11.7.4 保守场与势函数

定义 1 设 $\vec{F}=(P,Q,R)$ 是定义在空间区域 $V\subset\mathbb{R}^3$ 上的向量场. 如果存在 V 上的一个数量场 φ, 使得

$$\vec{F}(p)=\operatorname{grad}\varphi(p),\ \forall\, p\in V, \tag{11.1}$$

则称 $\vec{F}$ 是一个有势场, φ 称为 $\vec{F}$ 的一个势函数.

上面的式子可以用三个方程表示

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q,\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=R. \tag{11.2}$$

定义 2 设 $\vec{F}=(P,Q,R)$ 是定义在空间区域 $V\subset\mathbb{R}^3$ 上的向量场. 如果对 V 中任何有向闭路 L 都有

$$\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=0,$$

即, 沿 V 中任意闭路的环量为零, 则称 $\vec{F}$ 是 V 上一个保守场.

定理 1 向量场为保守场的充要条件是它为有势场.

证明 设向量场 $\vec{F}$ 是有势场, φ 是它的一个势函数, 即, $\vec{F} = \mathrm{grad}\,\varphi$. 当连接空间中两点 $A(x_0, y_0, z_0)$ 和 $B(x, y, z)$ 的曲线 L 有参数方程表示

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \ t \in [\alpha, \beta],$$

且 $(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)) = A,\ (x(\beta), y(\beta), z(\beta)) = B$ 时,

$$\begin{aligned}\int_L \mathrm{grad}\,\varphi \cdot d\vec{r} &= \int_L \varphi'_x dx + \varphi'_y dy + \varphi'_z dz \\ &= \int_\alpha^\beta \big(\varphi'_x x'(t) + \varphi'_y y'(t) + \varphi'_z z'(t)\big) dt \\ &= \int_\alpha^\beta d\varphi(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \varphi(B) - \varphi(A).\end{aligned}$$

这说明有势场是保守场.

反之, 设 $\vec{F} = (P, Q, R)$ 是区域 V 上一个保守场, 则沿曲线积分与路径无关, 所以给定 V 中一个固定点 $A(x_0, y_0, z_0)$ 和一个动点 $B(x, y, z)$, 则保守场 $\vec{F}$ 沿连接 A 和 B 的曲线积分定义了 V 中一个函数 (数量场)

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P dx + Q dy + R dz.$$

这个函数的梯度就是向量场 $\vec{F}$. 这只要充分利用保守场的曲线积分与路径无关这个基本性质即可. 设 Δx 充分小, 使得点 $(x + \Delta x, y, z)$ 仍然在 V 内, 所以利用积分对积分曲线的可加性可知

$$\varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} P dx + Q dy + R dz$$

在连接 (x, y, z) 和 $(x + \Delta x, y, z)$ 的直线上, 显然有 $dy = 0, dz = 0$ 因此

$$\frac{1}{\Delta x}(\varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z)) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x}^{x+\Delta x} P dx.$$

由此可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x, y, z).$$

同理可证

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x,y,z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = R(x,y,z),$$

即

$$\mathrm{grad}\,\varphi = (P,Q,R) = \vec{F}.$$

或者写成微分的形式

$$d\varphi(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

定理证明完毕.

注意, 有势场的势函数不是唯一的, 两个势函数之间只相差一个常数.

由上节课的例子可知, 光滑的梯度场是无旋场, 因此光滑的保守场是无旋场.

问题 无旋场是否一定是保守场?

例 1 考察向量场 $\vec{F} = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$.

解 因为

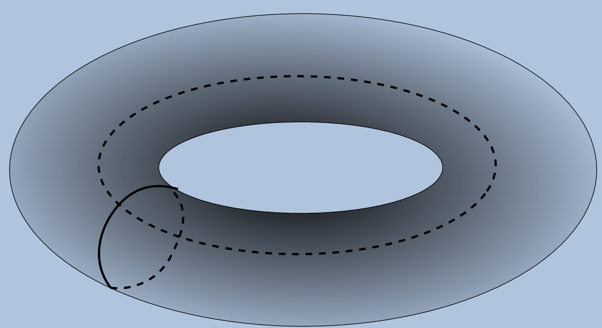
$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \vec{0},$$

故 $\vec{F}$ 是无旋场. 另一方面取 Oxy 平面上以原点为心的单位圆周为闭路 L, 正向为逆时针方向, 则有

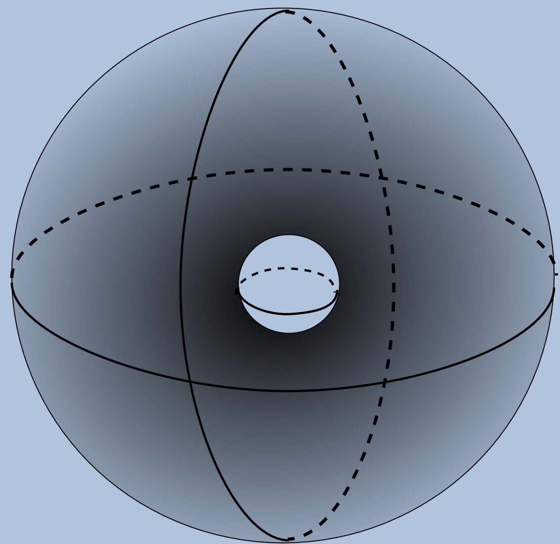
$$\begin{aligned} &\int_L \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}(-\sin\varphi)d\varphi + \frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\cos\varphi d\varphi \\ &= 2\pi \neq 0, \end{aligned}$$

所以不是保守场. 此例说明了在一般条件下, 无旋场不一定是保守场.

定义 3 设 V 是空间区域, 若对于 V 中的任意一条简单闭曲线 L, 都存在以 L 为边界, 且完全包含在 V 中的可定向曲面, 则称 V 是**曲面单连通**的.



环面围成的区域



去心球体

定理 2 在曲面单连通的区域 V 上, 光滑向量场 $\vec{F}$ 是有势场的充分必要条件是它是无旋场.

证明 在以前的例子中已经证明了有势场是无旋场. 现在只要证明无旋场是有势场, 即, 保守场. 设 $\vec{F}$ 是 V 上的光滑无旋场, 即, $\mathrm{rot}\,\vec{F}=0$. 再设 L 是场中任意一个封闭曲线, 则存在 V 中有向曲面 S, 使得 L 是 S 的边界. 根据 Stokes 公式, 有

$$\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}dS=0.$$

这就说明 $\vec{F}$ 沿场中任意封闭曲线的积分为零, 因而积分与路径无关, 即, $\vec{F}$ 是保守场.

例 2 证明向量场 $\vec{F} = (x^2 - yz)\vec{i} + (y^2 - zx)\vec{j} + (z^2 - xy)\vec{k}$ 是有势场，并求出它的一个势函数.

证明 直接计算，得

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^2 - zx & z^2 - xy \end{vmatrix} = 0,$$

即，$\vec{F}$ 在整个空间上是无旋场，整个空间是曲面单连通的，所以根据上面定理知，$\vec{F}$ 是有势场. 它的一个势函数是

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,z) &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz \\ &= \int_0^x x^2 dx + \int_0^y y^2 dy + \int_0^z (z^2 - xy)dz \\ &= \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz. \end{aligned}$$

例 3 求电场强度 $\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$ 的势函数.

解 易知 $\vec{E}$ 在除原点之外的区域上是无旋场, 这样的区域是曲面单连通的, 因此, $\vec{E}$ 是有势场, 它的一个势函数是

$$\begin{aligned}
\varphi(M) &= \int_{M_0}^{M} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{M_0}^{M} \frac{q}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r} \\
&= \int_{M_0}^{M} \frac{q}{r^3}\cdot\frac{1}{2}d(\vec{r}\cdot\vec{r}) = \int_{M_0}^{M} \frac{q}{r^3}\cdot\frac{1}{2}d(r^2) \\
&= \int_{M_0}^{M} \frac{q}{r^3}\,r dr = \int_{M_0}^{M} \frac{q}{r^2}\,dr \\
&= \int_{M_0}^{M} (-\frac{q}{r})'\,dr \\
&= -(\frac{q}{r} - \frac{q}{r_0}).
\end{aligned}$$

函数 $-\frac{q}{r}$ 也是 $\vec{E}$ 的一个势函数, $V = \frac{q}{r}$ 称为 $\vec{E}$ 的电位. 因此 $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$. 这说明电场指向电位减小最快的方向.

11.7.5 无源场与向量势

定义 4 设 $\vec{F}$ 是空间区域 V 上一个 C^1 向量场. 如果存在 V 上另一个向量场 $\vec{\alpha}$ 使得 $\vec{F}=\mathrm{rot}\,\vec{\alpha}$, 则称 $\vec{\alpha}$ 是 $\vec{F}$ 的一个向量势.

显然向量势不是唯一的, 若 $\vec{\alpha}$ 是 $\vec{F}$ 的向量势, 则 $\vec{\alpha}+\vec{c}$ 也是, 这里 $\vec{c}$ 是常向量.

假设 $\vec{F}$ 是一个有向量势的场, $\vec{\alpha}=(P,Q,R)$ 是它的一个向量势, 则

$$\vec{F}=\mathrm{rot}\,\vec{\alpha}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

于是

$$\mathrm{div}\,\vec{F}=\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}\right)=0.$$

这说明有向量势的场必是无源场.

问题 无源场是否一定有向量势?

例 4 设 $\vec{r}=(x,y,z)$, $r=|\vec{r}|$. 则向量场 $\vec{E}=\frac{\vec{r}}{r^3}$ 在它的定义域上是无源场, 但它没有向量势.

证明 在前面的例子中已经验证了 $\vec{E}$ 是无源场. 现在说明它没有向量势. 若它有向量势 $\vec{\alpha}$, 则 $\vec{E}=\mathrm{rot}\,\vec{\alpha}$. 设 S 是球心在原点的单位球面, 法向朝外. S^+ 是上半单位球面, 法向超上, L^+ 是其边界, S^- 是下半单位球面, 则 L^- 是其边界. L^+ 和 L^- 是同一个圆周, 但方向相反. 根据 Stokes 公式, 有

$$\oint_{L^+}\vec{\alpha}\cdot d\vec{r}=\iint_{S^+}\mathrm{rot}\,\vec{\alpha}\cdot d\vec{S}=\iint_{S^+}\vec{E}\cdot d\vec{S},$$
$$\oint_{L^-}\vec{\alpha}\cdot d\vec{r}=\iint_{S^-}\mathrm{rot}\,\vec{\alpha}\cdot d\vec{S}=\iint_{S^-}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

两式相加得到

$$0=\iint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}.$$

但简单计算可知上式右端的积分为 4π. 这个矛盾说明 $\vec{E}$ 没有向量势.

定义 5 $\mathbb{R}^3$ 中区域 V 称为空间单连通的, 若 V 中任意封闭曲面的内部仍在 V 中.

定理 3 设 V 是空间单连通区域. 则 V 上向量场 $\vec{F}$ 是无源场当且仅当它有向量势.

证明 我们只在 V 是凸区域的情形证明. 设 $\vec{F} = (P, Q, R)$ 是 V 上无源场, 则 $\operatorname{div} \vec{F} = 0$. 以下来求 $\vec{F}$ 的一个向量势. 即, 要求向量值函数 $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 使得

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} = P(x, y, z), \tag{11.3}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} = Q(x, y, z), \tag{11.4}$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = R(x, y, z), \tag{11.5}$$

为了求出一组解 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 不妨令 $\alpha_3 = 0$, 从第一个方程 (11.3) 中解出

$$\alpha_2 = -\int_{z_0}^{z} P(x, y, z) dz + f(x, y),$$

其中 $f(x,y)$ 是对 z 积分时的积分常数. 从第二个方程 (11.4) 中取

$$\alpha_1 = \int_{z_0}^{z} Q(x,y,z)dz.$$

把 α_1, α_2 的表达式代入第三个方程 (11.5) , 并利用 $\operatorname{div}\vec{F}=0$ 得

$$\begin{aligned} R(x,y,z) &= -\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dz+\frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \int_{z_0}^{z}\frac{\partial R}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial x} = R(x,y,z)-R(x,y,z_0)+\frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

由此推得

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x}R(x,y,z_0)dx$$

所以 $\vec{F}$ 的一个向量势是

$$\vec{\alpha}=\left(\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)dz\right)\vec{i}+\left(-\int_{z_0}^{z}P(x,y,z)dz+\int_{x_0}^{x}R(x,y,z_0)dx\right)\vec{j}.$$

例 5 证明向量场 $\vec{F}=(xy+1,z,-yz)$ 是无源场, 并求出 $\vec{F}$ 的一个向量势.

解 因为 $\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial(xy+1)}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial(-yz)}{\partial z}=y+0-y=0$, 所以 $\vec{F}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中是无源场, 因而有向量势. 根据前定理中得到的公式, 令

$$\alpha_1=\int_0^z zdz=\frac{1}{2}z^2,$$

$$\alpha_2=-\int_0^z(xy+1)dz+\int_0^z 0dx=-(xy+1)z,$$

$$\alpha_3=0,$$

则 $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\frac{1}{2}z^2,-xyz-z,0)$ 是 $\vec{F}$ 的一个向量势.