)\\ R(1)=R(e)=0\end{cases}$$

解：泛定方程是欧拉方程，所以作变换$t=\ln r$, 泛定方程变为：

$$\frac{d^2R}{dt^2}+\lambda R(t)=0,$$

相应的固有值问题变为：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2R}{dt^2}+\lambda R(t)=0,\ \ (0<t<1)\\ R(0)=R(1)=0\end{cases}$$

由于在端点处有第一类边界条件，则根据$Sturm-Liville$定理可判定：$\lambda>0$,记$\lambda=\omega^2$, 因此有：

$$R=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

由$R(0)=0$, 有$A=0$, 再由$R(1)=0$，得到：$B\sin\omega=0$, 因B 不能再为0，于是只有$\sin\omega=0\Longrightarrow\omega=n\pi$,这样

$$\lambda_n=(n\pi)^2,(n=1,2.......)\qquad R_n(t)=\sin n\pi t.$$

也就是

$$\lambda_n=(n\pi)^2,\qquad R_n(r)=\sin(n\pi lnr).$$

根据前面例子，方程配为$Sturm-Liville$标准型为：

$$[rR'(r)]'+\lambda\frac{1}{r}R(r)=0,$$

所以方程对应的权值$\rho(r)=\dfrac{1}{r}$,这样由固有函数模的平方计算公式, 固有函数模的平方为:

$$||R_n(r)||^2=\int_1^e(\sin n\pi\ln r)^2\frac{1}{r}dr$$

$$=\int_1^e(\sin n\pi\ln r)^2d(\ln r)=\int_0^1(\sin n\pi t)^2dt=\frac{1}{2}$$

因此函数$f(r)$在固有函数系$R_n(r)$下作广义$Fourier$展开为

$$f(r)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_nR_n(r)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\sin(n\pi\ln r),$$

其中

$$c_n=\frac{\int_1^e f(r)R_n(r)\rho(r)dr}{||R_n(r)||^2}=2\int_1^e f(r)(\sin n\pi\ln r)\,\frac{1}{r}dr\,.$$

例2.2.5 求解混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}\quad(0<x<l)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=0}=0,\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\gamma u\right)\mid_{x=l}=0,\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x),\end{cases}\tag{1}$$

解：作分离变量$u=T(t)X(x)$, 代入泛定方程并结合边界条件得到固有值问题：

$$\begin{cases}X''+\lambda X(x)=0,\ (0<x<l)\\ X'(0)=0,\ X'(l)+\gamma X(l)=0.\end{cases}\tag{2}$$

和常微分方程：

$$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0.$$

以上固有值问题(2)中，由于在$x=l$端点有第三类边界条件，根据$Sturm-Liville$定理可判定：$\lambda>0$, 于是设$\lambda=\omega^2>0$,解得

$$X(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x,$$

代入$x=0$端的边界条件得到：

$$X'(0)=B\omega=0 \implies B=0$$

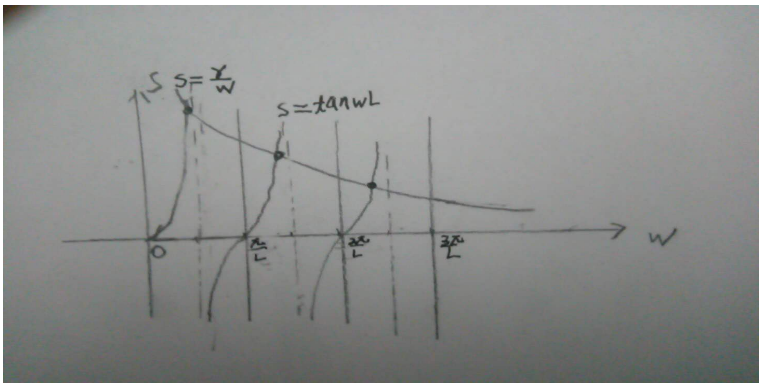
于是$X(x)=A\cos\omega x$, 再代入$x=l$的边界条件得到：

$$X'(l)+\gamma X(l)=-A\omega\sin\omega l+A\gamma\cos\omega l=0,$$

于是解得

$$\tan\omega l=\frac{\gamma}{\omega}\,. \qquad (3)$$

为了确定此超越代数方程(3)的ω, 作下图



图中曲线$s=\dfrac{\gamma}{\omega}$和曲线族$s=\tan\omega l$交点的横坐标就是待求的根ω, 设第n 个正根为ω_n, 则

固有值：$\lambda_n={\omega_n}^2$, $\quad (n=1,2,3...)$ 　　固有函数：$X_n(x)=\cos\omega_n x\,.$

相应地，

$$T_n(t)=C_n e^{-a^2\omega_n^2\,t}$$

由叠加原理，可设

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n e^{-a^2\omega_n^2\,t}\cos\omega_n x \qquad (4)$$

又

$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\cos\omega_n x=\varphi(x),$$

其中C_n可由S-L定理中的广义Fourier系数确定公式给出，即

$$C_n=\frac{1}{||x_n(x)||^2}\int_0^l\varphi(x)\cos\omega_n x\,dx \qquad (5)$$

其中

$$||X_n(x)||^2=\int_0^l \cos^2\omega_n x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^l (1+\cos 2\omega_n x)\,dx=\frac{1}{2}(l+\frac{1}{2\omega_n}\sin 2\omega_n x\Big|_0^l)$$

$$=\frac{1}{2}(l+\frac{1}{2\omega_n}\sin 2\omega_n l)=\frac{1}{2}(l+\frac{1}{2\omega_n}\frac{2\tan\omega_n l}{1+\tan^2\omega_n l})=\frac{1}{2}\left(l+\frac{\gamma}{{\omega_n}^2+\gamma^2}\right).$$

最后整理得：

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(l+\frac{\gamma}{{\omega_n}^2+\gamma^2}\right)\right]^{-1}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\omega_n\xi\,d\xi\,e^{-a^2\omega_n^2 t}\cos\omega_n x\,.$$

例2.2.6求解矩形区域定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,(0<x<a,0<y<b)\\ u\mid_{x=0}=0,\ u\mid_{x=a}=f(y),\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=b}=0\,.\end{cases}$$

解:利用分离变量法, 设$u=X(x)Y(y)$, 代入方程分离变量得:

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=0\Longrightarrow\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda$$

也就是

$$X''(x)-\lambda X(x)=0,\quad Y''(y)+\lambda Y(y)=0$$

结合在$y=0$和$y=b$的齐次边界条件，得到固有值问题：

$$\begin{cases}Y''(y)+\lambda Y(y)=0,\ (0<y<b)\\ Y'(0)=Y'(b)=0.\end{cases}$$

解得:

$$\text{固有值}:\lambda_0=0,\ \lambda_n=(\frac{n\pi}{b})^2,\quad \text{固有函数}:Y_0(y)=1,\ Y_n(y)=\cos\frac{n\pi}{b}y.$$

相应地

$$X_0(x)=C_0+D_0x,\ X_n(x)=C_n\cosh\frac{n\pi}{b}x+D_n\sinh\frac{n\pi}{b}x$$

由叠加原理, 可设

$$u(x,y)=C_0+D_0x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n\cosh\frac{n\pi}{b}x+D_n\sinh\frac{n\pi}{b}x\right)\cos\frac{n\pi}{b}y$$

利用另一组边界条件,

$$u\mid_{x=0}=C_0+\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\,\cos\frac{n\pi}{b}y=0\implies C_n=0,\,(n=0,1,2...)$$

$$u\mid_{x=a}=D_0a+\sum_{n=1}^{+\infty}D_n\sinh\frac{n\pi a}{b}\cos\frac{n\pi}{b}y=f(y)$$

得出

$$D_0=\frac{1}{ab}\int_0^b f(y)dy,\ \ D_n=\frac{2}{b\sinh\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b f(y)\cos\frac{n\pi}{b}y\,dy,\ \ n=1,2,3...$$

$$u(x,y)=\frac{x}{ab}\int_0^b f(y)dy+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{b\sinh\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b f(\eta)\cos\frac{n\pi}{b}\eta\,d\eta\sinh\frac{n\pi}{b}x\cos\frac{n\pi}{b}y$$

例2.2.7 利用分离变量法求解

$$\begin{cases}u_t=x^2u_{xx}+3xu_x-2u,\quad(t>0,\,1<x<e)\\u(t,1)=u(t,e)=0\\u(0,x)=\dfrac{1}{x}[\sin(\pi\ln x)-\sin(2\pi\ln x)]\end{cases}$$

解题提示: 本题的泛定方程是变系数方程，分离变量后对应于欧拉方程，可化为常系数方程，这是解决本混合问题的关键。

解：利用分离变量法，令$u=T(t)X(x)$,

$$T_tX=x^2TX_{xx}+3xTX_x-2TX$$
$$\frac{T_t}{T}=\frac{x^2X_{xx}+3xX_x-2X}{X}=-\lambda$$

于是得到$T(t)$和$X(x)$满足的微分方程

$$T'(t)+\lambda T=0,\ \ x^2X''(x)+3xX'(x)+(\lambda-2)X=0$$

把分离变量形式解代入边界条件得：$T(t)X(1)=T(t)X(e)=0$, 由于$T(t)$不恒为0，则必有$X(1)=X(e)=0$,结合$X(t)$ 的方程得到固有值问题：

$$\begin{cases}x^2X''(x)+3xX'(x)+(\lambda-2)X=0,\\X(1)=X(e)=0\,.\end{cases}$$

此固有值问题的泛定方程是欧拉方程，故作自变量变换：$s=\ln x$, 这样我们得到常系数二阶微分方程固有值问题：

$$\begin{cases} X''(s)+2X'(s)+(\lambda-2)X=0,\ (0<s<1) \\ X(0)=X(1)=0. \end{cases}$$

求解此固有值问题得到：

$$\lambda_n=3+(n\pi)^2,\ X_n(s)=B_n e^{-s}\sin n\pi s$$

相应地把固有值λ_n代入$T(t)$ 满足的方程解得：

$$T_n(t)=e^{-(3+(n\pi)^2)t},$$

再自变量还原为x, 即有$X_n(x)=\dfrac{1}{x}\sin n\pi\ln x$：于是我们得到一系列满足泛定方程和边界条件的分离变量形式解

$$u_n(t,x)=T_n(t)X_n(x)=e^{-(3+(n\pi)^2)t}(\frac{1}{x}\sin n\pi\ln x)$$

由叠加原理，设

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}B_n e^{-(3+(n\pi)^2)t}(\frac{1}{x}\sin n\pi\ln x)$$

利用

$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}B_n(\frac{1}{x}\sin n\pi\ln x)=\frac{1}{x}[\sin(\pi\ln x)-\sin(2\pi\ln x)]$$

直接比较可得傅立叶系数：

$$B_1=1,\ B_2=-1,\ \text{其余}B_n=0$$

这样最后求得此混合问题的解：

$$u=e^{-(3+\pi^2)t}\frac{1}{x}\sin(\pi\ln x)-e^{-(3+4\pi^2)t}\frac{1}{x}\sin(2\pi\ln x)$$

例2.2.8 求解以下高阶方程固有值问题：

$$\begin{cases} y^{(4)}+\lambda y=0,\ (0<x<l) \\ y(0)=y(l)=y''(0)=y''(l)=0. \end{cases}$$

解题提示:这是4阶方程固有值问题，不能用Sturm-Liouville定理求解(Sturm-Liouville定理讨论的是2阶方程固有值问题)，因此要对固有值分情况讨论求解。

解：泛定方程的特征方程是

$$k^4+\lambda=0$$

下面对λ不同取值进行讨论：

1) $\lambda>0$, 令$\lambda=\omega^4$, $(\omega>0)$, 这时特征根为两对共轭复根：

$$k_{1,2}=\omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\right),\ k_{3,4}=\omega\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\right),$$

相应的泛定方程解为：

$$y(x)=C_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\omega x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\omega x+C_2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\omega x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\omega x+C_3e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\omega x+C_4e^{\frac{-\sqrt{2}}{2}\omega x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\omega x$$

代入边界条件解得:

$$C_1=C_2=C_3=C_4=0.$$

这样$\lambda>0$时无相应的固有值。

2)通过类似地讨论，$\lambda=0$也不是固有值。

3)最后讨论$\lambda<0$的情况：令$\lambda=-\omega^4$, 这样特征方程4个特征根为：

$$k_{1,2}=\pm\omega,\quad k_{3,4}=\pm i\omega$$

这时

$$y(x)=C_1e^{\omega x}+C_2e^{-\omega x}+C_3\cos\omega x+C_4\sin\omega x$$

代入边界条件$y(0)=y(l)=y''(0)=y''(l)=0$, 得到：

$$C_1+C_2+C_3=0,\ \ C_1+C_2-C_3=0$$

$$C_1e^{\omega l}+C_2e^{-\omega l}+C_3\cos\omega l+C_4\sin\omega l=0,$$

$$C_1e^{\omega l}+C_2e^{-\omega l}-C_3\cos\omega l-C_4\sin\omega l=0,$$

解得

$$C_1=C_2=C_3=0,\quad C_4\sin\omega l=0.$$

所以要寻求非零解，只有$C_4\neq 0$, 因此

$$C_4\sin\omega l=0\ \Rightarrow\ \sin\omega l=0\ \Rightarrow\ \omega l=n\pi\ \Rightarrow\ \omega=\frac{n\pi}{l}$$

于是得到此固有值问题的固有值和固有函数：

$$\lambda_n=-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4,\quad y_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}\ \ (n=1,2,3...)$$

例2.2.9 求二维热传导方程$u_t=a^2\Delta_2 u$所有满足$\lim\limits_{t\to+\infty}u=0$的分离变量解

解: 由于$u=u(t,x,y)$,所以分离变量解设为$u=T(t)X(x)Y(y)$, 代入方程得到

$$T_tXY=a^2(TX_{xx}Y+TXY_{yy})$$

$$\frac{T_t}{a^2T}=\frac{X_{xx}}{X}+\frac{Y_{yy}}{Y}$$

取

$$\frac{X_{xx}}{X}=-\lambda,\ \frac{Y_{yy}}{Y}=-\mu$$

则

$$\frac{T_t}{a^2T}=-(\lambda+\mu)$$

解得

$$T(t)=e^{-a^2(\lambda+\mu)t}$$

要使$\lim\limits_{t\to+\infty}u=0$，只需$\lim\limits_{t\to+\infty}T(t)=0$, 显然只要满足:$\lambda+\mu>0$, 下面分几种情况讨论：

1)$\lambda>0,\mu>0$,这时满足条件$\lambda+\mu>0$, 记$\lambda=\omega^2$, $\mu=\gamma^2$,代入$X(x),Y(y)$满足方程解得：

$$X(x)=A_1\cos\omega x+B_1\sin\omega x,\ Y(y)=C_1\cos\gamma y+D_1\sin\gamma y$$

$$u(t,x)=e^{-a^2(\omega^2+\gamma^2)t}.\begin{Bmatrix}\cos\omega x\\ \sin\omega x\end{Bmatrix}.\begin{Bmatrix}\cos\gamma y\\ \sin\gamma y\end{Bmatrix}$$

（其中$\begin{Bmatrix}\cos\omega x\\ \sin\omega x\end{Bmatrix}$表示$\cos\omega x$ 和$\sin\omega x$的线性组合。）类似地，符合要求的解还有以下几种情况:

2)$\lambda>0,\mu<0$,而$\lambda+\mu>0$, 记$\lambda=\omega^2$, $\mu=-\gamma^2$,

$$u(t,x)=e^{-a^2(\omega^2-\gamma^2)t}.\begin{Bmatrix}\cos\omega x\\ \sin\omega x\end{Bmatrix}.\begin{Bmatrix}e^{\gamma y}\\ e^{-\gamma y}\end{Bmatrix}\qquad(\text{其中}\omega>\gamma>0)$$

3)$\lambda<0,\mu>0$,$\lambda+\mu>0$, 记$\lambda=-\omega^2$, $\mu=\gamma^2$,

$$u(t,x)=e^{-a^2(\gamma^2-\omega^2)t}.\begin{Bmatrix}e^{\omega x}\\ e^{-\omega x}\end{Bmatrix}.\begin{Bmatrix}\cos\gamma y\\ \sin\gamma y\end{Bmatrix}\qquad(\text{其中}\gamma>\omega>0)$$

4)$\lambda>0,\mu=0$, 记$\lambda=\omega^2$,

$$u(t,x)=e^{-a^2\omega^2t}.\begin{Bmatrix}\cos\omega x\\ \sin\omega x\end{Bmatrix}.\begin{Bmatrix}1\\ y\end{Bmatrix}$$

5)$\lambda=0,\mu>0$, 记$\mu=\gamma^2$,

$$u(t,x)=e^{-a^2\gamma^2 t}.\begin{Bmatrix}1\\x\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\cos\omega y\\\sin\omega y\end{Bmatrix}$$

2.3 非齐次问题

方程非齐次，边界条件为齐次的混合问题

考虑以下非齐次方程混合问题模型：

$$\begin{cases}L_t u+L_x u=f(t,x),\ (t>0,\ x_1<x<x_2) & (2.3.1.a)\\ \alpha_1 u_x(t,x_1)-\beta_1 u(t,x_2)=0,\ \alpha_2 u_x(t,x_2)+\beta_2 u(t,x_2)=0, & (2.3.1.b)\\ u(0,x)=\varphi(x),\ u_t(0,x)=\psi(x). & (2.3.1.c)\end{cases}$$

其中$L_t,\ L_x$是关于t,x的二阶常系数二阶线性偏微分算子,另外$\alpha_i,\ \beta_j\geq 0,(i,j=1,2)$.
由于方程是非齐次的，一般不能直接用分离变量求解，以下以弦振动非齐次方程混合问题为例，说明典型的解法：

考察以下弦振动非齐次方程混合问题：

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x),\ (t>0,\ 0<x<l) & (2.3.2.a)\\ u(t,0)=u(t,l)=0, & (2.3.2.b)\\ u(0,x)=\varphi(x),u_t(0,x)=\psi(x) & (2.3.2.c)\end{cases}$$

常用以下三种方法来解决混合问题:

1. 特解法： 如可用观察或其它简单方法先求出u满足的非齐次方程的一个特解在u_1，此特解**不但要满足非齐次的泛定方程，而且同时要满足齐次边界条件**。这样作变换：$u=V+u_1$, 则V所满足新的混合问题的泛定方程和边界条件都是齐次的，就可以直接用分离变量求解了。

如在以上弦振动非齐次混合问题中取$f(t,x)=Ax,\ \varphi(x)=0,\ \psi(x)=0,\ l=1$，则问题具体为：

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+Ax,\ (t>0,\ 0<x<1) & (2.3.3.a)\\ u(t,0)=u(t,1)=0, & (2.3.3.b)\\ u(0,x)=0,u_t(0,x)=0. & (2.3.3.c)\end{cases}$$

显然，问题(2.3)的泛定方程有解$u_0=-\frac{Ax^3}{6a^2}$, 但这个解不满足齐次的边界条件，但我们可待定u_1 同时满足泛定方程和边界条件, 设

$$u_1=u_0+bx+c=-\frac{Ax^3}{6a^2}+bx+c$$

由于要求

$$u_1\mid_{x=0}=0\Longrightarrow c=0,\ u_1\mid_{x=1}=-\frac{A}{6a^2}+b=0\Longrightarrow b=\frac{A}{6a^2}$$

于是

$$u_1=\frac{A}{6a^2}(x-x^3)$$

作变换：$u=V+u_1$, 则V满足齐次化方程：

$$\begin{cases}V_{tt}=a^2V_{xx},\ (t>0,\ 0<x<1)\\ V(t,0)=V(t,1)=0,\\ V(0,x)=-u_1(x)=\dfrac{A}{6a^2}(x^3-x),\ V_t(0,x)=0\end{cases}$$

而这个V的混合问题就可直接使用分离变量求解了。

2. 利用叠加原理结合齐次化原理：

以上的弦振动非齐次混合问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x),\ (t>0,\ 0<x<l)\\ u(t,0)=u(t,l)=0,\\ u(0,x)=\varphi(x),u_t(0,x)=\psi(x)\end{cases}$$

u可分解为： $u=u_1+u_2$, 其中u_1满足

$$\begin{cases}u_{1tt}=a^2u_{1xx}\ (t>0,\ 0<x<l)\\ u_1(t,0)=u_1(t,l)=0,\\ u_1(0,x)=\varphi(x),u_{1t}(0,x)=\psi(x)\end{cases}$$

而u_2满足

$$\begin{cases}u_{2tt}=a^2u_{2xx}+f(t,x),\ (t>0,\ 0<x<l)\\ u_2(t,0)=u_2(t,l)=0,\\ u_2(0,x)=0,u_{2t}(0,x)=0\end{cases}$$

其中, u_1我们已经在本章第一节用分离变量求出了，而u_2可用齐次化原理解决，即设立u_2的齐次化问题：

$$\begin{cases}W_{tt}=a^2W_{xx},\ (t>\tau,\ 0<x<l)\\ W(t,0)=W(t,l)=0,\\ W\mid_{t=\tau}=0,\ \frac{\partial W}{\partial t}\mid_{t=\tau}=f(\tau,\ x)\end{cases}$$

而再作时间平移$t_1 = t-\tau$, 就可直接用分离变量求出W，再利用以下积分公式求出u_2：

$$u_2(t,x) = \int_0^t W(t,x,\tau)\,d\tau$$

3. 固有函数展开法(Fourier方法):

对于非齐次混合问题，可以利用对应的齐次方程以及已知的齐次边界条件组成一个齐次问题。用分离变量法求解此齐次问题会产生完备的正交函数系。非齐次方程的解就可在这个完备的正交函数系展开，然后再根据方程和定解条件定出展开系数使问题得到解决。

这种方法基于以下思路：由于非齐次问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x),\ (t>0,\ 0<x<l) \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x)\,. \end{cases}$$

对应的齐次方程和齐次边界条件构成以下问题：

$$\begin{cases} V_{tt} = a^2 V_{xx},\ (t>0,\ 0<x<l) \\ V(t,0) = V(t,l) = 0\,. \end{cases}$$

设$V = T(t)X(x)$, 代入这个V满足的问题并求解相应的固有值问题，我们得到固有值和完备正交函数系：

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2,\ \ X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x,\ 1,2,3...$$

把非齐次问题的解$u(t,x)$看成定义在$0<x<l$的x的函数(把t先看成参数), 这样由完备性，$u(t,x)$可以在完备系$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x$ 下展开，即可设

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

相应地，非齐次项和初值也可展开：

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

以下一系列展开式代入非齐次问题(2.3.2),得到：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} T_n''(t)\sin\frac{n\pi}{l}x - a^2\sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t)\left(\sin\frac{n\pi}{l}x\right)'' = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)\right)\sin\frac{n\pi}{l}x = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

和

$$\sum_{n=1}^{+\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\ \ \sum_{n=1}^{+\infty} T_n'(0)\sin\frac{n\pi}{l}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

比较$\sin\frac{n\pi}{l}x$的系数，得到确定$T_n(t)$的常微方程初值问题：

$$\begin{cases} T_n''(t)+\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0)=\varphi_n,\ \ T_n'(0)=\psi_n. \end{cases}$$

可用$Laplace$变换求解$T_n(t)$: 记$T_n(t)$的$Laplace$变换像为$G_n(p)$, 即$L[T_n(t)] = G_n(p)$. 进一步:

$$L[T_n''(t)] = p^2G_n(p) - p\varphi_n - \psi_n$$

并得到$G_n(p)$的代数方程

$$p^2G_n(p) - p\varphi_n - \psi_n + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 G_n(p) = F_n(p)$$

解得：

$$G_n(p) = \frac{p\varphi_n + \psi_n + F_n(p)}{p^2+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}$$

作反变换：

$$L^{-1}\left[\frac{\varphi_n p}{p^2+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\right] = \varphi_n\cos\frac{n\pi a}{l}t,\quad L^{-1}\left[\frac{\psi_n}{p^2+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\right] = \frac{l\psi_n}{n\pi a}\sin\frac{n\pi a}{l}t,$$

$$L^{-1}\left[\frac{F_n(p)}{p^2+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\right] = L^{-1}[F_n(p)] * L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\right]$$

$$= f_n(t) * \frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi a}{l}t = \frac{l}{n\pi a}\int_0^t \sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau) f_n(\tau)d\tau.$$

因此

$$T_n(t) = L^{-1}[G_n(p)] = \varphi_n\cos\frac{n\pi a}{l}t + \psi_n\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi a}{l}t + \frac{l}{n\pi a}\int_0^t \sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)f_n(\tau)d\tau.$$

这样，最后得出

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\varphi_n\cos\frac{n\pi a}{l}t + \psi_n\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi a}{l}t + \frac{l}{n\pi a}\int_0^t \sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)f_n(\tau)d\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

例2.3.1 求解定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + Ae^{-\alpha x} (t > 0,\ 0 < x < l) \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0 \\ u(0, x) = T_0 \end{cases}$$

解法1： 使用特解法，观察到泛定方程有特解$u_0 = -\frac{A}{a^2\alpha^2} e^{-\alpha x}$,但这个解不满足齐次边界条件，因而可取$u_1 = -\frac{A}{a^2\alpha^2} e^{-\alpha x} + bx + c$也满足泛定方程,其中$b, c$根据边界条件待定。把$u_1$代入边界条件得到：

$$u_1 \mid_{x=0} = -\frac{A}{a^2\alpha^2} + c = 0 \implies c = \frac{A}{a^2\alpha^2}$$

$$u_1 \mid_{x=l} = -\frac{A}{a^2\alpha^2} e^{-\alpha l} + bl + c = 0 \implies b = \frac{1}{l} \left(\frac{A}{a^2\alpha^2} e^{-\alpha l} - \frac{A}{a^2\alpha^2} \right)$$

因此

$$u_1 = \frac{A}{a^2\alpha^2} \left(-e^{-\alpha x} + \frac{1}{l}(e^{-\alpha l} - 1)x + 1 \right)$$

作变换

$$u = v + u_1$$

则$v(t, x)$满足齐次化混合问题：

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} (t > 0,\ 0 < x < l) \\ v(t, 0) = v(t, l) = 0 \\ v(0, x) = T_0 - \frac{A}{a^2\alpha^2} \left(-e^{-\alpha x} + \frac{1}{l}(e^{-\alpha l} - 1)x + 1 \right) \end{cases}$$

用分离变量法令$v(t, x) = T(t)X(x)$ 到固有值问题：

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

和微分方程：

$$T'(t) + \lambda a^2 T = 0.$$

解固有值问题得到固有值和固有函数：

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2,\ X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

相应地

$$T_n(t) = e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 t}$$

利用叠加原理，设

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

由

$$V(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$=T_0-\frac{A}{a^2\alpha^2}\left(-e^{-\alpha x}+\frac{1}{l}(e^{-\alpha l}-1)x+1\right)$$

由正弦傅立叶级数系数确定公式：

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l[T_0-\frac{A}{a^2\alpha^2}(-e^{-\alpha x}+\frac{1}{l}(e^{-\alpha l}-1)x+1)]\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=2T_0\frac{1-(-1)^n}{n\pi}-\frac{2A}{a^2n\pi}\frac{(1-(-1)^n e^{-\alpha l})}{\alpha^2+(\frac{n\pi}{l})^2}$$

从而

$$u=u_1+v(t,x)=\frac{A}{a^2\alpha^2}\left(-e^{-\alpha x}+\frac{1}{l}(e^{-\alpha l}-1)x+1\right)+$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[2T_0\frac{(1-(-1)^n)}{n\pi}-\frac{2A}{a^2n\pi}\frac{(1-(-1)^n e^{-\alpha l})}{\alpha^2+(\frac{n\pi}{l})^2}]e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

解法2：$Fourier$ 方法(固有函数展开法)：设$H(t,x)$ 方满足程对应的齐次问题以及齐次边界条件, 即$H(t,x)$满足：

$$\begin{cases}H_t=a^2H_{xx}(t>0,\ 0<x<l)\\ H(t,0)=H(t,l)=0\end{cases}$$

类似地，作分离变量令$H(t,x)=T(t)X(x)$, 类似地, 由$X(x)$满足的固有值问题得出固有值和固有函数系为：

$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2,\ X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$$

设$u(t,x)$按此函数系作$Fourier$展开为：

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

把此定解问题中其它函数也按此函数系展开为：

$$e^{-\alpha x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n\pi}{l^2}\frac{(1-(-1)^n e^{-\alpha l})}{\alpha^2+(\frac{n\pi}{l})^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$T_n(t)$满足常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} T_n'(t)+\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=A\dfrac{2n\pi}{l^2}\dfrac{(1-(-1)^n e^{-\alpha l})}{\alpha^2+(\frac{n\pi}{l})^2} \\ T_n(0)=2T_0\dfrac{1-(-1)^n}{n\pi} \end{cases}$$

利用$Laplace$变换或者直接求解可解出

$$T_n(t)=\frac{2A}{n\pi a^2}\frac{(1-(-1)^n e^{-\alpha l})}{\alpha^2+(\frac{n\pi}{l})^2}\left(1-e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}\right)+2T_0\frac{1-(-1)^n}{n\pi}e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}$$

这样原混合问题解为

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{2A}{n\pi a^2}\frac{(1-(-1)^n e^{-\alpha l})}{\alpha^2+(\frac{n\pi}{l})^2}\left(1-e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}\right)+2T_0\frac{1-(-1)^n}{n\pi}e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}$$

注： 本例的特解法和固有函数展开法解的形式略有差别，但实际是一样的。(只是特解法中有一部分函数没有写成展开形式)

例2.3.2分别使用特解法，齐次化原理，固有函数展开法三种不同方法求解以下非齐次定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin 2x\sin\omega t,\ (0<x<\pi, t>0) \\ u\mid_{x=0}=0, u\mid_{x=\pi}=0. \\ u\mid_{t=0}=0, u_t\mid_{t=0}=0. \end{cases}$$

其中$\omega>0$且$\omega\neq 4$.

解法1：特解法 根据观察本题泛定方程及齐次边界条件，可设同时满足此定解问题中泛定方程和边界条件的特解是

$$u_1=k\sin 2x\sin\omega t,\ k\text{为待定系数}$$

由于u_1显然满足边界条件, 因此只要把u_1代入泛定方程即可定出k,实际上把u_1代入泛定方程得到：

$$-k\omega^2 sin2x\sin\omega t=-16ksin2x\sin\omega t+sin2x\sin\omega t$$

上式两边消去$sin2x\sin\omega t$, 整理后定出$k=\dfrac{1}{16-\omega^2}$ 即

$$u_1=\frac{1}{16-\omega^2}\sin 2x\sin\omega t,$$

作变换$u=v+u_1$,则v满足齐次混合问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=4\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ (0<x<\pi,t>0)\\ v\mid_{x=0}=0, v\mid_{x=\pi}=0.\\ v\mid_{t=0}=0,\ v_t\mid_{t=0}=-\dfrac{\omega}{16-\omega^2}\sin 2x\,.\end{cases}$$

下面我们就可以用分离变量法来求解v,为此令$v=T(t)X(x)$,代入泛定方程并结合边界条件得到固有值问题：

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0,\ (0<x<\pi)\\ X(0)=X(\pi)=0,\end{cases}$$

和$T(t)$满足的常微分方程

$$T''(t)+4\lambda T=0$$

求解固有值问题，得到固有值和固有函数分别为：

$$\lambda_n=n^2\,(n=1,2,3...),\ \ x_n(x)=\sin nx$$

相应地有：

$$T_n(t)=C_n\cos 2nt+D_n\sin 2nt$$

于是得到一系列分离变量形式解：

$$v_n(t,x)=T_n(t)X_n(x),\ (n=1,2,3...)$$

由叠加原理可设

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(C_n\cos 2nt+D_n\sin 2nt)\sin nx$$

再由初值条件：

$$v(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\sin nx=0\Rightarrow C_n=0$$

因而

$$v_t(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}2nD_n\sin nx=-\frac{\omega}{16-\omega^2}\sin 2x$$

直接比较系数得

$$D_2 = -\frac{\omega}{4(16-\omega^2)},\ \text{其余} D_n = 0 (n \neq 2)$$

综上，得到

$$u(t,x) = u_1 + v = \frac{1}{16-\omega^2}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{4}\sin 4t\right)\sin 2x$$

解法2：齐次化原理法:注意到此混合问题对应的是零初值条件，所以可以直接使用齐次化原理求解，即

$$u = \int_0^t w(t,x,\tau)d\tau$$

而$w(t,x,\tau)$满足齐次化定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ (t > \tau, 0 < x < \pi) \\ w\mid_{x=0} = 0, w\mid_{x=\pi} = 0. \\ w\mid_{t=\tau} = 0,\ w_t\mid_{t=\tau} = \sin 2x \sin\omega\tau \end{cases}$$

作自变量变换$t_1 = t-\tau$, 并记$v(t_1,x,\tau) = w(t,x,\tau) = w(t_1+\tau,x,\tau)$, 则$v(t_1,x,\tau)$满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial {t_1}^2} = 4\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ (t_1 > 0, 0 < x < \pi) \\ v\mid_{x=0} = 0, v\mid_{x=\pi} = 0. \\ v\mid_{t_1=0} = 0,\ v_{t_1}\mid_{t_1=0} = \sin 2x \sin\omega\tau \end{cases}$$

使用类似于解法1的分离变量过程，算得：

$$v(t_1,x,\tau) = \frac{\sin\omega\tau}{4}\sin 4t_1 \sin 2x$$

即

$$w(t,x,\tau) = v(t-\tau,x,\tau) = \frac{\sin\omega\tau}{4}\sin 4(t-\tau)\sin 2x$$

这样

$$u(t,x) = \int_0^t w(t,x,\tau)d\tau = \int_0^t \frac{\sin\omega\tau}{4}\sin 4(t-\tau)\sin 2x d\tau$$

$$= \frac{\sin 2x}{8}\int_0^t [\cos(\omega\tau - 4(t-\tau)) - \cos(\omega\tau + 4(t-\tau))]d\tau$$

$$=\frac{\sin 2x}{8}\left(\frac{\sin(\omega\tau-4(t-\tau))}{\omega+4}-\frac{\sin(\omega\tau+4(t-\tau))}{\omega-4}\right)\Big|_0^t$$

上式整理后得到

$$u(t,x)=\frac{1}{16-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{4}\sin 4t\right)\sin 2x$$

这和解法1(特解法)算出结果一样的。

解法3：固有函数展开法 解题步骤如下：根据此混合问题的泛定方程对应的齐次方程以及边界条件，我们考虑齐次问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}=4\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2},\ (t>0,0<x<\pi)\\ W\mid_{x=0}=0, W\mid_{x=\pi}=0.\end{cases}$$

然后用分离变量法求解这个齐次问题产生的相应固有值和固有函数系, 容易求得：

$$\text{固有值:}\lambda_n=n^2,\ \text{固有函数:}X_n(x)=\sin nx$$

这样我们就可把我们要求解的非齐次混合问题解在此固有函数系$X_n(x)$下展开(把t看成参数), 即设

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)\sin nx$$

代入泛定方程得到：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}T_n''(t)\sin nx=-4\sum_{n=1}^{+\infty}n^2T_n(t)\sin nx+\sin 2x\sin\omega t$$

比较$\sin nx$的系数得到：

$$T_n''(t)+4n^2T_n(t)=0(\ n\neq 2),\ \ T_2''(t)+16T_2(t)=\sin\omega t$$

再代入初值条件,即$u(0,x)=0, u_t(0,x)=0$, 相应地得出T_n的初值：

$$T_n(0)=0,\ T_n'(0)=0.\ (n=1,2,3...)$$

整理以上结果得到确定$T_n(t)$的问题：

$$\begin{cases}T_n''(t)+4n^2T_n(t)=0\\ T_n(0)=0,\ T_n'(0)=0\end{cases}\qquad(n\neq 2)$$

和

$$\begin{cases}T_2''(t)+16T_2(t)=\sin\omega t\\ T_2(0)=0,\ T_2'(0)=0\end{cases}$$

显然$n \neq 2$时，$T_n(t)=0$, 而使用$Laplace$变换(或其它求解方法), 容易求得

$$T_2(t)=\frac{1}{16-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{4}\sin 4t\right)$$

这样我们用固有函数展开法也求得了此定解问题的解：

$$u(t,x)=\frac{1}{16-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{4}\sin 4t\right)\sin 2x$$

一般非齐次混合问题

一般非齐次方程混合问题是指不仅泛定方程有可能非齐次，而且边界条件也有可能非齐次。通常把边界条件先齐次化再进行处理。我们用以下模型来说明：

$$\begin{cases} L_t u + L_x u = f(t,x),\ (t>0,\ a<x<b) & (2.3.4.a) \\ \left(\alpha_1 u-\beta_1\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}=g_1(t),\ \left(\alpha_2 u+\beta_2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}=g_2(t), & (2.3.4.b) \\ u\,|_{t=0}=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\,|_{t=0}=\psi(x). & (2.3.4.c) \end{cases}$$

处理这类问题**常用方法是先把边界条件齐次化**，再使用以上提出的处理非齐次方程但边界条件是齐次的混合问题的方法最后解决。为了把边界条件齐次化，可以设满足边界条件(2.3.4.b)的解为

$$v(t,x)=A(t)x+B(t)$$

利用$x=a$和$x=b$的两个端点的边界条件得出关于$A(t)$和$B(t)$的线性方程组，从而定出$A(t)$和$B(t)$. 若关于$A(t)$和$B(t)$的线性方程组无解,则$v(t,x)$可设为:$v(t,x)=A(t)x^2+B(t)$. 求出$v(t,x)$ 后，作变换

$$u=W(t,x)+v(t,x)$$

这样$W(t,x)$满足的就是齐次边界条件的混合问题了。

例2.3.3 求解一端固定，一端周期振动弦的自由振动问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t>0,\ 0<x<l) & (2.3.5.a) \\ u(t,0)=0,\ u(t,l)=\sin\omega t,\ (\omega\neq\dfrac{n\pi a}{l}) & (2.3.5.b) \\ u(0,x)=\varphi(x),\ u_t(0,x)=\psi(x)\,. & (2.3.5.c) \end{cases}$$

解法1：设有满足边界条件的解：$v(t,x)=A(t)x+B(t)$, 则

$$v(t,0)=B(t)=0,\ v(t,l)=A(t)l=\sin\omega t\Longrightarrow A(t)=\frac{\sin\omega t}{l}$$

得到

$$v(t,x) = \frac{\sin\omega t}{l}\,x$$

作变换；

$$u(t,x) = W(t,x) + \frac{\sin\omega t}{l}\,x$$

则$W(t,x)$满足了齐次边界的定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \dfrac{\omega^2}{l}x\sin\omega t, & (t>0,\ 0<x<l) \\ W(t,0)=0,\ W(t,l)=0, & \\ W(0,x)=\varphi(x),\ W_t(0,x)=\psi(x)-\dfrac{\omega}{l}x\,. & \end{cases}$$

而$W(t,x)$就可以用本节开始给出的求解齐次边界条件下的非齐次方程混合问题的求解法来求解了。

解法2:注意到非齐次边界项满足：$(sin\omega t)'' = -\omega^2\sin\omega t$, 我们设

$$v(t,x) = X(x)\sin\omega t$$

我们要想使$v(t,x)$同时满足泛定方程(2.3.5.a)和边界条件(2.3.5.b)。这样，先把$v(t,x)$代入泛定方程并两边消去$\sin\omega t$得到：

$$X''(x) + \frac{\omega^2}{a^2}X(x) = 0 \Longrightarrow X(x) = C\cos\frac{\omega x}{a} + D\sin\frac{\omega x}{a}$$

$v(t,x)$再代入边界条件有(2.3.5.b)：

$$X(0)\sin\omega t = 0,\ X(l)\sin\omega t = \sin\omega t,$$

即

$$X(0)=0, \quad X(l)=1\,.$$

于是定出

$$X(x) = \frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}$$

这样，令

$$u(t,x) = v(t,x) + W(t,x) = \frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\omega t + W(t,x)$$

则$W(t,x)$满足以下完全齐次化的混合问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \qquad (t>0,\ 0<x<l) & (2.3.6.a) \\ W(t,0)=0, \quad W(t,l)=0 & (2.3.6.b) \\ W(0,x)=\varphi(x), \quad W_t(0,x)=\psi(x)-\omega\dfrac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\,. & (2.3.6.c) \end{cases}$$

此混合问题(2.3.6)中的$W(t,x)$就可以直接用分离变量求解了。

非齐次边值问题

处理非齐次边值问题一个常用方法是：先观察或待定出非齐次方程的特解u_1, 再作变换$u=v+u_1$,方程就齐次化了。

例 2.3.4 **求解环形区域的定解问题:**

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12(x^2-y^2), \quad (a^2<x^2+y^2<b^2) \quad (2.3.7.a)\\ u\mid_{x^2+y^2=a^2}=1,\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mid_{x^2+y^2=b^2}=0\,. \qquad (2.3.7.b)\end{cases}$$

其中$\vec{n}$为边界$x^2+y^2=b^2$的外法向。

解：泛定方程是非齐次方程，观察方程形式后可设方程有特解：

$$u_1(x,y)=ax^4+by^4\,.$$

代入方程两边比较系数得: $a=1,\ b=-1$, 因而

$$u_1=x^4-y^4=(r\cos\theta)^4-(r\sin\theta)^4=r^4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=r^4\cos 2\theta$$

其中$(r,\,\theta)$为极坐标。令$u=V+u_1=V+r^4\cos 2\theta$,那么$V$满足以下齐次方程的边值问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 V=0, \quad (a<r<b) \qquad (2.3.8.a)\\ V\mid_{r=a}=1-a^4\cos 2\theta,\ \dfrac{\partial V}{\partial r}\mid_{r=b}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{\partial u_1}{\partial r}\right)\mid_{r=b}=-4b^3\cos 2\theta\,. \quad (2.3.8.b)\end{cases}$$

我们已经知道：极坐标下的齐次Laplace方程(2.3.8.a)的一般解为：

$$V(r,\theta)=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{+\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n})(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta).$$

利用圆环的两个边界的条件得到：

$$V\mid_{r=a}=A_0+B_0\ln a+\sum_{n=1}^{+\infty}(A_na^n+B_na^{-n})(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)=1-a^4\cos 2\theta,$$

$$\frac{\partial V}{\partial r}\mid_{r=b}=\left(B_0\frac{1}{r}+\sum_{n=1}^{+\infty}(nA_nr^{n-1}-nB_nr^{-(n+1)})(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)\right)\Big|_{r=b}$$

$$=B_0\frac{1}{b}+\sum_{n=1}^{+\infty}(nA_nb^{n-1}-nB_nb^{-(n+1)})(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)=-4b^3\cos 2\theta\,.$$

比较以上两式$\cos n\theta$, $\sin n\theta$以及常数项的系数得到：

$$A_0 + B_0 \ln a = 1, \quad C_2(A_2 a^2 + B_2 a^{-2}) = -a^4$$

$$B_0 \frac{1}{b} = 0, \quad C_2(2A_2 b - 2B_2 b^{-3}) = -4b^3$$

而其余的A_n, B_n均为0. 观察到以上代数方程中C_2可当作自由未知量，不妨取$C_2 = 1$, 然后相继解得:

$$B_0 = 0,\ A_0 = 1, \quad A_2 = -\frac{a^6 + 2b^6}{a^4 + b^4}, \quad B_2 = \frac{2a^4 b^6 - a^6 b^4}{a^4 + b^4}\,.$$

因此得到：

$$V = 1 + \left(-\frac{a^6 + 2b^6}{a^4 + b^4} r^2 + \frac{2a^4 b^6 - a^6 b^4}{a^4 + b^4} r^{-2} \right) \cos 2\theta$$

最后得到原定解问题的解：

$$u(r,\theta) = 1 + \left(r^4 - \frac{a^6 + 2b^6}{a^4 + b^4} r^2 + \frac{2a^4 b^6 - a^6 b^4}{a^4 + b^4} r^{-2} \right) \cos 2\theta\,.$$

例2.3.5 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}(t > 0,\ 0 < x < 1) \\ u_x(t,0) = 1,\ u(t,1) = 0 \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

解题提示: 本题是边界条件非齐次的混合问题，所以首先要把边界条件齐次化，再求解出此混合问题。

解：设有满足边界条件的解$v(t,x) = A(t)x + B(t)$,代入边界条件得到

$$v_x(t,0) = A(t) = 1,\ v(t,1) = A(t) + B(t) = 0 \Rightarrow B(t) = -A(t) = -1.$$

这样$v(t,x) = x - 1$, 因此，作变换：

$$u = W + (x-1),$$

则W满足齐次边界的混合问题：

$$\begin{cases} W_{tt} = a^2 W_{xx}, \quad (t > 0,\ 0 < x < 1) \\ W_x(t,0) = 0,\ W(t,1) = 0, \\ W(0,x) = 1 - x, W_t(0,x) = 0\,. \end{cases}$$

W满足的是齐次方程和齐次边界条件的混合问题，因此用分离变量法,设$W = T(t)X(x)$,结合边界条件得到固有值问题：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(1) = 0, \end{cases}$$

和微分方程

$$T''(t) + \lambda a^2 T = 0$$

求解固有值问题得固有值$\lambda_n = (n\pi + \frac{\pi}{2})^2\ (n = 0, 1, 2...)$, 固有函数:$X_n(x) = \cos(n\pi + \frac{\pi}{2})x$,相应地

$$T_n(t) = C_n \cos(n\pi + \frac{\pi}{2})at + D_n \sin(n\pi + \frac{\pi}{2})at$$

由叠加原理, 可设

$$W(t, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (C_n \cos \frac{2n+1}{2}\pi at + D_n \sin \frac{2n+1}{2}\pi at) \cos \frac{2n+1}{2}\pi x$$

$$W_t(0, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2}\pi a D_n \cos \frac{2n+1}{2}\pi x = 0,$$

解得$D_n = 0$, 再由

$$W(0, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cos \frac{2n+1}{2}\pi x = 1 - x$$

由傅立叶系数确定公式

$$C_n = 2\int_0^1 (1 - x) \cos \frac{2n+1}{2}\pi x\, dx = \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}$$

所以

$$W(t, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2} \cos \frac{2n+1}{2}\pi at \cos \frac{2n+1}{2}\pi x$$

这样，最终解得原定解问题的解：

$$u(t, x) = x - 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2} \cos \frac{2n+1}{2}\pi at \cos \frac{2n+1}{2}\pi x$$

例2.3.6求解以下非齐次Possion方程边值问题:

$$\begin{cases} \Delta_2 u = a + b(x^2 - y^2)\ (a, b\text{为常数}, r < R) \\ u(R, \theta) = C \end{cases}$$

解题提示: 这是一个圆内Laplace方程的非齐次边值问题，首先应该求出特解使方程齐次化，然后使用圆内齐次Laplace方程求解的极坐标公式求解。

解:由于$\Delta_2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 所以可以观察出方程有显然特解:

$$u_1 = \frac{a}{4}(x^2+y^2) + \frac{b}{12}(x^4-y^4) = \frac{a}{4}r^2 + \frac{b}{12}r^4\cos 2\theta$$

作变换:

$$u = V + u_1 = V + \frac{a}{4}r^2 + \frac{b}{12}r^4\cos 2\theta$$

则有:

$$\begin{cases} \Delta_2 V = 0, \quad (a,b\text{为常数}, r<R) \\ V(R,\theta) = C - \dfrac{a}{4}R^2 - \dfrac{b}{12}R^4\cos 2\theta \end{cases}$$

由齐次Laplace方程在圆内解的一般公式,可设

$$V = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{R})^n(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)$$

依据边界条件有:

$$V\mid_{r=R} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta) = C - \frac{a}{4}R^2 - \frac{b}{12}R^4\cos 2\theta$$

此式比较系数得到:

$$A_0 = 2C - \frac{a}{2}R^2,\ A_2 = -\frac{b}{12}R^4, \text{其余的}A_n, B_n\text{都为}0$$

这样

$$V(r,\theta) = C - \frac{a}{4}R^2 - \frac{b}{12}R^2r^2\cos 2\theta$$

最后得到:

$$u = V + u_1 = C + \frac{a}{4}(r^2-R^2) + \frac{b}{12}r^2(r^2-R^2)\cos 2\theta\,.$$

例2.3.7 求双调和方程定解问题:

$$\begin{cases} \Delta^2\, u = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 u = 0, \quad (0<x<l) & (2.3.9.a) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mid_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mid_{x=l} = 0, & (2.3.9.b) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\text{不恒为}0. & (2.3.9.c) \end{cases}$$

的所有**分离变量形式的解**。

解：设$u=X(x)Y(y)$, 代入泛定方程得到：

$$\frac{X^{(4)}}{X}+2\frac{X''Y''}{XY}+\frac{Y^{(4)}}{Y}=0. \qquad (2.3.10)$$

取

$$\frac{X''}{X}=-\lambda,\ 即X''=-\lambda X\Longrightarrow X^{(4)}=\lambda^2 X$$

此结果代入方程(2.3.10)，则有：

$$Y^{(4)}-2\lambda Y''+\lambda^2 Y=0\,. \qquad (2.3.11)$$

把$u=X(x)Y(y)$代入到边界条件(2.3.9.b)：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,|_{x=0}=X(0)Y''(y)=0,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,|_{x=l}=X(l)Y''(y)=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}不恒为0\Longrightarrow X(x)Y''(y)不恒为0\Longrightarrow Y''(y)不恒为0$$

这样就有

$$X(0)=0,\quad X(l)=0.$$

相应地结合$X(x)$的方程形成固有值问题：

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, \quad (0<x<l) \\ X(0)=0,\ X(l)=0. \end{cases}$$

解得

$$固有值\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ 固有函数X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$$

在$\lambda=\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$时，$Y(y)$的微分方程(2.3.11)的特征方程为：

$$k^4-2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2k^2+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4=0,$$

有两个二重根

$$k_{1,2}=\frac{n\pi}{l},\quad k_{3,4}=-\frac{n\pi}{l},$$

因此解得：

$$Y_n(y)=(A_n+B_ny)\cosh\frac{n\pi}{l}y+(C_n+D_ny)\sinh\frac{n\pi}{l}y\,.$$

于是问题的所有分离变量的解为：

$$\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\left[(A_n+B_ny)\cosh\frac{n\pi}{l}y+(C_n+D_ny)\sinh\frac{n\pi}{l}y\right]\right\}_{n=1}^{+\infty}$$

第三章：特殊函数：

一本章概述和学习要求：

三维$Laplace$方程(或$Helmholtz$方程等)在柱坐标下分离变量时，产生变系数的常微分方程：$Bessel$方程，在球坐标轴对称情形下产生$Legendre$方程。对这两个常微分方程分别使用广义幂级数求解法和幂级数求解法进行求解，相应的$Bessel$方程的解就是$Bessel$函数，$Legendre$方程的有界解就是$Legendre$函数。之后列出了这两个特殊函数详细性质并对两个方程的固有值问题进行了全面的论述。 最后利用这些结果解决了与$Bessel$方程和$Legendre$方程相关的一系列定解问题。另外还对三维$Laplace$方程在非轴对称情形下分离变量，讨论了产生的伴随$Legendre$方程以及固有值问题。另外还对$Bessel$ 方程的衍生问题：球$Bessel$方程问题，虚变量的$Bessel$方程问题等进行讨论。

通过本章的学习，要能熟知$Bessel$方程和$Legendre$方程产生的基本背景，能掌握求解这两个方程方法，熟练掌握$Bessel$函数和$Legendre$函数的性质，特别是固有值问题的相关结论。最终能利用这些特殊函数求解相应的定解问题。

3.1 Helmholtz方程在三种正交坐标系下的分离变量以及Bessel方程，Legendre方程的产生背景

考虑三维波动方程或三维热传导方程，即

$$u_{tt} = a^2\Delta_3 u, \ \text{或}\ u_t = a^2\Delta_3 u$$

作分离变量时候，均可令$u(t,x,y,z) = T(t)v(x,y,z)$,代入方程并且两边除以$Tv$得到:

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{\Delta_3 v}{v} \ \text{或}\ \frac{T'}{a^2T} = \frac{\Delta_3 v}{v}$$

分离得到常微分方程

$$T'' + a^2k^2T = 0, \ \text{或} T' + a^2k^2T = 0$$

而$v(x,y,z)$均满足$Helmholtz$ 方程：

$$\Delta_3 v + k^2 v = 0 \qquad (3.1.1)$$

以下，我们对$Helmholtz$ 方程继续分离变量，将在以下三种正交坐标系下讨论：

1. $Helmholtz$ 方程在直角坐标系下分离变量

由于在直角坐标系下

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

设$V(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$代入$Helmholtz$方程(3.1.1)并两边除以XYZ得到：

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0\,.$$

在以上方程中令

$$\frac{X''}{X} = -\lambda,\ \ \frac{Y''}{Y} = -\mu,\ \ \frac{Z''}{Z} = -\nu\,.$$

于是得到常微分方程：

$$X'' + \lambda X = 0, \quad Y'' + \mu Y = 0, \quad Z'' + \nu Z = 0\,.$$

和参数关系式：

$$\lambda + \mu + \nu = k^2$$

它们配以相应的齐次边界条件，分别构成最简单的S-L型方程的固有值问题，求出相应的固有值，固有函数，可求得高维$Fourier$展开形式的解。由于本章将多次遇到二元函数的广义$Fourier$ 展开，我们先给出以下定理：

定理3.1.1 设$\{X_n(x),\ n=1,2....\}$为区间$[0,a]$上带权$\rho(x)$一元完备正交系，$\{Y_m(y),$ $m=1,2....\}$ 为区间$[0,b]$上带权$\sigma(y)$一元完备正交系，则二元函数系$X_n(x)Y_m(y)$是$[0,a]\times[0,b]$上加权$\rho(x)\,.\,\sigma(y)$的完备正交系,任取

$$f(x,y) \in L^2_{\rho\sigma}\left[[0,a]\times[0,b]\right] = \{f(x,y)|\int_0^a\int_0^b |f(x,y)|^2\rho(x)\sigma(y)\,dydx < +\infty,\}$$

有：

$$f(x,y) = \sum_{nm=1}^{+\infty} C_{nm}X_n(x)Y_m(y) \qquad (3.1.2)$$

其中系数

$$C_{nm} = \frac{\int_0^a\int_0^b f(x,y)\,X_n(x)Y_m(y)\rho(x)\sigma(y)dydx}{||X_n(x)||^2||Y_m(y)||^2}$$

有时，Y的完备系是相对于每个固定的n而言的, 即完备系为$Y_{nm}(y)$,这时以上二元函数的广义$Fourier$ 展开定理修正为以下形式：

定理 3.1.1′ 设$\{X_n(x),\ n=1,2....\}$为区间$[0,a]$上带权$\rho(x)$一元完备正交系，对于每个固定的n, $\{Y_{nm}(y),\ m=1,2....\}$ 为区间$[0,b]$上带权$\sigma(y)$一元完备正

交系，则二元函数系$X_n(x)Y_{nm}(y)$是$[0,a]\times[0,b]$上加权$\rho(x)\,.\,\sigma(y)$ 的完备正交系, 任取

$$f(x,y)\in L^2_{\rho\sigma}\,[[0,a]\times[0,b]]=\{f(x,y)|\int_0^a\int_0^b|f(x,y)|^2\rho(x)\sigma(y)\,dydx<+\infty,\}$$

有：

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}C_{nm}X_n(x)Y_{nm}(y) \qquad (3.1.2)'$$

其中系数

$$C_{nm}=\frac{\int_0^a\int_0^b f(x,y)\,X_n(x)Y_{nm}(y)\rho(x)\sigma(y)dydx}{||X_n(x)||^2||Y_{nm}(y)||^2}$$

例3.1.1 求长方体内稳恒温度分布：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad (0<x<a,\, 0<y<b,\, 0<z<c,) & (3.1.3.a)\\ u\mid_{x=0}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=a}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=0}=u\mid_{y=b}=0, & (3.1.3.b)\\ u\mid_{z=0}=0, \qquad u\mid_{z=c}=\varphi(x,y)\,. & (3.1.3.c)\end{cases}$$

解： 设$u=X(x)Y(y)Z(y)$,代入方程并结合齐次边界条件得到：

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0,\\ X(0)=X'(a)=0,\end{cases} \qquad \begin{cases}Y''+\mu Y=0,\\ Y'(0)=Y(b)=0.\end{cases}$$

以及常微分方程：

$$Z''-(\lambda+\mu)Z=0$$

以上两个固有值问题的解为：

$$\lambda_n=\left[\frac{(2n+1)\pi}{2a}\right]^2, \quad X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a}x, \quad n=0,1,2...,$$

$$\mu_m=\left[\frac{(2m+1)\pi}{2b}\right]^2, \quad Y_m(y)=\cos\frac{(2m+1)\pi}{2b}y, \quad m=0,1,2...,$$

相应地

$$Z_{nm}(z)=C_{nm}\cosh\omega_{nm}z+D_{nm}sinh\,\omega_{nm}z, \quad \omega_{nm}=\sqrt{\lambda_n+\mu_m}$$

由叠加原理，可设

$$u(x,y,z)=\sum_{nm=0}^{+\infty}(C_{nm}\cosh\omega_{nm}z+D_{nm}sinh\,\omega_{nm}z)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a}x\,\cos\frac{(2m+1)\pi}{2b}y\,.$$

再代入关于z的边界条件：

$$u\mid_{z=0}=\sum_{nm=0}^{+\infty}C_{nm}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a}x\,\cos\frac{(2m+1)\pi}{2b}y\,=0\implies C_{nm}=0\,.$$

再由

$$u\mid_{z=c}=\sum_{n,m=0}^{+\infty}D_{nm}sinh\,\omega_{nm}c\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a}x\,\cos\frac{(2m+1)\pi}{2b}y\,=\varphi(x,y)$$

由二元函数的$Fourier$展开定理3.1.1确定出

$$D_{nm}sinh\omega_{nm}c=\frac{\int_0^a\int_0^b\varphi(x,y)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a}x\,\cos\frac{(2m+1)\pi}{2b}y\,dy\,dx}{||X_n(x)||^2||Y_m(y)||^2}$$

而其中

$$||X_n(x)||^2=\int_0^a\sin^2\frac{(2n+1)\pi}{2a}x\,dx=\frac{a}{2},\ ||Y_n(y)||^2=\int_0^b\cos^2\frac{(2m+1)\pi}{2b}y\,dy=\frac{b}{2}\,.$$

这样D_{nm}化为:

$$D_{nm}=\frac{4}{absinh\omega_{nm}c}\int_0^a\int_0^b\varphi(x,y)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a}x\,\cos\frac{(2m+1)\pi}{2b}y\,dy\,dx$$

2. $Helmholtz$ 方程在柱坐标系下分离变量

解：在柱坐标下$Helmholtz$ 方程为：

$$\Delta_3u+k^2u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+k^2u=0,\qquad(3.1.4)$$

作分离变量, 令$u(r,\theta,z)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)$, 代入方程两边除以$R\Theta Z$ 有:

$$\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta}+\frac{Z''}{Z}+k^2=0,\qquad(3.1.5)$$

由于此方程含θ的部分和含有z的部分分别是$\frac{\Theta''}{\Theta}$和$\frac{Z''}{Z}$, 故可把这两个独立部分取成独立常数，故可令

$$\frac{Z''}{Z}=-\mu,\ \ \frac{\Theta''}{\Theta}=-\sigma\,.\qquad(3.1.6)$$

上式代入式(3.1.5)得出$R(r)$满足：

$$\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R}-\frac{1}{r^2}\sigma-\mu+k^2=0.$$

令$\lambda=k^2-\mu$,, 并记$\sigma=\nu^2$ 代入上式并整理得到：

$$\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R}-\frac{\nu^2}{r^2}+\lambda=0\Rightarrow(rR')'+\left(\lambda r-\frac{\nu^2}{r}\right)R=0\qquad(3.1.7)$$

把所得分离变量方程(3.1.6)和(3.1.7)整理后，得到$Z(z),\Theta(\theta),R(r)$满足的微分方程：

$$Z''+\mu Z=0,\ \ \Theta''+\sigma\Theta=0,$$

和

$$(rR')'+\left(\lambda r-\frac{\nu^2}{r}\right)R=0,\qquad(3.1.8)$$

这个关于$R(r)$的方程(3.1.8)是个二阶变系数微分方程，经变换$x=\sqrt{\lambda}r$, 并记$y(x)=R(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})$, 此方程变为：

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0\qquad(3.1.9)$$

此方程称为ν阶**Bessel方程**, 这将是本章重点讨论的特殊函数方程之一。

3. $Helmholtz$ 方程在球坐标系下分离变量

在球坐标系下,$Helmholtz$ 方程表示为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0\,.\qquad(3.1.10)$$

作分离变量$u=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$,代入此方程得到：

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})\Theta\Phi+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})R\Phi+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}R\Theta+k^2R\Theta\Phi=0.$$

上式两边除以$R\Theta\Phi$,得到：

$$\frac{\frac{1}{r^2}\left(r^2R'\right)'}{R}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi}\right]+k^2=0.\qquad(3.1.11)$$

为了得到分离变量的方程，首先令只含φ的独立部分为常数，即

$$\frac{\Phi''}{\Phi}=-\mu,\ \ \mu为常数$$

代入(3.1.11)式得到：

$$\frac{\frac{1}{r^2}\left(r^2R'\right)'}{R}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta}+\frac{-\mu}{\sin^2\theta}\right]+k^2=0. \tag{3.1.12}$$

类似地，在此式中把含θ的独立部分令成常数，即

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta}+\frac{-\mu}{\sin^2\theta}=-\lambda,$$

最后就剥离出$R(r)$满足的微分方程:

$$\frac{\frac{1}{r^2}\left(r^2R'\right)'}{R}-\frac{\lambda}{r^2}+k^2=0.$$

整理以上结果就得到$\Phi(\varphi), R(r), \Theta(\theta)$,满足的常微分方程为：

$$\Phi''+\mu\Phi=0,$$

$$\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')'+(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta})\Theta=0. \tag{3.1.13}$$

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2R'\right)'+(k^2-\frac{\lambda}{r^2})R=0. \tag{3.1.14}$$

在$k\neq 0$时，(3.1.14)称为**球Bessel方程**，可以转换为 **Bessel**方程。在$k=0$时为欧拉方程。

(3.1.13)是个变系数的二阶线性微分方程，经过变量替换$x=\cos\theta$, 并且记$y(x)=\Theta(\arccos x)$, $\mu=m^2$, 方程(3.1.13)变为

$$[(1-x^2)y']'+(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2})y=0 \tag{3.1.15}$$

此方程称为**m阶伴随*Legendre*方程**，特别伴随$Legendre$方程在$m=0$时候就是**Legendre方程**:

$$[(1-x^2)y']'+\lambda y=0. \qquad \Big(\text{或}\ (1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0\Big) \tag{3.1.16}$$

在本章中，我们将说明:伴随$Legendre$方程的解可由$Legendre$方程解变换得到，因此我们先求出$Legendre$方程解就可以了。

例3.1.2求证方程

$$(rR')'+\left(\lambda r-\frac{\nu^2}{r}\right)R=0, \tag{1}$$

经自变量替换变换$x=\sqrt{\lambda}r$变为**Bessel**方程：

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0\,. \qquad (2)$$

证明：$R(r)$方程(1)可改写为：

$$r^2R''+rR'+\left(\lambda r^2-\nu^2\right)R=0 \qquad (3)$$

再记$y(x)=R(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})$, 则

$$\frac{dR}{dr}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dr}=\sqrt{\lambda}\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2R}{dr^2}=\sqrt{\lambda}\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dr}=\lambda\frac{d^2y}{dx^2}$$

代入(3)得到：

$$r^2\lambda\frac{d^2y}{dx^2}+r\sqrt{\lambda}\frac{dy}{dx}+\left(\lambda r^2-\nu^2\right)y(x)=0 \Longrightarrow x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0\,.$$

于是证明了我们的结论。

例3.1.3在球坐标下(r,θ,φ)下, 如果方程的解u的自变量不依赖φ,即$u=u(r,\theta)$, 则称此解为轴对称形式解。现考虑方程

$$\Delta_3 u=0$$

轴对称解分离变量$u=R(r)\Theta(\theta)$, 求代入方程后$R(r),\Theta(\theta)$ 满足的常微分方程。

解：在球坐标系下,$\Delta_3 u=0$表示为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0. \qquad (1)$$

但轴对称解$u=u(r,\theta)$假设下, 则方程(1)简化为：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})=0. \qquad (2)$$

作分离变量$u=R(r)\Theta(\theta)$代入(2)得到

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})\Theta+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})R=0.$$

上式两边除以$R\Theta$,得到：

$$\frac{\frac{1}{r^2}\left(r^2R'\right)'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta}=0. \qquad (3)$$

类似地，在此式中把含θ的独立部分令成常数，即

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta}=-\lambda,$$

这样再结合(3)式，就剥离出$R(r)$满足的微分方程:

$$\frac{\frac{1}{r^2}\left(r^2R'\right)'}{R}-\frac{\lambda}{r^2}=0.$$

整理以上结果就得到$R(r),\Theta(\theta)$满足的常微分方程为：

$$\left(r^2R'\right)'-\lambda R=0,(\text{欧拉方程})$$

和

$$\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')'+\lambda\Theta=0.$$

注 3.1.1 本节中的正交曲线坐标系的含义：

正交曲线坐标系是指在此坐标系下的参数曲线在交点处切线互相垂直:

1)如对于柱坐标系:

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z$$

那么空间点的向量表示为:

$$\vec{r}=(r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ \ z)$$

三种参数曲线: r曲线，θ曲线和z曲线对应的切方向分别为:

$$\vec{n_1}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0),\ \vec{n_2}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=(-r\sin\theta,\ r\cos\theta,\ 0),\ \vec{n_3}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}=(0,\ 0,\ 1)$$

显然

$$\vec{n_1}\,.\,\vec{n_2}=\cos\theta(-r\sin\theta)+\sin\theta(r\cos\theta)=0,\qquad \vec{n_1}\,.\,\vec{n_3}=\vec{n_2}\,.\,\vec{n_3}=0.$$

因此参数曲线在交点处切线互相垂直，这样柱坐标系为正交曲线坐标系。

2)如对于球坐标系:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z=r\cos\theta$$

那么空间点的向量表示为:

$$\vec{r}=(r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ \ r\cos\theta)$$

三种参数曲线: r曲线，θ曲线和φ曲线对应的切方向分别为:

$$\vec{n_1}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}=(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta),$$

$$\vec{n_2}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=(r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi,\ -r\sin\theta),$$

$$\vec{n_3}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=(-r\sin\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\cos\varphi,\ \ 0).$$

同样可以验证

$$\vec{n_1}\,.\,\vec{n_2}=0,\quad \vec{n_1}\,.\,\vec{n_3}=0\quad \vec{n_2}\,.\,\vec{n_3}=0.$$

因此参数曲线在交点处切线互相垂直，所以球坐标系为正交曲线坐标系。

3.2 $Bessel$方程和$Legendre$方程的级数解

一. $Bessel$方程广义幂级数求解

$Bessel$方程：

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0,\quad (\nu\geq 0) \tag{3.2.1}$$

设方程有广义幂级数解：

$$y(x)=x^\rho\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,x^{n+\rho} \tag{3.2.2}$$

其中ρ和系数a_n待定，由于

$$xy'=x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+\rho}\right)'=x\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x^{n+\rho})'=x\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,(n+\rho)x^{n+\rho-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,(n+\rho)x^{n+\rho}$$

$$x^2y''=x^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+\rho}\right)''=x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^{n+\rho-2}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^{n+\rho}$$

而

$$x^2\,y=x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,x^{n+\rho}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,x^{n+\rho+2}=\sum_{k=2}^{+\infty}a_{k-2}\,x^{k+\rho}=\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}\,x^{n+\rho}$$

以上算式代入$Bessel$方程(3.2.1),得到：

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^{n+\rho}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,(n+\rho)x^{n+\rho}+\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}\,x^{n+\rho}-\nu^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,x^{n+\rho}=0. \tag{3.2.3}$$

比较此方程两边$x^{n+\rho}$的系数有：

$$n=0:\quad a_0(\rho^2-\nu^2)=0\ \longrightarrow \text{可取}a_0\neq 0,\ \ \rho^2-\nu^2=0\Longrightarrow \rho=\pm\nu$$

$$n=1:\quad a_1\left[(1+\rho)^2-\nu^2\right]=0\ \longrightarrow \text{取}a_1=0\,\text{即可.}$$

$$n\geq 2:\quad a_n\left[(n+\rho)^2-\nu^2\right]+a_{n-2}=0\ \longrightarrow\ a_n\,n(n\pm 2\nu)+a_{n-2}=0. \tag{3.2.4}$$

(1)先取$\rho=\nu$, (3.2.4)可改写为显式递推：

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)},\quad n\geq 2 \tag{3.2.5}$$

由于已经取$a_1=0$, 由递推公式，可知奇数下标的系数全为0, 即$a_{2k+1}=0$, $(k=0,1,2...)$, 另外

$$a_{2k}=-\frac{a_{2k-2}}{2k(2k+2\nu)}=\frac{-1}{2^2k(k+\nu)}a_{2(k-1)}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}k(k+\nu)(k-1)(k-1+\nu)...1(\nu+1)}a_0, \quad (3.2.6)$$

利用Γ函数递推性质：

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x), \quad (\text{其中}\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt\,)$$

递推式(3.2.6)就可改写为

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\Gamma(k+\nu+1)}a_0$$

我们再不妨取首项系数$a_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$, 这样$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}$, 因此，推得一个$Bessel$ 方程的一个广义幂级数解：

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \qquad (3.2.7)$$

可以证明在$x>0$时，$y_1(x)$级数收敛, 我们把此解记为$\mathbf{J}_\nu(\mathbf{x})$, 这个解称为**第一类$\nu$阶Bessel 函数**。由于$Bessel$ 方程是二阶线性微分方程，所以还要寻找方程的另一个线性无关解才能求出其通解。

(2) $\rho=-\nu$, 当2ν不为整数时，$n-2\nu\neq 0$, 类似于(3.2.5)的递推公式，即

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n-2\nu)}, \quad n\geq 2$$

可解出

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} \qquad (3.2.8)$$

下面我们说明这时$J_\nu(x)$和$J_{-\nu}(x)$线性无关。实际上我们从表示式(3.2.7)得出：

$$\lim_{x\to 0}J_\nu(x)=\text{有限值}=\begin{cases}0, \ \text{当}\nu>0\\ \dfrac{1}{\Gamma(1)}=1, \ \text{当}\nu=0\end{cases}$$

但根据$J_{-\nu}(x)$的表示式(3.2.8),显然有

$$\lim_{x\to 0}J_{-\nu}(x)=\infty$$

这样$x\to 0$时，$J_\nu(x)$ 和$J_{-\nu}(x)$渐进性态明显不同。这说明$J_\nu(x)$ 和$J_{-\nu}(x)$ 在2ν不为整数的条件下线性无关。

对于2ν为整数时，分情况讨论：当$2\nu=2m+1$, 我们只要令$a_{2m+1}=0$, 而偶下标a_{2m}仍然可用递推公式给出，这时仍然有$J_\nu(x)$ 和$J_{-\nu}(x)$ 线性无关的结论。

但$2\nu = 2m$,即$\nu = m$时，可证明$J_{-m}(x)$和$J_m(x)$ 线性相关，且$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$(详细证明可参考教材)。

因此$\nu \neq$ m时，$J_\nu(x)$ 和$J_{-\nu}(x)$ 线性无关, 但$\nu = m =$ 整数时，$J_{-m}(x)$和$J_m(x)$线性相关。为了寻找对任何$\nu \geq 0$ 都与第一类$Bessel$ 函数$J_\nu(x)$线性无关的解，以下定义第二类$Bessel$函数$N_\nu(x)$：

当$\nu \neq m$ (m是非负整数)时，

$$N_\nu(x) \stackrel{d}{=} \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi} J_\nu(x) - \frac{1}{\sin\nu\pi} J_{-\nu}(x)$$

当$\nu = m$(m是非负整数)时，

$$N_m(x) \stackrel{d}{=} \lim_{\nu\to m} N_\nu(x)$$

显然在$\nu \neq m$时候,$N_\nu(x)$ 和$J_\nu(x)$线性无关。另外可证明：

$$\lim_{x\to 0} N_m(x) = -\infty$$

这样$\nu = m$时，$N_\nu(x)$ 和$J_\nu(x)$也线性无关。因此$N_\nu(x)$ 和$J_\nu(x)$对任何$\nu \geq 0$都线性无关。综上，$Bessel$方程通解表示为：

$$y(x) = CJ_\nu(x) + DN_\nu(x) \tag{3.2.9}$$

例3.2.1 求下列方程通解并指出满足$|y(0)| < +\infty$的解

$$(1)\ x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

$$(2)\ x^2y'' + xy' + (x^2 - 3)y = 0$$

解：1)方程(1)是零阶贝赛尔方程(对应参数$\nu^2 = 0$),因此方程通解为：

$$y = CJ_0(x) + DN_0(x),$$

即通解$y(x)$是零阶的第一类和第二类零阶贝塞尔函数线性组合。但根据贝塞尔函数性质的相关结论，第二类贝塞尔函数$N_0(x)$在$x \to 0$时趋于无穷，因此不符合$|y(0)| < +\infty$的条件，这样方程满足$y(0) < +\infty$的解是

$$y = CJ_0(x)$$

2) 方程(2)也是贝塞尔方程,对应的参数$\nu^2 = 3$, 即$\nu = \sqrt{3}$, 类似于第(1)问的讨论,方程通解为：

$$y = CJ_{\sqrt{3}}(x) + DN_{\sqrt{3}}(x),$$

方程满足$|y(0)| < +\infty$的解是

$$y = CJ_{\sqrt{3}}(x)$$

二. $Legendre$方程的幂级数解和$Legendre$多项式

$Legendre$方程为：

$$[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0. \Leftrightarrow \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0. \qquad (3.2.10)$$

在$|x| < 1$时，可设

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad a_n \text{ 为待定系数}$$

这样:

$$(1-x^2)y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n$$

$$-2xy' = -\sum_{n=0}^{+\infty} 2na_n x^n, \qquad \lambda y = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n x^n$$

以上代入方程(3.2.10)得到：

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \{(n+1)(n+2)a_{n+2} - [n(n+1)-\lambda]\, a_n\}\, x^n = 0\,.$$

当$\lambda \geq 0$, 记$\lambda = l(l+1)$ $(l \geq 0)$, 然后比较x^n的系数，得到系数**递推公式**：

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+1)(n+2)} a_n = \frac{(n-l)(n+l+1)}{(n+1)(n+2)} a_n \qquad (3.2.11)$$

我们可以用以上的递推公式，得出$Legendre$方程的两支线性无关解, 方法如下：

1. 取$a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$, 这样，根据以上递推公式，所有奇数下标的a_n全为0,即$a_{2k+1} = 0, \ k = 0, 1, 2....$, 只有$a_{2k}$才有可能不为0,这样解我们记为$y_1(x)$, 称为偶次升幂解。(具体表达式可参看教材)

2. 取$a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$, 这样，根据以上递推公式，所有偶数下标的a_n全为0，即$a_{2k} = 0, \ k = 0, 1, 2....$, 只有$a_{2k+1}$才有可能不为0，这样解我们记为$y_2(x)$, 称为奇次升幂解

显然$y_1(x)$和$y_2(x)$线性无关，这样方程通解：

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

虽然以上找出了$Legendre$方程的解，但我们将来在$Legendre$固有值问题，需要的是定义在$[-1, 1]$的有界解，因此还有进一步的讨论：

当l**不为整数时**，根据a_n 的递推公式(3.2.11),由非零的a_0或非零的a_1 出发, 都可以得到无穷多项非零的a_{2k} 或无穷多项非零的a_{2k+1}, 相应的偶次升幂解$y_1(x)$ 或奇次升幂解$y_2(x)$ 都是无穷级数。可以证明，$y_1(x)$和$y_2(x)$ 收敛半径都为1，即在$-1 < x < 1$时，幂级数$y_1(x)$和$y_2(x)$都收敛，但$y_1(x)$和$y_2(x)$在$x = \pm 1$都发散，此时$Legendre$ 方程**没有**在$x = \pm 1$有界的解。

当l**为某个整数**n时, 根据递推公式(3.2.11)得到

$$a_{n+2} = \frac{(n-n)(n+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n = 0 \Longrightarrow a_{n+2} = a_{n+4} = ... = a_{n+2k} = 0, \, (k = 1, 2, ...)$$

相应地，$y_1(x)$或$y_2(x)$ 就退化成了n次多项式。如果取$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$, 参照递推公式(3.2.11), 可得到按照降幂排列的一个多项式解：

$$P_n(x) \stackrel{d}{=} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}.$$

$P_n(x)$就是$Legendre$多项式，显然它在$x = \pm 1$有界。而另外一支解可由$P_n(x)$通过$Liouville$公式生成，记作$Q_n(x)$, 当$x \longrightarrow \pm 1$ 时，$Q_n(x) \longrightarrow \infty$, 因此$Q_n(x)$在$x = \pm 1$是无界解。综上，当$\lambda = n(n+1)$ 时，$Legendre$方程通解：

$$y(x) = CP_n(x) + DQ_n(x).$$

三. $Bessel$方程广义幂级数求解和$Legendre$方程的幂级数求解的理论依据

二阶线性常微分方程的解析理论：

首先在复数域内考虑标准形式的二阶线性常微分方程：

$$w''(z) + p(z)w'(z) + q(z)w(z) = 0, \qquad (3.2.12)$$

其中$p(z), q(z)$为已知函数。利用复变函数的方法研究，有以下结论：

1.设$P(z)$, $q(z)$在$|z - z_0| < R$内解析，则在圆域$|z - z_0| < R$方程任何解可表示成幂级数，即可设

$$w(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

2. 设z_0是方程的正则奇点，即z_0是$p(z)$或$q(z)$的奇点，但是$(z - z_0)p(z)$和$(z - z_0)^2 q(z)$在$|z - z_0| < R$ 内解析，则在去心领域$0 < |z - z_0| < R$, 方程有一支解可表示为广义幂级数解，形式为：

$$w(z) = (z - z_0)^{\rho} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

以上的结论中，如把方程(3.2.12)复变量z改为x, z_0改为x_0, 而解析的条件相应改为无穷次可微，则以上结论在实数变量x时候类似成立。

例3.2.2 试说明：$Legendre$方程(3.2.10)在$-1 < x < 1$方程解可写成幂级数形式。

说明： 在$-1 < x < 1$时，$Legendre$方程(3.2.10)可改写为标准形式：

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\lambda}{1-x^2}y = 0$$

此方程对比二阶常微分方程标准形式(3.2.12)知道：$Legendre$方程中

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad q(x) = \frac{\lambda}{1-x^2}.$$

所以$p(x)$, $q(x)$在$-1 < x < 1$时无穷次可微。根据以上常微分方程的解的理论, $-1 < x < 1$时, 方程解可写成幂级数形式：

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\,.$$

例3.2.3 试说明：$Bessel$方程(3.2.1)有广义幂级数解。

说明： 由于$Bessel$方程(3.2.1)可改写为标准形式：

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0, \quad (\nu \geq 0) \tag{3.2.13}$$

此方程对比二阶常微分方程标准形式(3.2.12)知道：$Bessel$方程中

$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}.$$

$p(x)$和$q(x)$虽然在$x = 0$不连续，但显然$xp(x)$和$x^2q(x)$在$-\infty < x < +\infty$可微，因此$x = 0$为正则奇点。这样根据以上常微分方程解的理论，在去心领域$0 < |x| < +\infty$, $Bessel$ 方程就有广义幂级数解：

$$y(x) = x^\rho \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{n+\rho}\,.$$

3.3 Legendre 函数

Legendre函数各种表示

1. 微分表示：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \qquad (3.3.1)$$

2. 二项式展开表示：

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad n = 0, 1, 2, ... \qquad (3.3.2)$$

3. 积分表示：

$$1)\ \ P_n(x) = \frac{1}{2^n 2\pi i}\oint_c \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\, dz\,, \qquad (3.3.3)$$

其中c是围绕着x的任意闭路。

$$2)\ \ P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x+\sqrt{1-x^2}i\cos\theta)^n\, d\theta, \qquad (3.3.4)$$

4.母函数表示：

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n, \quad |t|<1\,. \qquad (3.3.5)$$

以上各种表示的来源：

$Legendre$函数$P_n(x)$的二项式展开表示(3.3.2)是我们在上一节已经得出的，以上我们说明微分表示(3.3.1)等价于这一表示：实际上，由微分表示(Rodigeus 公式)出发:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

由二项式定理:

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k x^{2n-2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k},$$

逐项求导，即可证明:

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}x^{2n-2k}\right)^{(n)}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{2n-2k<n}\left(\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}x^{2n-2k}\right)^{(n)} + \frac{1}{2^n}\sum_{2n-2k\geq n}\left(\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}x^{2n-2k}\right)^{(n)}$$

$$= 0 + \frac{1}{2^n}\sum_{2k\le n}\left(\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}x^{2n-2k}\right)^{(n)} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\left(\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}x^{2n-2k}\right)^{(n)}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}(2n-2k)(2n-2k-1)......(2n-2k-n+1)x^{2n-2k-n}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k} = P_n(x)$$

这就证明了$legendre$函数的微分表示和二项式展开表示的等价性。

下面微分表示(3.3.1)和积分表示(3.3.3), (3.3.4)的等价性：由复变函数的柯西积分公式:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n 2\pi i}\oint_c \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz$$

其中c是围绕着x的任意闭路。当$|x|<1$时，取c为以x, 半径为$\sqrt{1-x^2}$的圆，这样圆c上点可表示为:

$$z = (x + \sqrt{1-x^2}\cos\theta) + i\sqrt{1-x^2}\sin\theta, \quad (0<\theta\le 2\pi)$$

相应地

$$z - x = \sqrt{1-x^2}\,(\cos\theta + i\sin\theta)\,, \quad dz = \sqrt{1-x^2}\,(-\sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta,$$

$$z^2 - 1 = \left(x - 1 + \sqrt{1-x^2}\cos\theta + i\sqrt{1-x^2}\sin\theta\right)\left(x + 1 + \sqrt{1-x^2}\cos\theta + i\sqrt{1-x^2}\sin\theta\right)$$

$$= \sqrt{1-x^2}\left(-\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\cos\theta + i\sqrt{1+x}\sin\theta\right)\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\cos\theta + i\sqrt{1-x}\sin\theta\right)$$

这样算得:

$$\frac{z^2-1}{z-x} = 2x + 2i\sqrt{1-x^2}\sin\theta, \quad \frac{dz}{z-x} = i\,d\theta$$

所以

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n 2\pi i}\oint_c \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2^n 2\pi i}\oint_c \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^n}\,\frac{dz}{z-x}$$

$$= \frac{1}{2^n 2\pi i}\int_0^{2\pi}\left(2x + 2i\sqrt{1-x^2}\sin\theta\right)^n\frac{dz}{z-x} = \frac{1}{2^n 2\pi i}\int_0^{2\pi} 2^n\, i\left(x + i\sqrt{1-x^2}\sin\theta\right)^n d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x + i\sqrt{1-x^2}\sin\theta\right)^n d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)^n d\theta$$

这样就证明了微分表示和积分表示的等价性。

最后证明母函数表示(3.3.5)的正确性: 实际上，把t当作复变量，(3.3.5)左边可设为t的幂级数:

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x)t^n, \quad (|x|<1)$$

由于被展开函数的奇点$t_{1,2}=x\pm\sqrt{1-x^2}i$都在单位圆$|z|=1$上，所以在$|t|<1$内幂级数收敛。而由幂级数系数的积分表示，有

$$c_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}}{t^{n+1}}dt$$

作变量替换:

$$(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}=1-tz$$

则两边平方并整理得到:

$$t=2\frac{z-x}{z^2-1}\Longrightarrow\frac{1}{t^{n+1}}=\frac{(z^2-1)^{n+1}}{2^{n+1}(z-x)^{n+1}},$$

$$dt=2\frac{z^2-1-2z(z-x)}{(z^2-1)^2}dz=2\frac{z^2-1-z(z^2-1)t}{(z^2-1)^2}dz=2\frac{1-tz}{z^2-1}dz$$

代入

$$c_n(x)=\frac{1}{2^n2\pi i}\oint_{c'}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz$$

即$c_n(x)$就是 Legendre函数的复积分表示(3.3.3)，也就是$c_n(x)=P_n(x)$. 这样就验证了母函数表示的正确性。

*Legendre*函数的性质

利用*Legendre*函数的各种表示式以及*Legendre*固有值问题的结论可以得到*Legendre*函数的一系列性质，主要有：

1.**奇偶性**：$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$

2.**次数性质**：$P_n(x)$是n次多项式。

3. **特殊点的函数值**:

$$P_n(0)=\begin{cases}0, & n=2m+1\geq 1,\\ \dfrac{(-1)^m(2m-1)!!}{2m!!}, & n=2m\geq 2,\\ 1, & n=0\end{cases}\tag{3.3.6}$$

以及

$$P_n(1)=1,\ P_n(-1)=(-1)^n,$$

4. **递推公式**: 利用母函数等性质可得到*Legendre*函数的许多递推公式:

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0,\qquad(3.3.7.a)$$

$$nP_n(x)-xP_n'(x)+P_{n-1}'(x)=0,\qquad(3.3.7.b)$$

$$nP_{n-1}(x)-P_n'(x)+xP_{n-1}'(x)=0,\qquad(3.3.7.c)$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x) \qquad (3.3.7.d)$$

5. **模的平方**:

$$||P_n(x)||^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$$

6. **正交性**:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0, n \neq m$$

7. **广义Fourier展开**: 取$f(x)$, $x \in [-1,1]$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n P_n(x)$$

其中

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx$$

性质1的说明：当n为偶数时，$P_n(x)$的是偶次升幂解，所以多项式的每一项都是x的偶数次方，即每一项都是偶函数，所以$P_n(x)$是偶函数。同样，当n为奇数时，$P_n(x)$奇偶函数。

性质2的说明：由Legendre函数的微分表示(罗德里格斯公式), 或二项式表示，显然$P_n(x)$是n次多项式。

性质3的证明：勒让德函数的母函数表达式:

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n, \quad (|t|<1) \qquad (3.3.8)$$

当$x=0$时, 上式变为:

$$(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(0)t^n$$

我们只要把上式左边展成t的幂级数，然后比较同次幂的系数，就可以得到$P_n(0)$, 实际上,由泰勒展开式:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

让$\alpha = -\frac{1}{2}, x = t^2$ 得到:

$$(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)...(-\frac{1}{2}-(n-1))}{n!}t^{2n} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2k!!}t^{2k}$$

这样比较得到$P_n(0)$取值为:

$$\begin{cases} P_{2k+1}(0)=0,\ (k=0,1,2...) \\ P_{2k}(0)=\dfrac{(-1)^k(2k-1)!!}{2k!!},\ (k=1,2...) \end{cases}$$

类似地，利用母函数可以证明:

$$P_n(1)=1,\ P_n(-1)=(-1)^n\,.$$

性质4的证明：利用勒让德函数的母函数可以证明递推公式，比如以下证明递推式(3.3.7.b), 为此在母函数表示(3.3.8)两边对t求导得到:

$$(x-t)(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}nP_n(x)t^{n-1} \tag{3.3.9}$$

另外母函数表示(3.3.8)两边对x求导得到

$$t(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n'(x)t^n \tag{3.3.10}$$

将(3.3.9)式乘以t, 将(3.3.10)式乘以$x-t$, 可见两个等式左端完全一样，所以

$$t\sum_{n=0}^{+\infty}nP_n(x)t^{n-1}=(x-t)\sum_{n=0}^{+\infty}P_n'(x)t^n \tag{3.3.11}$$

因为$P_0(x)=1$, 即有$P_0'(x)=0$, 所以上式可以改写为:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}nP_n(x)t^n=\sum_{n=1}^{+\infty}xP_n'(x)t^n-\sum_{n=1}^{+\infty}P_n'(x)t^{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[xP_n'(x)-P_{n-1}'(x)\right]t^n$$

比较上式两边系数，就得到:

$$nP_n(x)=xP_n'(x)-P_{n-1}'(x)$$

这样递推式(3.3.7.b)就得到了证明。类似地可利用母函数证明其它几个递推公式

另外, 正交性, 模的平方以及广义Fourier展开性质将在以下讨论完Legendre方程固有值问题后得到说明。

例3.3.1写出$P_n(x)$的前四项，即写出$P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$

解：根据$P_n(x)$的微分表示, 得到：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

$$P_0(x)=(x^2-1)^0=1,\quad P_1(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)'=x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!}\left[(x^2-1)^2\right]'' = \frac{1}{8}(x^4-2x^2+1)'' = \frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}\left[(x^2-1)^3\right] = \frac{1}{48}\left(x^6-3x^4+3x^2-1\right)''' = \frac{1}{2}(5x^3-3x)\,.$$

例3.3.2 设$m \geq 1, n \geq 1$, 求证：

$$\int_0^1 x^m P_n(x)\,dx = \frac{m}{m+n+1}\int_0^1 x^{m-1}P_{n-1}(x)\,dx$$

证明：根据递推公式(3.3.7b)以及$P_n(1)=1$, 有;

$$n\int_0^1 x^m P_n(x) = \int_0^1 x^m\left[xP_n'(x) - P_{n-1}'(x)\right]\,dx$$

$$= \left[x^{m+1}P_n(x) - x^m P_{n-1}(x)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 (m+1)x^m P_n(x)\,dx + \int_0^1 m x^{m-1}P_{n-1}(x)\,dx$$

$$= -(m+1)\int_0^1 x^m P_n(x)dx + m\int_0^1 x^{m-1}P_{n-1}(x)\,dx,$$

移项得到：

$$(m+n+1)\int_0^1 x^m P_n(x)\,dx = m\int_0^1 x^{m-1}P_{n-1}(x)\,dx$$

即

$$\int_0^1 x^m P_n(x)\,dx = \frac{m}{m+n+1}\int_0^1 x^{m-1}P_{n-1}(x)\,dx$$

例3.3.3 计算积分 $\displaystyle\int_0^1 P_n(x)dx$

解：根据递推公式(3.3.7.d),

$$\int_0^1 P_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}\int_0^1\left[P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)\right]dx = \frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\right]\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}(1) - P_{n-1}(1) - (P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0))\right] = \frac{1}{2n+1}(P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0))$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \dfrac{1}{4k+3}(P_{2k}(0) - P_{2k+2}(0)), & n = 2k+1 \end{cases}$$

其中

$$P_{2k}(0) - P_{2k+2}(0) = \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2k!!} - \frac{(-1)^{k+1}(2k+1)!!}{2(k+2)!!} = (4k+3)\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k+2)!!},$$

因此最后得到

$$\int_0^1 P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k+2)!!}, & n = 2k+1\,. \end{cases}$$

Legendre方程固有值问题:

$$\begin{cases} [(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, \ (-1 < x < 1) \\ |y(\pm 1)| < +\infty. \end{cases} \tag{3.3.12}$$

利用勒让德方程有界解的讨论结果得到：

固有值: $\lambda_n = n(n+1), (n = 0, 1, 2...)$, **固有函数**: $y_n(x) = P_n(x)$.

其中

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

关于固有值和固有函数还有以下性质：

正交性：由于勒让德方程固有值问题的方程在S-L标准型下对应$k(x) = 1 - x^2$, $q(x) = 0$, 权值$\rho(x) = 1$, 而$k(x)\mid_{x=\pm 1} = 0$, 按照$Sturm - Liouville$定理，可在$x = \pm 1$ 这两个端点附加自然边界条件。即$|y(\pm 1)| < +\infty$. 这样$Legendre$方程固有值问题(3.3.12)符合$Sturm - Liouville$定理的固有值问题模型。因此属于不同固有值的固有函数带权正交，即

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0, \ n \neq m$$

固有函数模的平方：$Legendre$函数母函数表示为：

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n. \quad |t| < 1 \tag{1}$$

上式两边平方，得到：

$$(1-2xt+t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} P_n(x)P_m(x)t^{n+m}, \quad |t| < 1 \tag{2}$$

等式两边从-1到1积分得到：

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx\right)t^{n+m}. \quad |t| < 1 \tag{3}$$

根据$legendre$的函数正交性，

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & 当 m \neq n \\ \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx, & 当 m = n \end{cases} \tag{4}$$

此结果应用于(3)式，则得到

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx \right) t^{2n}. \quad |t| < 1 \tag{5}$$

上式左边的积分为：

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2xt+t^2} = -\frac{1}{2t} \ln(1-2xt+t^2)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{t}[\ln(1+t) - \ln(1-t)] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n} \tag{6}$$

比较以上(5), (6)两式的t^{2n}的系数，就证明了：

$$||P_n(x)||^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}$$

广义Fourier展开：由于$legendre$多项式系是$Legendre$固有值问题解出的完备正交系(权值$\rho(x) = 1$), 所以取定义在$[-1, 1]$的函数$f(x)$, 可在$Legendre$多项式系$\{P_n(x), n = 0, 1, 2...\}$下作广义$Fourier$展开

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n P_n(x)$$

其中

$$C_n = \frac{1}{||P_n(x)||^2} \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\, dx = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\, dx$$

例3.3.4将函数$f(x) = x^2$按照$Legendre$多项式展开。

解：由于$P_n(x)$是n次多项式，而$f(x)$是2次的，因此展开式中没有$n > 2$的$P_n(x)$, 另外$f(x)$是偶函数，所以展开式中没有$P_1(x)$, 因此可设

$$x^2 = C_0P_0(x) + C_2P_2(x)$$

由$Legendre$函数的微分表示

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

算出

$$P_0(x)=1,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

这样

$$x^2=C_0+\frac{C_2}{2}(3x^2-1)$$

比较系数得到：

$$x^2:\ \frac{3}{2}C_2=1,\ x^0:\ C_0-\frac{1}{2}C_2=0.$$

解得：$C_0=\dfrac{1}{3}$, $C_2=\dfrac{2}{3}$, 因此，最后有：

$$x^2=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x)$$

例3.3.5将函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & -1\le x<\alpha,\\ \dfrac{1}{2}, & x=\alpha,\\ 1, & \alpha<x\le 1\,.\end{cases}$$

按照$Legendre$多项式展开。

解：按照$Legendre$多项式的广义Fourier展开：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_nP_n(x)$$

其中

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\,dx$$

因此

$$C_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_0(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{1}P_0(x)dx=\frac{1}{2}(1-\alpha)$$

$n\geq 1$时，

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\,dx=\frac{2n+1}{2}\int_{\alpha}^{1}P_n(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{1}\left[P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)\right]\,dx=\frac{1}{2}\left[P_{n-1}(\alpha)-P_{n+1}(\alpha)\right].$$

因此

$$f(x)=\frac{1}{2}(1-\alpha)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left[P_{n-1}(\alpha)-P_{n+1}(\alpha)\right]P_n(x)$$

三维拉普拉斯方程在轴对称情形下的求解

在球坐标(r,θ,φ)下$(0\le\theta\le\pi,0\le\varphi\le 2\pi)$, 如果只考虑与$\varphi$无关的解，即$u=u(r,\theta)$, 这样的解$u(r,\theta)$就是轴对称解。此时三维拉普拉斯方程

$$\Delta_3 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})=0$$

在轴对称情形下作分离变量$u=R(r)\Theta(\theta)$代入得到

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})\Theta+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})R=0.$$

上式两边除以$R\Theta$,得到：

$$\frac{\frac{1}{r^2}\left(r^2R'\right)'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta}=0. \qquad (3.3.13)$$

得到$R(r),\Theta(\theta)$满足的常微分方程为：

$$\left(r^2R'\right)'-\lambda R=0,\ (\text{欧拉方程}) \qquad (3.3.14)$$

和

$$\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')'+\lambda\Theta=0\,. \qquad (3.3.15)$$

关于$\Theta(\theta)$的方程(3.3.15)是S-L标准型的，其中$k(\theta)=\sin\theta$在$\theta=0$和$\theta=\pi$这两个端点取值为0, 这样根据$Strum-Liouville$定理,可附加$\Theta(0)$有界，$\Theta(\pi)$有界的自然边界条件。这样就形成固有值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')'+\lambda\Theta=0,\ (0<\theta<\pi)\\ |\Theta(0)|<+\infty,\ \ \Theta(\pi)<+\infty\end{cases} \qquad (3.3.16)$$

作自变量变换：$x=\cos\theta$,并记$y(x)=\Theta(\arccos x)$, 此固有值问题变为$Legendre$方程固有值问题

$$\begin{cases}[(1-x^2)y']'+\lambda y=0,\ (-1<x<1)\\ |y(\pm1)|<+\infty.\end{cases} \qquad (3.3.17)$$

根据$Legendre$方程固有值问题结论：

固有值: $\lambda_n = n(n+1), (n = 0, 1, 2...)$, 固有函数: $y_n(x) = P_n(x)$.

即$\Theta(\theta)$的固有值问题解为：

固有值: $\lambda_n = n(n+1), (n = 0, 1, 2...)$, 固有函数: $\Theta_n(\theta) = P_n(\cos\theta)$.

再把$\lambda_n = n(n+1)$代回$R(r)$的欧拉方程(3.3.14), 解得：

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}$$

最后把分离变量的解叠加得到：在球坐标下，方程$\Delta_3 u = 0$的轴对称情形下一般解$u = u(r, \theta)$是：

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}[C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta) \tag{3.3.18}$$

例3.3.6求解以下定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0,\ (r < a) \\ u\mid_{r=a} = 1 + \cos^2\theta \end{cases}$$

解:根据定解条件形式, 可假定$u = u(r, \theta)$, 根据$\Delta_3 u = 0$ 在$u = u(r, \theta)$情形下球坐标表示的一般解公式得到：

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)})P_n(\cos\theta). \tag{1}$$

由于是球内问题，要保证$r = 0$时解的有界性, 上式中$r^{-(n+1)}(n = 0, 1, 2...)$的项要舍去,即$B_n = 0(n = 0, 1, 2...)$,这样

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), \tag{2}$$

再利用边界条件：$u\mid_{r=a} = 1 + \cos^2\theta$,即有

$$u\mid_{r=a} = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta) = 1 + \cos^2\theta,$$

令$x = \cos\theta$, 则上式变为:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n a^n P_n(x) = 1 + x^2, \tag{3}$$

上式两边比较得到：

$$A_0P_0(x)+A_2a^2P_2(x)=1+x^2. \tag{4}$$

根据$Legendre$的函数微分表示式：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\quad (n=0,1,2...)$$

易知：$P_0(x)=1, P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$,代入得：

$$u=A_0+A_2\frac{a^2}{2}(3x^2-1)=1+x^2.$$

比较x同幂次的系数得确定A_0, A_2的方程：

$$x^2:\ A_2\frac{3a^2}{2}=1,\ \text{常数项}:A_0-A_2\frac{a^2}{2}=1$$

解得：

$$A_0=\frac{4}{3},\ A_2=\frac{2}{3a^2}$$

最后得到此定解问题的解：

$$u(r,\theta)=\frac{4}{3}+\frac{2}{3a^2}r^2P_2(\cos\theta)$$

例3.3.7求解以下定解问题：

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0,\ (r<a)\\ u\mid_{r=a}=-\dfrac{q}{\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}},\quad (0<b<a)\end{cases}$$

解: $\Delta_3 u=0$ 在$u=u(r,\theta)$情形下球坐标表示的一般解公式：

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}(A_nr^n+B_nr^{-(n+1)})P_n(\cos\theta). \tag{1}$$

由于是球内问题，则

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\left(\frac{r}{a}\right)^nP_n(\cos\theta), \tag{2}$$

代入边界条件，即有：

$$u(r,\theta)\mid_{r=a}=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\,P_n(\cos\theta)=-\frac{q}{\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}}\,. \tag{3}$$

记$t = \frac{b}{a}$, $x = \cos\theta$, 则按照$Legendre$的母函数表示有：

$$\frac{q}{\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}} = \frac{q}{a}(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{q}{a}\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n = \frac{q}{a}\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

此式代入(3)式的右边得到：

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n P_n(\cos\theta) = -\frac{q}{a}\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{b}{a}\right)^n . \tag{4}$$

比较上式(4)两边得到：

$$A_n = -\frac{q}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

即此定解问题的解为：

$$u(r,\theta) = -\frac{q}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{br}{a^2}\right)^n P_n(\cos\theta) = -\frac{q}{a}\left(1-2\frac{b}{a^2}r\cos\theta+\frac{b^2}{a^4}r^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

例3.3.8求解以下定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0,\ (r>a) \\ u\mid_{r=a} = E_0 a\cos\theta - c, \\ u\mid_{r=+\infty} = 0 \end{cases}$$

解:根据定解条件形式, 可假定$u = u(r,\theta)$, 根据$\Delta_3 u = 0$在$u = u(r,\theta)$情形下球坐标表示的一般解公式为：

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)})P_n(\cos\theta). \tag{1}$$

由于是球外问题，要保证$r = +\infty$时解的有界性, 上式中$r^n(n = 1,2...)$的项要舍去,即$A_n = 0$(其中$n \geq 1$),这样

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} B_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta), \tag{2}$$

依$r = +\infty$的条件：

$$u\mid_{r=+\infty} = A_0 = 0 \implies u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta). \tag{3}$$

再利用$r=a$的边界条件，得到

$$u(a,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}B_n a^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)=E_0a\cos\theta-c=E_0aP_1(\cos\theta)-cP_0(\cos\theta).\quad(4)$$

比较系数$P_n(\cos\theta)$的系数

$$P_0(\cos\theta):\ B_0a^{-1}=-c\Longrightarrow B_0=-ac,$$

$$P_1(\cos\theta):B_1a^{-2}=E_0a\Longrightarrow B_1=E_0a^3,$$

而其余的B_n全为0, 所以

$$u=-acr^{-1}+E_0a^3r^{-2}\cos\theta$$

例3.3.9 求$u(r,\theta)$ 使其满足:

$$\begin{cases}\Delta_3u=0, & (r<a,0\le\theta<\pi/2)\\ u\mid_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0, & \\ u\mid_{r=a}=u_0 & \end{cases}$$

其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, θ是向径$\vec{r}=(x,y,z)$与z轴正向的夹角。

解：定解条件与φ无关，因此可设$u=u(r,\theta)$,在球坐标下，$u=u(r,\theta)$时，$\Delta_3u=0$可表示为：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})=0.\tag{1}$$

做分离变量，令$u=R(r)\Theta(\theta)$, 代入上式分离变量后分别得到$R(r)$和$\Theta(\theta)$满足方程：

$$\left(r^2R'\right)'-\lambda R=0,\tag{2}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')'+\lambda\Theta=0.\tag{3}$$

由于$\theta=0$是$\Theta(\theta)$所满足方程(3)的正则奇点,根据$Sturm-Liouville$定理，在$\theta=0$ 点可附加自然边界条件，即$|\Theta(0)|<+\infty$,,而由条件$u\mid_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0$ 得到:$\Theta(\frac{\pi}{2})=0$. 这些结果整理后就得到$\Theta(\theta)$满足的固有值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')'+\lambda\Theta=0,\\ \Theta(0)<+\infty,\ \Theta(\dfrac{\pi}{2})=0.\end{cases}\tag{4}$$

以及$R(r)$满足的欧拉方程：

$$\left(r^2R'\right)'-\lambda R=0,$$

由$Legendre$方程固有值问题有关结论：当且仅当$\lambda = k(k+1)$ $(k = 0, 1, 2...)$时，$\Theta(\theta)$在$\theta = 0$的解有界, 即

$$\Theta_k(\theta) = P_k(\cos\theta).$$

而$\Theta(\theta)$在$\theta = \dfrac{\pi}{2}$的条件要求

$$\Theta_k(\frac{\pi}{2}) = P_k(0) = 0$$

这样k只能为奇数, 即$k = 2n+1$, $(n = 0, 1, 2...)$ 所以，$\Theta(\theta)$满足的固有值问题(4)的固有值和固有函数分别为：

$$\lambda_n = (2n+1)(2n+2), \qquad \Theta_n(\theta) = P_{2n+1}(\cos\theta)$$

相应地，$\lambda_n = (2n+1)(2n+2)$代入$R(r)$满足方程得到：

$$R_n(r) = A_n r^{2n+1} + B_n r^{-(2n+2)} \tag{5}$$

由于$\dfrac{1}{r}$在$r = 0$无界，所以形如$r^{-(2n+2)}$的项要舍去，即$B_n = 0$. 这样就得到一系列分离变量的有界解

$$u_n(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta) = r^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta).$$

由叠加原理，此定解问题有界解为：

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta)$$

再由半球面上的给定条件得到：

$$u\,|_{r=a} = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n P_{2n+1}(\cos\theta) = u_0$$

其中系数A_n由广义Fourier展开公式确定：

$$A_n = \frac{u_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{2n+1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta}{||P_{2n+1}(\cos\theta)||^2} \tag{6}$$

其中

$$||P_{2n+1}(\cos\theta)||^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{2n+1}^2(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$= \int_0^1 P_{2n+1}^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 P_{2n+1}^2(x)dx = \frac{1}{2}.\frac{2}{2(2n+1)+1} = \frac{1}{4n+3}$$

另外

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{2n+1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \int_0^1 P_{2n+1}(x)dx = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

于是定出式(6)中的

$$A_n = u_0 \frac{(-1)^n (2n-1)!!(4n+3)}{(2n+2)!!}$$

最后解得此定解问题的解

$$u(r,\theta) = u_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n (2n-1)!!(4n+3)}{(2n+2)!!} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta)$$

例3.3.10把下列函数按照*Legendre*函数系展开:

$$f(x) = |x|$$

解：当$f(x) = |x|$时，设它在*Legendre*函数系的展开式为：

$$|x| = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n P_n(x) \tag{1}$$

由于确定系数的公式，则

$$C_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |x| P_0(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |x| dx = \frac{1}{2}$$

而$n > 1$时，有

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} |x| P_n(x) dx \tag{2}$$

当n为奇数时，$P_n(x)$是奇函数，则$|x|P_n(x)$是奇函数。所以根据以上C_n的表达式有结论：

$$C_n = 0, \quad (n\text{为奇数})$$

当n为偶数时，$P_n(x)$是偶函数，则$|x|P_n(x)$是偶函数，再由C_n的表示式(2)得到：

$$C_n = (2n+1) \int_0^1 x P_n(x) dx, \ \ n\text{为偶数}$$

即

$$C_{2k} = (4k+1) \int_0^1 x P_{2k}(x) dx \tag{3}$$

利用递推公式：$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$，得到：

$$(4k+1)P_{2k}(x) = P'_{2k+1}(x) - P'_{2k-1}(x),$$

代入此递推公式,有：

$$C_{2k} = \int_0^1 x \left(P'_{2k+1}(x) - P'_{2k-1}(x) \right) dx = \int_0^1 x \, d\left(P_{2k+1}(x) - P_{2k-1}(x) \right)$$

$$= x\left(P_{2k+1}(x) - P_{2k-1}(x)\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \left(P_{2k-1}(x) - P_{2k+1}(x)\right)dx$$

注意到$P_n(1)=1, P_{2m+1}(0)=0$,上式简化为：

$$C_{2k} = \int_0^1 \left(P_{2k-1}(x) - P_{2k+1}(x)\right)dx = \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{(2k)!!} - \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k+2)!!}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}(4k+1)(2k-3)!!}{(2k+2)!!}.$$

综上，最后得到展开式：

$$|x| = \frac{1}{2}P_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}(4k+1)(2k-3)!!}{(2k+2)!!}P_{2k}(x)$$

例3.3.11计算积分：

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_m(x)dx$$

解题提示:可利用勒让德函数的正交性和模的平方，使此积分计算复杂度大大减小，从而使问题圆满解决

解:我们分以下两种情形讨论：

1)$|m-n|>1$时,我们说明这时原积分为0,不失一般性，我们仅在$m-n>1$时证明我们的结论：由于$xP_n(x)$是$n+1$次多项式，故可在勒让德函数系下展开为以下形式:

$$xP_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k P_k(x)$$

由勒让德函数正交性，当$k \le (n+1)$时，

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_m(x)dx = 0,\ (m > n+1)$$

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_m(x)dx = \int_{-1}^{1}\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k P_k(x)\right)P_m(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} a_k \int_{-1}^{1} P_k(x)P_m(x)dx = 0$$

2)当$|m-n|=1$时, 首先考虑情形$m=n+1$, 这时原积分变为：

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n+1}(x)dx$$

由罗得里格斯公式：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

算出$xP_n(x)$的最高次项系数，即x^{n+1}次方系数是:

$$\frac{1}{2^n n!}(2n)(2n-1)....(n+1),$$

而$P_{n+1}(x)$的x^{n+1}次方系数是:

$$\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}(2n+2)(2n+1)2n....(n+2) = \frac{1}{2^n n!}(2n+1)2n....(n+2)$$

比较并算得$xP_n(x)$可展开表示为：

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k P_k(x)$$

由正交性，$k \le n$时，$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_{n+1}(x)dx = 0$, 则

$$\sum_{k=1}^{n} c_k P_k(x)P_{n+1}(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{-1}^{1} P_k(x)P_{n+1}(x)dx = 0$$

这样综上, 并利用结论$||P_{n+1}(x)||^2 = \dfrac{2}{2n+3}$，解得

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n+1}(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{n+1}{2n+1}(P_{n+1}(x))^2 dx$$

$$= \frac{n+1}{2n+1}||P_{n+1}(x)||^2 = \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

由类似的讨论，$m = n-1$时，我们得到：

$$\int_{-1}^{1} xP_m(x)P_n(x)dx = \frac{2n}{4n^2-1}$$

于是最后算得：

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & 当|m-n| > 1, \\ \dfrac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}, & 当m = n+1 \\ \dfrac{2n}{4n^2-1}, & 当m = n-1\,. \end{cases}$$

伴随Legendre方程和伴随Legendre函数:

伴随$Legendre$方程为

$$[(1-x^2)y']' + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})y = 0 \qquad (3.3.19)$$

当$m=0$时候，就是$Legendre$方程

$$[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0 \qquad (3.3.20)$$

以下我们说明伴随$Legendre$方程的解可以由$Legendre$方程解变换得到：
定理3.3.1设$v(x)$是$Legendre$方程(3.3.20)的解，则

$$y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} v(x)$$

满足伴随$Legendre$方程(3.2.19), 其中m为非负整数

证明：由于$v(x)$是$Legendre$方程的解，因此

$$[(1-x^2)v'(x)]' + \lambda v(x) = 0 \implies (1-x^2)v''(x) - 2xv'(x) + \lambda v(x) = 0\,. \quad (3.3.21)$$

利用乘积函数的高阶求导的莱布尼茨公式，上式两边对x求m阶导数得到：

$$(1-x^2)v^{(m+2)} - 2x(m+1)v^{(m+1)} + [\lambda - m(m+1)]\,v^{(m)} = 0$$

此式两边同乘以$(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$,方程变为：

$$(1-x^2)^{1+\frac{m}{2}}v^{(m+2)} - 2x(m+1)(1-x^2)^{\frac{m}{2}}v^{(m+1)} + [\lambda - m(m+1)]\,(1-x^2)^{\frac{m}{2}}v^{(m)} = 0$$

此方程即为：

$$\left[(1-x^2)\left((1-x^2)^{\frac{m}{2}}v^{(m)}\right)'\right]' + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})\left((1-x^2)^{\frac{m}{2}}v^{(m)}\right) = 0$$

记

$$P_n^m(x) \stackrel{d}{=} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

$P_n^m(x)$就是第一类m阶伴随勒让德函数，它是m阶伴随勒让德方程在$x=\pm 1$的有界解。类似地，可定义第二类m阶伴随勒让德函数：

$$Q_n^m(x) \stackrel{d}{=} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} Q_n(x)$$

因此m阶伴随勒让德方程通解为：

$$y(x) = CP_n^m(x) + DQ_n^m(x)$$

m阶伴随勒让德方程的固有值问题为：

$$\begin{cases} [(1-x^2)y']' + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})y = 0, \\ y(\pm 1)\text{有界} \end{cases} \qquad (3.3.22)$$

由以上讨论，m阶伴随勒让德方程的固有值问题的

$$\textbf{固有值：}\lambda_n = n(n+1), \qquad \textbf{固有函数：}P_n^m(x)$$

可以直接验证：

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_l^m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{当}n \neq l \\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, & \text{当}n = l \end{cases}$$

因此，当m固定时，$P_n^m(x)$, $n = m, m+1, ...$构成正交函数系，且有

$$||P_n^m(x)||^2 = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

在m阶伴随勒让德函数系下的广义Fourier展开

取定义在$[-1,1]$的函数$f(x)$, 可在m阶伴随勒让德函数系$\{P_n^m(x), n = m, m+1...\}$下作广义$Fourier$展开

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n P_n^m(x)$$

其中

$$C_n = \frac{1}{||P_n^m(x)||^2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n^m(x)\,dx$$

例3.3.12计算伴随$Legendre$函数$P_n^m(\cos\theta), n = 0, 1, 2. m \leq n$

解:由伴随$Legendre$函数和伴随$Legendre$函数的关系式：

$$P_n^m(x) = \left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m}P_n(x), \;\; m \leq n, \;\; P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

计算得到：

$$P_0^0(x) = P_0(x) = 1, \quad P_1^0(x) = P_1(x) = x, \quad P_1^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_1'(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$P_2^0(x) = P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \quad P_2^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_2'(x) = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$P_2^2(x) = (1-x^2)P_2''(x) = 3(1-x^2)\,.$$

把$x = \cos\theta$代入，因此有：

$$P_0^0(\cos\theta) = 1, \quad P_1^0(\cos\theta) = \cos\theta, \quad P_1^1(\cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} = \sin\theta.$$

$$P_2^0(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{1}{4}(1+3\cos 2\theta),$$

$$P_2^1(\cos\theta) = 3\cos\theta(1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sin 2\theta$$

$$P_2^2(\cos\theta) = 3(1-\cos^2\theta) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)$$

一般情形下的Laplace方程边值问题及球函数

$\Delta_3 u = 0$在球坐标下表示为：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] = 0\,. \tag{3.3.23}$$

此式两边消$\frac{1}{r^2}$, 并按照如下方式分离变量：

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$$

代入方程得到并两边除以RY, 得到：

$$\frac{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)}{R} + \frac{\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]}{Y} = 0$$

分离后得到常微分方程：

$$(r^2R')' = \lambda R, \qquad (\text{欧拉方程}) \tag{3.3.24}$$

和球函数方程

$$\Delta_{\theta\varphi}Y = \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y = -\lambda Y \tag{3.3.25}$$

其中$\Delta_{\theta\varphi}$称为球面上的$Laplace$算子。再配以周期性条件：

$$Y(\theta,\,\varphi+2\pi) = Y(\theta,\,\varphi)$$

和有界性条件

$$|Y(0,\varphi)| < +\infty, \qquad |Y(\pi,\varphi)| < +\infty$$

这样构成了偏微分方程固有值问题：

$$\begin{cases}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y = -\lambda Y, \ \ (0<\theta<\pi), \\ Y(\theta,\,\varphi+2\pi) = Y(\theta,\,\varphi), \\ |Y(0,\varphi)| < +\infty, \qquad |Y(\pi,\varphi)| < +\infty\end{cases} \tag{3.3.26}$$

此偏微分方程固有值问题可以用分离变量求解，即令$Y(\theta,\,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$,代入泛定方程并结合边界条件得到：

$$\begin{cases}\Phi''+\mu\Phi=0,\\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)\end{cases}\tag{3.3.27}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')'+(\lambda-\dfrac{\mu}{\sin^2\theta})\Theta=0.\\ \Theta(0),\,\Theta(\pi)\text{有界}\end{cases}\tag{3.3.28}$$

关于Φ的固有值问题(3.3.27)的解为：

$$\text{固有值:}\mu_m=m^2,\ \text{固有函数：}\Phi_m(\varphi)=C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi$$

把$\mu=m^2$代入固有值问题(3.3.28), 并利用伴随勒让德方程固有值问题的相关结论，得到：

$$\text{固有值:}\lambda_n=n(n+1),\ \text{固有函数：}\Theta_{mn}(\theta)=P_n^m(\cos\theta),\quad n=m,m+1,...$$

于是得到$Y(\theta,\,\varphi)$定义在单位球面上的解族：

$$Y_{nm}(\theta,\,\varphi)=P_n^m(\cos\theta)\left(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi\right)$$

下面记

$$Y_{nm}^{(1)}(\theta,\varphi)=P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi,\quad (m=0,1,2..,n)$$
$$Y_{nm}^{(2)}(\theta,\varphi)=P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi,\quad (m=1,2..,n)$$

形如$Y_{nm}^{(i)}(\theta,\varphi),\ i=1,2$的函数称为**球函数**。独立的n次球函数共有$2n+1$个,球函数系$\left\{Y_{nm}^{(i)},\,i=1,2\right\}$构成完备正交系。其中模的平方：

$$N_{n0}^2=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\left(Y_{n0}^{(1)}(\theta,\varphi)\right)^2\,sin\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}(P_n^0(\cos\theta))^2sin\theta\,d\theta,$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}(P_n(\cos\theta))^2sin\theta\,d\theta=\frac{2}{2n+1}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{4\pi}{2n+1}\tag{3.3.29}$$

另外

$$N_{nm}^2=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}Y_{nm}^2(\theta,\varphi)\,sin\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\Phi_m^2(\varphi)d\varphi\int_0^{\pi}\left(P_n^m(\cos\theta)\right)^2sin\theta\,d\theta$$

其中$\Phi_m(\varphi)$为$\cos m\varphi$或$\sin m\varphi$, 但无论哪种情形都有：$\int_0^{2\pi} \Phi_m^2(\varphi)\, d\varphi = \pi$, 而

$$\int_0^{\pi} (P_n^m(\cos\theta))^2\, sin\theta\, d\theta = \int_{-1}^{1} (P_n^m(x))^2\, dx = ||P_n^m(x)||^2 = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

这样

$$N_{nm}^2 = \frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (m \geq 1) \tag{3.3.30}$$

任意定义在单位球面上的函数$f(\theta,\varphi)$, $(0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$, 可以按照球函数系$\{Y_{nm}(\theta,\varphi)\}$作广义$Fourier$展开：

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n} (C_{nm}\cos m\varphi + D_{nm}\sin m\varphi)\, P_n^m(\cos\theta)$$

其中，系数

$$C_{nm} = \frac{1}{N_{nm}^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\cos m\varphi P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta d\varphi,$$

$$D_{nm} = \frac{1}{N_{nm}^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\sin m\varphi P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta d\varphi,$$

而其中的N_{nm}^2已由公式(3.3.29)和(3.3.30)给出

进一步，可求出$\Delta_3 u = 0$的解的一般形式：

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n} \left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right) P_n^m(\cos\theta)\,(C_{nm}\cos m\varphi + D_{nm}\sin m\varphi)\,. \tag{3.3.31}$$

例3.3.12求解以下定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0,\ (r < a) \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}\ |_{r=a} = f(\theta,\ \varphi), \end{cases}$$

其中$f(\theta,\ \varphi)$满足$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta d\varphi = 0$, 并给出$f(\theta,\varphi) = 3\sin^2\theta\cos^2\varphi - 1$时的解。

解: $\Delta_3 u = 0$解的一般形式为：

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)})P_n^m(\cos\theta)\left(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi\right).$$

由于是球内问题，要保证$r=0$时解的有界性, 上式中$r^{-(n+1)}(n=0,1,2...)$的项要舍去,即$B_n=0(n=0,1,2...)$,这样

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}r^n\left(C_{nm}\cos m\varphi+D_{nm}\sin m\varphi\right)P_n^m(\cos\theta), \qquad (1)$$

再利用边界条件：$\frac{\partial u}{\partial r}\mid_{r=a}=f(\theta,\varphi)$,即有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}na^{n-1}\left(C_{nm}\cos m\varphi+D_{nm}\sin m\varphi\right)P_n^m(\cos\theta)=f(\theta,\varphi) \qquad (2)$$

这样由球函数系下的广义Fourier展开的系数确定公式,得到：

$$na^{n-1}C_{nm}=\frac{1}{N_{nm}^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\cos m\varphi P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta d\varphi,\quad n\geq 1$$

$$na^{n-1}D_{nm}=\frac{1}{N_{nm}^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\sin m\varphi P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta d\varphi,\quad n\geq 1$$

即

$$C_{nm}=\frac{1}{na^{n-1}N_{nm}^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\cos m\varphi P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta d\varphi,\quad n\geq 1$$

$$D_{nm}=\frac{1}{na^{n-1}N_{nm}^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\sin m\varphi P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta d\varphi,\quad n\geq 1$$

另外取C_{00}为任意常数，边界条件仍然成立。

当$f(\theta,\varphi)=3\sin^2\theta\cos^2\varphi-1=\frac{3}{4}(1-\cos2\theta)(1+\cos2\varphi)-1$, 可令

$$\begin{aligned}f(\theta,\varphi)&=D_{00}+D_{20}P_2^0(\cos\theta)+D_{22}P_2^2(\cos\theta)\cos2\varphi\\&=D_{00}+D_{20}\frac{1}{4}(3\cos2\theta+1)+D_{22}\frac{3}{2}(1-\cos2\theta)\cos2\varphi\\&=\frac{3}{4}(1-\cos2\theta)(1+\cos2\varphi)-1\end{aligned}$$

两边比较同类项系数得到：

$$D_{00}=0,\ D_{20}=-1,\ D_{22}=\frac{1}{2}$$

即

$$f(\theta,\varphi)=-P_2^0(\cos\theta)+\frac{1}{2}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi \tag{3}$$

把上式(3)的$f(\theta,\varphi)$代入(2)比较得到：

$$2aC_{20}=-1\Longrightarrow C_{20}=-\frac{1}{2a},\quad 2aC_{22}=\frac{1}{2}\Longrightarrow C_{22}=\frac{1}{4a}.$$

这样

$$u(r,\theta,\varphi)=C_{00}-\frac{1}{2a}r^2P_2^0(\cos\theta)+\frac{1}{4a}r^2P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi,$$

其中C_{00}为任意常数。

3.4 Bessel 函数

一．$Bessel$方程以及$Bessel$解的结论回顾：

$Bessel$ 方程:

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0\quad(\nu\geq 0) \tag{3.4.1}$$

通解为：

$$y=CJ_\nu(x)+DN_\nu(x)$$

其中$J_\nu(x)$和$N_\nu(x)$分别是第一类和第二类$Bessel$函数。第一类$Bessel$是方程的广义幂级数解，表达式为：

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{3.4.2}$$

第二类$Bessel$函数定义为：当$\nu\neq m$(m是非负整数)时，

$$N_\nu(x)=\frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}J_\nu(x)-\frac{1}{\sin\nu\pi}J_{-\nu}(x)$$

当$\nu=m$(m是非负整数)时，

$$N_m(x)=\lim_{\nu\to m}N_\nu(x)$$

二．$Bessel$函数的基本性质。

(1)**递推公式**：利用$Bessel$函数的级数表示式等，可以得出一系列$Bessel$函数的递推公式:

$$(x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x), \qquad (3.4.3.a)$$

$$\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right)' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x), \qquad (3.4.3.b)$$

$$2J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x), \qquad (3.4.3.c)$$

$$2\nu x^{-1} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)\,. \qquad (3.4.3.d)$$

比如利用递推公式(3.4.3.a)得到：

$$(xJ_1(x))' = xJ_0(x), \;\; J_0'(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x)$$

进一步可得相隔n阶两个$Bessel$函数的递推公式：

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n (x^\nu J_\nu) = x^{\nu-n} J_{\nu-n}, \qquad (3.4.4.a)$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n (x^{-\nu} J_\nu) = (-1)^n x^{-(\nu+n)} J_{\nu+n} \qquad (3.4.4.b)$$

利用这些递推公式可计算含$Bessel$函数的一些积分或完成计算$Bessel$函数值等其它运算。

(**2**)**渐近性质**：

$$\lim_{x\to 0} J_\nu(x) = \begin{cases} 1, (\nu = 0) \\ 0\,(\nu \geq 0) \end{cases} \qquad (3.4.5.a)$$

$$\lim_{x\to 0} N_\nu(x) = \infty \qquad (3.4.5.b)$$

显然第一类$Bessel$函数在趋于0时趋于有界量，而第二类$Bessel$函数趋于0时趋于无穷，这说明第一类$Bessel$函数和第二类$Bessel$函数在自变量趋于0的渐近性态是有明显区别的。而

$$\lim_{x\to+\infty} J_\nu(x) = \lim_{x\to+\infty} N_\nu(x) = 0. \qquad (3.4.6)$$

这说明$x \to +\infty$时，第一类$Bessel$函数和第二类$Bessel$函数渐近性态比较相似的。

(**3**)**零点和震荡性**：

$J_\nu(x), J_\nu'(x)$及$J_\nu(x) + hxJ_\nu'(x)$都有无穷可数个非负零点。而且这些零点分布在$(0, +\infty)$这一无界范围内。这一结论为将来讨论$Bessel$ 方程固有值问题时，提供了论述函数零点方面的依据。

(4)整数阶$Bessel$函数的母函数和积分表示：在复变函数的罗朗级数部分，已证明了等式：

$$\exp\left\{\frac{x}{2}(\xi-\xi^{-1})\right\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\xi^n,\quad (0<|\xi|<+\infty) \qquad (3.4.7)$$

利用罗朗级数的系数的积分表示并利用圆的参数进行围道积分，得到$J_n(x)$的积分表示：

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(x\sin\theta-n\theta)}\,d\theta\,. \qquad (3.4.8)$$

(1)递推公式的证明：证明第一类Bessel函数的递推公式:

$$(x^\nu J_\nu)'=x^\nu J_{\nu-1}$$

证明: 根据第一类$Bessel$函数的级数表示:

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

并利用递推式$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$得到:

$$(x^\nu J_\nu(x))'=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu}}\right)'$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\,(2k+2\nu)}{k!(k+\nu)\Gamma(k+\nu)}\frac{x^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu}}$$

$$=x^\nu\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+(\nu-1)+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu-1)}=x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

于是我们证明了递推公式(3.4.3.a):

$$(x^\nu J_\nu)'=x^\nu J_{\nu-1}.$$

应用类似的方法，我们可以证明递推公式(3.4.3.b)

$$(x^{-\nu}J_\nu)'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}.$$

下面证明(3.4.3.c)和(3.4.3.d): 因为对以上已经证明的两个递推式(3.4.3.a)和(3.4.3.b)中的导数求出并化简, 分别得到:

$$xJ_\nu'+\nu J_\nu=xJ_{\nu-1},$$

$$xJ_\nu'-\nu J_\nu=-xJ_{\nu+1},$$

把以上两式相加或相减就分别得到递推公式(3.4.3.c)和(3.4.3.d):

$$2J'_\nu = J_{\nu-1} - J_{\nu+1},$$

$$2\nu x^{-1} J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}\,.$$

另外也可以利用(3.4.3.a)和(3.4.3.b)式分别改写为算子形式:

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)(x^\nu J_\nu) = x^{\nu-1}J_{\nu-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)(x^{-\nu} J_\nu) = -x^{-(\nu+1)}J_{\nu+1}$$

反复使用后便得到相隔n阶两个$Bessel$函数的递推公式:

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n(x^\nu J_\nu) = x^{\nu-n}J_{\nu-n},$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n(x^{-\nu} J_\nu) = (-1)^n x^{-(\nu+n)}J_{\nu+n}\,.$$

(2) 渐进性质的说明:两类$Bessel$函数在$x \longrightarrow 0$的渐进性质(3.4.5)已经在第2节说明过。另外利用专门的方法可知: $x \longrightarrow +\infty$时,

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-\frac{3}{2}})$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-\frac{3}{2}})$$

由以上这两个式子,显然有

$$\lim_{x\to+\infty} J_\nu(x) = \lim_{x\to+\infty} N_\nu(x) = 0.$$

(3) 零点性质和衰减震荡性的说明:由于正弦函数和余弦函数在-1到1之间振动无限多次,所以从渐进公式可以看出: $J_\nu(x)$和$N_\nu(x)$有无穷多个零点,并有衰减因子$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$. 进一步,可证明其它零点性质。

例3.4.1利用$Bessel$方程的递推公式计算积分:

$$(1) I_1 = \int x^3 J_0(x)dx, \quad (2) I_2 = -\int x^2 J_{-2}(x)\,dx$$

解:**1**)应用贝塞尔函数的递推公式:$(x^\nu J_\nu)' = x^\nu J_{\nu-1}$,我们有

$$(xJ_1(x))' = xJ_0(x),\ \left(x^2 J_2(x)\right)' = x^2 J_1(x)$$

因此

$$\int x^3 J_0(x)dx = \int x^2 (xJ_0(x))dx = \int x^2 d(xJ_1(x))$$

$$= x^2(xJ_1(x)) - \int xJ_1(x)d(x^2) = x^3J_1(x) - \int 2x^2J_1(x)dx$$

$$= x^3J_1(x) - 2\int d(x^2J_2(x)) = x^3J_1(x) - 2x^2J_2(x) + c$$

$$= x^3J_1(x) + 2x^2J_0(x) - 4xJ_1(x) + c$$

(最后一步用了公式$2\nu x^{-1}J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}$,使$J_2(x) = -J_0(x) + 2x^{-1}J_1(x)$)

2) $I_2 = -\int x^2 J_{-2}(x)\,dx = -\int x^2 J_2(x)\,dx = -\int x^3(x^{-1}J_2(x))\,dx$

$$= \int x^3 d(x^{-1}J_1(x)) = x^2J_1(x) - 3\int xJ_1(x)\,dx = x^2J_1(x) + 3\int xdJ_0(x)$$

$$= x^2J_1(x) + 3xJ_0(x) - 3\int J_0(x)\,dx\,.$$

例3.4.2利用$Bessel$证明：整数阶$Bessel$函数的加法公式

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)J_{n-k}(y)$$

证明： 由整数阶$Bessel$函数的母函数表示

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x+y)\xi^n = \exp\left\{\frac{x+y}{2}(\xi-\xi^{-1})\right\} = \exp\left\{\frac{x}{2}(\xi-\xi^{-1})\right\}\exp\left\{\frac{y}{2}(\xi-\xi^{-1})\right\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)\xi^k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(y)\xi^m = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_k(x)J_m(y)\xi^{k+m}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)J_{n-k}(y)\right]\xi^n \qquad (令 m+k=n)$$

上式比较ξ^n系数就得到证明的结论。

三. $Bessel$方程的固有值问题

(1) 问题的模型：

$Bessel$方程的固有值问题是：

$$\begin{cases} (rR')' + \left(\lambda r - \dfrac{\nu^2}{r}\right)R = 0,\ (0<r<a) & (3.4.9.a) \\ |R(0)| < +\infty,\ \alpha R(a) + \beta R'(a) = 0. & (3.4.9.b) \end{cases}$$

此问题的边界条件可参考以下数学解释: 根据$S-L$定理, 由于$k(r)=r$, $r=0$为方程(3.4.9.a)的正则奇点, $r=a$是常点, 因而在$r=0$可添加的有界性条件, 在$r=a$可添加一, 二, 三类边界条件的任何一种条件。

(**2**) **Bessel方程的固有值问题的固有值和固有函数:**

令$\lambda=\omega^2$, 并记$x=\omega r$, 则(3.4.9.a)变成标准的$Bessel$方程:

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

则通解为:

$$y=AJ_\nu(x)+BN_\nu(x)$$

也就是固有值问题的泛定方程(3.4.9.a)的解为:

$$R(r)=AJ_\nu(\omega r)+BN_\nu(\omega r) \qquad (3.4.10)$$

由于要求$|R(0)|<+\infty$,所以只有取$B=0$, 这样$R(r)=AJ_\nu(\omega r)$,再代入$r=a$的边界条件得到代数方程:

$$\alpha J_\nu(\omega a)+\beta\omega J'_\nu(\omega a)=0 \qquad (3.4.11)$$

设以上代数方程(3.4.11)的非负实根从小到大依次排列为

$$(\omega_0=0),\ \omega_{k1},\ \omega_{k2}....,\omega_{kn}...$$

其中$\omega_0=0$的解只在零阶$Bessel$方程第二类边界条件下才有可能有,而ω_{kn}是指此根是代数方程在第k类边界条件下解出的第n 个正根($k=1,2,3$), 则固有值问题的固有值和固有函数为:

$$\text{固有值}:\lambda_n=\omega_{kn}^2, \quad \text{固有函数}:R_n(r)=J_\nu(\omega_{kn}r)$$

(3)**Bessel函数系下的广义Fourier 展开:**

按照$Sturm-Liouville$定理, 由ν阶$Bessel$方程的固有值问题得到的固有函数系$J_\nu(\omega_n r)$是完备的带权正交系(权值为r),所以任意取函数$f(r)\in L_r^2[0,a]$, $f(r)$可以在此函数系下展开为$Fourier-Bessel$级数, 即

$$f(r)=\sum_{n=0\text{或}1}^{+\infty}C_nJ_\nu(\omega_{kn}r) \qquad (3.4.12)$$

其中

$$C_n=\frac{1}{N_{\nu kn}^2}\int_0^a rf(r)J_\nu(\omega_{kn}r)dr \qquad (3.4.13)$$

而$N_{\nu kn}^2$是指固有函数$J_\nu(\omega_n r)$在第k类边界条件下的模的平方($k=1,2,3$),即

$$N_{\nu kn}^2=||J_\nu(\omega_{kn}r)||^2=\int_0^a rJ_\nu^2(\omega_{kn}r)dr \qquad (3.4.14)$$

根据$J_\nu(\omega_n r)$满足$Bessel$方程固有值问题，在a点附加三类不同的边界条件时，可推出$||J_\nu(\omega_n r)||^2$的化简结果分别为：
第一类边界条件下固有函数模的平方：

$$N_{\nu 1n}^2 = ||J_\nu(\omega_{1n} r)||^2 = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(\omega_{1n} a), \qquad (3.4.15.a)$$

第二类边界条件下固有函数模的平方：

$$N_{\nu 2n}^2 = ||J_\nu(\omega_{2n} r)||^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}\right) J_\nu^2(\omega_{2n} a), \qquad (3.4.15.b)$$

第三类边界条件下固有函数模的平方：

$$N_{\nu 3n}^2 = ||J_\nu(\omega_{3n} r)||^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{\nu^2}{\omega_{3n}^2} + \frac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2}\right) J_\nu^2(\omega_{3n} a). \quad (3.4.15.c)$$

三类边界条件下固有函数模的平方的具体计算过程：

记固有函数$J_\nu(\omega_n r) = R_n(r)$, 则$R_n(r)$满足$Bessel$ 方程，即有:

$$(rR_n')' + \left(\omega_n^2 r - \frac{\nu^2}{r}\right) R_n = 0 \quad (\nu \geq 0)$$

此式两边同乘以rR_n', 对r从0到a积分得到:

$$\int_0^a (rR_n')'\, rR_n'\, dr + \int_0^a \left(\omega_n^2 r - \frac{\nu^2}{r}\right) rR_n R_n'\, dr = 0$$

得到:

$$\frac{1}{2}\left[\left(rR_n'\right)^2 + (\omega_n^2 r^2 - \nu^2) R_n^2(r)\right]\Big|_0^a - \omega_n^2 \int_0^a rR_n^2(r)\, dr = 0$$

由于$\nu \neq 0$时，$R_n(r) \mid_{r=0} = J_\nu(\omega_n r) \mid_{r=0} = J_\nu(0) = 0$, 另外$N_{\nu n}^2 = ||R_n(r))||^2 = \int_0^a rR_n^2(r)$,
这样上式即化为:

$$\frac{a^2}{2}\omega_n^2 [J_\nu'(\omega_n a)]^2 + \frac{1}{2}(\omega_n^2 a^2 - \nu^2) J_\nu^2(\omega_n a) = \omega_n^2 N_{\nu n}^2 . \qquad (3.4.16)$$

在第一类边界条件下：$J_\nu(\omega_n a) = 0$, 那么上式简化为:

$$N_{\nu 1n}^2 = \frac{a^2}{2}[J_\nu'(\omega_n a)]^2 \qquad (3.4.17)$$

再由递推公式:

$$\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right)' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \Leftrightarrow xJ_\nu'(x) - \nu J_\nu(x) = -xJ_{\nu+1}(x)$$

和条件$J_\nu(\omega_n a) = 0$, 得出

$$\omega_n a J_\nu'(\omega_n a) - \nu J_\nu(\omega_n a) = -\omega_n a J_{\nu+1}(\omega_n a) \Longrightarrow J_\nu'(\omega_n a) = -J_{\nu+1}(\omega_n a)$$

所以

$$N_{\nu 1n}^2 = \frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(\omega_n a)]^2$$

类似地，我们可得出其它两类边界条件下模的平方表示式。

例3.4.4 求以下固有值问题的固有值和固有函数，写出固有函数模的平方, 并写出把$f(x)$在固有函数系下展开的表示式。

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + \lambda x^2 y = 0,\ (0 < x < a) \\ |y(0)| < +\infty,\ y(a) = 0. \end{cases}$$

解: 此固有值问题是零阶贝塞尔方程固有值问题(对应参数$\nu = 0$),由贝赛尔方程固有值问题的结论, 符合$|y(0)| < +\infty$的解具有形式：

$$y(x) = CJ_0(\omega x),\ \ (\lambda = \omega^2,\ \omega \geq 0)$$

把$y(x)$的表达式代入另一个端点a的边界条件，得出确定ω的方程：

$$J_0(\omega a) = 0$$

设此代数方程的第n个正根为ω_n, 我们就得到固有值和固有函数：

$$\lambda_n = \omega_n^2\ (n = 1, 2.....),\quad y_n(x) = J_0(\omega_n x)\,.$$

注意到在右端点$x = a$给出的是第一类边界条件，根据贝赛尔方程固有值问题在第一类边界条件下模的平方公式：

$$N_{0n}^2 = ||J_0(\omega_n x)||^2 = \frac{1}{2}a^2 J_1^2(\omega_n a)$$

再根据贝赛尔函数系下的广义$Fourier$展开公式：

$$f(x) = \sum_1^{+\infty} C_n J_0(\omega_n x)$$

其中

$$C_n = \frac{1}{N_{0n}^2}\int_0^a x f(x) J_0(\omega_n x) dx$$

其中

$$N_{0n}^2 = \frac{1}{2}a^2 J_1^2(\omega_n a)$$

例3.4.5设$\omega_n\,(n = 1, 2...)$是$J_0(x) = 0$的全体正根，将$f(x) = 1 - x^2$在$0 \leq x \leq 1$按照$\{J_0(\omega_n x)\}$作广义$Fourier$展开

解：设

$$1 - x^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_0(\omega_n x),$$

其中

$$C_n = \frac{1}{N_{01n}^2}\int_0^1 x(1-x^2)J_0(\omega_n x)dx = \frac{1}{N_{01n}^2\omega_n^2}\int_0^{\omega_n}(1-\frac{t^2}{\omega_n^2})tJ_0(t)dt \ (\text{令}t=\omega_n\, x)$$

$$= \frac{1}{N_{01n}^2\omega_n^2}\left[(1-\frac{t^2}{\omega_n^2})tJ_1(t)\Big|_0^{\omega_n} + \frac{2}{\omega_n^2}\int_0^{\omega_n} t^2 J_1(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{\omega_n^2 J_1^2(\omega_n)}\cdot\frac{2}{\omega_n^2}t^2 J_2(t)\Big|_0^{\omega_n} = \frac{4J_2(\omega_n)}{\omega_n^2 J_1^2(\omega_n)}.$$

以上N_{01n}^2是第n 个固有函数根据第1类边界条件模的平方公式(3.4.15.a)算出的，即

$$N_{01n}^2 = \frac{1}{2}J_1^2(\omega_n), \qquad (\text{使用公式时具体对应参数：}\nu=0,\ a=1)$$

又由递推关系：

$$J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)$$

以及$J_0(\omega_n)=0$得：

$$J_2(\omega_n) = \frac{2J_1(\omega_n)}{\omega_n},$$

因而

$$C_n = \frac{8}{{\omega_n}^3 J_1(\omega_n)}$$

所以

$$1 - x^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{8}{{\omega_n}^3 J_1(\omega_n)}\right)J_0(\omega_n x),$$

例3.4.6求解定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0,\ (r<a,\ 0<z<h) \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}\ |_{r=a} = 0, \\ u\ |_{z=0} = 0, u\ |_{z=h} = f(r). \end{cases}$$

解:采用柱坐标，由定解条件，可设$u(r,z)$, 方程简化为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

作分离变量：$u(r,z)=R(r)Z(z)$, 代入方程得：

$$\frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R}=-\frac{Z''}{Z}=-\lambda$$

所以

$$R''+\frac{1}{r}R'+\lambda R=0,\ Z''-\lambda Z=0$$

代入圆柱侧面的定解条件并考虑到解的有界性，我们得到固有值问题：

$$\begin{cases} R''+\frac{1}{r}R'+\lambda R=0,\ (r<a) \\ |R(0)|<+\infty,\ \ R'(a)=0. \end{cases}$$

这是零阶$Bessel$方程固有值问题，根据相关结论，固有值为：

$$\lambda_n=\omega_n^2,\ \ \omega_0=0,\ \ \omega_n\text{为}J_0'(\omega a)=0\text{的第n个正根。}$$

相应的固有函数为：

$$R_0(r)=J_0(0)=1,\ \ \ R_n(r)=J_0(\omega_n r),\qquad\quad n\geq 1$$

把$\lambda_n=\omega_n^2$代入$Z(z)$的方程得到：

$$Z_0(z)=C_0+D_0z,\quad Z_n(z)=C_n\cosh\omega_n z+D_n\sinh\omega_n z$$

令

$$u(r,z)=C_0+D_0z+\sum_{n=1}^{+\infty}(C_n\cosh\omega_n z+D_n sinh\omega_n z)J_0(\omega_n r)\qquad(1)$$

最后由圆柱上下底的条件定出$Fourier$系数：

$$u\mid_{z=0}=C_0+\sum_{n=1}^{+\infty}C_nJ_0(\omega_n r)=0\Rightarrow C_n=0$$

$$u\mid_{z=h}=D_0h+\sum_{n=1}^{+\infty}D_n\sinh\omega_n hJ_0(\omega_n r)=f(r)\qquad(2)$$

根据在$Bessel$函数系下的广义$Fourier$展开系数确定公式，由上式(2)得到：

$$D_0h=\frac{1}{N_{00}^2}\int_0^a f(r)rdr,\ D_n\sinh\omega_n h=\frac{\displaystyle\int_0^a f(r)J_0(\omega_n r)rdr}{N_{0n}^2}\quad(3)$$

其中N_{0n}^2是以上零阶$Bessel$方程固有值问题的第n个固有函数模的平方,即

$$N_{00}^2 = ||J_0(0)||^2, \quad N_{0n}^2 = ||J_0(\omega_n r)||^2$$

而由$Bessel$方程固有值问题在第二类边界条件下固有函数模的平方公式:

$$N_{\nu n}^2 = \frac{1}{2}\left[a^2 - \frac{\nu^2}{\omega_n^2}\right] J_\nu^2(\omega_n a)$$

把本问题中参数$\nu = 0$代入, 因此

$$N_{00}^2 = \frac{a^2}{2} J_0^2(0) = \frac{a^2}{2}, \quad N_{0n}^2 = \frac{1}{2} a^2 J_0^2(\omega_n a)$$

此结果代入(3), 得到：

$$D_0 = \frac{2}{a^2 h} \int_0^a f(r) r dr, \ D_n = \frac{2\displaystyle\int_0^a f(r) J_0(\omega_n r) r dr}{a^2 J_0^2(\omega_n a) \sinh \omega_n h}$$

把以上求得的系数代入解的表示式(1)就得出此定解问题的解。

例3.4.7求解定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_2 u, \ (t > 0, , r = \sqrt{x^2 + y^2} < r_0) \\ u \mid_{r=r_0} = 0, \\ u \mid_{t=0} = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = \Phi(r, \theta) \, . \end{cases} \tag{1}$$

解:在极坐标下，方程化为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right],$$

作分离变量：$u = T(t)R(r)\Theta(\theta)$, 代入方程得：

$$\frac{T'(t)}{T} = a^2 \left[\frac{R'' + \dfrac{1}{r}R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta}\right],$$

在此式中，令

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -\mu, \quad \frac{R'' + \dfrac{1}{r}R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda \, .$$

所以得到一系列微分方程：

$$\Theta'' + \mu\Theta = 0,$$

$$r^2R'' + rR' + \left(\lambda r^2 - \mu\right)R = 0,$$

以及

$$T'(t) + \lambda a^2 T = 0. \qquad (2)$$

再对$\Theta(\theta)$附加周期性条件$\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$,在$r = 0$附加自然边界条件$|R(0)| < +\infty$,则得到国有值问题：

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu\Theta = 0, \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \end{cases} \qquad (3)$$

以及

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' + \left(\lambda r^2 - \mu\right)R = 0, \ (r < r_0) \\ |R(0)| < +\infty, \ \ R(r_0) = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

解固有值问题(3)得：

$$\mu_m = m^2, \ (m = 0, 1, 2...,) \quad \Theta_m(\varphi) = C_m \cos m\theta + D_m \sin m\theta$$

把$\mu_m = m^2$代入固有值问题(4), 这样$R(r)$满足的m阶$Bessel$方程的固有值问题，解得：

$$\lambda_n = \omega_{mn}^2, \quad \omega_{mn}\text{为}J_m(\omega r_0) = 0\text{的第n个正根。}$$

相应的固有函数为：

$$R_{mn}(r) = J_m(\omega_{mn} r), \qquad n \geq 1$$

把$\lambda_n = \omega_{mn}^2$代入$T(t)$满足的方程，得到：

$$T_{mn}(t) = ce^{-a^2\omega_{mn}^2 t},$$

把以上求得的分离变量形式解叠加，可设

$$u(t, r, \theta) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(C_{mn}\cos m\theta + D_{mn}\sin m\theta)J_m(\omega_{mn}r)e^{-a^2\omega_{mn}^2 t}$$

代入边界条件：

$$u\mid_{t=0} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(C_{mn}\cos m\theta + D_{mn}\sin m\theta)J_m(\omega_{mn}r) = \Phi(r, \theta)$$

这是二元函数$\Phi(r, \theta)$按照函数系$\{J_m(\omega_{mn}r)\cos m\theta, J_m(\omega_{mn}r)\sin m\theta\}$的二重广义傅里叶级数展开。其中展开系数为：

$$C_{mn} = \frac{\delta_m}{\pi {r_0}^2 J_{m+1}^2(\omega_{mn}r_0)}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\Phi(r, \theta)\cos m\theta J_m(\omega_{mn}r)\, r d\theta dr.$$

其中

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & \text{当} m = 0 \\ 2, & m > 0. \end{cases}$$

$$D_{mn} = \frac{2}{\pi {r_0}^2 J_{m+1}^2(\omega_{mn} r_0)} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \Phi(r,\theta) \sin m\theta J_m(\omega_{nm} r)\, r d\theta dr.$$

例3.4.8 求证$J_{\frac{1}{2}}(x)$是初等函数，并进一步证明所有半整数阶贝赛尔函数都是初等函数。

解题提示: 因为初等函数都有相应的幂级数表示，所以可根据$J_{\frac{1}{2}}(x)$ 的广义幂级数表达式，论证其是初等函数。又由于$J_{\frac{3}{2}}(x) = J_{(\frac{1}{2}+1)}(x)$，所以$J_{\frac{3}{2}}(x)$就能由$J_{\frac{1}{2}}(x)$递推出来，因此可以根据$J_{\frac{1}{2}}(x)$是初等函数论这一事实论证出$J_{\frac{3}{2}}(x)$也是初等函数，然后以此类推，进一步说明所有半整数阶贝赛尔函数都是初等函数。

证明：由$J_\nu(x)$的表达式：

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

我们知道：

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\frac{1}{2}+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\frac{1}{2}+1)2^{2k+1}} x^{2k+1} \tag{1}$$

利用Γ函数的递推公式：$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, 以及$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$我们得到：

$$k!\Gamma(k+\frac{1}{2}+1)2^{2k+1} = 2^{2k+1}k!(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2}) \ldots \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$$
$$= (2k)!!(2k+1)!!\sqrt{\pi} = (2k+1)!\sqrt{\pi}$$

上式代入$J_{\frac{1}{2}}(x)$表达式(1)式，我们得到：

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!\sqrt{\pi}} x^{2k+1}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

这样就证明了$J_{\frac{1}{2}}(x)$是初等函数，下面我们证明$n > 1$时候,$J_{n+\frac{1}{2}}(x)$也是初等函数，事实上，利用相隔n阶两个$Bessel$函数的递推公式：

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n (x^{-\nu} J_\nu) = (-1)^n x^{-(\nu+n)} J_{\nu+n}$$

把此式中的ν换成$\frac{1}{2}$，并利用已经证明的式$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$, 得到：

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

因此$J_{n+\frac{1}{2}}(x)$是初等函数。类似地，再利用另一个相隔n阶的$Bessel$函数的递推公式:

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n (x^\nu J_\nu) = x^{\nu-n} J_{\nu-n}$$

可以证明$J_{-(n+\frac{1}{2})}(x)$是初等函数。综上就完全正明了半阶的第一类半阶$Bessel$函数是初等函数，最后再证明第二类半阶$Bessel$函数就可完成证明。事实上，ν是非整数时，第二类$Bessel$函数定义为

$$N_\nu(x) = \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi} J_\nu(x) - \frac{1}{\sin\nu\pi} J_{-\nu}(x),$$

此式中把ν换成$n+\frac{1}{2}$,则有

$$N_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1} J_{-(n+\frac{1}{2})}(x)$$

这样，由第一类半阶$Bessel$函数是初等函数的结论我们就自然证明出第二类半阶$Bessel$函数是初等函数。

虚变量的$Bessel$方程

虚变量的ν阶$Bessel$方程为:

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2) y = 0 \quad (\nu \geq 0)$$

作自变量替换$\xi = ix$, 就可化为ν阶$Bessel$方程

$$\xi^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \xi \frac{dy}{d\xi} + (\xi^2 - \nu^2) y = 0 \quad (\nu \geq 0)$$

由$Bessel$方程的通解的表达式得到ν阶虚变量的$Bessel$方程通解是：

$$y(x) = C J_\nu(ix) + D N_\nu(ix).$$

通常引进两个实函数：

$$I_\nu(x) \stackrel{d}{=} e^{-i\frac{\nu\pi}{2}} J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$K_\nu(x) \stackrel{d}{=} \frac{\pi[-I_\nu(x) + I_{-\nu}(x)]}{2\sin\nu\pi} \, (\nu \neq n), \quad K_n(x) = \lim_{\nu\to n} K_\nu(x) \, (\ n\text{为整数})$$

$I_\nu(x), K_\nu(x)$仍然是ν阶虚变量的$Bessel$方程的解，分别称为ν阶虚变量$Bessel$函数，故ν阶虚变量的$Bessel$方程的通解可表示为：

$$y(x) = A I_\nu(x) + B K_\nu(x)$$

例3.4.9半径为a高为h的均匀圆柱，侧面流入强度为q，上下底温度均为0, 求圆柱体内温度u满足边值问题：

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0,\ r < a, 0 < z < h \\ k\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = q,\ k\text{为热传导系数} \\ u\ |_{z=0} = 0, u\ |_{z=h} = 0. \end{cases}$$

解：依照定解条件形式，可设$u = u(r, z)$,则泛定方程化简为：

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

作分离变量：$u = R(r)Z(z)$,并代入$z = 0, z = h$的边界条件，得到固有值问题：

$$\begin{cases} Z'' + \lambda Z = 0,\ (0 < z < h) \\ Z(0) = Z(h) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

和

$$(rR')' - \lambda r R = 0 \tag{2}$$

由$Z(z)$满足的固有值问题(1), 解得固有值和固有函数分别为：

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2,\ Z_n(z) = \sin\frac{n\pi}{h}z, n = 1, 2, ...$$

这样$R(r)$方程为：

$$r^2R'' + rR' - \lambda_n r^2 R = 0, \quad (\lambda_n = (\frac{n\pi}{h})^2) \tag{3}$$

经过坐标变换，$x = \sqrt{\lambda_n} r, y(x) = R(\frac{x}{\sqrt{\lambda_n}})$,变成零阶虚变量的Bessel方程:

$$x^2y'' + xy' - x^2y = 0 \tag{4}$$

由虚变量的$Bessel$方程的结论，方程通解是：

$$y(x) = CI_0(x) + DK_0(x) \tag{5}$$

由于温度u的是有界的，而$K_0(x)$在$x = 0$无界，所以解的含$K_0(x)$的部分要舍去，即$D = 0$. 这样方程(3)的有界解是

$$R_n(r) = I_0(\frac{n\pi}{h}r)$$

由叠加原理，可设：

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n I_0(\frac{n\pi}{h}r)\sin\frac{n\pi}{h}z$$

代入边界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = \sum \frac{n\pi}{h} C_n I_0'(\frac{n\pi}{h}a)\sin\frac{n\pi}{h}z = \frac{q}{k}$$

其中系数

$$C_n = \frac{h}{n\pi I_0'(\frac{n\pi}{h}a)} \frac{1}{||\sin\frac{n\pi}{h}z||^2} \int_0^h \frac{q}{k}\sin\frac{n\pi}{h}zdz$$

再利用递推公式

$$I_0'(x) = I_1(x)$$

以及

$$||\sin\frac{n\pi}{h}z||^2 = \int_0^h \sin^2\frac{n\pi}{h}zdz = \frac{h}{2},$$

和

$$\int_0^h \frac{q}{k}\sin\frac{n\pi}{h}zdz = \frac{qh}{kn\pi}[1-(-1)^n]$$

代入C_n的表达式，得到：

$$C_n = \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ \dfrac{4hq}{k(2m+1)^2\pi^2 I_1(\frac{2m+1}{h}\pi a)}, & n = 2m+1. \end{cases}$$

于是最后得到此定解问题的解：

$$u(r,z) = \frac{4hq}{k\pi^2}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2m+1)^2 I_1(\frac{2m+1}{h}\pi a)}\right) I_0(\frac{2m+1\pi}{h}r)\sin\frac{2m+1\pi}{h}z$$

例3.4.10 设$H(x) = aJ_\nu(ix)$，$x \in R$且$H(x)$值域为实数，求满足条件的复数a。

解题提示: $aJ_\nu(ix)$是虚变量$Bessel$方程的解，可利用$J_\nu(x)$的表达式，得出$aJ_\nu(ix)$的表示式，选择适当a的就可消去表达式中的复数成分，使其成为实函数，从而得出虚变量$Bessel$方程的实函数解。

解：

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

因而

$$J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{ix}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{1}$$

由于

$$i^{2k+\nu} = (-1)^k i^\nu \tag{2}$$

结合式(1), (2), 我们有：

$$H(x)=aJ_\nu(ix)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{ai^\nu}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{3}$$

由上式，$H(x)$是实函数的条件是$ai^\nu=h=$实数,因此求出

$$a=\frac{h}{i^\nu}=\frac{h}{e^{\nu\ln i}}=\frac{h}{e^{i\nu\frac{\pi}{2}}}=he^{-i\frac{\nu\pi}{2}},\quad \text{其中}h\text{为实数。}$$

$Bessel$ 函数也有可能出现在非柱形区域问题中，以下就是一个例子：

例3.4.11求解杆的纵振动的定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right),\ (0<x<l)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=l}=0,\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x),\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0}=0.\end{cases}$$

解：用分离变量求解，可设$u(t,x)=T(t)X(x)$,代入方程和齐次边界条件，代入方程并结合边界条件得到固有值问题：，得到固有值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}(xX')'+\lambda X=0,\ (0<x<l)\\ X(0)\text{有界},\quad X'(l)=0.\end{cases} \tag{1}$$

和常微分方程

$$T''+\lambda a^2T=0. \tag{2}$$

由$X(x)$满足的固有值问题(1), 解得固有值

$$\lambda_0=0,\ \ \lambda_n=\omega_n^2\,(n\ge 1),\ \ \omega_n\text{是}J_0'(\omega l)=-J_1(\omega l)=0\text{的第n个正根}$$

和固有函数为：

$$X_0=J_0(0)=1,\ \ X_n(x)=J_0(\omega_n x)$$

相应解得：

$$T_0(t)=A_0+B_0t,\ \ T_n(t)=A_n\cos a\omega_n t+B_n\sin a\omega_n t,\ \ n\ge 1$$

由叠加原理，可设：

$$u(t,x)=A_0+B_0t+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\cos a\omega_n t+B_n\sin a\omega_n t\right)J_0(\omega_n x),$$

代入初值条件：

$$u\mid_{t=0}=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_nJ_0(\omega_nx)=\varphi(x)$$

和

$$\frac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0}=B_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a\omega_nB_nJ_0(\omega_nx)=0$$

再利用$Bessel-Fourier$系数确定公式，解得：

$$B_n=0,\ \ n=0,1,2....,$$

以及

$$A_0=\frac{2}{l^2}\int_0^l x\varphi(x)dx,\ \ A_n=\frac{2}{l^2J_0^2(\omega_nl)}\int_0^l x\varphi(x)J_0(\omega_nx)dx$$

球$Bessel$方程和球$Bessel$函数

球$Bessel$方程为

$$x^2y''+2xy'+[x^2-l(l+1)]y=0,$$

令

$$z(x)=\sqrt{x}\,y(x)$$

球$Bessel$方程化为$l+\frac{1}{2}$阶$Bessel$方程:

$$x^2z''+xz'+\left[x^2-(l+\frac{1}{2})^2\right]z=0$$

根据$Bessel$方程解的结论

$$z(x)=CJ_{l+\frac{1}{2}}(x)+DN_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

因此球$Bessel$方程有相应解：

$$y(x)=\frac{C}{\sqrt{x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x)+\frac{D}{\sqrt{x}}N_{l+\frac{1}{2}}(x),$$

第四章：积分变换方法：

一本章概述：

积分变换方法是求解数学物理方程的又一重要方法，其根本点就是通过积分变换的方法把某些定解问题利用积分变换后变成像函数的定解问题,而像函数对应的问题往往要比原问题容易解决。这样解出像函数后，再通过反变换就得出原定解问题的解。本章主要讲述了常用的$Fourier$变换(包括正余弦变换), $Laplace$ 变换的基本步骤和基本公式。

通过本章学习，我们首先要明确积分变换法的基本思想，并能熟练掌握$Fourier$ 变换和$Laplace$ 变换的基本的方法和步骤。

4.1 $Fourier$变换求解法

(**1**)**Fourier变换的定义：**

正变换：$F(\lambda)=F[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx,\qquad (4.1.1.a)$

反变换：$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.\qquad (4.1.1.b)$

(2)$Fourier$变换的主要性质：

1.线性性质

$$F[c_1f_1(x)+C_2f_2(x)]=c_1F[f_1(x)]+c_2F[f_2(x)]$$

2.频移性质：

$$F[f(x)e^{i\lambda_0x}]=F(\lambda-\lambda_0)$$

证明：

$$F[f(x)e^{i\lambda_0 x}]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda_0 x}e^{-i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i(\lambda-\lambda_0)x}\,dx=F(\lambda-\lambda_0)$$

3.微分关系： 这里重点要强调的是微分关系这一根本性质，即

$$F(f'(x))=i\lambda F(\lambda),F(f''(x))=(i\lambda)^2F(\lambda),...,F(f^{(n)}(x))=(i\lambda)^nF(\lambda).$$

以上对$f^{(n)}(x)$作Fourier变换时，假定$f(\pm\infty)=f'(\pm\infty)=...f^{(n-1)}(\pm\infty)=0.$

证明：

$$F[f'(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)e^{-i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}df(x)$$

$$=e^{-i\lambda x}f(x)\mid_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)d(e^{-i\lambda x})$$

$$=i\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx=i\lambda F(\lambda)$$

类似地，可进一步证明 $F[f^{(n)}(x)]=(i\lambda)^nF(\lambda)$

通过‘微分关系’这一重要性质我们发现: 在变换之前，函数可能含有对x的各阶导数,但变换后的像函数就不再含有对λ的导数了，所以，经Fourier变换变换后，相应部分的微分运算就变成了代数运算，因此变换后相应的问题难度就降低了。比如，对于原来含有两个自变量的偏微分方程，经过对其中一个自变量作Fourier变换，偏微分方程就形式上变成常微分方程了(因为像函数相应变量不再含有导数了)

4.卷积性质： 如$F[f(x)]=F(\lambda),\ F[g(x)]=G(\lambda)$, 则

$$F[f(x)*g(x)]=F(\lambda)\,G(\lambda)$$

其中$f(x)*g(x)$是$f(x)$和$g(x)$作卷积运算，即

$$f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\tau)g(\tau)d\tau$$

以后，我们通常用到这个公式的逆形式，即：

$$F^{-1}[F(\lambda)\,G(\lambda)]=f(x)*g(x)$$

5.积分性质： 设$F[f(x)]=F(\lambda),\ \int_{-\infty}^{x}f(\xi)d\xi$ 的$Fourier$变换存在，则

$$F\left[\int_{-\infty}^{x}f(\xi)d\xi\right]=\frac{1}{i\lambda}F(\lambda)$$

证明：记$g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f(\xi)d\xi$, 并记$F[g(x)]=G(\lambda)$, 由微分性质

$$F[g'(x)]=i\lambda G(\lambda)=F[f(x)]=F(\lambda)\Longrightarrow G(\lambda)=\frac{1}{i\lambda}F(\lambda)$$

(3) **Fourier变换求解法的基本步骤**

1)找出Fourier变换作用的自变量，设立像函数。

从Fourier变换定义可以看出，Fourier变换作用的自变量必须是定义在全直线上，比如无限长杆热传导问题是：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \ (t>0,\ -\infty<x<+\infty)\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

此问题的x的范围是全直线，即$-\infty<x<+\infty$, 对x作$Fourier$ 变换,即令

$$\overline{u}(t,\lambda)=F[u(t,x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t,x)e^{-i\lambda x}dx$$

2)对原定解问题进行Fourier变换，求出像函数满足的定解问题.

3)求解像函数满足的定解问题，求出像函数(因为经过变换后，像函数满足的方程的相应部分的微分运算就变成了代数运算，所以求解像函数要比求解原问题降低了难度)。

4)作反变换，最终求出原定解问题的解。

例4.1.1利用Fourier变换方法求解热传导齐次初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},(t>0,-\infty<x<+\infty)\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$$

解: 作$Fourier$变换，即设

$$\overline{u}(t,\lambda)=F[u(t,x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t,x)e^{-i\lambda x}dx,$$

这样：

$$F[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}]=(i\lambda)^2\overline{u}=-\lambda^2\overline{u},\qquad F[\frac{\partial u}{\partial t}]=\frac{d\overline{u}}{dt}.$$

并记$F[\varphi(x)]=\overline{\varphi}(\lambda)$,这样,原初值问题经$Fourier$变换得到：

$$\begin{cases}\dfrac{d\overline{u}}{dt}=-a^2\lambda^2\overline{u},\\ \overline{u}\mid_{t=0}=\overline{\varphi}(\lambda)\end{cases}$$

解$\overline{u}$的常微分方程得到：

$$\overline{u}(t,\lambda)=C(\lambda)\,e^{-a^2\lambda^2 t}$$

利用$\overline{u}\mid_{t=0}=\overline{\varphi}(\lambda)$,定出$C(\lambda)=\overline{\varphi}(\lambda)$,这样：

$$\overline{u}(t,\lambda)=\overline{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}$$

下面进行$Fourier$反变换，首先

$$F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}e^{i\lambda x}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x d\lambda=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4a^2 t}).$$

这样,

$$u(t,x)=F^{-1}[\overline{u}(t,\lambda)]=F^{-1}[\overline{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}]=\varphi(x)*\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4a^2 t})$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t})d\xi$$

注4.1.1由于在微积分和复变函数中，已经算出以下积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-ax^2\right)\cos bx dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right),\quad (a>0)$$

因此上例中是直接引用了此结果，算出

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x d\lambda=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4a^2 t}).$$

例4.1.2利用Fourier变换方法求一维热传导非齐次初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x),(t>0,-\infty<x<+\infty)\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$$

解: 对变量x作$Fourier$变换，即设$\overline{u}(t,\lambda)=F[u(t,x)]$, 这样：

$$F[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}]=-\lambda^2\overline{u},\quad F[\frac{\partial u}{\partial t}]=\frac{d\overline{u}}{dt}.$$

并记$F[f(t,x)]=\overline{f}(t,\lambda),F[\varphi(x)]=\overline{\varphi}(\lambda)$这样,原初值问题经$Fourier$变换得到：

$$\begin{cases}\dfrac{d\overline{u}}{dt}=-a^2\lambda^2\,\overline{u}+\overline{f}(t,\lambda),\\ \overline{u}\mid_{t=0}=\overline{\varphi}(\lambda)\end{cases}$$

利用一阶常微分方程求解公式得到:

$$\overline{u}(t,\lambda)=e^{-a^2\lambda^2 t}\left(\int_0^t e^{a^2\lambda^2\tau}\overline{f}(\tau,\lambda)d\tau+m(\lambda)\right)$$

利用$\overline{u}\mid_{t=0}=\overline{\varphi}(\lambda)$,定出$m(\lambda)=\overline{\varphi}(\lambda)$,这样：

$$\overline{u}(t,\lambda)=\left(\int_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\overline{f}(\tau,\lambda)d\tau\right)+\overline{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}$$

下面进行$Fourier$反变换，由已知的$Fourier$反变换公式,即

$$F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4a^2t}),$$

这样

$$F^{-1}[\overline{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}]=\varphi(x)*\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4a^2t})$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t})d\xi$$

由于$Fourier$反变换是对λ的积分，与t无关, 则：

$$F^{-1}\left[\left(\int_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\overline{f}(\tau,\lambda)d\tau\right)\right]=\int_0^t F^{-1}\left(e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\overline{f}(\tau,\lambda)\right)d\tau$$

$$=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\tau,\xi)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)})d\xi$$

最后我们得到：

$$u=F^{-1}[\overline{u}(t,\lambda)]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t})d\xi$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\tau,\xi)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)})d\xi.$$

例4.1.3利用$Fourier$变换方法求解自由弦振动初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},(t>0,-\infty<x<+\infty)\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x),u_t\mid_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

解题提示：此问题是自由弦振动初值问题，在第一章中可以用通解法求解(结果就是**达朗贝尔公式**)。但直接利用富利叶变换也同样可以求解得出**达朗贝尔公式**。

解:作$Fourier$变换，即设$\overline{u}(t,\lambda)=F[u(t,x)]$,这样：

$$F[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}]=-\lambda^2\overline{u},\quad F[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}]=\frac{d^2\overline{u}}{dt^2}.$$

原初值问题经$Fourier$变为：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overline{u}}{dt^2} = -a^2\lambda^2\overline{u}, \\ \overline{u}\mid_{t=0} = \overline{\varphi}(\lambda), \overline{u}_t\mid_{t=0} = \overline{\psi}(\lambda) \end{cases}$$

$\overline{u}$满足的是一个二阶常系数线性方程，易解得它对应的通解:

$$\overline{u} = A(\lambda)e^{i\lambda at} + B(\lambda)e^{-i\lambda at},$$

代入初值条件得出确定$A(\lambda)$和$B(\lambda)$的方程组：

$$\begin{cases} A(\lambda) + B(\lambda) = \overline{\varphi}(\lambda) \\ i\lambda aA(\lambda) - i\lambda aB(\lambda) = \overline{\psi}(\lambda) \end{cases}$$

解得

$$A(\lambda) = \frac{1}{2}\left[\overline{\varphi}(\lambda) + \frac{1}{i\lambda a}\overline{\psi}(\lambda)\right]$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{2}\left[\overline{\varphi}(\lambda) - \frac{1}{i\lambda a}\overline{\psi}(\lambda)\right]$$

这样解得

$$\overline{u}(t,\lambda) = \frac{1}{2}\left[\overline{\varphi}(\lambda)e^{i\lambda at} + \overline{\varphi}(\lambda)e^{-i\lambda at}\right] + \frac{1}{2ai\lambda}\left[\overline{\psi}(\lambda)e^{i\lambda at} - \overline{\psi}(\lambda)e^{-i\lambda at}\right]$$

$$F^{-1}[\overline{\varphi}(\lambda)e^{i\lambda at}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\varphi}(\lambda)e^{i\lambda at}e^{i\lambda x}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\varphi}(\lambda)e^{i\lambda(x+at)}\,d\lambda = \varphi(x+at)$$

同理: $F^{-1}[\overline{\varphi}(\lambda)e^{-i\lambda at}] = \varphi(x-at)$. 又由$Fourier$变换的积分性质: $F^{-1}[\frac{1}{i\lambda}\overline{\psi}(\lambda)] = \int_{-\infty}^{x}\psi(\xi)d\xi.$
这样，进一步有：

$$F^{-1}[\frac{1}{i\lambda}\overline{\psi}(\lambda)e^{i\lambda at}] = \int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, \quad F^{-1}[\frac{1}{i\lambda}\overline{\psi}(\lambda)e^{-i\lambda at}] = \int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)d\xi\,.$$

因此

$$F^{-1}\left[\frac{1}{2ai\lambda}\left(\overline{\psi}(\lambda)e^{i\lambda at} - \overline{\psi}(\lambda)e^{-i\lambda at}\right)\right] = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

最后，结合$\overline{u}(t,\lambda)$的表示式有：

$$u(t,x) = L^{-1}[\overline{u}(t,\lambda)] = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\Big] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi.$$

例4.1.4利用$Fourier$变换方法求解纯受迫振动初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), (t>0, -\infty < x < +\infty) \\ u\mid_{t=0} = 0, u_t\mid_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解题提示此问题是纯受迫弦振动问题，在第一章中可以用齐次化原理解决。但直接利用富利叶变换也同样可以解决此问题，难度并不大，所以本题提供了一个解决纯受迫弦振动问题的补充方法.

解:作$Fourier$变换，即设$\overline{u}(t,\lambda)=F[u(t,x)]$,这样：

$$F[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}]=-\lambda^2\overline{u},\quad F[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}]=\frac{d^2\overline{u}}{dt^2}.$$

原初值问题经$Fourier$变为：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\overline{u}}{dt^2}=-a^2\lambda^2\overline{u}+\overline{f}(t,\lambda),\quad (t>0)\\ \overline{u}\mid_{t=0}=0,\overline{u}_t\mid_{t=0}=0\end{cases}$$

$\overline{u}$满足的是一个非齐次方程，易解得它对应的齐次方程通解:$Ae^{i\lambda at}+Be^{-i\lambda at}$,这样可以利用常数变易法，设

$$\overline{u}=C(t,\lambda)e^{i\lambda at}+D(t,\lambda)e^{-i\lambda at},$$

由微积分的常数变易法公式：$C(t,\lambda)$和$D(t,\lambda)$由以下方程组确定：

$$\begin{cases}C'(t,\lambda)e^{i\lambda at}+D'(t,\lambda)e^{-i\lambda at}=0\\ C'(t,\lambda)(e^{i\lambda at})'+D'(t,\lambda)(e^{-i\lambda at})'=\overline{f}(t,\lambda)\end{cases}$$

其中求导符号$'$表示对变量t求导。这样解得：

$$C'(t,\lambda)=\frac{e^{-i\lambda at}}{2i\lambda a}\overline{f}(t,\lambda),\ D'(t,\lambda)=-\frac{e^{i\lambda at}}{2i\lambda a}\overline{f}(t,\lambda)$$

上式积分得

$$C(t,\lambda)=\int_0^t\frac{e^{-i\lambda a\tau}}{2i\lambda a}\overline{f}(\tau,\lambda)d\tau+m_1(\lambda)$$

$$D(t,\lambda)=-\int_0^t\frac{e^{i\lambda a\tau}}{2i\lambda a}\overline{f}(\tau,\lambda)d\tau+m_2(\lambda)$$

这样解得

$$\begin{aligned}\overline{u}(t,\lambda)&=C(t,\lambda)e^{i\lambda t}+D(t,\lambda)e^{-i\lambda t}\\&=\left(\int_0^t\frac{e^{-i\lambda a\tau}}{2i\lambda a}\overline{f}(\tau,\lambda)d\tau+m_1(\lambda)\right)e^{i\lambda at}\\&-\left(\int_0^t\frac{e^{i\lambda a\tau}}{2i\lambda a}\overline{f}(\tau,\lambda)d\tau+m_2(\lambda)\right)e^{-i\lambda at}\end{aligned}$$

由初值条件,即$\overline{u}\mid_{t=0}=\overline{u}_t\mid_{t=0}=0$,确定出$m_1(\lambda)=m_2(\lambda)=0$,这样确定出像函数：

$$\overline{u}(t,\lambda)=\int_0^t(\frac{e^{i\lambda a(t-\tau)}}{2i\lambda a}-\frac{e^{-i\lambda a(t-\tau)}}{2i\lambda a})\overline{f}(\tau,\lambda)d\tau \qquad (1)$$

下面进行反变换：$F^{-1}[\overline{f}(\tau,\lambda)]=f(t,x)$,再由Fourier变换的积分性质：

$$F^{-1}[\frac{1}{i\lambda}\overline{f}(\tau,\lambda)]=\int_{-\infty}^{x}f(\tau,\xi)d\xi$$

所以

$$F^{-1}[e^{i\lambda a(t-\tau)}\frac{1}{i\lambda}\overline{f}(\tau,\lambda)]=\int_{-\infty}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi$$

同理

$$F^{-1}[e^{-i\lambda a(t-\tau)}\frac{1}{i\lambda}\overline{f}(\tau,\lambda)]=\int_{-\infty}^{x-a(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi$$

由以上两式以及$\overline{u}(t,\lambda)$表示式(1), 最后得到

$$u(t,x)=F^{-1}[\overline{u}(t,\lambda)]=\frac{1}{2a}\int_{0}^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi\,.$$

注4.1.2以上例子中像函数方程

$$\begin{cases}\frac{d^2\overline{u}}{dt^2}=-a^2\lambda^2\overline{u}+\overline{f}(t,\lambda), \quad (t>0)\\ \overline{u}\mid_{t=0}=0,\overline{u}_t\mid_{t=0}=0\end{cases}$$

是用常数变易法求解的，但把此问题当做一个关于t的常微分方程初值问题，也可用Laplace变换求解。

例4.1.5*利用Fourier变换方法求解：

$$\begin{cases}u_{tt}+a^2u_{xxxx}=0,(t>0,-\infty<x<+\infty)\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x),\ u_t(0,x)=\psi(x)\end{cases}$$

解: 以x为积分变量作$Fourier$变换，设$\overline{u}(t,\lambda)=F[u(t,x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t,x)e^{-i\lambda x}dx$,
这样：$F[u_{xxxx}]=(i\lambda)^4\overline{u}=\lambda^4\overline{u}$,并记$\overline{\varphi}(\lambda)=F[\varphi(x)],\overline{\psi}(\lambda)=F[\psi(x)]$. 因此以上定解问题作$Fourier$变换后得到:

$$\begin{cases}\frac{d^2\overline{u}}{dt^2}+a^2\lambda^4\overline{u}=0,(t>0)\\ \overline{u}(0,\lambda)=\overline{\varphi}(\lambda),\ \overline{u}_t(0,\lambda)=\overline{\psi}(\lambda)\end{cases}$$

解$\overline{u}(t,\lambda)$的方程, 得到:

$$\overline{u}(t,\lambda)=A(\lambda)\cos a\lambda^2t+B(\lambda)\sin a\lambda^2t$$

利用$\overline{u}(t,\lambda)$的初值条件，即：

$$\overline{u}(0,\lambda)=\overline{\varphi}(\lambda),\ \overline{u}_t(0,\lambda)=\overline{\psi}(\lambda),$$

具体定出

$$\overline{u}(t,\lambda)=\overline{\varphi}(\lambda)\cos a\lambda^2t+\frac{\overline{\psi}(\lambda)}{a\lambda^2}sina\lambda^2t$$

利用$Fourier$反变换结论：

$$F^{-1}[\cos a\lambda^2t]=\frac{1}{2\sqrt{2\pi at}}\left(\cos\frac{x^2}{4at}+\sin\frac{x^2}{4at}\right),$$

$$F^{-1}[\sin a\lambda^2t]=\frac{1}{2\sqrt{2\pi at}}\left(\cos\frac{x^2}{4at}-\sin\frac{x^2}{4at}\right)$$

以及$Fourier$变换的积分性质：

$$F[\int_{-\infty}^{x}f(\xi)d\xi]=\frac{1}{i\lambda}\overline{f}(\lambda)$$

得到：

$$u(t,x)=F^{-1}[\overline{\varphi}(\lambda)]*F^{-1}[\cos a\lambda^2t]-F^{-1}\left[\frac{\overline{\psi}(\lambda)}{a(i\lambda)^2}\right]*F^{-1}[\sin a\lambda^2t],$$

$$=\varphi(x)*\frac{1}{2\sqrt{2\pi at}}\left(\cos\frac{x^2}{4at}+\sin\frac{x^2}{4at}\right)-g(x)*\frac{1}{2\sqrt{2\pi at}}\left(\cos\frac{x^2}{4at}-\sin\frac{x^2}{4at}\right),$$

其中$g(x)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x}d\eta\int_{-\infty}^{\eta}\psi(\tau)d\tau.$

例4.1.6利用$Fourier$变换求解：

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0,\ (y>0,-\infty<x<+\infty)\\ u\mid_{y=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

解题提示: 此问题本质就是在上半平面定义的$Laplace$方程的边值问题，典型的解决方法是第五章给出的格林函数法。但我们注意到此问题中自变量：$-\infty<x<+\infty$,再结合本问题的具体形式,本问题也可以用Fourier变换来求解(以x作为积分变量)

解: 以x作为积分变量进行$Fourier$变换：即

$$\overline{u}(\lambda,y)=F[u(x,y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)e^{-i\lambda x}dx$$

则

$$F[u_{xx}]=-\lambda^2\overline{u},\ F[u_{yy}]=\frac{d^2\overline{u}}{dy^2},$$

再记$F[\varphi(x)]=\overline{\varphi}(\lambda)$，这样原定解问题经过$Fourier$变换，得到：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\overline{u}}{dy^2}-\lambda^2\overline{u}=0,\ (y>0)\\ \overline{u}\mid_{y=0}=\overline{\varphi}(\lambda).\end{cases}$$

由泛定方程解得：

$$\overline{u}=c_1(\lambda)e^{-\lambda y}+c_2(\lambda)e^{\lambda y}.$$

其中$c_1(\lambda)$和$c_2(\lambda)$待定.

由于$y>0$, 要保证$\overline{u}(\lambda,y)$的有界性,当$\lambda\geq 0$时，只可保留$e^{-\lambda y}$形式的解，当$\lambda<0$时，只可保留$e^{\lambda y}$形式的解，所以：

$$\overline{u}(\lambda,y)=\begin{cases}c_1(\lambda)e^{-\lambda y}\ (\lambda\geq 0)\\ c_2(\lambda)e^{\lambda y},\ (\lambda<0).\end{cases}$$

再由条件$\overline{u}\mid_{y=0}=\overline{\varphi}(\lambda)$,定出$c_1(\lambda)=c_2(\lambda)=\overline{\varphi}(\lambda)$, 所以

$$\overline{u}(\lambda,y)=\overline{\varphi}(\lambda)g(\lambda,y),\text{其中}g(\lambda,y)=\begin{cases}e^{-\lambda y},\ (\lambda\geq 0)\\ e^{\lambda y},\ (\lambda<0)\end{cases}$$

下面进行反变换，先计算$F^{-1}[g(\lambda,y)]$,由$Fourier$反变换定义

$$F^{-1}[g(\lambda,y)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda,y)e^{i\lambda x}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{\lambda y}e^{i\lambda x}d\lambda+\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda y}e^{i\lambda x}d\lambda\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{y+ix}-\frac{1}{-y+ix}\right)=\frac{y}{\pi}\frac{1}{x^2+y^2}$$

最后，由$Fourier$反变换的卷积性质,我们解得定解问题的解：

$$u(x,y)=F^{-1}[\overline{\varphi}(\lambda)]*F^{-1}[g(\lambda,y)]$$

$$=\varphi(x)*\left(\frac{y}{\pi}\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi$$

高维Fourier变换：

同时对几个自变量进行变换的Fourier变换是高维Fourier变换，以三维为例：

$$\text{正变换}: F(\lambda,\mu,\nu)=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dxdydz$$

$$\text{反变换}: f(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda,\mu,\nu)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu$$

类似地有微分性质：

$$F[\frac{\partial f}{\partial x}]=i\lambda F[f],\ \ F[\frac{\partial f}{\partial y}]=i\mu F(f),\ \ F[\frac{\partial f}{\partial z}]=i\nu F(f)$$

进一步

$$F[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}]=(i\lambda)^2F[f]=-\lambda^2F[f],\quad F[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}]=-\mu^2F[f],\ F[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}]=-\nu^2F[f]$$

特别：

$$F[\Delta_3 u]=-\left(\lambda^2+\mu^2+\nu^2\right)\overline{u}$$

例4.1.7利用Fourier变换方法求解高维热传导齐次初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta_3 u,(t>0,-\infty<x,y,z<+\infty)\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x,y,z)\end{cases}$$

解: 作$Fourier$变换，即设

$$\overline{u}(t,\lambda,\mu,\nu)=F[u(t,x,y,z)]=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t,x,y,z)e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dxdydz,$$

这样：

$$F[\frac{\partial u}{\partial t}]=\frac{d\overline{u}}{dt},\quad F[\Delta_3 u]=-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\overline{u},$$

并记$F[\varphi(x,y,z)]=\overline{\varphi}(\lambda,\mu,\nu)$,这样,原初值问题经$Fourier$变换得到：

$$\begin{cases}\dfrac{d\overline{u}}{dt}=-a^2\rho^2\overline{u},\quad(\rho^2=\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\\ \overline{u}\mid_{t=0}=\overline{\varphi}(\lambda,\mu,\nu)\end{cases}$$

解得

$$\overline{u}(t,\lambda,\mu,\nu)=\overline{\varphi}(\lambda,\mu,\nu)e^{-a^2\rho^2t}$$

作$Fourier$反变换:

$$F^{-1}[e^{-a^2\rho^2t}]=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}e^{i\lambda x}d\lambda\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\mu^2t}e^{i\mu y}d\mu\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\nu^2t}e^{i\nu z}d\nu\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}\right),$$

$$u(t,x,y,z)=F^{-1}[\overline{u}(t,\lambda,\mu,\nu)]=F^{-1}[\overline{\varphi}(\lambda,\mu,\nu)]*F^{-1}[e^{-a^2\rho^2t}]$$

$$=\varphi(x,y,z)*\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3\iiint_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\exp(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t})d\xi d\eta d\zeta$$

例4.1.8利用$Fourier$变换求解定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a\dfrac{\partial u}{\partial x}+b\dfrac{\partial u}{\partial y}+c\dfrac{\partial u}{\partial z},\ (t>0,-\infty<x,y,z<+\infty)\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x,y,z).\end{cases}$$

解题提示：这是个一阶线性偏方程的初值问题，可以用第一章的特征线方法来求解。但从另一个角度上看，空间变量(x,y,z) 是全空间变量，这符合Fourier变换的必要条件。再结合本问题的具体形式，我们可以通过高维Fourier变换方法来求解（以x,y,z作为积分变量）

解:以(x,y,z)为积分变量作高维$Fourier$变换, 即令

$$\overline{u}(t,\lambda,\mu,\nu)=F[u(t,x,y,z)]=\iiint_{-\infty}^{+\infty}u(t,x,y,z)e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dxdydz$$

由$Fourier$变换的微分关系得到：

$$F[\frac{\partial u}{\partial x}]=i\lambda\overline{u},\ F[\frac{\partial u}{\partial y}]=i\mu\overline{u},\ F[\frac{\partial u}{\partial z}]=i\nu\overline{u},$$

这样，经过$Fourier$变换, 原定解问题变换为：

$$\begin{cases}\dfrac{d\overline{u}}{dt}=i(\lambda a+\mu b+\nu c)\overline{u}\\ \overline{u}\mid_{t=0}=\overline{\varphi}(\lambda,\mu,\nu).\ (\text{其中}\overline{\varphi}(\lambda,\mu,\nu)=F[\varphi(x,y,z)])\end{cases}$$

由以上泛定方程解得：

$$\overline{u}= H(\lambda,\mu,\nu)e^{i(\lambda a+\mu b+\nu c)t},$$

其中$H(\lambda,\mu,\nu)$待定. 再根据条件$\overline{u}\mid_{t=0}=\overline{\varphi}(\lambda,\mu,\nu)$, 确定出$H(\lambda,\mu,\nu)=\overline{\varphi}(\lambda,\mu,\nu)$. 即

$$\overline{u}=\overline{\varphi}(\lambda,\mu,\nu)e^{i(\lambda a+\mu b+\nu c)t},$$

下面进行$Fourier$反变换求出$u(t,x,y,z)$:

$$u(t,x,y,z)=F^{-1}[\overline{u}]=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\overline{u}(t,\lambda,\mu,\nu)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\overline{\varphi}(\lambda,\mu,\nu)e^{i(\lambda a+\mu b+\nu c)t}e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\overline{\varphi}(\lambda,\mu,\nu)e^{i(\lambda(x+at)+\mu(y+bt)+\nu(z+ct))}d\lambda d\mu d\nu \qquad (1)$$

由于$F^{-1}[\overline{\varphi}(\lambda,\mu,\nu)]=\varphi(x,y,z)$,也就是

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\overline{\varphi}(\lambda,\mu,\nu)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu \qquad (2)$$

比较以上两式(即式(1)(2)), 最后得到定解问题的解：

$$u(t,x,y,z)=F^{-1}[\overline{u}]=\varphi(x+at,y+bt,z+ct)$$

正余弦变换：

设$f(x)$是定义在半无界区间$[0,+\infty)$上的函数, 则

1. 正弦变换：

$$\overline{f}_s(\lambda)=\int_0^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx$$

反变换：

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\overline{f}_s(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda\,.$$

2. 余弦变换：

$$\overline{f}_c(\lambda)=\int_0^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx,$$

反变换：

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\overline{f}_c(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda\,.$$

注4.1.1：正余弦变换与傅里叶变换的联系：

正余弦变换可以认为是$Fourier$变换的衍生性变换，以下以余弦变换为例说明这一点：因为$f(x)$定义范围为$0 \le x < +\infty$，要使用$Fourier$变换，应该使$f(x)$的定义域扩展到$-\infty < x < +\infty$，然后才能对延拓后的函数作$Fourier$变换，如果是使用偶延拓，即令

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当} x \ge 0 \\ f(-x), & \text{当} x \le 0 \end{cases}$$

这样

$$F[\hat{f}(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\left(\cos\lambda x - i\sin\lambda x\right)\, dx$$
$$= 2\int_{\mathbf{0}}^{+\infty} \mathbf{f(x)} \cos\lambda\mathbf{x}\,\mathbf{dx} = F(\lambda)$$

记上式中的$\int_0^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx = \overline{f}_c(\lambda)$，则$\overline{f}_c(\lambda)$就是$f(x)$的余弦变换，且$F(\lambda) = 2\overline{f}_c(\lambda)$. 再使用$Fourier$反变换，

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\left(\cos\lambda x + i\sin\lambda x\right)\, d\lambda$$

由于这时易证$F(\lambda)$也相应关于λ为偶函数，这样由上式得到

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\cos\lambda x d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} (2\overline{f}_c(\lambda))\cos\lambda x d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \overline{f}_c(\lambda)\cos\lambda x d\lambda$$

当把定义域限制在$x \ge 0$，就得到反余弦变换:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \overline{f}_c(\lambda)\cos\lambda x d\lambda$$

例4.1.9利用正弦变换求解:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (t > 0, x > 0) \\ u(t,0) = u_0,\ u(0,x) = 0, \\ u(t,+\infty) = u_x(t,+\infty) = 0\,. \end{cases}$$

解:利用正弦变换,令

$$\overline{u}(t,\lambda) = F_s[u(t,x)] = \int_0^{+\infty} u(t,x)\sin\lambda x dx$$

则

$$F_s[u_{xx}] = \int_0^{+\infty} u_{xx}\sin\lambda x dx = \int_0^{+\infty} \sin\lambda x du_x$$
$$= (u_x\sin\lambda x)\big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u_x d(\sin\lambda x) = -\lambda\int_0^{+\infty} \cos\lambda x du$$

$$= -\lambda u \cos \lambda x\big|_0^{+\infty} - \lambda^2 \int_0^{+\infty} u \sin \lambda x dx = \lambda u_0 - \lambda^2 \overline{u}$$

因而, 原问题经过正弦变换后, 得到:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{u}}{dt} = -a^2\lambda^2\overline{u} + a^2\lambda u_0 \\ \overline{u}\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

可求得:

$$\overline{u} = \frac{u_0}{\lambda}(1 - e^{-a^2\lambda^2 t})$$

最后作正弦变换逆变换:

$$u(t,x) = F_s^{-1}[\overline{u}(t,\lambda)] = \frac{2u_0}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-a^2\lambda^2 t}) \sin \lambda x d\lambda$$

$$= \frac{2u_0}{\pi}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{\lambda} d\lambda - \int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left(\int_0^x \cos \lambda\xi\right) d\lambda\right]$$

$$= \frac{2u_0}{\pi} \times \frac{\pi}{2} - 2u_0 \int_0^x \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda\xi d\lambda\right) dx$$

$$= u_0 - \frac{u_0}{a\sqrt{\pi t}}\int_0^x \exp(-\frac{\xi^2}{4a^2 t}) d\xi = u_0\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-y^2} dy\right]$$

例4.1.10已知三维波动方程定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta_3 u, \quad (t > 0, r > 0) \\ u\ |_{r=0} \text{ 有界}, \\ u\ |_{t=0} = 0,\ \ u_t\ |_{t=0} = (1 + r^2)^{-2}. \end{cases} \tag{1}$$

1)结合达朗贝尔公式求解此定解问题。

2)结合使用正余弦变换求解此定解问题。

解法1)：由问题形式，可设$u = u(t,r)$, 方程变为：

$$u_{tt} = a^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r\right)$$

再令$v = ru$, 则变为半无界弦振动定解问题：

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{rr}, \quad (t > 0, r > 0) \\ v\ |_{r=0} = 0, \\ v\ |_{t=0} = 0,\ \ v_t\ |_{t=0} = \dfrac{r}{(1 + r^2)^2}. \end{cases} \tag{2}$$

V满足的问题是半直线问题，为了使用达朗贝尔公式，考虑奇延拓后的全直线问题：

$$\begin{cases} H_{tt} = a^2 H_{xx}, \quad (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ H \mid_{t=0} = 0, \ \ H_t \mid_{t=0} = \dfrac{x}{(1+x^2)^2} . \end{cases} \tag{3}$$

利用达朗贝尔公式

$$H(t,x) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \frac{\xi}{(1+\xi^2)^2}\, d\xi = -\frac{1}{4a}\frac{1}{(1+\xi^2)}\Big|_{x-at}^{x+at}$$

$$= \frac{1}{4a}\frac{1}{(1+(x-at)^2)} - \frac{1}{4a}\frac{1}{(1+(x+at)^2)} = \frac{xt}{[1+(x-at)^2][1+(x+at)^2]}$$

把解$H(t,x)$中的限制在$x > 0$(对应于$r > 0$), 就得到半无界弦振动定解问题的解

$$v(t,r) = \frac{rt}{[1+(r-at)^2)][1+(r+at)^2]}$$

相应地，此三维波动方程定解问题的解

$$u(t,r) = \frac{t}{[1+(r-at)^2][1+(r+at)^2]}$$

解法2)：设$u = u(t,r)$, 并令$v = ru$,得出半无界弦振动定解问题：

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{rr}, \quad (t > 0, r > 0) \\ v \mid_{r=0} = 0, \\ v \mid_{t=0} = 0, \ \ v_t \mid_{t=0} = \dfrac{r}{(1+r^2)^2} . \end{cases} \tag{4}$$

以下我们用**正弦变换**求解v, 令

$$\overline{V} = F_s[v(t,r)] = \int_0^{+\infty} v(t,r) \sin\lambda r \, dr$$

则

$$F_s[v_{rr}] = \int_0^{+\infty} v_{rr} \sin\lambda r dr = \int_0^{+\infty} \sin\lambda r d v_r$$

$$= (v_r \sin\lambda r)\big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v_r d(\sin\lambda r) \ = -\lambda \int_0^{+\infty} \cos\lambda r dv$$

$$= -\lambda v \cos\lambda r\big|_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} v d(\cos\lambda r) = -\lambda^2 \int_0^{+\infty} v(t,r) \sin\lambda r \, dr = -\lambda^2 \overline{V}$$

另外

$$F_s[\frac{r}{(1+r^2)^2}] = \int_0^{+\infty} \frac{r}{(1+r^2)^2} \sin \lambda r dr = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \sin \lambda r d\left(\frac{1}{1+r^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \sin \lambda r (\frac{1}{1+r^2}) \mid_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+r^2} d(\sin \lambda r) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda r}{1+r^2} dr$$

$$= \frac{\lambda}{4} Re \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda r}}{1+r^2} dr \right\} = \frac{\lambda}{4} Re \left\{ 2\pi i Res[\frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2}, i] \right\} = \frac{\pi\lambda}{4} e^{-\lambda}$$

因而, 原问题经过正弦变换后, 得到:

$$\begin{cases} \overline{V}_{tt} = -a^2\lambda^2\overline{V} \\ \overline{V}\big|_{t=0} = 0, \quad \overline{V}_t\big|_{t=0} = \dfrac{\pi\lambda}{4} e^{-\lambda} \end{cases}$$

解得：

$$\overline{V} = \frac{\pi}{4a} e^{-\lambda} \sin \lambda a t\,.$$

作反变换

$$v = F_s^{-1}[\overline{V}] = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{4a} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda} \sin \lambda a t \sin \lambda r \, d\lambda = \frac{1}{4a} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda} \left(\cos \lambda(r-at) - \cos \lambda(r+at)\right) d\lambda$$

$$= e^{-\lambda} \left[\frac{-\cos \lambda(r-at) + (r-at) \sin \lambda(r-at)}{4a(1+(r-at)^2)} - \frac{-\cos \lambda(r+at) + (r+at) \sin \lambda(r+at)}{4a(1+(r+at)^2)} \right] \Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{4a} \frac{1}{(1+(r-at)^2)} - \frac{1}{4a} \frac{1}{(1+(r+at)^2)} = \frac{rt}{[1+(r-at)^2][1+(r+at)^2]}$$

相应地，此三维波动方程定解问题的解

$$u(t,r) = \frac{t}{[(1+(r-at)^2][1+(r+at)^2]}$$

4.2 Laplace变换

基本要求和基本结论

Laplace 变换定义为：

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt, \text{ 其中}p\text{是复变量}$$

Laplace 反变换有多种方法，主要有直接法，利用梅林公式，化部分分式，留数计算等方法。这些方法的具体适用背景和操作步骤在复变函数的相关教材上都有详细论述，这儿就不一一细述。

正余弦变换和Laplace变换所适用的问题:

$Laplace$变换法和正，余弦变换法和Fourier变换的求解方程原理和基本步骤总体类似: 就是经变换后相应部分的微分运算就变成了代数运算, 像函数方程的难度降低了，求解出像函数后再经过反变换就求得了原问题的解。

但$Laplace$变换法以及正弦或余弦变换法和Fourier变换有个很大不同: $Laplace$变换法和正, 余弦变换法作用变量是定义在$(0,+\infty)$或类似情形, 也就是说$Laplace$变换法和正，余弦变换法处理的是半直线问题。而从上面我们知道，Fourier变换处理的是全直线问题。(当然，要实现变换还要有与具体相关变换所相适应的其它条件)

$Laplace$变换和反变换的常用公式或性质:

1.基本性质:

1.线性性质：$L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]$

2. **位移定理:**$L[e^{\lambda t}f(t)]=F(p-\lambda)$,

3.像函数微分法：$L[t^n f(t)]=(-1)^n F^{(n)}(p)$,

4.微分性质：$L[f'(t)]=pF(p)-f(+0)$, $L[f''(t)]=p^2F(p)-pf(+0)-f'(+0)$

$L[f^{(n)}(t)]=p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)-p^{n-2}f'(+0)-...-f^{(n-1)}(+0)$,

5.本函数积分法：$L[\int_0^t f(\xi)\,d\xi]=\dfrac{F(p)}{p}$,

6. **卷积性质:**$L[f(t)*g(t)]=F(p)G(p)$, 或$L^{-1}[F(p)G(p)]=f(t)*g(t)$

7. **延时定理:**$L[f(t-\tau)]=e^{-p\tau}F(p)\,.\quad(t\geq\tau)$

2.常用结果:

$$L[1]=\frac{1}{p},\qquad L[e^{at}]=\frac{1}{p-a},\qquad L[\cos\omega t]=\frac{p}{p^2+\omega^2},\qquad L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,.$$

$f(t)=L^{-1}[F(p)]=\sum\limits_{k=1}^{n}Res[F(p)e^{pt},p_k]$, (其中$p_1,p_2,...,p_n$为$F(p)$的所有奇点, $\lim\limits_{p\longrightarrow\infty}F(p)=0$)

例4.2.1一个无限长的杆子，杆子端点的温度随着时间变化函数为$f(t)$, 杆子的初始温度为0，利用Laplace 变换方法求解杆子温度分布的定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},(t>0,x>0)\\ u(t,0)=f(t),\\ u(0,x)=0.\end{cases}$$

解:作Laplace变换, 令

$$\overline{u}(p,x)=L[u(t,x)]=\int_0^{+\infty}u(t,x)e^{-pt}dt$$

则

$$L[\frac{\partial u}{\partial t}]=p\overline{u}-u(0,x)=p\overline{u},\ L[u_{xx}]=\frac{d^2\overline{u}}{dx^2}$$

于是作Laplace变换得:

$$\begin{cases}p\overline{u}=a^2\dfrac{d^2\overline{u}}{dx^2}\\ \overline{u}\mid_{x=0}=\overline{f}(p).\end{cases}$$

方程的通解:

$$\overline{u}=Ce^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+De^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x},$$

其中$\sqrt{p}$是取$\sqrt{1}=1$的单值分支。由于$\overline{u}(p,+\infty)$ 有界,得出$C=0$, 所以

$$\overline{u}(p,x)=\overline{f}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

查Laplace变换表:

$$L^{-1}[e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]=\frac{x}{2a\sqrt{\pi t^3}}\exp\{-\frac{x^2}{4a^2t}\}$$

对$\overline{u}(p,x)$作$Laplace$反变换, 并利用$Laplace$变换的卷积性质, 于是有:

$$u(t,x)=L^{-1}[\overline{f}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]=f(t)*\frac{x}{2a\sqrt{\pi t^3}}\exp\{-\frac{x^2}{4a^2t}\}$$

$$=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\exp\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\}d\tau$$

例4.2.2 求解定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},(t>0,x>0)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=0}=f(t),\\ u\mid_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0}=0.\end{cases}$$

解:作Laplace变换, 令

$$\overline{u}(p,x)=L[u(t,x)]=\int_0^{+\infty}u(t,x)e^{-pt}dt$$

则

$$L[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}] = p^2\overline{u} - pu\mid_{t=0} - u_t\mid_{t=0} = p^2\overline{u},\ L[u_{xx}] = \frac{d^2\overline{u}}{dx^2}$$

于是作Laplace变换得:

$$\begin{cases} p^2\overline{u} = a^2\dfrac{d^2\overline{u}}{dx^2} \\ \dfrac{d\overline{u}}{dx}\mid_{x=0} = \overline{f}(p). \end{cases}$$

方程的通解:

$$\overline{u} = Ce^{\frac{p}{a}x} + De^{-\frac{p}{a}x}$$

由于$\overline{u}(p,+\infty)$ 有界,得出$C=0$, 进一步解得：

$$\overline{u}(p,x) = -\frac{a}{p}\overline{f}(p)e^{-\frac{p}{a}x}$$

用积分性质得

$$L^{-1}\left[-\frac{a}{p}\overline{f}(p)\right] = -a\int_0^t f(\tau)d\tau$$

再使用延时定理，最后得：

$$u(t,x) = L^{-1}[\overline{u}(p,x)] = L^{-1}[-\frac{a}{p}\overline{f}(p)e^{-\frac{p}{a}x}] = -aH(t-\frac{x}{a})\int_0^{t-\frac{x}{a}} f(\tau)d\tau$$

其中$H(\xi)$为单位函数，即$H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geq 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$

例4.2.3 用Laplace变换求解混合问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, (t>0, 0<x<l) \\ u(t,0) = 0,\ u_x(t,l) = A\sin\omega t,\ \ \omega \neq \dfrac{2k-1}{2l}\pi a,\ k = 1,2..., \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

解:作Laplace变换, 令

$$\overline{u}(p,x) = L[u(t,x)] = \int_0^{+\infty} u(t,x)e^{-pt}dt$$

则原定解问题经过Laplace变换得到：

$$\begin{cases} p^2\overline{u} = a^2\dfrac{d^2\overline{u}}{dx^2} \\ \overline{u}\mid_{x=0} = 0,\ \dfrac{d\overline{u}}{dx}\mid_{x=l} = \dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2}. \end{cases}$$

以上常微分方程通解：

$$\overline{u} = C\cosh\frac{p}{a}x + D\sinh\frac{p}{a}x,$$

再结合边界条件定出

$$\overline{u}(p,x) = \frac{Aa\omega}{p(p^2+\omega^2)\cosh\frac{l}{a}p}\sinh\frac{x}{a}p.$$

利用反演公式：

$$u(t,x) = \sum Res[\overline{u}(p,x)e^{pt}],$$

以上$\sum$是对$\overline{u}(p,x)e^{pt}$的所有孤立奇点的留数求和。$\overline{u}(p,x)$在P平面上有可去奇点$p=0$, 一级极点$p=\pm i\omega$和$p=\pm i\omega_k$, 其中$\omega_k=\frac{(2k-1)\pi a}{2l}(k=1,2,3...)$,, 具体计算有：

$$Res[\overline{u}(p,x)e^{pt}, i\omega] = \frac{Aa\omega e^{pt}}{p(p+i\omega)\cosh\frac{l}{a}p}\sinh\frac{x}{a}p\mid_{p=i\omega} = \frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{2i\omega}\frac{Aa}{\cos\frac{\omega l}{a}}e^{i\omega t},$$

$$Res[\overline{u}(p,x)e^{pt}, -i\omega] = \frac{Aa\omega e^{pt}}{p(p-i\omega)\cosh\frac{l}{a}p}\sinh\frac{x}{a}p\mid_{p=-i\omega} = \frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{-2i\omega}\frac{Aa}{\cos\frac{\omega l}{a}}e^{-i\omega t},$$

所以

$$Res[\overline{u}(p,x)e^{pt}, i\omega] + Res[\overline{u}(p,x)e^{pt}, -i\omega] = \frac{Aa}{\omega\cos\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t,$$

另外

$$Res[\overline{u}(p,x)e^{pt}, i\omega_k] = \frac{Aa\omega e^{pt}}{p(p^2+\omega^2)(\cosh\frac{l}{a}p)'}\sinh\frac{x}{a}p\mid_{p=i\omega_k}$$

$$= \frac{Aa\omega e^{pt}}{p(p^2+\omega^2)\frac{l}{a}\sinh\frac{l}{a}p}\sinh\frac{x}{a}p\mid_{p=i\omega_k} = \frac{Aa\omega e^{i\omega_k t}}{i\omega_k(-\omega_k^2+\omega^2)\frac{l}{a}\sin(k\pi-\frac{\pi}{2})}\sin\frac{\omega_k}{a}x,$$

类似地

$$Res[\overline{u}(p,x)e^{pt}, -i\omega_k] = \frac{Aa\omega e^{-i\omega_k t}}{-i\omega_k(-\omega_k^2+\omega^2)\frac{l}{a}\sin(k\pi-\frac{\pi}{2})}\sin\frac{\omega_k}{a}x,$$

由以上两式并把$\omega_k=\frac{(2k-1)\pi a}{2l}$代入，得到

$$Res[\overline{u}(p,x)e^{pt}, i\omega_k] + Res[\overline{u}(p,x)e^{pt}, -i\omega_k] = \frac{16Aa\omega l^2}{\pi}(-1)^{k-1}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2k-1)\pi at}{2l}}{(2k-1)\left[4l^2\omega^2-a^2(2k-1)^2\pi^2\right]}$$

这样，最后得到：

$$u(t,x) = \frac{Aa}{\omega\cos\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t + \frac{16Aa\omega l^2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2k-1)\pi at}{2l}}{(2k-1)\left[4l^2\omega^2-a^2(2k-1)^2\pi^2\right]}$$

注4.2.1 上例也可以用第二章的分离变量法的非齐次边界条件对应的情形的方法来求解。

例4.2.4利用通解法和Laplace变换两种方法求解以下定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 \\ u(0,y) = y+1, u(x,0) = 1 \end{cases}$$

解法1:使用通解法, 求方程通解为

$$u = f(x) + g(y) + xy,$$

再代入定解条件:

$$u(0,y) = f(0) + g(y) = y+1,\ \ u(x,0) = f(x) + g(0) = 1.$$

解得:

$$g(y) = y + 1 - f(0),\ f(x) = 1 - g(0)$$

这样

$$u(x,y) = f(x) + g(y) + xy = y + 2 - (f(0) + g(0))$$

而$f(0) + g(0) = [f(x) + g(0)]\ |_{x=0} = 1$, 因此最后有

$$u(x,y) = xy + y + 1$$

解法2: 使用$Laplace$变换, 设$U(x,p) = L[u(x,y)] = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(x,y)e^{-py}dy$, 则

$$L[u_y] = pU - u(x,0) = pU - 1,\ L[1] = \frac{1}{p},\ L[y] = \frac{1}{p^2}$$

这样, 原定解问题经过$Laplace$变为:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(pU - 1) = \dfrac{1}{p} \\ U(0,p) = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p} \end{cases}$$

化简为

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dx} = \dfrac{1}{p^2} \\ U(0,p) = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p} \end{cases}$$

解得

$$U(x,p) = \frac{1}{p^2}x + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

作$Laplace$反变换,并注意到$L^{-1}[\frac{1}{p}] = 1,\ L^{-1}[\frac{1}{p^2}] = y$, 最后解得:

$$u(t,x) = L^{-1}[U(x,p)] = xy + y + 1$$

例4.2.5利用Laplace 变换求解定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin 2x \sin \omega t, \ (0 < x < \pi, t > 0) \\ u\mid_{x=0} = 0, u\mid_{x=\pi} = 0. \\ u\mid_{t=0} = 0, u_t\mid_{t=0} = 0, \end{cases}$$

解题提示:此问题是个非齐次混合问题，可以用特解法，冲量原理，固有函数展开法等建立在分离变量基础上的方法来解决(参考第二章最后一节的例题)，在本例中我们说明:也可作laplace变换解决此定解问题

解: 对t作laplace变换，即$\overline{u}(p,x) = L[u(t,x)] = \int_0^{+\infty} u(t,x)e^{-pt}dt.$,这样

$$L[u_{tt}] = p^2\overline{u} - pu\mid_{t=0} - u_t\mid_{t=0} = p^2\overline{u},\ L[u_{xx}] = \frac{d^2\overline{u}}{dx^2},\ L[\sin\omega t] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

则有,

$$\begin{cases} p^2\overline{u} = 4\dfrac{d^2\overline{u}}{dx^2} + \sin 2x \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}, \ (0 < x < \pi, t > 0) \\ \overline{u}\mid_{x=0} = 0, \overline{u}\mid_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

由方程形式,观察$\overline{u}$有形如$\overline{u}_1 = C\sin 2x$的特解，代入方程定出$C = \dfrac{\omega}{(p^2+16)(p^2+\omega^2)}$,再结合$\overline{u}$对应齐次方程通解，得出:

$$\overline{u} = Ae^{\frac{px}{2}} + Be^{-\frac{px}{2}} + \frac{\omega}{(p^2+16)(p^2+\omega^2)}\sin 2x,$$

由边界条件: $u\mid_{x=0} = 0, u\mid_{x=\pi} = 0$. 得$A = B = 0$, 这样

$$\overline{u} = \frac{\omega}{(p^2+16)(p^2+\omega^2)}\sin 2x$$

最后作$Laplace$反变换，得出此定解问题的解：

$$u(t,x) = L^{-1}[\overline{u}] = \frac{1}{16-\omega^2}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{4}\sin 4t\right)\sin 2x$$

例4.2.6利用Laplace 变换求解半直线弦振动问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ (t > 0,\ 0 < x < +\infty) \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = c, \\ u(t,0) = 0. \end{cases}$$

解:作Laplace 变换，即$\overline{u}(p,x)=L[u(t,x)]$, 这样

$$L[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}]=p^2\overline{u}-pu(0,x)-u_t(0,x)=p^2\overline{u}-c$$

这样，经过Laplace 变换后，原定解问题变为：

$$\begin{cases} p^2\overline{u}-c=4\dfrac{d^2\overline{u}}{dx^2},\ (0<x<l) \\ \overline{u}(p,0)=0. \end{cases}$$

由$\overline{u}$的确定方程，解得

$$\overline{u}=Ae^{\frac{p}{2}x}+Be^{-\frac{p}{2}x}+\frac{c}{p^2}.$$

由于$x>0$, 要保证$\overline{u}$的有界性,只有$A=0$,再由$\overline{u}(p,0)=0$, 定出$B=-\frac{c}{p^2}$,这样

$$\overline{u}=\frac{c}{p^2}\left(1-e^{-\frac{p}{2}x}\right)$$

由于$L^{-1}[\dfrac{1}{p^2}]=t$,并使用Laplace变化的延时定理，最后得到

$$u=L^{-1}[\overline{u}]=ct-c(t-\frac{x}{2})H(t-\frac{x}{2})$$

第 五 章：基本解方法：

一本章概述和学习要求：

本章介绍了用基本解方法来求解方程或定解问题，基本点如下：

1)首先学习了δ函数，它是研究基本解方法的基本工具。

2) 然后给出了一系列方程或定解问题的基本解，特别是用基本解的思路；来构造格林函数来解决边值问题。

3)论述了由基本解法求解偏微分方程定解问题的思想和方法：即找出方程定解问题对应的基本解问题，求解出基本解问题之后，利用基本解求解原定解问题。

一般来说，基本解问题要比原定解问题容易解决，因此我们就能在解决基本解问题后，找出相应的计算公式就能来求解原问题的解。

具体来说，本章我们首先要掌握研究基本解的工具：δ函数及其运算性质，然后重点掌握场位方程格林函数的意义(本质上就是场位方程边值问题的基本解)，并能利用格林函数求解相应的边值问题。最后能利用基本解法求解$u_t = Lu$型方程和$u_{tt} = Lu$型方程的一般初值问题。

5.1 δ函数

1)δ函数的定义和物理背景

δ函数为满足以下两个条件函数：

$$(1) \quad \delta(x) = \begin{cases} +\infty & \text{当} x = 0, \\ 0, & \text{当} x \neq 0. \end{cases}$$

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

物理学中一个典型例子就是用δ函数来表示点电荷的密度函数：因为一个点电荷放在原点，所以在原点$x=0$的电荷密度为无穷大，在别的点由于没有电荷分布，所以密度为0. 而对电荷密度积分就是总的电量，数值为1.另外点热源的的温度分布以及脉冲等现象都可用δ函数来描述。

2) δ函数的主要运算性质：

1. 筛选性:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x) dx = \varphi(0)$$

$$\int_a^b \delta(x-\xi)\varphi(x)dx = \begin{cases} \varphi(\xi), \ \xi \in [a,b], \\ 0, \quad \xi \overline{\in} [a,b]. \end{cases} \qquad \forall \varphi(x) \in C(R)$$

2.对称性：

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

3.卷积性质：

$$\delta(x) * \varphi(x) = \varphi(x) * \delta(x) = \varphi(x)$$

4. δ函数的$Fourier$变换:

$$F(\delta(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-i\lambda x} dx = 1$$

反变换：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\, d\lambda = \delta(x)$$

5. δ函数的$Fourier$展开: 当$x, \xi \in (-l, l)$时，

$$\delta(x-\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l})$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \delta(x-\xi)\cos\frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{1}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}, \ (n = 0, 1, 2...)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \delta(x-\xi)\sin\frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{1}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}. \ (n = 1, 2, 3...)$$

6. δ函数的导数。

设$\varphi(x) \in C^1(R)$, 则$\delta'(x)$是满足：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\varphi(x)\, dx = -\varphi'(0)$$

类似地$\delta^{(n)}(x)$满足：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)\varphi(x)\, dx = (-1)^n \varphi^{(n)}(0), \ \ (\varphi(x) \in C^n(R))$$

其中$\varphi(x) \in C^n(R)$.

7.δ函数的原函数。

δ函数的原函数是$H(x)+c$, 即

$$H'(x)=\delta(x),$$

其中$H(\xi)$为单位函数，即$H(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

1) 性质1筛选性的证明:　由于$x\neq 0$时，$\delta(x)=0$, 因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(\eta)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(x)dx=\varphi(\eta)\quad(-\epsilon<\eta<\epsilon)$$

在上式中令$\epsilon\longrightarrow 0$,则$\varphi(\eta)\longrightarrow\varphi(0)$, 因此就证明了:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)$$

进一步类似可证明

$$\int_a^b\delta(x-\xi)\varphi(x)dx=\begin{cases}\varphi(\xi), & \xi\in[a,b],\\ 0, & \xi\overline{\in}[a,b].\end{cases}\qquad\forall\varphi(x)\in C(R)$$

2) 性质2对称性的证明:　$\forall\varphi(x)\in C(R)$, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-x)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\varphi(-t)dt=\varphi(-t)\mid_{t=0}=\varphi(0)$$

因此无论$\delta(x)$还是$\delta(-x)$都有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-x)\varphi(x)dx=\varphi(0)$$

比较此式的两边就可得到

$$\delta(x)=\delta(-x)$$

3) 性质3卷积性质的证明:　$\forall\varphi(x)\in C(R)$,

$$\delta(x)*\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\tau)\varphi(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-x)\varphi(\tau)d\tau=\varphi(x)$$

4) 性质4 Fourier变换性质的证明:　利用Fourier变换定义和筛选性

$$F(\delta(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)e^{-i\lambda x}dx=e^{-i\lambda x}\mid_{x=0}=1$$

这说明δ函数经过Fourier变换的像函数是1, 因此常数1的Fourier反变换就是$\delta(x)$, 也就是:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\, d\lambda = \delta(x)$$

由于$e^{i\lambda x} = \cos\lambda x + i\sin\lambda x$,由三角函数的奇偶性，又有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\lambda x\, d\lambda = 2\pi\delta(x)$$

5) 性质5 Fourier展开式的证明只要利用筛选性容易得出。

6) 性质6导数性质的证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) d\delta(x) = \varphi(x)\delta(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) d\varphi(x)$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi'(x) dx = -\varphi'(0)$$

类似地可证明$\delta^{(n)}(x)$满足:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)\varphi(x)\, dx = (-1)^n\varphi^{(n)}(0),\ \ (\varphi(x) \in C^n(R))$$

7) 性质7: δ函数的原函数导出: $\delta(x)$的变上限积分构造的原函数: $\int_{-\infty}^{x}\delta(\xi)d\xi$, 根据筛选性:

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(\xi)d\xi = \begin{cases} 1, & 0 \in (-\infty, x] \\ 0, & 0 \notin (-\infty, x] \end{cases} \implies \int_{-\infty}^{x} \delta(\xi)d\xi = H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

例5.1. 1 利用δ函数的性质计算：

$$1)\int_{-2l}^{2l} \delta(x-l)\cos x\, dx,\quad 2)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\frac{\pi}{2})\sin x dx$$

$$3)\ \delta(3x-1) * x^2, \qquad\qquad 4)\int_{-2}^{2} \sin x\delta'(x+\frac{1}{3})dx$$

解：1) 根据δ函数的筛选性质有：

$$\int_{-2l}^{2l} \delta(x-l)\cos x\, dx = \cos x|_{x=l} = \cos l.$$

2) 同样根据δ函数的筛选性有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\frac{\pi}{2})\sin x\, dx = \sin x|_{x=\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

3) 同样卷积定义和δ函数的筛选性质有：

$$\delta(3x-1)*x^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(3\xi-1)(x-\xi)^2\,d\xi$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(s)(x-\frac{s+1}{3})^2\,ds=\frac{1}{3}(x-\frac{s+1}{3})^2\mid_{s=0}$$

$$=\frac{1}{3}(x-\frac{1}{3})^2.\qquad(\text{其中}s=3\xi-1)$$

4)分步积分得到

$$\int_{-2}^{2}\sin x\delta'(x+\frac{1}{3})dx=\int_{-2}^{2}\sin xd\delta(x+\frac{1}{3})$$

$$=\delta(x+\frac{1}{3})\sin x\mid_{-2}^{2}-\int_{-2}^{2}\delta(x+\frac{1}{3})\cos xdx$$

$$=-cosx\mid_{x=-\frac{1}{3}}=-\cos\frac{1}{3}.$$

例5.1.2 证明以下等式：

$$1)\delta'(-x)=-\delta'(x),\qquad 2)x\delta'(x)=-\delta(x)$$

$$3)\delta(\alpha x)=\frac{1}{\alpha}\delta(x)\ \ (\alpha>0\text{为常数})$$

解题提示：由于δ函数并不是古典意义下点点对应的函数，而是一种算符，含有δ函数的算式相等就是指它们对检验函数有相同的运算效果，比如$\forall\varphi(x)\in C(R)$，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-x)\varphi(x)dx=\varphi(0)\Rightarrow\delta(x)=\delta(-x)$$

就是说，$\delta(x)$和$\delta(-x)$在积分运算中对检验函数$\varphi(x)$的运算效果是相同的，所以它们相等。以下证明也是根据这个基本点。

证明：1) 由于$d\delta(-x)=-\delta'(-x)dx$，所以$\forall\varphi(x)\in C_0^{+\infty}(R)$，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(-x)\varphi(x)dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)d\delta(-x)=-\varphi(x)\delta(-x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-x)d\varphi(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-x)\varphi'(x)dx=\varphi'(0)$$

而由δ函数的导数性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty}-\delta'(x)\varphi(x)dx=-(-\varphi'(0))=\varphi'(0)$$

比较以上结果得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(-x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -\delta'(x)\varphi(x)dx$$

即有

$$\delta'(-x) = -\delta'(x)$$

2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\delta'(x)\varphi(x)dx = -(x\varphi(x))' \mid_{x=0} = -\varphi(x) - x\varphi'(x) \mid_{x=0} = -\varphi(0)$$

而根据δ函数的筛选性：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\delta(x)\varphi(x)dx = -\varphi(x) \mid_{x=0} = -\varphi(0)$$

比较得到：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\delta'(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -\delta(x)\varphi(x)dx,$$

因此有：

$$x\delta'(x) = -\delta(x).$$

3) $\forall\varphi(x) \in C(R)$,因为$\alpha > 0$,因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha x)\varphi(x)dx = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(\frac{t}{\alpha})dt$$

$$= \frac{1}{\alpha}\varphi(\frac{t}{\alpha})|_{t=0} = \frac{1}{\alpha}\varphi(0).$$

而由δ函数的筛选性，直接得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha}\delta(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{\alpha}\varphi(x)|_{x=0} = \frac{1}{\alpha}\varphi(0)$$

所以比较得到：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha}\delta(x)\varphi(x)dx$$

所以有

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}\delta(x)$$

例5.1.3 求下列函数的富利叶变换:

$$(1)f_1(x) = \delta(x), \quad (2)f_2(x) = e^{iax},$$

$$(3)f_3(x) = \cos ax, \quad (4)f_4(x) = x$$

解：1)由δ函数的筛选性质：

$$F(\delta(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-i\lambda x} dx = e^{-i\lambda x} \mid_{x=0} = 1$$

2) 由第(1)问的结论，常数1的$Fourier$反变换原像是$\delta(x)$, 即

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\lambda = \delta(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} dx = 2\pi\delta(\lambda)$$

这样，根据$Fourier$变换的定义：

$$F[e^{iax}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} e^{-i\lambda x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(a-\lambda)x} dx = 2\pi\delta(a-\lambda),$$

再由δ函数对称性有:$\delta(a-\lambda) = \delta(\lambda - a)$, 所以

$$F[e^{iax}] = 2\pi\delta(\lambda - a)$$

3)由于

$$\cos ax = \frac{1}{2}\left(e^{iax} + e^{-iax}\right)$$

根据$Fourier$变换的线性性质：

$$F[\cos ax] = \frac{1}{2}\left(F[e^{iax}] + F[e^{-iax}]\right)$$

根据第(2)问结论,

$$F[e^{iax}] = 2\pi\delta(\lambda - a), \; F[e^{-iax}] = 2\pi\delta(\lambda + a)$$

所以

$$F[\cos ax] = \pi\left(\delta(\lambda - a) + \delta(\lambda + a)\right)$$

4) 在第(2)问中，我们有结论：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} dx = 2\pi\delta(\lambda)$$

利用上式并结合δ 函数的对称性得到：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} dx = 2\pi\delta(-\lambda) = 2\pi\delta(\lambda)$$

上式两边对λ求导得到：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -ixe^{-i\lambda x}dx = 2\pi\delta'(\lambda)$$

于是得到：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-i\lambda x}dx = 2\pi i\delta'(\lambda)$$

即函数x的$Fourier$变换像为：$2\pi i\delta'(\lambda)$

例5.1.4求解定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ \ (t > 0,\ 0 < x < 2l) \\ u_x(t,0) = u_x(t,2l) = 0, \\ u(0,x) = \delta(x-l). \end{cases}$$

解: 作分离变量$u = T(t)X(x)$, 代入泛定方程并结合边界条件得到固有值问题：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X(x) = 0,\ (0 < x < 2l) \\ X'(0) = X'(2l) = 0. \end{cases}$$

和常微分方程：

$$T'(t) + \lambda a^2 T = 0.$$

求解固有值问题得到:

$$\text{固有值：}\lambda_0 = 0,\ \ \lambda_n = (\frac{n\pi}{2l})^2,\ \ (n = 1,2,3...)$$

$$\text{固有函数：}X_0(x) = 1, \qquad X_n(x) = \cos\frac{n\pi}{2l}x$$

相应地，

$$T_0(t) = A_0,\ \ T_n(t) = C_n e^{-(\frac{n\pi a}{2l})^2 t}$$

由叠加原理，可设

$$u(t,x) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{-(\frac{n\pi a}{2l})^2 t}\cos\frac{n\pi}{2l}x$$

又

$$u(0,x) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos\frac{n\pi}{2l}x = \delta(x-l)\,.$$

由余弦级数系数的确定公式，定出

$$C_n=\frac{2}{2l}\int_0^{2l}\delta(x-l)\cos\frac{n\pi}{2l}x\,dx=\frac{1}{l}\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k+1,\\ (-1)^k\frac{1}{l}, & n=2k.\end{cases}$$

最后整理得：

$$u(t,x)=\frac{1}{2l}+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{l}e^{-(\frac{n\pi a}{2l})^2t}\cos\frac{k\pi}{l}x$$

3) **高维δ函数：**

高维δ函数和一维情形类似定义，以三维为例，三维δ函数定义为：

$$\delta(x,y,z)=\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

因而

$$(1)\quad \delta(x,y,z)=\begin{cases}+\infty & \text{当}(x,y,z)=(0,0,0),\\ 0, & \text{当}(x,y,z)\neq(0,0,0).\end{cases}$$

$$(2)\qquad \iiint_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,y,z)dxdydz=1.$$

高维δ函数和一维δ函数也有类似运算性质，比如筛选性质：

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)f(x,y,z)dxdydz=f(\xi,\eta,\zeta).$$

或

$$\iiint_{R^3}\delta(M-M_0)f(M)dM=f(M_0).$$

进一步，对于任意空间闭域V

$$\iiint_V\delta(M-M_0)f(M)dM=\begin{cases}f(M_0), & (M_0\in V)\\ 0. & (M_0\notin V)\end{cases}$$

例5.1.5设有坐标变换式$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta), \end{cases}$，证明：

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \frac{1}{|J|}\delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0),$$

其中$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$为雅克比行列式，$(x_0, y_0)$与$(\xi_0, \eta_0)$是相对应的点，特别地，证明在极坐标的情形下，有

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \frac{1}{r}\delta(r - r_0, \theta - \theta_0)$$

证明：任取$\varphi(x, y) \in C^2(R)$, 根据筛选性质：

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0, y - y_0)\varphi(x, y)dxdy = \varphi(x_0, y_0) \tag{1}$$

而

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|J|}\delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)\varphi(x, y)dxdy = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|J|}\delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)\varphi(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))|J|\, d\xi d\eta$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)\varphi(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\, d\xi d\eta = \varphi(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\ |_{\xi=\xi_0, \eta=\eta_0}$$

$$= \varphi(x(\xi_0, \eta_0), y(\xi_0, \eta_0)) = \varphi(x_0, y_0), \tag{2}$$

其中用到面积元素$dxdy$和面积元素$d\xi d\eta$之间的替换关系：$dxdy \longrightarrow |J|\, d\xi d\eta$，而

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}. \end{vmatrix}$$

比较式(1)和(2), 就证明了：

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \frac{1}{|J|}\delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0). \tag{3}$$

而在极坐标时，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 这样

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}. \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\,. \end{vmatrix} = r$$

这时，结合(3)式就证明了在极坐标下：

$$\delta(x-x_0,y-y_0)=\frac{1}{r}\delta(r-r_0,\theta-\theta_0).$$

5.2 $Lu=0$型方程基本解

$Lu=0$型方程的基本解方程

设L是自变量$(x_1,x_2,...,x_n)$的线性偏微分算子，考虑求解非齐次方程：

$$Lu=f(M) \qquad M=(x_1,x_2,....x_n)\in R^n \tag{5.2.1}$$

它的基本解方程是

$$LU=\delta(M) \qquad M=(x_1,x_2,....x_n)\in R^n \tag{5.2.2}$$

比如，对方程

$$\Delta_3 u=f(x,y,z),\ \ (-\infty<x,y,z<+\infty)$$

其基本解方程是：

$$\Delta_3 U=\delta(x,y,z),\ \ (-\infty<x,y,z<+\infty)$$

定理5.2.1 如果$U(M)$是基本解方程(5.2.2)的解，则$u(M)=U(M)*f(M)$是原方程(5.2.1)的解。

证明：由于

$$u(M)=U(M)*f(M)=\int_{R^n}U(M-M_0)f(M_0)dM_0$$

所以代入(5.2.1)的左边为：

$$左=Lu(M)=L\left(U(M)*f(M)\right)=L\left(\int_{R^n}U(M-M_0)f(M_0)dM_0\right)$$

$$=\int_{R^n}LU(M-M_0)f(M_0)dM_0=\int_{R^n}\delta(M-M_0)f(M_0)dM_0=f(M)=右$$

这样就证明了$u=U(M)*f(M)$满足原方程(5.2.1)

两个最常用的基本解结论:

$$(\mathbf{1})\ \ \Delta_3 U=\delta(x,y,z) \tag{5.2.3a}$$

有中心对称形式解:

$$U=-\frac{1}{4\pi r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{5.2.3b}$$

而$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$$(\mathbf{2})\quad \Delta_2 U=\delta(x,y) \tag{5.2.4.a}$$

有中心对称形式解:

$$U=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{5.2.4.b}$$

这里$r=\sqrt{x^2+y^2}$.

注5.2.1 以上两个最常用的基本解的物理意义:

在第一章我们得出场位方程的表示式为:

$$\Delta_3\varphi=-\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon},\quad \varepsilon \text{ 为介电常数}$$

其中$\rho(x,y,z)$为电荷密度。这样在原点放置电量为ε的点电荷在空间对应的电荷密度

$$\rho(x,y,z)=\varepsilon\delta(x,y,z)$$

这样电量为ε的点电荷对应的电场电势$u(x,y,z)$满足方程

$$\Delta_3 u=-\frac{\varepsilon\delta(x,y,z)}{\varepsilon}=-\delta(x,y,z),$$

由以上三维Laplace 方程的基本解结论,得到

$$u=\frac{1}{4\pi r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

所以就总结出结论:

如在空间原点放置电量为ε的点电荷,对应的静电场电势为: $\mathbf{\frac{1}{4\pi r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

类似地有

平面原点放置电量为ε的平面点电荷(或平面点电荷),对应的电场电势为: $\mathbf{\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2}}$

注5.2.2 准备知识: Green 第二公式:

$$\text{三维:}\quad \iint\limits_S\left(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)dS=\iiint\limits_V(u\Delta_3 v-v\Delta_3 u)\,dV$$

$$\text{二维:}\quad \int\limits_l\left(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)dl=\iint\limits_D(u\Delta_2 v-v\Delta_2 u)\,dA$$

另外在本章的叙述过程中有时会使用∂的符号代表边界，比如，V的边界为∂V, D的边界为∂D.

求基本解的若干例题：

例5.2.1求方程$y' + ay = 0$的基本解。

解：基本解方程为：

$$U' + aU = \delta(x)$$

利用一阶线性常微分方程的求解公式, 可取U为：

$$U = e^{-\int adx} \int_{-\infty}^{x} e^{\int_0^\tau ad\xi}\delta(\tau)d\tau = e^{-\int adx}\int_{-\infty}^{x} e^{a\tau}\delta(\tau)d\tau = e^{-ax}H(x).$$

注5.2.3 如不加特别申明，一般求基本解都是只要求得基本解方程的某个特解即可，往往都是取形式比较简单的特解。

例5.2.2 求方程$\Delta_3 u = 0$的基本解

解：$\Delta_3 u = 0$的基本解方程为：

$$\Delta_3 U(x,y,z) = \delta(x,y,z) \tag{1}$$

用$Fourier$变换:令

$$\overline{U}(\lambda,\mu,\nu) = F[U(x,y,z)] = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} U(x,y,z)e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dxdydz$$

由于$F(\Delta_3 U) = -\rho^2\overline{U}$, $(\rho^2 = \lambda^2+\mu^2+\nu^2)$, $F[\delta(x,y,z)] = 1$,则对基本解方程(1)作$Fourier$变换得到：

$$-\rho^2\overline{U} = 1 \Rightarrow \overline{U} = -\frac{1}{\rho^2},\ (\text{其中}\rho^2 = \lambda^2+\mu^2+\nu^2)$$

这样作$Fourier$反变换：

$$U = F^{-1}[\overline{U}] = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{\rho^2}e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{\rho^2}e^{i(\vec{\rho},\vec{r})}d\lambda d\mu d\nu$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{\rho^2} e^{i(\rho r\cos\theta)} d\lambda d\mu d\nu$$

这里$\vec{\rho} = (\lambda, \mu, \nu), \vec{r} = (x, y, z), r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \theta$为$\vec{\rho}$和$\vec{r}$的夹角.由对称性，不妨取$\nu$轴为向径$\vec{r}$方向, 作球坐标变换：

$$\lambda = \rho\sin\theta\cos\varphi, \mu = \rho\sin\theta\sin\varphi, \nu = \rho\cos\theta$$

这样

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\rho r\cos\theta)} \sin\theta d\varphi d\theta d\rho$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi} e^{i(\rho r\cos\theta)} \sin\theta d\theta d\rho = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{i(\rho r\cos\theta)}}{i\rho r}\Big|_0^{\pi} d\rho$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^{+\infty} \frac{\sin\rho r}{\rho} d\rho = -\frac{1}{4\pi r} \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

于是我们用$Fourier$变换$\Delta_3 u = 0$的基本解方程(1)的中心对称形式的基本解：

$$U = -\frac{1}{4\pi r} \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

例5.2.3 求方程$\Delta_2 u = 0$的基本解

解：$\Delta_2 u = 0$的基本解方程为：

$$\Delta_2 U = \delta(x, y) \tag{1}$$

下面求解它的中心对称形式解，在极坐标下，设$U = U(r)$, 由于在$r > 0$时，$\delta(x, y) = 0$, 所以在$r > 0$时, $U = U(r)$满足：

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = 0, \quad (r > 0)$$

解得:

$$U = A + B\ln r$$

以下我们确定系数A和B, 使得上式得出的在$r > 0$时的解$U = A + B\ln r$ 在$r \geq 0$也是基本解方程(1)的解。由于常数A在$r = 0$没有奇性（即$\Delta_2 A = 0$), 所以A任意，不妨取$A = 0$,这样

$$U = B\ln r \tag{2}$$

下面确定B的值，使得$U = B\ln r$满足基本解方程(1).

为此, 取$\varphi(x, y) \in C_0^{+\infty}(R^2)$, 即$\varphi$是在全平面上有任意阶连续偏导数且在一个包含原点的有界区域外恒为0的函数，

则根据δ函数的运算性质

$$\varphi(0,0)=\iint\limits_{R^2}\delta(x,y)\varphi(x,y)dxdy=\iint\limits_{R^2}\Delta_2 U\varphi(x,y)dxdy \tag{3}$$

由于

$$\iint\limits_{R^2}\frac{\partial(U\varphi)}{\partial x}dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial(U\varphi)}{\partial x}dx\right)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}(U\varphi)\mid_{-\infty}^{+\infty}dy=0$$

也就是：

$$\iint\limits_{R^2}\frac{\partial U}{\partial x}\varphi\,dxdy+\iint\limits_{R^2}U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dxdy=0\Longrightarrow\iint\limits_{R^2}\frac{\partial U}{\partial x}\varphi dxdy=-\iint\limits_{R^2}U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dxdy$$

类似地，进一步可以得出：

$$\iint\limits_{R^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\varphi dxdy=\iint\limits_{R^2}U\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dxdy,\qquad\iint\limits_{R^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\varphi dxdy=\iint\limits_{R^2}U\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}dxdy$$

这样

$$\iint\limits_{R^2}\Delta_2 U\varphi dxdy=\iint\limits_{R^2}U\Delta_2\varphi dxdy \tag{4}$$

此式代入(3), 就得到：

$$\varphi(0,0)=\iint\limits_{R^2}U\Delta_2\varphi(x,y)dxdy\,. \tag{5}$$

$\varphi(x,y)\in C_0^{+\infty}(R^2)$, 因此可取到包含原点有界域$D$，在$D$外和$D$的边界$\partial D$上$\varphi(x,y)=0$,再记$D_\varepsilon$ 是原点为中心，半径为ε的圆的内部，其边界记为C_ε 这样，上式(5)可改写为

$$\varphi(0,0)=\iint\limits_{D}U\Delta_2\varphi dxdy=\lim_{\varepsilon\to0}\iint\limits_{D-D_\varepsilon}U\Delta_2\varphi dxdy=\lim_{\varepsilon\to0}\iint\limits_{D-D_\varepsilon}(U\Delta_2\varphi-\varphi\Delta_2 U)dxdy$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\partial D}(U\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}-\varphi\frac{\partial U}{\partial\vec{n}})dl-\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{C_\varepsilon}(U\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}-\varphi\frac{\partial U}{\partial\vec{n}})dl=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{C_\varepsilon}(\varphi\frac{\partial U}{\partial\vec{n}}-U\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}})dl$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{C_\varepsilon}(\varphi\frac{\partial U}{\partial r}-U\frac{\partial\varphi}{\partial r})dl=\lim_{\varepsilon\to0}2\pi\varepsilon(\varphi\frac{\partial U}{\partial r}-U\frac{\partial\varphi}{\partial r})\mid_{(x,y)=(x^*,y^*)\in C_\varepsilon}\quad(\text{积分中值定理})$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}2\pi\varepsilon\left(\varphi(x^*,y^*)B\frac{1}{\varepsilon}-B\ln\varepsilon\frac{\partial\varphi(x^*,y^*)}{\partial r}\right)=2\pi B\varphi(0,0)\,. \tag{6}$$

由上式(6)得出的结论

$$\varphi(0,0)=2\pi B\varphi(0,0)\Longrightarrow B=\frac{1}{2\pi}$$

因此最后求得中心对称形式的基本解：

$$U=\frac{1}{2\pi}\ln r=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$$

例5.2.4利用*Laplace*方程基本解，求解下列基本解方程：

$$1)\alpha^2U_{xx}+\beta^2U_{yy}=\delta(x,y),\ (\alpha,\beta>0)\quad 2)\Delta_3\Delta_3U=\delta(x,y,z)$$

解题提示：一般来说，对于求解此类基本解方程，我们只要求出其中一个解就可以了。而本题中的方程都可以通过变换，化成相应的已知的Laplace方程基本解的形式，使问题得到解决。

解：1)作变量替换$\overline{x}=\frac{1}{\alpha}x,\ \overline{y}=\frac{1}{\beta}y$ 经过复合求导

$$U_{xx}=\frac{1}{\alpha^2}U_{\overline{x}\,\overline{x}},\ \ U_{yy}=\frac{1}{\beta^2}U_{\overline{y}\,\overline{y}}$$

原方程变为：

$$U_{\overline{x}\,\overline{x}}+U_{\overline{y}\,\overline{y}}=\delta(\alpha\overline{x},\beta\overline{y})$$

由于

$$\delta(\alpha\overline{x},\beta\overline{y})=\delta(\alpha\overline{x})\delta(\beta\overline{y})=\frac{1}{\alpha\beta}\delta(\overline{x})\delta(\overline{y}).\ \ (\alpha,\beta>0)$$

所以原方程化为：

$$U_{\overline{x}\,\overline{x}}+U_{\overline{y}\,\overline{y}}=\frac{1}{\alpha\beta}\delta(\overline{x},\overline{y})$$

由二维Laplace方程基本解的结论(见本节的基本结论), 解得：

$$U=-\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\overline{r}},\ \text{其中}\,\overline{r}=\sqrt{\overline{x}^2+\overline{y}^2}$$

也就是

$$U=\frac{1}{4\pi\alpha\beta}\ln[(\frac{x}{\alpha})^2+(\frac{y}{\beta})^2]$$

2) 记$\Delta_3U=H$,则原方程变为：

$$\Delta_3H=\delta(x,y,z)$$

由三维*Laplace*方程基本解的结论, 可取

$$H=-\frac{1}{4\pi r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

即

$$\Delta_3 U = -\frac{1}{4\pi r}$$

当$U = U(r)$时,

$$\Delta_3 U = \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr},$$

所以方程$U = U(r)$形式的解满足：

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr} = -\frac{1}{4\pi r}.$$

求解此方程得到中心对称形式的基本解为：

$$U = -\frac{r}{8\pi}$$

例5.2.5 用Fourier变换方法求三维Helmhotz方程的基本解，即求解方程

$$\Delta_3 U + k^2 U = \delta(x, y, z)$$

其中$k > 0$

解：作高维$Fourier$变换，令

$$\overline{U}(\lambda, \mu, \nu) = F[U(x, y, z)] = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} U(x, y, z) e^{-i(\lambda x + \mu y + \nu z)} dxdydz$$

由于$F(\Delta_3 U) = -\rho^2 \overline{U}$, $\rho^2 = (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$, $F[\delta(x, y, z)] = 1$,则对方程作$Fourier$变换得到：

$$-\rho^2\overline{U} + k^2\overline{U} = 1 \Rightarrow \overline{U} = \frac{1}{k^2 - \rho^2}, \ (\text{其中}\rho^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$$

这样作$Fourier$反变换：

$$U = F^{-1}[\overline{U}] = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - \rho^2} e^{i(\lambda x + \mu y + \nu z)} d\lambda d\mu d\nu$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - \rho^2} e^{i(\vec{\rho}.\vec{r})} d\lambda d\mu d\nu$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - \rho^2} e^{i(\rho r \cos\theta)} d\lambda d\mu d\nu$$

这里$\vec{\rho}=(\lambda,\mu,\nu),\vec{r}=(x,y,z),r^2=x^2+y^2+z^2,\theta$为$\vec{\rho}$和$\vec{r}$的夹角.由对称性，不妨取$\nu$轴为向径$\vec{r}$方向, 作球坐标变换：

$$\lambda=\rho\sin\theta\cos\varphi,\mu=\rho\sin\theta\sin\varphi,\nu=\rho\cos\theta$$

这样

$$U(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2}{k^2-\rho^2}e^{i(\rho r\cos\theta)}\sin\theta d\varphi d\theta d\rho$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\rho^2}{k^2-\rho^2}e^{i(\rho r\cos\theta)}\sin\theta d\theta d\rho=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{+\infty}\frac{\rho}{ir(\rho^2-k^2)}e^{i(\rho r\cos\theta)}\Big|_0^{\pi}d\rho$$

$$=-\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{+\infty}\frac{\rho}{(\rho^2-k^2)}\sin\rho r\,d\rho=-\frac{1}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\rho-k}+\frac{1}{\rho+k}\right)\sin\rho r\,d\rho \tag{1}$$

而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\rho-k}\sin\rho r\,d\rho=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\rho-k}\sin(\rho-k+k)r\,d\rho$$

$$=\cos kr\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\rho-k)r}{\rho-k}d\rho+\sin kr\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\rho-k)r}{\rho-k}d\rho$$

$$=\cos kr\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin lr}{l}dl+\sin kr\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos lr}{l}dl,$$

$$=\pi\cos kr+\sin kr\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos lr}{l}dl. \tag{2}$$

这里用到积分结论$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin lr}{l}dl=\pi$,其中$r>0$.类似地,可以求得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\rho+k}\sin\rho r\,d\rho=\pi\cos kr-\sin kr\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos lr}{l}dl. \tag{3}$$

以上结论(2), (3)代入式(1), 我们得到三维Helmhotz方程的基本解

$$U(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi r}\cos kr,\ \ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

注5.2.4 以上积分$\int_0^{+\infty}\frac{\rho\,\sin\rho r}{\rho^2-k^2}\,d\rho$也可以借助留数定理进行计算。

例5.2.6 求二维Helmholtz方程$\Delta_2 u+cu=0\,(c=k^2>0)$的基本解

解：基本解方程满足：

$$LU=\Delta_2 U+k^2U=\delta(x,y) \tag{1}$$

由方程对称性，设$U=U(r)$, 由于在$r>0$时，$\delta(x,y)=0$, 所以这时有：

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)+k^2U=0,\ \ (r>0)$$

即

$$r^2U''+rU'+k^2r^2U=0\,.\ (r>0)$$

此方程是零阶Bessel方程，其通解为:

$$U=AJ_0(kr)+BN_0(kr)$$

由于解$J_0(kr)$在$r=0$没有奇性, 是齐次方程$\Delta_2U+k^2U=0$在全平面的解，故可取$A=0$,这样

$$U=BN_0(kr) \tag{2}$$

下面确定B的值，使得$U=BN_0(kr)$满足基本解方程(1).根据$N_0(x)$的展开式(参考教材92页式(3.2.19)),当$x\to 0$时，$N_0(x)\sim\dfrac{2}{\pi}\ln x$,因此$U=BN_0(kr)\sim B\dfrac{2}{\pi}\ln(kr)$

另外, 取$\varphi(x,y)\in C_0^{+\infty}(R^2)$, 即$\varphi$是在全平面上有任意阶连续偏导数且在一个包含原点的有界区域外恒为0的函数，

则根据δ函数的运算性质并结合分步积分得：

$$\varphi(0,0)=\iint\limits_{R^2}\delta(x,y)\varphi(x,y)dA=\iint\limits_{R^2}LU\varphi(x,y)dA=\iint\limits_{R^2}UL\varphi dA\,. \tag{3}$$

由于$\varphi(x,y)\in C_0^{+\infty}(R^2)$, 因此可取到包含原点有界域$D$，在$D$外和$D$的边界$\partial D$上$\varphi(x,y)=0$, 再记$D_\varepsilon$ 是原点为中心，半径为ε的圆的内部，其边界记为C_ε 这样，上式(3)可改写为

$$\varphi(0,0)=\iint\limits_{D}UL\varphi dxdy=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{D-D_\varepsilon}UL\varphi dxdy=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{D-D_\varepsilon}(UL\varphi-\varphi LU)dxdy$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial D}(U\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}-\varphi\frac{\partial U}{\partial\vec{n}})dl-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{C_\varepsilon}(U\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}-\varphi\frac{\partial U}{\partial\vec{n}})dl=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{C_\varepsilon}(\varphi\frac{\partial U}{\partial\vec{n}}-U\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}})dl$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{C_\varepsilon}(\varphi\frac{\partial U}{\partial r}-U\frac{\partial\varphi}{\partial r})dl=\lim_{\varepsilon\to 0}2\pi\varepsilon(\varphi\frac{\partial U}{\partial r}-U\frac{\partial\varphi}{\partial r})\ |_{(x,y)=(x^*,y^*)\in C_\varepsilon}\quad(\text{积分中值定理})$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}2\pi\varepsilon\left(\varphi(x^*,y^*)\frac{2}{\pi}B\frac{1}{\varepsilon}-\frac{2}{\pi}B\ln\varepsilon\frac{\partial\varphi(x^*,y^*)}{\partial r}\right)=4B\varphi(0,0)\,. \tag{4}$$

比较上式(4)两端得：

$$\varphi(0,0)=2\pi B\varphi(0,0)\Longrightarrow B=\frac{1}{4}$$

因此最后求得二维Helmholtz方程中心对称形式的基本解：

$$U = \frac{1}{4}N_0(kr)$$

5.3 边值问题的$Green$函数法

泊松方程(或场位方程)第一边值问题格林函数的定义以及研究格林函数意义

三维泊松方程(或场位方程)第一边值问题是：

$$\begin{cases} \Delta_3 u = -f(x,y,z), \ \ ((x,y,z)\in V) \\ u \mid_S = \varphi(x,y,z) \end{cases} \tag{5.3.1}$$

其中V是一个空间区域，S是V的边界。此边值问题对应格林函数$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$满足：

$$\begin{cases} \Delta_3 G = -\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta), \ \ ((x,y,z),(\xi,\eta,\zeta)\in V) \\ G \mid_S = 0. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

以下我们会证明：如果能求解出边值问题(5.3.2)中的格林函数G，就可以通过相应的积分公式得到三维泊松方程第一边值问题(5.3.1) 的解。从这个意义上，格林函数可以理解为相应边值问题的基本解。

类似地，二维泊松方程(或场位方程)第一边值问题是：

$$\begin{cases} \Delta_2 u = -f(x,y), \ \ (\,(x,y)\in D) \\ u \mid_l = \varphi(x,y). \end{cases} \tag{5.3.3}$$

其中D是一个平面区域，l是D的边界。此边值问题对应格林函数$G(x,y,\xi,\eta)$满足：

$$\begin{cases} \Delta_2 G = -\delta(x-\xi,y-\eta), \ \ (\,(x,y)\in D, \, (\xi,\eta)\in D) \\ G \mid_l = 0. \end{cases} \tag{5.3.4}$$

利用格林函数求解相应的边值问题的公式

引理5.3.1格林函数具有对称性(倒易性)，以三维为例，即

$$G(M_1,M_2) = G(M_2,M_1), \quad (M_i = (\xi_i,\eta_i,\zeta_i).\, i=1,2,3) \tag{1}$$

证明：三维Poisson 方程第一边值问题的格林函数$G(M,M_0)$满足：

$$\begin{cases}\Delta_3 G=-\delta(M-M_0), \qquad (M,\ M_0\in V)\\ G\mid_S=0\end{cases} \tag{2}$$

其中$M=(x,y,z),M_0=(\xi,\eta,\zeta),V$是方程所成立的空间区域，$S$是$V$的边界。

下面证明格林函数的对称性，即

$$G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1).$$

实际上，$G(M,M_1)$满足：

$$\begin{cases}\Delta_3 G(M,M_1)=-\delta(M-M_1),\ \ (M,M_1\in V)\\ G(M,M_1)=0\ (M\in S)\end{cases}$$

而$G(M,M_2)$满足：

$$\begin{cases}\Delta_3 G(M,M_2)=-\delta(M-M_2),\ \ (M,M_2\in V)\\ G(M,M_2)=0\ (M\in S)\end{cases}$$

由格林第二公式,并利用条件$G(M,M_1)\big|_{M\in S}=G(M,M_2)\big|_{M\in S}=0$得到：

$$\iiint\limits_V [G(M,M_1)\Delta_3 G(M,M_2)-G(M,M_2)\Delta_3 G(M,M_1)]dM$$

$$=\iint\limits_S\left[G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial\vec{n}}-G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial\vec{n}}\right]dS=0. \tag{3}$$

再把结论$\Delta_3 G(M,M_1)=-\delta(M-M_1),\Delta_2 G(M,M_2)=-\delta(M-M_2)$代入上式(3)得到：

$$\iiint\limits_V G(M,M_1)\delta(M-M_2)dM=\iiint\limits_V G(M,M_2)\delta(M-M_1)dM \tag{4}$$

再根据δ函数的筛选性，即有

$$G(M_2,M_1)=G(M_1,M_2)$$

这样我们就证明的格林函数的对称性。

进一步，我们以下给出利用格林函数求泊松方程第一边值问题的解的公式：

定理5.3.1 设$f(M),\varphi(M)$都是连续函数，而$G(M,M_0)$是边值问题(5.3.2)解得的格林函数，则三维泊松方程第一边值问题(5.3.1)的解为：

$$u(M)=\iiint\limits_{V}f(M_0)G(M,M_0)dM_0-\iint\limits_{S}\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial\vec{n_0}}(M,M_0)dS_0, \qquad (5.3.5)$$

其中：$M=(x,y,z)$, $M_0=(\xi,\eta,\zeta)$,S代表V的边界，而$\vec{n_0}$是指几何体V在边界S的外法向(用ξ,η,ζ表示)。

证明：

$$u(M_0)=\iiint\limits_{V}\delta(M-M_0)u(M)dM=-\iiint\limits_{V}u(M)\Delta_3G(M,M_0)dM \qquad (1)$$

而再由格林第二公式，我们有：

$$\iiint\limits_{V}\left[u(M)\Delta_3G(M,M_0)-G(M,M_0)\Delta_3u(M)\right]dM=\iint\limits_{S}\left[u\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}-G\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right]dS \qquad (2)$$

其中$\vec{n}$是空间区域V的边界S的外法向。利用条件

$$\Delta_3u(M)=-f(M),(M\in V),\quad u\mid_S=\varphi(M),(M\in D)$$

以及条件$G\mid_S=0$,代入上式(2)并整理得到：

$$\iiint\limits_{V}u(M)\Delta_3G(M,M_0)dM=-\iiint\limits_{V}G(M,M_0)f(M)dM+\iint\limits_{S}\varphi(M)\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}dS \qquad (3)$$

比较(1)和(3)的结论得到由格林函数G求出三维泊松方程第一边值问题(1)的公式：

$$u(M_0)=\iiint\limits_{V}G(M,M_0)f(M)dM-\iint\limits_{S}\varphi(M)\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}dS \qquad (5.3.6)$$

或

$$u(M)=\iiint\limits_{V}G(M,M_0)f(M_0)dM_0-\iint\limits_{S}\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial\vec{n_0}}dS_0\,. \qquad (5.3.7)$$

类似地,从二维泊松方程第一边值问题的格林函数(即边值问题(5.3.4)的解)出发。求解二维泊松方程第一边值问题(5.3.3)的计算公式是：

$$u(M_0)=\iint\limits_{D}f(M)G(M,M_0)dA-\int_l\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}(M,M_0)dl. \qquad (5.3.8)$$

或

$$u(M) = \iint\limits_D f(M)G(M,M_0)dA_0 - \int_l \varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial \vec{n_0}}(M,M_0)dl_0. \qquad (5.3.9)$$

其中：$M=(x,y)$, $M_0=(\xi,\eta)$, 而$\vec{n}$是指平面区域D在边界l的外法向。

求格林函数的典型方法：镜像法

用镜像法求几个典型区域的格林函数：

以上半空间$z>0$为例, 其Possion 方程第一边值问题的格林函数满足:

$$\begin{cases} \Delta_3 G = -\delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta), \ (z>0, \zeta>0), & (5.3.10.a) \\ G\mid_{z=0} = 0. & (5.3.10.b) \end{cases}$$

从物理角度求解这个格林函数的思路： 这个问题的物理意义是：在上半空间的$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$放电量为$+\varepsilon$的点电荷，并且以$z=0$为电势零点，求上半空间的势函数。由我们得出的基本解结论(参看式（ 5.2.3.b) ），以上G 的泛定方程(5.3.10.a) 有解

$$u_0(M) = \frac{1}{4\pi r(M,M_0)}, \quad r(M,M_0) = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

但u_0(M)并不满足在$z=0$为0的条件。为了求得同时满足边界条件的解，我们在M_0关于边界$z=0$的对称点$M_1=(\xi,\eta,-\zeta)$虚设电量为$-\varepsilon$的点电荷，这个负电荷产生电场势函数为

$$u_1(M) = -\frac{1}{4\pi r(M,M_1)}, \quad r(M,M_1) = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}$$

由于M_0和M_1关于边界$z=0$对称，且设置的电荷电量大小相等，但电性相反，则u_0+u_1在边界$z=0$上为0，但在M_1点虚设的的负电荷在下半空间，不会影响定义在上半空间的场位方程成立。所以取

$$G = u_1 + u_2$$

就是我们寻找的上半空间的格林函数。

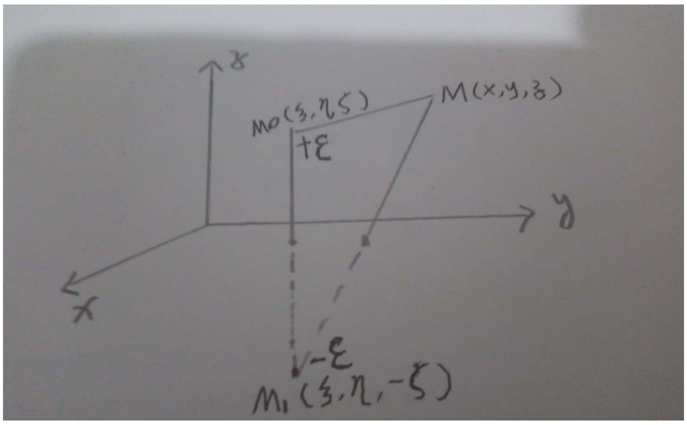
综合以上思路，我们给出下例（**半空间的格林函数**)

例5.3.1 求上半空间($z>0$)的Green函数

解:上半空间的格林函数G满足边值问题：

$$\begin{cases} \Delta_3 G = -\delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta), \ (z>0, \zeta>0), & (1.a) \\ G\mid_{z=0} = 0. & (1.b) \end{cases}$$

为求格林函数，在$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$放电量为$+\varepsilon$的点电荷，在M_0关于边界$z=0$的对称点$M_1=(\xi,\eta,-\zeta)$虚设电量为$-\varepsilon$的点电荷, 如图：



这两个电荷分别对应有势函数：

$$u_0 = \frac{1}{4\pi r(M, M_0)}, \quad r(M, M_0) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

$$u_1 = -\frac{1}{4\pi r(M, M_1)}, \quad r(M, M_1) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}$$

则取格林函数$G= u_1 + u_2$, 即

$$G = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}}\right)$$

合于所求。

注5.3.1 以上例子中用物理原理求得格林函数的G可以直接用数学验证正确性，即验证G满足定解问题(5.3.10), 首先在边界$z=0$上，

$$G = \left(\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}}\right)\Bigg|_{z=0} = 0$$

另外G可以改写为

$$G = \frac{1}{4\pi r(M, M_0)} - \frac{1}{4\pi r(M, M_1)}$$

则

$$\Delta_3 G = \frac{1}{4\pi}\left[\Delta_3\left(\frac{1}{4\pi r(M, M_0)}\right) - \Delta_3\left(\frac{1}{4\pi r(M, M_1)}\right)\right] = -\delta(M - M_0) + \delta(M - M_1)$$

因为点$M = (x, y, z)$在上半空间，点$M_1 = (\xi, \eta, -\zeta)$在下半空间，因此$M - M_1 \neq 0$, 这样$\delta(M - M_1) = 0$. 此结果代入上式，我们就验证了$G$满足泛定方程(5.3.10.a), 即

$$\Delta_3 G = -\delta(M - M_0) = -\delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$$

半平面的Green函数:

以上半平面$y > 0$为例，其格林函数满足：

$$\begin{cases} \Delta_2 G = -\delta(x-\xi, y-\eta), \ (y>0, \eta>0) \\ G\mid_{y=0} = 0. \end{cases}$$

用**镜像法**求格林函数：在$M_0 = (\xi, \eta)$放电量为$+\varepsilon$的平面点电荷，在M_0关于上半平面边界$y=0$的对称点$M_1 = (\xi, -\eta)$虚设电量为$-\varepsilon$的平面点电荷，两个电荷分别对应势函数：

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M, M_0)}, \quad r(M, M_0) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

$$u_1 = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M, M_1)}, \quad r(M, M_1) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}$$

因此，取格林函数

$$G = u_0 + u_1 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M, M_0)} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M, M_1)}.$$

$$= \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}. \quad (y, \eta > 0)$$

合于所求。

球形区域内的$Green$函数:

以球域$x^2 + y^2 + z^2 < R^2$为例，其格林函数满足：

$$\begin{cases} \Delta_3 G = -\delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta), \ (r, \rho < R) \\ G\mid_{r=R} = 0. \end{cases}$$

其中$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

下面用**镜像法**求此格林函数：在$M_0 = (\xi, \eta, \zeta)$放电量为$+\varepsilon$的点电荷,在M_0关于球面的对称点M_1放置电量为$-q\varepsilon$的负电荷，其中q待定。则这两个电荷产生场的势函数分别为：

$$u_0 = \frac{1}{4\pi r(M, M_0)}, \quad u_1 = -\frac{q}{4\pi r(M, M_1)}.$$

要使$u_0 + u_1$成为所求的格林函数，则要求对球面S上任意一点M，有：

$$u_0 + u_1 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r(M, M_0)} - \frac{q}{r(M, M_1)}\right] = 0,$$

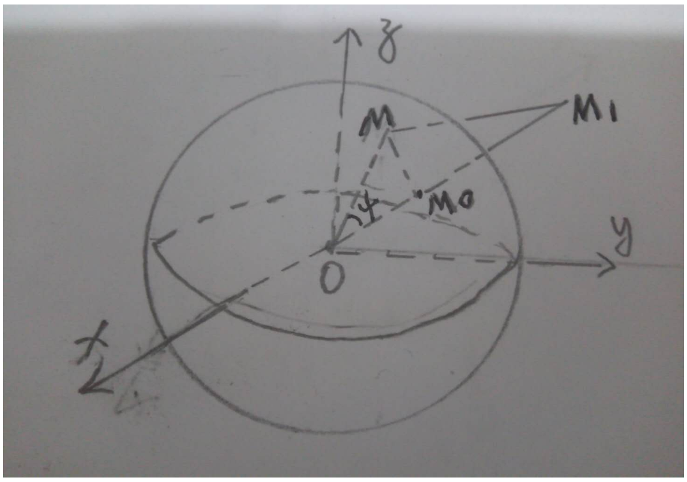
这样，确定出

$$q = \frac{r(M, M_1)}{r(M, M_0)}, \quad M \in 球面S\,. \qquad (1)$$

下面从q的表达式中消去M: 由于M_0和M_1关于球面对称，所以

$$r(O, M_0)\,.\,r(O, M_1) = R^2 \Longrightarrow \frac{r(O, M_0)}{r(O, M)} = \frac{r(O, M)}{r(O, M_1)}$$

因此三角形MOM_0与三角形M_1OM相似(两个三角形对应边比相等且夹角相等，则两个三角形相似), 如图:



因此, 根据相似三角形对应边成比例：

$$\frac{r(M, M_1)}{r(M, M_0)} = \frac{r(O, M)}{r(O, M_0)} = \frac{R}{\rho}. \qquad (2)$$

上式(2)代入(1), 就定出$q = \dfrac{R}{\rho}$, 因此所求的格林函数为：

$$G = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(M, M_0)} - \frac{R}{\rho}\,\frac{1}{r(M, M_1)}\right). \qquad (1)$$

取球坐标，记场点$M = (r, \theta, \varphi)$，源点$M_0 = (\rho, \theta_0, \varphi_0)$, ψ为OM与OM_0的夹角，则

$$r(M, M_0) = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\psi}, \quad r(M, M_1) = \sqrt{r^2 + (\frac{R^2}{\rho})^2 - 2r\frac{R^2}{\rho}\cos\psi},$$

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)$$

所以，最后球内格林函数表示为：

$$G = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\psi}} - \frac{R}{\sqrt{r^2\rho^2 + R^4 - 2R^2\rho r\cos\psi}}\right).$$

注5.3.2 以上求球内格林函数时候，用到了两个点M_0和M_1关于球面对称这一概念，即O, M_0, M_1三点公线: 另外$|\overrightarrow{OM_0}|\,|\overrightarrow{OM_1}| = R^2$. 取球坐标，记场点$M=(r,\theta,\varphi)$，源点$M_0=(\rho,\theta_0,\varphi_0)$,$\psi$为$OM$与$OM_0$的夹角，则

$$|\overrightarrow{OM_1}| = \frac{R^2}{|\overrightarrow{OM_0}|} = \frac{R^2}{\rho}$$

$$\cos\psi = \frac{\overrightarrow{OM}\,.\overrightarrow{OM_0}}{|\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{OM_0}|} = \frac{(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,.\,(\rho\sin\theta_0\cos\varphi_0, \rho\sin\theta_0\sin\varphi_0, \rho\cos\theta_0)}{r\rho}$$

$$= \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)$$

圆形区域内格林函数: 以圆内$r<R$为例，其格林函数G满足：

$$\begin{cases} \Delta_2 G = -\delta(x-\xi, y-\eta),\ \ (r,\rho<R) \\ G\mid_{r=R}=0. \end{cases}$$

其中$r=\sqrt{x^2+y^2}, \rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$.

用**镜像法**求解：在$M_0=(\xi,\eta)$放电量为$+\varepsilon$的平面点电荷，在M_0关于圆周$r=a$的对称点$M_1=\frac{R^2}{\rho^2}(\xi,\eta)$虚设电量为$-\varepsilon$的平面点电荷, 两个电性相反的点电荷分别对应有势函数：

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_0)},\quad u_1 = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_1)},$$

在圆周C上，

$$u_0+u_1 = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r(M,M_0)} - \ln\frac{1}{r(M,M_1)}\right) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r(M,M_1)}{r(M,M_0)} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho}$$

这样可取$G=u_0+u_1-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho}$, G就在圆周$C$上为0了，最后格林函数

$$G = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_0)} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_1)} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho}$$

合于所求。如取极坐标，记场点$M=(r,\theta)$，源点$M_0=(\rho,\theta_0)$, 则

$$r(M,M_0)=\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\theta_0)},\quad r(M,M_1)=\sqrt{r^2+(\frac{R^2}{\rho})^2-2r\frac{R^2}{\rho}\cos(\theta-\theta_0)}.$$

利用格林函数求解相应的第一边值问题

例5.3.2 利用上半空间$(z>0)$的格林函数，求解场位方程的第一边值问题：

$$\begin{cases}\Delta_3 u = 0,\ (z>0) \\ u\mid_{z=0} = \varphi(x,y).\end{cases} \tag{1}$$

解：利用格林函数G求解三维泊松方程第一边值问题的一般性公式是：

$$u(M_0) = \iiint\limits_V G(M,M_0)f(M)dM - \iint\limits_S \varphi(M)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}dS \tag{2}$$

具体到本问题，空间区域V为上半空间，边界S是平面$z=0$,区域的外法向$\vec{n}$是z轴负半轴方向$(0,0,-1)$，因此$\dfrac{\partial G}{\partial \vec{n}} = -\dfrac{\partial G}{\partial z}$,而$f(M)=f(x,y,z)=0,\ \varphi(M)=\varphi(x,y)$. 以上这些数据代入算式(2)，就得到求边值问题(1)的解的公式：

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \iint\limits_{z=0}\varphi(x,y)\frac{\partial G}{\partial z}dS \tag{3}$$

我们在前面的例子中，已经求得半空间$(z>0)$的格林函数为：

$$G = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}$$

因此

$$\frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{-(z-\zeta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{-(z+\zeta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}\right)\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\zeta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

上式(4)代入(3), 并展开$dS=dxdy$,得到

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\zeta\varphi(x,y)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{\frac{3}{2}}}dxdy \tag{5}$$

或者表示为等价形式：

$$u(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\varphi(\xi,\eta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}d\xi d\eta \tag{6}$$

例5.3.3 利用上半平面$(y>0)$的格林函数，求解上半平面的场位方程边值问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 u = -f(x,y),\ (y>0) \\ u\mid_{y=0} = \varphi(x).\end{cases} \tag{1}$$

解： 前面我们已经求出上半平面($y>0$)的格林函数为

$$G=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,.$$

利用格林函数G求解二维泊松方程第一边值问题的一般性公式是：

$$u(M_0)=\iint\limits_D G(M,M_0)f(M)dM-\int\limits_l\varphi(M)\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}dl \tag{3}$$

在我们所求的问题中，区域D为上半平面，边界l是直线$y=0$,区域的外法向$\vec{n}$是y负半轴方向，而$f(M)=f(x,y)$, $\varphi(M)=\varphi(x)$. 以上这些数据代入算式(3)，就得到利用格林函数求边值问题(1)的解的公式：

$$u(\xi,\eta)=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,y,\xi,\eta)f(x,y)\,dxdy+\int_{y=0}\varphi(x)\frac{\partial G}{\partial y}dx \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y}\Big|_{y=0}&=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{y+\eta}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}-\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)\Big|_{y=0}\\&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}\right)\end{aligned}$$

因而得到边值问题的解：

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}dxdy+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\varphi(x)}{(x-\xi)^2+\eta^2}dx$$

或

$$u(x,y)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta)\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}d\xi d\eta+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi$$

例5.3.4 利用球内的格林函数，求解边值问题：

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0, \quad (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}<R)\\ u\mid_{r=R}=\varphi(x,y,z).\end{cases}$$

解：利用格林函数G求解三维泊松方程第一边值问题的一般性公式是：

$$u(M_0)=\iiint\limits_V G(M,M_0)f(M)dM-\iint\limits_S\varphi(M)\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}dS$$

在本问题中，$f(M)=f(x,y,z)=0$, S是球面$r=R$,因此

$$u(M_0)=-\iint\limits_S\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}\varphi(M)dS$$

采用球坐标$M=(r,\theta,\varphi)$,前面已经求得此球内格林函数为：

$$G=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\psi}}-\frac{R}{\sqrt{r^2\rho^2+R^4-2R^2\rho r\cos\psi}}\right). \tag{1}$$

其中$\cos\psi=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)$,在球面上

$$\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}\mid_S=\frac{\partial G}{\partial r}\mid_S=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{r-\rho\cos\psi}{(r^2+\rho^2-2r\rho\cos\psi)^{\frac{3}{2}}}-\frac{(\rho^2r-R^2\rho\cos\psi)R}{(r^2\rho^2+R^4-2R^2\rho r\cos\psi)^{\frac{3}{2}}}\right)\mid_{r=R}$$

$$=-\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\psi)^{\frac{3}{2}}}$$

代入表达式(1),得到积分形式解的泊松公式：

$$u(M_0)=u(\rho,\theta_0,\varphi_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_S\frac{R^2-\rho^2}{(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\psi)^{\frac{3}{2}}}\Phi(\theta,\varphi)dS$$

其中 $\Phi(\theta,\varphi)=\varphi(R\sin\theta\cos\varphi,R\sin\theta\sin\varphi,R\cos\theta)$.

利用镜像法求解其它的一些格林函数的例子

例5.3.5 已知四分之一平面区域$D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$, 用镜像法求出D内泊松方程第一边值问题的格林函数。

解 用镜像法，V内格林函数满足的边值问题：

$$\begin{cases}\Delta_2G=-\delta(x-\xi,y-\eta),\ (x>0,y>0,\xi>0,\eta>0)\\ G\mid_L=0,\end{cases}$$

其中L为D的边界，即$L=\{(x,y)\mid x=0,y\geq 0)\}\cup\{(x,y)\mid y=0,x\geq 0)\}$ 记$M_0=(\xi,\eta)$,则M_0关于x轴和y轴的对称点分别为$M_1=(\xi,-\eta)$和$M_2=(-\xi,\eta)$.在M_0放置电量为$+\epsilon$的平面点电荷，产生电场电势为

$$U_0=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_0)},\quad r(M,M_0)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

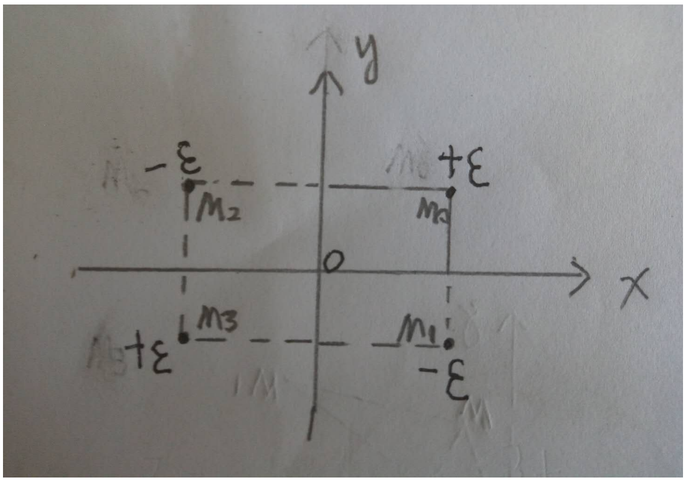
在M_1和M_2分别虚设$-\epsilon$的平面点电荷，产生电场的势函数分别为

$$U_1=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_1)},\quad r(M,M_1)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2},$$

$$U_2=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_2)},\quad r(M,M_2)=\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

为平衡M_1所虚设的负电荷对y轴的影响以及M_2虚设的负电荷对x轴的影响，在$M_3=(-\xi,-\eta)$虚设$+\epsilon$平面点电荷，产生电场的势函数为：

$$U_3=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_3)},\quad r(M,M_3)=\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2}.$$



把放置的所有电荷的电场的势函数叠加，我们就得到格林函数

$$G = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r(M,M_1)\,r(M,M_2)}{r(M,M_0)\,r(M,M_3)}$$

例5.3.6 已知半球区域$V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 < R^2,\ z>0\}$, 求$V$内泊松方程第一边值问题的格林函数。

解题提示：半球区域有两个边界，一个是底面的圆，另外就是半个球面的边界。因此，利用镜像法求格林函数时候，在球内放置正电荷后，在它关于两个边界对称点都要放虚拟负电荷来平衡边界的电势，最后还要放一个虚拟正电荷在来抵消这两个虚拟负电荷对边界电势的影响。

解：V内泊松方程第一边值问题的格林函数满足边值问题：

$$\begin{cases} \Delta_3 G = -\delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta),\ (z>0,\ r,\rho<R) \\ G\mid_s = 0. \end{cases}$$

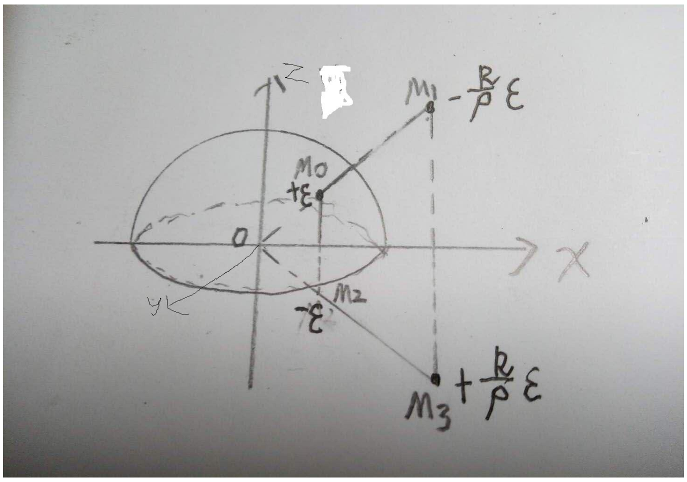
其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$,而$S=\{z>0, r=R\}\bigcup\{z=0, r<R\}$.

使用球坐标并镜像法求此格林函数：首先在半球内$M_0=(\rho,\theta_0,\varphi_0)$点放$+\epsilon$点电荷，在$M_0$的关于球面的对称点$M_1=(\frac{R^2}{\rho},\theta_0,\varphi_0)$虚设$-\frac{R}{\rho}\epsilon$ 的点电荷，同时在关于半球底面的对称点$M_2=(\rho,\pi-\theta_0,\varphi_0)$虚设$-\epsilon$点电荷，最后在$M_1$关于底面的对称点:
$M_3=(\frac{R^2}{\rho},\pi-\theta_0,\varphi_0)$虚设一电量为$+\frac{R}{\rho}\epsilon$的正电荷起到总的平衡作用(此电荷可抵消在$M_1$和$M_2$设置的虚拟电荷对边界的影响)。

这样在M_0放置的点电荷以及在M_2, M_3, M_4虚设电荷所产生的势函数分别为：

$$U_0 = \frac{1}{4\pi r(M,M_0)},\quad U_1 = -\frac{R}{\rho}\frac{1}{4\pi r(M,M_1)},$$

$$U_2 = -\frac{1}{4\pi r(M,M_2)},\quad U_3 = \frac{R}{\rho}\frac{1}{4\pi r(M,M_3)}\,.$$



可取格林函数为

$$
\begin{aligned}
G &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r(M,M_0)} - \frac{R}{\rho}\frac{1}{r(M,M_1)} - \frac{1}{r(M,M_2)} + \frac{R}{\rho}\frac{1}{r(M,M_3)}\right]
\end{aligned}
$$

其中

$$
r(M,M_0) = \sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\psi}, \quad r(M,M_1) = \sqrt{r^2+(\frac{R^2}{\rho})^2-2r\frac{R^2}{\rho}\cos\psi},
$$

$$
r(M,M_2) = \sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\psi'}, \quad r(M,M_3) = \sqrt{r^2+(\frac{R^2}{\rho})^2-2r\frac{R^2}{\rho}\cos\psi'},
$$

其中$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)$, $\cos\psi'$就是把$\cos\psi$中的θ_0 换成$\pi-\theta_0$即可。

注5.3.3 在本章中$r(A,B)$代表A,B两点之间距离。在上例子中如采用直角坐标系，相应的表示式作相应的修改即可，比如: $M_0=(\xi,\eta,\zeta)$, 则M_0的球面对称点就表示为: $M_1=\frac{R^2}{\rho^2}(\xi,\eta,\zeta)$,这样

$$
r(M,M_1) = \sqrt{\left(x-\frac{R^2}{\rho^2}\xi\right)^2 + \left(y-\frac{R^2}{\rho^2}\eta\right)^2 + \left(z-\frac{R^2}{\rho^2}\zeta\right)^2}
$$

例5.3.7 求层状空间$V=\{(x,y,z)\mid 0<z<h\}$内Possion 方程第一边值问题的格林函数。

解题提示：可使用镜像法求解，区域的边界$z=0$和$z=h$如同两面镜子，反复反射，形成无穷多个电像，相应放置的一系列电荷产生的场的势函数作无穷叠加就是所求格林函数。

解： 利用镜像法求格林函数：格林函数G满足边值问题：

$$
\begin{cases}
\Delta_3 G = -\delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta), \ (0<z<H, 0<\zeta<h) \\
G\mid_{z=0} = 0, \ G\mid_{z=h} = 0.
\end{cases}
\tag{1}
$$

记V内点$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$, 它关于边界$z=0$的对称点为$M_1=(\xi,\eta,-\zeta)$,关于边界$z=h$的对称点为$M_1'=(\xi,\eta,2h-\zeta)$，在M_0放置电量为$+\epsilon$的点电荷，在M_1和M_1'分别放置电量为$-\epsilon$的点电荷, 为了平衡M_1处负电荷对边界$z=h$的影响，在M_1关于$Z=h$的对称点$M_2=(\xi,\eta,2h+\zeta)$放置$+\epsilon$点电荷，同理，在M_1'关于$Z=0$对称点$M_2'=(\xi,\eta,-2h+\zeta)$ 放置$+\epsilon$点电荷。以此类推，在坐标为$R_n=(\xi,\eta,2nh+\zeta)$的点放置$+\epsilon$点电荷，而$R_n'=(\xi,\eta,2nh-\zeta)$
的点放置$-\epsilon$点电荷（其中$n=\pm1,\pm2,...$）。在r_n和r_n'处放置的电荷产生静电场的势函数分别为：

$$U_n=\frac{1}{4\pi r(M,R_n)},\quad r(M,R_n)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-2nh-\zeta)^2}$$

以及

$$U_n'=-\frac{1}{4\pi r(M,R_n')},\quad r(M,R_n)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-2nh+\zeta)^2}$$

把这些电场势函数叠加后就是所求的格林函数，即

$$G=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}U_n+U_n'=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{r(M,R_n)}-\frac{1}{r(M,R_n')}\right)$$

求格林函数的其它方法

保形变换法:

求某些平面区域内的格林函数可以采取保形变换的方法，这种方法基于教材中给出的以下定理：

定理5.3.2 设D为z平面上的一单联通区域, $z=x+iy$, $z_0=\xi+i\eta\in D$,如果$\omega=\omega(z,z_0)$把D映为ω 平面的单位圆$|\omega|<1$, 并把z_0映为$\omega=0$的保形变换，则

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\omega(z)|}$$

是平面区域D上的格林函数，即G为边值问题(5.3.4)的解。

如果知道未知区域到已知格林函数的区域的保形变换，就可以结合以上定理求出未知区域的格林函数，我们通过以下两个例子来说明：

例5.3.8 已知四分之一平面$D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$, 请利用上半平面的格林函数求出D内泊松方程第一边值问题的格林函数

解 我们已经求得上半平面的格林函数为

$$G^*=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r(M^*,M_1^*)}{r(M^*,M_0^*)}$$

其中$M^*=(x^*,y^*)$, $M_0^*=(\xi^*,\eta^*)$, $M_1^*=(\xi^*,-\eta^*)$. 若设M^*点对应复数z^*, $M_0{}^*$点对应$z_0{}^*$, 则以上半平面的格林函数G^*可以改写为

$$G^*=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z^*-\overline{z_0}^*|}{|z^*-z_0{}^*|}$$

而由四分之一平面D到上半平面有保形变换：

$$z^*=z^2.$$

则四分之一平面D的格林函数为

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z^2-\overline{z}_0{}^2|}{|z^2-z_0{}^2|}$$

其中$z=x+iy$, $z_0=\xi+i\eta$.具体展开为

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z-\overline{z}_0||z+\overline{z}_0|}{|z-z_0||z+z_0|}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r(M,M_1)\,r(M,M_2)}{r(M,M_0)\,r(M,M_3)}$$

$$|z-z_0|=r(M,M_0)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

$$|z+z_0|=r(M,M_3)=\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2},$$

$$|z-\overline{z}_0|=r(M,M_1)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2},$$

$$|z+\overline{z}_0|=r(M,M_2)=\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

例5.3.9 已知半圆区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<R^2,\ y>0\}$,

1)用镜像法求D内泊松方程第一边值问题的格林函数。

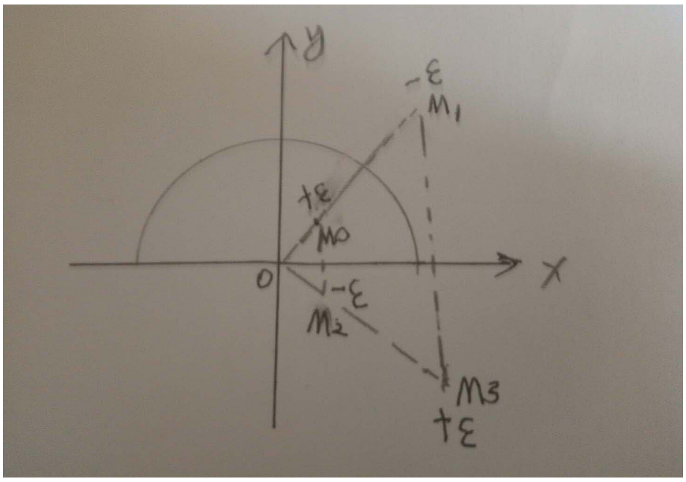
2)六分之一圆$D_1=\{(r,\theta)\mid r<R, 0<\theta<\frac{\pi}{3}\}$, 利用第一问结论求$D_1$内的格林函数。

解： **1)**D内泊松方程第一边值问题的格林函数满足边值问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 G=-\delta(x-\xi,y-\eta),\ (y>0,\ r,\rho<R)\\ G\mid_l=0.\end{cases}$$

其中$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$,而$l=\{y>0,r=R\}\bigcup\{y=0,|x|\le R\}$.

以下用镜像法求此格林函数：首先在半球内的点$M_0=(\xi,\eta)$点放$+\epsilon$平面点电荷，在M_0的关于圆的对称点$M_1=\frac{R^2}{\rho^2}(\xi,\eta)$虚设$-\epsilon$ 的平面点电荷，同时在关于半圆底边$y=0$的对称点$M_2=(\xi,-\eta)$虚设$-\epsilon$平面点电荷，最后在$M_3=\frac{R^2}{\rho^2}(\xi,-\eta)$虚设电量为$+\epsilon$ 平面点电荷起到总的平衡作用(此电荷可抵消在M_1和M_2设置的虚拟电荷对边界的影响)。如图：



M_0, M_1, M_2, M_3处放置平面点电荷产生的电场势函数分别为：

$$U_0 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_0)}, \quad U_1 = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_1)}$$

$$U_2 = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_2)}, \quad U_3 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_3)}$$

其中$M=(x,y)$,而符号$r(A,B)$表示A,B两点之间距离。由于

$$U_1+U_2+U_3+U_4 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r(M,M_1)r(M,M_2)}{r(M,M_0)r(M,M_3)} \tag{1}$$

由圆的对称点的性质，M在圆周C上时，

$$\frac{r(M,M_1)}{r(M,M_0)} = \frac{R}{\rho}, \quad \frac{r(M,M_2)}{r(M,M_3)} = \frac{\rho}{R}, \quad (\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}) \tag{2}$$

因此$M \in C$时候

$$U_1+U_2+U_3+U_4 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r(M,M_1)\,r(M,M_2)}{r(M,M_0)\,r(M,M_3)} = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{R}{\rho}\times\frac{\rho}{R}\right) = \ln 1 = 0 \tag{3}$$

根据对称点的意义，容易验证$U_1+U_2+U_3+U_4$边界$y=0$上值也为0. 这样，所求格林函数G 为：

$$G = U_1+U_2+U_3+U_4 = \frac{1}{2\pi}\frac{r(M,M_1)\,r(M,M_2)}{r(M,M_0)\,r(M,M_3)} \tag{4}$$

其中，

$$r(M,M_0) = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

$$r(M,M_1) = \sqrt{\left(x-\frac{R^2}{\rho^2}\xi\right)^2 + \left(y-\frac{R^2}{\rho^2}\eta\right)^2},$$

$$r(M,M_2) = \sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2},$$

$$r(M,M_3)=\sqrt{\left(x-\frac{R^2}{\rho^2}\xi\right)^2+\left(y+\frac{R^2}{\rho^2}\eta\right)^2}\,.$$

2)用$D^*=\{(r^*,\theta^*)\mid r^*<R^*,0<\theta^*<\pi\}$表示半径$R^*$的上半圆，由第一问的结论，$D^*$内泊松方程第一边值问题的的格林函数可表示为：

$$G^*=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r(M^*,M_1{}^*)r(M^*,M_2{}^*)}{r(M^*,M_0{}^*)r(M^*,M_3{}^*)} \tag{5}$$

其中$M^*=(x^*,y^*),M_0{}^*=(\xi^*,\eta^*),M_1{}^*=\dfrac{R^{*2}}{\rho^{*2}}(\xi^*,\eta^*),M_2{}^*=(\xi^*,-\eta^*),,M_3{}^*=\dfrac{R^{*2}}{\rho^{*2}}(\xi^*,-\eta^*)$,
而$\rho^*=\sqrt{\xi^{*2}+\eta^{*2}}$, 符号$r(A,B)$代表$A,B$两点之间距离。显然，上式(5)代表的$D^*$内的格林函数又可改写为以下复变函数形式:

$$G^*=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z^*-\overline{z_0{}^*}||z^*-\frac{R^{*2}}{\rho^{*2}}z_0{}^*|}{|z^*-z_0{}^*||z^*-\frac{R^{*2}}{\rho^{*2}}\overline{z_0{}^*}|} \tag{6}$$

若取$R^*=R^3$, 这时保形变换$z^*=z^3$把六分之一圆域D内部变为半圆域D^*, 并把D内点z_0变为$z_0{}^3$, 利用第一问求得的半圆的格林函数，得到六分之一圆D的格林函数为

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z^3-\overline{z_0}^3||z^3-\frac{R^6}{\rho^6}z_0{}^3|}{|z^3-z_0{}^3||z^3-\frac{R^6}{\rho^6}\overline{z_0}^3|} \tag{7}$$

在极坐标下，z^3对应点$(r^3,3\theta)$, $z_0{}^3$对应点$(\rho^3,3\theta_0)$, 所以上式的六分之一圆的格林函数G可化为以下形式：

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r(M,M_1)r(M,M_2)}{r(M,M_0)r(M,M_3)} \tag{8}$$

其中，$M(r^3,3\theta),M_0(\rho^3,3\theta_0),M_1(\frac{R^6}{\rho^3},3\theta_0),M_2(\rho^3,-3\theta_0),,M_3(\frac{R^6}{\rho^3},-3\theta_0)$, 而

$$r(M,M_0)=\sqrt{(r^3\cos 3\theta-\rho^3\cos 3\theta_0)^2+(r^3\sin 3\theta-\rho^3\sin 3\theta_0)^2},$$

$$r(M,M_1)=\sqrt{(r^3\cos 3\theta-\frac{R^6}{\rho^3}\cos 3\theta_0)^2+(r^3\sin 3\theta-\frac{R^6}{\rho^3}\sin 3\theta_0)^2},$$

$$r(M,M_2)=\sqrt{(r^3\cos 3\theta-\rho^3\cos 3\theta_0)^2+(r^3\sin 3\theta+\rho^3\sin 3\theta_0)^2},$$

$$r(M,M_3)=\sqrt{(r^3\cos 3\theta-\frac{R^6}{\rho^3}\cos 3\theta_0)^2+(r^3\sin 3\theta+\frac{R^6}{\rho^3}\sin 3\theta_0)^2}\,.$$

Fourier方法求格林函数:

这种方法求格林函数的基本原则是：利用格林函数的边界条件，建立同样边界条件的的固有值问题，利用求得的固有函数系的完备性，把格林函

数G在固有函数系下展开，再利用别的条件定出展开系数（或广义$Fourier$系数），从而定出格林函数。

例5.3.10 求矩形区域$D: 0<x<a,\ 0<y<b$内狄氏问题的格林函数，即求定解问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 G=-\delta(x-\xi,y-\eta), \quad ((x,y)\in D,(\xi,\eta)\in D) \\ G\mid_{x=0}=G\mid_{x=a}=0=G\mid_{y=0}=G\mid_{y=b}=0.\end{cases}$$

解：考虑同一齐次边界条件下$Laplace$方程的偏微分方程固有值问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 v+\lambda v=0, \quad ((x,y)\in D) \\ v\mid_{x=0}=v\mid_{x=a}=0,\ \ v\mid_{y=0}=v\mid_{y=b}=0.\end{cases} \tag{1}$$

用分离变量法求解，令$v(x,y)=X(x)Y(y)$,代入v的方程得到

$$X''Y+XY''+\lambda XY=0 \Longrightarrow \frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\lambda=0\,.$$

在结合边界条件，得到固有值问题：

$$\begin{cases}X''+\mu X=0,\ \ (0<x<a) \\ X(0)=X(a)=0\,.\end{cases} \qquad \text{和} \qquad \begin{cases}Y''+\nu Y=0,\ \ (0<y<b) \\ Y(0)=X(b)=0\,.\end{cases}$$

且$\lambda=\mu+\nu$, 易解得以上关于$X(x)$, $Y(y)$固有值问题的解分别为：

$$\mu_m=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2, \quad X_m(x)=\sin\frac{m\pi x}{a},$$

$$\nu_n=\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad Y_n(y)=\sin\frac{n\pi y}{b},$$

相应地得到偏微分方程固有值问题(1)的解为：

固有值: $\lambda_{mn}=\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2$, **固有函数:** $v_{mn}(x,y)=\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}$

把格林函数G在二元完备系$v_{mn}(x,y)$下展开，即设

$$G=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}C_{mn}v_{mn}(x,y)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}C_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,.$$

代入原方程得：

$$\Delta_2 G=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}C_{mn}\Delta_2 v_{mn}(x,y)=-\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}C_{mn}\lambda_{mn}v_{mn}(x,y)=-\delta(x-\xi,y-\eta).$$

其中展开系数：

$$C_{mn}\lambda_{mn}=\frac{\int_0^a\int_0^b\delta(x-\xi,y-\eta)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy}{||\sin\frac{m\pi x}{a}||^2||\sin\frac{n\pi y}{b}||^2} \tag{2}$$

而

$$||\sin\frac{m\pi x}{a}||^2=\int_0^a\sin^2\frac{m\pi x}{a}\,dx=\frac{a}{2},\quad ||\sin\frac{n\pi y}{b}||^2=\int_0^b\sin^2\frac{n\pi x}{b}\,dy=\frac{b}{2},$$

另外

$$\int_0^a\int_0^b\delta(x-\xi,y-\eta)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy=\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,.$$

这些结果代入(2)解得：

$$C_{mn}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b},\qquad\left(\lambda_{mn}=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)$$

最后整理得到所求的格林函数为：

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{4ab}{\pi^2}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2b^2+n^2a^2}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

例5.3.11求解以下半条形区域的定解问题：

$$\begin{cases}\Delta_2u=0,\quad(x>0,0<y<1)\\ u\mid_{x=0}=0,\ \ u\mid_{x\to+\infty}\text{有界}\\ u\mid_{y=0}=\varphi_1(x),\ u\mid_{y=1}=\varphi_2(x)\,.\end{cases} \tag{1}$$

解题提示：这是一个半条形区域的边值问题，可以先求出相应的的格林函数，然后借助格林函数可求出此边值问题的解。

解: 此问题半条形区域内的泊松方程第一边值问题，相应的格林函数G满足：

$$\begin{cases}\Delta_2G=-\delta(x-\xi,y-\eta),\quad(x,\xi>0,0<y,\eta<1)\\ \ G\mid_{x\to+\infty}\text{有界}\\ G\mid_{x=0}=G\mid_{y=0}=G\mid_{y=1}=0\,.\end{cases} \tag{2}$$

下面用Fourier方法求解格林函数G, 为此考虑固有值问题：

$$\begin{cases}\Delta_2v+\lambda V=0,\quad(x>0,0<y<1)\\ \ V\mid_{x\to+\infty}\text{有界}\\ V\mid_{x=0}=V\mid_{y=0}=V\mid_{y=1}=0\,.\end{cases} \tag{3}$$

作分离变量，令$V=X(x)Y(y)$, 代入后产生两个固有值问题：

$$\begin{cases} x''+\mu X=0, & (0<x<+\infty) \\ X(0)=0, & X(+\infty)\text{有界} \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} Y''+\nu Y=0, & (0<y<1) \\ Y(0)=Y(1)=0 \end{cases}$$

其中$\mu+\nu=\lambda$. 以上固有值问题分别解得：

$$\mu=\omega^2, \qquad X(x,\omega)=\sin\omega x,\ \omega>0$$

$$\nu_n=(n\pi)^2, \qquad Y_n=\sin n\pi y, \quad n=1,2,3,...$$

相应地偏微分方程固有值问题(3)有固有值和固有函数系

$$\lambda_{n\omega}=\omega^2+n^2\pi^2, \quad v_n(x,y,\omega)=\sin\omega x\sin n\pi y\,.$$

利用叠加原理设

$$G=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}A_n(\omega)\sin\omega xd\omega\ \sin n\pi y \tag{4}$$

代入G的方程：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}A_n(\omega)[\omega^2+n^2\pi^2]\sin\omega xd\omega\ \sin n\pi y=\delta(x-\xi,y-\eta) \tag{6}$$

把上式看成关于$\sin\pi y$的正弦级数, 因此，根据正弦级数系数确定公式，有：

$$\int_0^{+\infty}A_n(\omega)[\omega^2+n^2\pi^2]\sin\omega xd\omega=2\int_0^1\delta(x-\xi,y-\eta)\sin n\pi ydy=2\sin\pi\eta\,\delta(x-\xi) \tag{7}$$

上式(7)又可看成是$A_n(\omega)[\omega^2+n^2\pi^2]$的正弦变换，因此由反演公式：

$$A_n(\omega)[\omega^2+n^2\pi^2]=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}2\sin n\pi\eta\,\delta(x-\xi)\sin\omega xdx=\frac{4}{\pi}\sin\omega\xi\sin n\pi\eta$$

因此

$$A_n(\omega)=\frac{4}{\pi[\omega^2+n^2\pi^2]}\sin\omega\xi\sin n\pi\eta,$$

这样就求出了格林函数

$$G(x,y,\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\frac{4\sin\omega\xi\sin\omega x}{\pi(\omega^2+n^2\pi^2)}d\omega\right]\sin n\pi\eta\ \sin n\pi y.$$

格林函数求解泊松方程第一边值问题的一般公式为:

$$u(M)=\iint\limits_D G(M,M_0)f(M_0)dM_0-\int\limits_l\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial\vec{n_0}}dl_0$$

在本问题中$f(M)=0$,$M=(x,y)$, $D=\{(x,y)\mid x>0,0<y<1\}$, 其边界$l=l_1+l2+l3$, l_1,l_2和l_3分别为区域D的$x=1$,$y=0$, 以及$y=1$的边界，依条件：$\varphi(M)\mid_{l_1}=0,\varphi(M)\mid_{l_2}=\varphi_1(x)$, $\varphi(M)\mid_{l_3}=\varphi_2(x)$,因此，原定解问题解为

$$u(x,y)=\int_0^{+\infty}\varphi_1(\xi)\frac{\partial G}{\partial\eta}\mid_{\eta=0}\,d\xi-\int_0^{+\infty}\varphi_2(\xi)\frac{\partial G}{\partial\eta}\mid_{\eta=1}\,d\xi \tag{8}$$

而

$$\frac{\partial G}{\partial\eta}=\sum_{n=1}^{+\infty}4n\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\xi\sin\omega x}{\omega^2+n^2\pi^2}d\omega\right]\cos n\pi\eta\,\sin n\pi y. \tag{9}$$

所以最后解得

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}4n\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{[\varphi_1(\xi)-(-1)^n\varphi_2(\xi)]\sin\omega\xi\sin\omega x}{\omega^2+n^2\pi^2}d\xi d\omega\sin n\pi y\,.$$

5.4 初值问题的基本解法

1)$u_t=Lu$型方程初值问题的基本解

$u_t=Lu$型方程的初值问题是：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=Lu+f(t,M),\ (\,t>0,M\in R^n,n=1,2,3)\\ u\mid_{t=0}=\varphi(M).\end{cases} \tag{5.4.1}$$

其中，L是关于空间变量M的线性偏微分算子。

相应的基本解问题是：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}=LU,\ (\,t>0,M\in R^n,n=1,2,3)\\ U\mid_{t=0}=\delta(M).\end{cases} \tag{5.4.2}$$

比如对于非齐次三维热传导方程初值问题：

$$\begin{cases}u_t=\Delta_3u+f(t,x,y,z),\ (\,t>0,-\infty<x,y,z<+\infty)\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x,y,z).\end{cases}$$

相应的基本解问题是：

$$\begin{cases}U_t=\Delta_3U,\ (\,t>0,-\infty<x,y,z<+\infty)\\ U\mid_{t=0}=\delta(x,y,z).\end{cases}$$

如果能求出基本解问题(5.4.2)的解$U(t,M)$，就能利用基本解$U(t,M)$,通过相应的公式就可求出原初值问题(5.4.1) 的解$u(t,M)$.

下面导出由基本解求解$u_t = Lu$型方程初值问题的公式

利用冲量原理和叠加原理，并利用δ函数的卷积性质，可以推出由(5.4.2)的的解$U(t,M)$求出原初值问题(5.4.1)的解$u(t,M)$的公式：

定理5.4.1 设$U(t,M)$是基本解问题(5.4.2)的解，则

$$u(t,M) = U(t,M) * \varphi(M) + \int_0^t U(t-\tau,M) * f(\tau,M)\,d\tau$$

是原初值问题(5.4.1)的解。

证明：由叠加原理，原初值问题(5.4.1)的解$u = u_1 + u_2$其中u_1和u_2分别满足：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = Lu_1,\ (\ t > 0, M \in R^n, n = 1,2,3) \\ u_1 \mid_{t=0} = \varphi(M). \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = Lu_2 + f(t,M),\ (\ t > 0, M \in R^n, n = 1,2,3) \\ u_2 \mid_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

以下首先证明$u_1 = U(t,M) * \varphi(M)$, 为此把此表示式代入(1)的泛定方程:

$$左 = \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial U(t,M)}{\partial t} * \varphi(M) = LU(t,M) * \varphi(M) = L[U(t,M) * \varphi(M)] = Lu_1 = 右$$

另外

$$u_1 \mid_{t=0} = (U(t,M) \mid_{t=0}) * \varphi(M) = \delta(M) * \varphi(M) = \varphi(M)$$

这样就验证了$u_1 = U(t,M) * \varphi(M)$满足定解问题(1). 在根据冲量原理

$$u_2 = \int_0^t W(t,x,\tau)\,d\tau \tag{3}$$

其中$W(t,x,\tau)$满足：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t} = LW,\ (\ t > \tau,\ \ M \in R^n, n = 1,2,3) \\ W \mid_{t=\tau} = f(\tau,M). \end{cases} \tag{4}$$

作自变量替换$t_1 = t - \tau$, 则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t_1} = LW,\ (\ t_1 > 0,\ \ M \in R^n, n = 1,2,3) \\ W \mid_{t_1=0} = f(\tau,M). \end{cases} \tag{5}$$

类似于u_1的初值问题的解，可得到

$$W(t_1,x,\tau)=U(t_1,M)*f(\tau,M)\Longrightarrow W(t,x,\tau)=U(t-\tau,M)*f(\tau,M)\,.$$

因此

$$u_2=\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)d\tau$$

把u_1和u_2的表示式相加，就证明了定理的结论。

例5.4.1利用基本解方法求解一维热传导方程初值问题：

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}+f(t,x),\ (\,t>0,-\infty<x<+\infty) \\ u\ |_{t=0}=\varphi(x). \end{cases} \tag{1}$$

解题提示：本问题属于$u_t=Lu$型方程的一般初值问题（其中$L=a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$），可先求出相应的基本解后再利用相应公式求出原非齐次一般初值问题的解。

解：此初值问题的基本解问题是：

$$\begin{cases} U_t=a^2U_{xx},\ (\,t>0,-\infty<x<+\infty) \\ U\ |_{t=0}=\delta(x). \end{cases} \tag{2}$$

首先利用$Fourier$变换求出基本解，为此，令

$$\overline{U}=F[U]=\int_{-\infty}^{+\infty}U(t,x)e^{-i\lambda x}dx$$

相应地，

$$F[U_{xx}]=-\lambda^2\overline{U},\ F[\delta(x)]=1$$

因此对基本解问题(2)两边作$Fourier$变换，得到：

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{U}}{dt}=-a^2\lambda^2\overline{U} \\ \overline{U}\ |_{t=0}=1. \end{cases}$$

解得

$$\overline{U}=\exp\{-a^2\lambda^2t\}$$

相应作反变换, 有：

$$U=F^{-1}[\overline{U}]=F^{-1}[\exp-\{a^2\lambda^2t\}]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{4a^2t}\}$$

根据由基本解求解$u_t=Lu$型初值问题的一般性公式

$$u(t,M)=U(t,M)*\varphi(M)+\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)\,d\tau,$$

求得

$$u(t,x)=U(t,x)*\varphi(x)+\int_0^t U(t-\tau,x)*f(\tau,x)\,d\tau.$$

具体为：

$$u=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}f(\tau,\xi)d\xi$$

例5.4.2利用基本解方法求解一阶线性初值初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}=f(t,x),\ (\ t>0,-\infty<x<+\infty)\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x).\end{cases} \tag{1}$$

解：此初值问题的基本解问题是：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}+a\dfrac{\partial U}{\partial x}=0,\ (\ t>0,-\infty<x<+\infty)\\ U\mid_{t=0}=\delta(x).\end{cases} \tag{2}$$

首先利用$Fourier$变换求出基本解，为此，令

$$\overline{U}(t,\lambda)=F[U(t,x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}U(t,x)e^{-i\lambda x}dx$$

相应地，

$$F[\frac{\partial U}{\partial x}]=i\lambda\overline{U},\ \ F[\delta(x)]=1$$

因此对基本解问题(2)两边作$Fourier$变换，得到：

$$\begin{cases}\frac{d\overline{U}}{dt}+i\lambda a\overline{U}=0,\\ \overline{U}\mid_{t=0}=1.\end{cases}$$

解得

$$\overline{U}=\exp\{-i\lambda at\}$$

相应作反变换, 有：

$$U=F^{-1}[\overline{U}]=F^{-1}[\exp\{-i\lambda at\}]=\delta(x-at)$$

根据由基本解求解$u_t=Lu$型初值问题的一般性公式

$$u(t,M)=U(t,M)*\varphi(M)+\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)\,d\tau,$$

求得原初值问题的解：

$$u(t,x)=\delta(x-at)*\varphi(x)+\int_0^t \delta(x-a(t-\tau))*f(\tau,x)\,d\tau.$$

$$=\varphi(x-at)+\int_0^t f(\tau,x-a(t-\tau))\,d\tau$$

例5.4.3求三维热传导方程的初值问题基本解，即求解定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}=a^2\Delta_3 U,(t>0,-\infty<x,y,z<+\infty)\\ U\mid_{t=0}=\delta(x,y,z)\end{cases}$$

解: 作$Fourier$变换，即设

$$\overline{U}(t,\lambda,\mu,\nu)=F[U(t,x,y,z)]=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}U(t,x,y,z)e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dxdydz,$$

这样：

$$F[\frac{\partial U}{\partial t}]=\frac{d\overline{U}}{dt},\quad F[\Delta_3 U]=-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\overline{U},$$

另外$F[\delta(x,y,z)]=1$,这样,原基本解问题问题经$Fourier$变换得到：

$$\begin{cases}\dfrac{d\overline{U}}{dt}=-a^2\rho^2\overline{U},\quad(\rho^2=\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\\ \overline{U}\mid_{t=0}=1\,.\end{cases}$$

解得

$$\overline{U}(t,\lambda,\mu,\nu)=e^{-a^2\rho^2 t}$$

作$Fourier$反变换:

$$U(t,x,y,z)=F^{-1}[e^{-a^2\rho^2 t}]=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}e^{i\lambda x}d\lambda\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\mu^2 t}e^{i\mu y}d\mu\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\nu^2 t}e^{i\nu z}d\nu\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}\right).$$

2)$u_{tt}=Lu$型方程初值问题的基本解

$u_{tt}=Lu$型方程的初值问题是：

$$\begin{cases} u_{tt}=Lu+f(t,M),\ (\ t>0, M\in R^n, n=1,2,3) \\ u\mid_{t=0}=\varphi(M), u_t\mid_{t=0}=\psi(M) \end{cases} \tag{5.4.3}$$

其中，L是关于空间变量M的线性偏微分算子。

相应的基本解问题是：

$$\begin{cases} U_{tt}=LU,\ (\ t>0, M\in R^n, n=1,2,3) \\ U\mid_{t=0}=0, U_t\mid_{t=0}=\delta(M) \end{cases} \tag{5.4.4}$$

如果能求出基本解问题(5.4.4)的解$U(t,M)$，就能利用基本解$U(t,M)$,通过相应的公式就可求出原初值问题(5.4.3)的解$u(t,M)$.

以下给出由基本解求解$u_{tt}=Lu$型方程初值问题的公式：

定理5.4.2 设$U(t,M)$是基本解问题(5.4.4)的解，则

$$u(t,M)=U(t,M)*\psi(M)+\frac{\partial}{\partial t}\left[U(t,M)*\varphi(M)\right]+\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)\,d\tau$$

是原初值问题(5.4.3)的解。

证明： 利用叠加原理，初值问题(5.4.3)的解可写为：

$$u=u_1+u_2+u_3$$

其中u_1,u_2,u_3分别满足：

$$\begin{cases} u_{1tt}=Lu_1,\ (\ t>0, M\in R^n, n=1,2,3) \\ u_1\mid_{t=0}=0,\ \ u_{1t}\mid_{t=0}=\psi(M). \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u_{2tt}=Lu_2,\ (\ t>0, M\in R^n, n=1,2,3) \\ u_2\mid_{t=0}=\varphi(M),\ u_{2t}\mid_{t=0}=0. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u_{3tt}=Lu_3+f(t,M),\ (\ t>0, M\in R^n, n=1,2,3) \\ u_3\mid_{t=0}=0,\ u_{3t}\mid_{t=0}=0. \end{cases} \tag{3}$$

我们首先证明:

$$u_1(t,M)=U(t,M)*\psi(M) \tag{4}$$

实际上

$$u_{1tt} = (U(t,M) * \psi(M))_{tt} = U_{tt} * \psi(M)$$
$$= LU * \psi(M) = L\left(U(t,M) * \psi(M)\right) = Lu_1$$

这样就验证了$u_1(t,M) = U(t,M) * \psi(M)$ 满足了初值问题(1)的泛定方程部分，下面证明初值部分的条件也满足：

$$(U(t,M) * \psi(M))_{t=0} = (U(0,M) * \psi(M)) = 0 * \psi(M) = 0$$

$$(U(t,M) * \psi(M))_t \mid_{t=0} = (U_t(0,M) \mid_{t=0} * \psi(M)) = \delta(M) * \psi(M) = \psi(M)$$

因此验证了$u_1 = U(t,M) * \psi(M)$满足初值问题(1).

下面为了求解u_2, 设$v = \displaystyle\int_0^t u_2(\tau,x)\,d\tau$, 则

$$u_{2tt} = Lu_2 \Longrightarrow v_{tt} = Lv, \quad v_t \mid_{t=0} = u_2 \mid_{t=0} = \varphi(M)$$

这样$v(t,M)$满足：

$$\begin{cases} v_{tt} = Lv, \; (\, t > 0, M \in R^n, n = 1,2,3) \\ v \mid_{t=0} = 0 \;\; v_t \mid_{t=0} = \varphi(M). \end{cases} \tag{5}$$

类似于求解u_1的方法，求得

$$v(t,M) = U(t,M) * \varphi(M) \tag{6}$$

这样

$$u_2 = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[U(t,M) * \varphi(M)\right] \tag{7}$$

又利用冲量原理得到：

$$u_3 = \int_0^t W(t,M,\tau)\,d\tau$$

而$W(t,x,\tau)$满足：

$$\begin{cases} W_{tt} = LW, \; (\, t > \tau, M \in R^n, n = 1,2,3) \\ W \mid_{t=\tau} = 0, \;\; W_t \mid_{t=\tau} = f(\tau,M). \end{cases} \tag{8}$$

作$t_1 = t - \tau$,令$\overline{W}(t_1,M,\tau) = W(t_1+\tau,M,\tau)$,则$\overline{W}$ 满足：

$$\begin{cases} \overline{W}_{t_1t_1} = L\overline{W}, \; (\, t_1 > 0, M \in R^n, n = 1,2,3) \\ \overline{W} \mid_{t_1=0} = 0, \;\; \overline{W}_{t_1} \mid_{t_1=0} = f(\tau,M). \end{cases} \tag{9}$$

类似于求解u_1的方法，可求出

$\overline{W}(t_1, M, \tau) = U(t_1, M) * f(\tau, M) \Rightarrow W(t, x, \tau) = U(t-\tau, M) * f(\tau, M)$

这样

$$u_3(t, M) = \int_0^t U(t-\tau, M) * f(\tau, M)\, d\tau.$$

综上，就得出由基本解求出原初值问题解的公式：

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

$$= U(t, M) * \psi(M) + \frac{\partial}{\partial t}\left(U(t, M) * \varphi(M)\right) + \int_0^t U(t-\tau, M) * f(\tau, M)\, d\tau$$

例5.4.4 求三维波动方程的基本解，即求解定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta_3 U,\ \ (t > 0,\ -\infty < x, y, z < +\infty) \\ U\ |_{t=0} = 0,\ \ \dfrac{\partial U}{\partial t}\ |_{t=0} = \delta(x, y, z) \end{cases} \tag{5.4.5}$$

解：作$Fourier$变换:令

$$\overline{U}(t, \lambda, \mu, \nu) = F[U(t, x, y, z)] = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} U(t, x, y, z) e^{-i(\lambda x + \mu y + \nu z)} dxdydz$$

由于$F(\Delta_3 U) = -\rho^2 \overline{U}$, $(\rho^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$, $F[\delta(x, y, z)] = 1$,则对基本解问题(5.4.5)作$Fourier$变换得到：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 \overline{U}}{dt^2} = -a^2 \rho^2 \overline{U},\ \ (t > 0) \\ \overline{U}\ |_{t=0} = 0,\ \ \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial t}\ |_{t=0} = 1\,. \end{cases} \tag{1}$$

解得：

$$\overline{U} = \frac{\sin a\rho t}{a\rho},\ (\text{其中}\rho^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$$

这样作$Fourier$反变换：

$$U(t, x, y, z) = F^{-1}[\overline{U}] = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a\rho t}{a\rho} e^{i(\lambda x + \mu y + \nu z)} d\lambda d\mu d\nu$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a\rho t}{a\rho}e^{i(\vec{\rho}.\vec{r})}d\lambda d\mu d\nu$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a\rho t}{a\rho}e^{i(\rho r\cos\theta)}d\lambda d\mu d\nu$$

这里$\vec{\rho} = (\lambda, \mu, \nu), \vec{r} = (x, y, z), r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \theta$为$\vec{\rho}$和$\vec{r}$的夹角.由对称性，不妨取$\nu$轴为向径$\vec{r}$方向, 作球坐标变换：

$$\lambda = \rho\sin\theta\cos\varphi, \mu = \rho\sin\theta\sin\varphi, \nu = \rho\cos\theta$$

这样

$$U(t, x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin a\rho t}{a\rho}e^{i(\rho r\cos\theta)}\,\rho^2\sin\theta d\varphi d\theta d\rho$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 a}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\rho\sin a\rho t\, e^{i(\rho r\cos\theta)}\sin\theta d\theta d\rho = -\frac{1}{4\pi^2 a}\int_0^{+\infty}\sin a\rho t\frac{e^{i(\rho r\cos\theta)}}{ir}\Big|_0^{\pi}d\rho$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 ar}\int_0^{+\infty}\sin a\rho t\sin\rho r\, d\rho = \frac{1}{4\pi^2 ar}\int_0^{+\infty}[\cos\rho(r - at) - \cos\rho(r + at)]\, d\rho$$

$$= \frac{1}{4\pi ar}[\delta(r - at) + \delta(r + at)] = \frac{\delta(r - at)}{4\pi ar}. \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

以下可以利用基本解的结论，求解三维自由波动方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta_3 u,\ (t > 0,\ -\infty < x, y, z < +\infty) \\ u\mid_{t=0} = \varphi(x, y, z),\ u_t\mid_{t=0} = \psi(x, y, z) \end{cases} \tag{5.4.6}$$

这样, 根据利用基本解求解$u_{tt} = Lu$型方程初值问题的结论，三维齐次波动方程初值问题(5.4.6)的解：

$$u(t, x, y, z) = \frac{\partial}{\partial t}[U(t, x, y, z) * \varphi(x, y, z)] + U(t, x, y, z) * \psi(x, y, z)$$

上式展开后即有：

$$u(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi a}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(r - at)}{r}\psi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi d\eta\, d\zeta$$

$$+\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(r - at)}{r}\varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi d\eta d\zeta$$

这里$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$.

为了消去以上表达式中的δ函数，记(x,y,z)为中心,r为半径的球面为S_r,并采用球坐标替换

$$\xi=x+r\sin\theta\cos\varphi,\ \ \eta=y+r\sin\theta\sin\varphi,\ \ \zeta=z+r\cos\theta,$$

这样

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(r-at)}{r}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta=\int_0^{+\infty}\frac{\delta(r-at)}{r}\left[\iint\limits_{S_r}\varphi(\xi,\eta,\zeta)dS\right]dr$$

$$=\left(\frac{1}{r}\iint\limits_{S_r}\varphi(\xi,\eta,\zeta)dS\right)\Big|_{r=at}=\frac{1}{at}\iint\limits_{S_{at}}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,dS$$

因此就求得了三维波动方程的初值问题(5.4.6)的解：

$$u(t,x,y,z)=\frac{1}{4\pi a^2t}\iint\limits_{S_{at}}\psi(\xi,\eta,\zeta)\,dS+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2t}\iint\limits_{S_{at}}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,dS.\right] \tag{5.4.7}$$

其中S_{at}为球面：$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=(at)^2$. 由于

$$\frac{1}{4\pi a^2t}\iint\limits_{S_{at}}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,dS=\frac{t}{4\pi(at)^2}\iint\limits_{S_{at}}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,dS=tM_{at}(\varphi)$$

其中$M_{at}(\varphi)$表示函数在以(x,y,z)为中心，半径为at球面上的平均值。这样(5.4.7)改写为：

$$u(t,x,y,z)=tM_{at}(\psi)+\frac{\partial}{\partial t}\left[tM_{at}(\varphi)\right] \tag{5.4.8}$$

降维法 (用三维波动方程初值问题的解求低维波动方程初值问题的解)：

二维齐次波动方程初值问题为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\Delta_2u,\ (t>0,\ -\infty<x,y<+\infty)\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x,y),\ u_t\mid_{t=0}=\psi(x,y)\end{cases} \tag{5.4.9}$$

此问题可以看成三维齐次波动方程初值问题(5.4.6)的自变量限制在$z=0$平面的特殊情况(从三维空间角度看坐标为$(x,y,0)$),因此可把求解三维齐次波

动方程初值问题的求解公式(5.4.7)直接用来求解二维齐次波动方程初值问题(5.4.9). 这样,问题(5.4.9)的解可表为：

$$u(t,x,y)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}^*}\psi(\xi,\eta)\,dS+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}^*}\varphi(\xi,\eta)\,dS\right] \tag{5.4.10}$$

其中S_{at}^*是以$(x,y,0)$为中心，半径为at的球面。由于下半球面方程分别为：

$$\zeta=\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2},$$

和

$$\zeta=-\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}\,.$$

在上，下半球面都有

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2}\,d\xi d\eta=\frac{at\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}$$

所以得到二维波动方程初值问题的解：

$$\begin{aligned}u(t,x,y)=&\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{D_{at}}\frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\\&+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{D_{at}}\frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\end{aligned} \tag{5.4.11}$$

其中D_{at}是在XY面上以(x,y)为中心，半径为at的圆域。

取$\varphi(x,y)=0,\ \psi(x,y)=\delta(x,y)$, 则对应二维波动方程基本解：

$$\begin{aligned}U(t,x,y)&=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{D_{at}}\frac{\delta(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi a}\dfrac{1}{\sqrt{(at)^2-x^2-y^2}}, & (x^2+y^2\le a^2t^2)\\ 0\,. & (x^2+y^2>a^2t^2)\end{cases}\end{aligned}$$

类似地，如果从自由二维波动方程初值问题出发，也可以用降维法得出一维自由波动方程(自由弦振动)初值问题的解, 即达朗贝尔公式。

例5.4.5求解以下初值问题：

$$\begin{cases}u_{tt}+2u_t=a^2u_{xx}-2u,\ (\,a>0,t>0,\ -\infty<x<+\infty)\\ u\mid_{t=0}=0,\quad u_t\mid_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

附Fourier反演公式：$F^{-1}\left[\frac{\sin a\sqrt{\lambda^2+b^2}}{\sqrt{\lambda^2+b^2}}\right]=\frac{1}{2}J_0(b\sqrt{a^2-x^2})H(a-|x|)$，$a>0,b>0$

解题提示：本问题形式上和$u_{tt}=Lu$型初值问题类似，可先作变换化为$u_{tt}=Lu$型初值问题的标准形式，利用求$u_{tt}=Lu$型初值问题的基本解法来求解。

解：为使方程化为$u_{tt}=Lu$型方程，作变换

$$u^*=ue^{at}$$

代入方程并化简得到：

$$u^*_{tt}+(2-2a)u^*_t=a^2u^*_{xx}+(2a-a^2-2)u^*\,.$$

取$a=1$这样，所给的初值问题就变为以下$u_{tt}=Lu$型初值问题:

$$\begin{cases}u^*_{tt}=a^2u^*_{xx}-u^*,\,(\,t>0,\,-\infty<x<+\infty)\\ u^*\mid_{t=0}=0,\quad u^*_t\mid_{t=0}=\psi(x)\end{cases}\tag{1}$$

其对应的基本解$U^*(t,x)$满足：

$$\begin{cases}U^*_{tt}=a^2U^*_{xx}-U^*,\,(\,t>0,\,-\infty<x<+\infty)\\ U^*\mid_{t=0}=0,\quad U^*_t\mid_{t=0}=\delta(x),\end{cases}\tag{2}$$

以$U^*(t,x)$中的x为积分变量作$Fourier$变换，则有：

$$\begin{cases}\overline{U}^*_{tt}=-a^2\lambda^2\overline{U}^*-\overline{U}^*,\;(\,t>0\,)\\ \overline{U}^*\mid_{t=0}=0,\quad \overline{U}^*_t\mid_{t=0}=1.\end{cases}$$

解得

$$\overline{U}^*(t,\lambda)=A(\lambda)\cos\sqrt{a^2\lambda^2+1}\,t+B(\lambda)\sin\sqrt{a^2\lambda^2+1}\,t\,.$$

根据$\overline{U}^*(t,\lambda)$的初值条件，定出

$$A(\lambda)=0,\quad B(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{a^2\lambda^2+1}}\,.$$

这样就解得像函数

$$\overline{U}^*(t,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{a^2\lambda^2+1}}\sin\sqrt{a^2\lambda^2+1}\,t$$

利用所附的反变换公式，作反变换得到基本解：

$$U^*(t,x)=F^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2\lambda^2+1}}\sin\sqrt{a^2\lambda^2+1}\,t\right]=\frac{1}{2a}J_0\left(\frac{1}{a}\sqrt{(at)^2-x^2}\right)H(at-|x|)$$

利用基本解就得到初值问题(1)的解：

$$u^*(t,x) = U^*(t,x) * \psi(x) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} J_0\left(\frac{1}{a}\sqrt{(at)^2-\xi^2}\right) H(at-|\xi|)\psi(x-\xi)d\xi \tag{3}$$

注意到上式(3)中

$$H(at-|\xi|) = \begin{cases} 0, & |\xi| > at \\ 1, & -at < \xi < at \end{cases}$$

(3)中的$u^*(t,x)$化简为：

$$u^*(t,x) = \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} J_0\left(\frac{1}{a}\sqrt{(at)^2-\xi^2}\right)\psi(x-\xi)d\xi\,.$$

这样最后求得原初值问题解$u(t,x) = u^* e^{-t}$, 即

$$u(t,x) = \frac{e^{-t}}{2a}\int_{-at}^{at} J_0\left(\frac{1}{a}\sqrt{(at)^2-\xi^2}\right)\psi(x-\xi)d\xi\,.$$

例5.4.6求解二维波动方程初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta_2 u, \ (t>0, \ -\infty < x, y < +\infty) \\ u\mid_{t=0} = x^2(x+y), \ u_t\mid_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解：二维波动方程初值问题的解一般性公式为：

$$u(t,x,y) = \frac{1}{2\pi a}\iint_{D_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{D_{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}$$

其中D_{at}是(x,y)为中心，at为半径的圆域。而$\varphi(x,y) = x^2(x+y)$, $\psi(x,y) = 0$, 这样

$$u(t,x,y) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{D_{at}} \frac{\xi^2(\xi+\eta)}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\,d\xi d\eta$$

使用极坐标替换：

$$\xi = x + r\cos\theta, \quad \eta = y + r\sin\theta$$

则

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{(x+r\cos\theta)^3+(x+r\cos\theta)^2(y+r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}\,rd\theta dr$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{(x^3+x^2y)r+(3x+y)r^3\cos^2\theta}{\sqrt{(at)^2-r^2}}\,d\theta dr$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left((x^3+x^2y)t+\frac{1}{3}a^2t^3(3x+y)\right)=x^3+x^2y+a^2t^2(3x+y)$$