## 9.4.2 参数曲面

设 $\vec{r}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 是一个从二维区域到三维区域的一个映射. 也就是说把 $D$ 中的点 $(u,v)$ 映射到空间中的一个点 $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. 这个点对应的向量记为

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k},$$

即当 $(u,v)$ 在 $D$ 中变化时, 对应向径 $\vec{r}(u,v)$ 的终点在 $\mathbb{R}^3$ 中的轨迹, 形成空间中一张曲面. 称 $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ 为曲面的向径式参数方程. 它等价于下面的方程组:

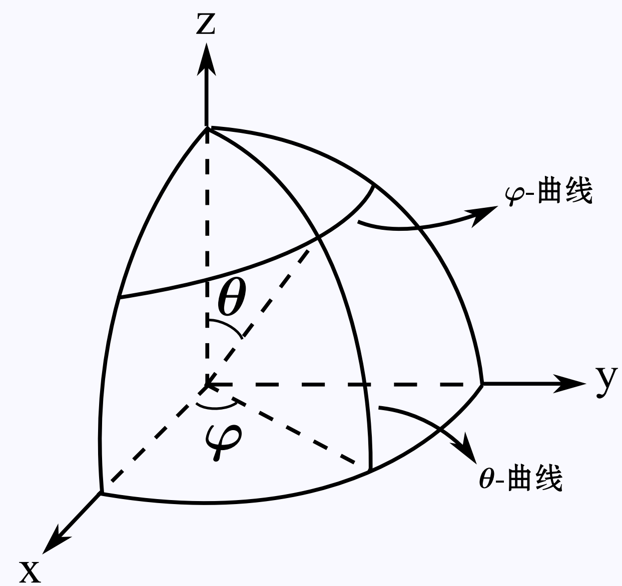
$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v). \end{cases} \qquad (u,v) \in D$$

称此方程组为曲面的坐标形式参数方程. 用向径式参数方程或坐标形式参数方程来表示的曲面常被简称为参数曲面.

如果固定一个 $v$ 值, 让 $u$ 在其允许值内变化时, 则 $\vec{r}(u,v)$ 的轨迹就是曲面上的一条曲线, 称为 $u$-曲线. 同样可以定义 $v$-曲线. 整张曲面就是由这些 $u$-曲线和 $v$-曲线纵横编织而成的.

例如球面

$$x(\theta,\varphi) = R\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y(\theta,\varphi) = R\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z(\theta,\varphi) = R\cos\theta$$




其中 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. 当 $\theta$ 固定时所得到的 $\varphi$ 曲线就是纬线, 而 $\varphi$ 固定时所得的 $\theta$ 曲线就是经线.

设 $\vec{r}(u,v)$ 有连续的偏微商

$$\vec{r}'_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k},$$
$$\vec{r}'_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}.$$

如果写成微分的形式, 则

$$d\vec{r} = dx(u,v)\vec{i} + dy(u,v)\vec{j} + dz(u,v)\vec{k}.$$

因为

$$dx(u,v) = x'_u(u,v)du + x'_v(u,v)dv,$$
$$dy(u,v) = y'_u(u,v)du + y'_v(u,v)dv,$$
$$dz(u,v) = z'_u(u,v)du + z'_v(u,v)dv,$$

所以

$$d\vec{r} = \vec{r}'_u du + \vec{r}'_v dv.$$

当 $\vec{r}'_u(u,v)$ 和 $\vec{r}'_v(u,v)$ 在 $D$ 内处处满足

$$\vec{n}(u,v) = \vec{r}'_u(u,v) \times \vec{r}'_v(u,v) \neq \vec{0},$$

则称曲面 $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ $((u,v) \in D)$ 为一张光滑曲面.

对于光滑曲面, 取 $M_0(u_0,v_0)$ 是曲面上一点. 首先注意到 $\vec{r}'_u(u_0,v_0)$ 和 $\vec{r}'_v(u_0,v_0)$ 分别是过 $M_0$ 的 $u$-曲线和 $v$-曲线的切线方向.

其次作一条完全躺在曲面上并过 $M_0$ 的光滑曲线 $L$, 设其方程是

$$x(t) = x(u(t),v(t)),\ y(t) = y(u(t),v(t)),\ z(t) = z(u(t),v(t)),$$

即,

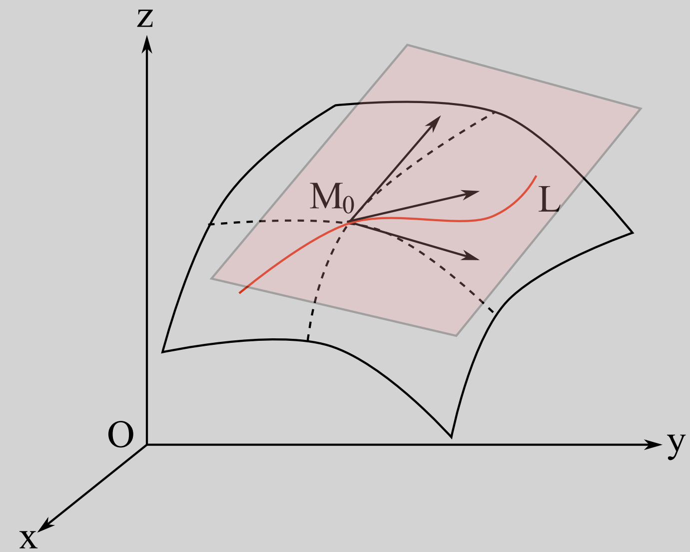
$$\vec{r}(t) = x(u(t),v(t))\vec{i} + y(u(t),v(t))\vec{j} + z(u(t),v(t))\vec{k},$$

其中 $u(t_0) = u_0,\ v(t_0) = v_0$. (这条曲线可以看成是 $uv$ 平面区域 $D$ 中曲线: $u = u(t), v = v(t)$ 经变换: $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$ 映成的空间曲线).

将 $\vec{r}(t)$ 在 $t_0$ 对 $t$ 求导, 得曲线 $L$ 在 $M_0$ 的切向量如下

$$\vec{r}'_u(u_0, v_0)u'(t_0) + \vec{r}'_v(u_0, v_0)v'(t_0),$$

它是 $\vec{r}'_u(u_0, v_0)$ 与 $\vec{r}'_v(u_0, v_0)$ 的线性组合, 因此在 $\vec{r}'_u(u_0, v_0)$ 与 $\vec{r}'_v(u_0, v_0)$ 张成的平面上. 我们称这张平面为曲面在 $M_0$ 处的**切平面**, 它的法向量是 $\vec{n}_0 = \vec{r}'_u(u_0, v_0) \times \vec{r}'_v(u_0, v_0)$.




因为 $M_0$ 的任意性, 所以光滑曲面上有一个连续变化的**法向量场**

$$\vec{n} = \vec{r}'_u(u, v) \times \vec{r}'_v(u, v) = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k}.$$

其每一个分量都是一个二阶的 Jacobi 行列式.

法向量 $\vec{n}$ 的模实际上是曲面在一点处的切平面上以 $\vec{r}'_u$ 和 $\vec{r}'_v$ 为边的平行四边形的面积. 它可看成是在一点附近曲面面积的近似, 详细内容将在“曲面积分”的章节里讨论.

因为

$$|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|^2 = |\vec{r}'_u|^2 |\vec{r}'_v|^2 - (\vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v)^2,$$

记

$$E = (\vec{r}'_u)^2 = {x'_u}^2 + {y'_u}^2 + {z'_u}^2,$$
$$G = (\vec{r}'_v)^2 = {x'_v}^2 + {y'_v}^2 + {z'_v}^2,$$
$$F = \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v,$$

则有

$$|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| = \sqrt{EG - F^2}.$$

通常称

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}$$

为曲面的单位法向量.

有了法向量, 过曲面上一点 $M(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 的切平面方程自然就会表示出来. 设 $(X,Y,Z)$ 表示切平面上动点的坐标, 这样, 曲面在 $M$ 处的切平面方程是

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(X-x(u,v))+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(Y-y(u,v))+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(Z-z(u,v))=0,$$

特别, 对于由二元函数 $z=f(x,y)\,((x,y)\in D)$ 所表示的曲面, 它可以看成是参数方程的一个特例:

$$\vec{r}=\vec{r}(x,y)=(x,y,f(x,y)),\quad (x,y)\in D.$$

这里, $x,y$ 视为参变量. 若 $f_x'(x,y)$ 和 $f_y'(x,y)$ 都在 $D$ 连续, 则

$$\vec{r}_x'=(1,0,f_x'),\qquad \vec{r}_y'=(0,1,f_y'),$$
$$\vec{n}=\vec{r}_x'\times\vec{r}_y'=(-f_x',-f_y',1),$$

显然 $\vec{n}\neq\vec{0}$, 因此它是一张光滑曲面. 此外, 对于 $D$ 内任意两个不同点 $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$, 恒有 $(x_1,y_1,f(x_1,y_1))\neq(x_2,y_2,f(x_2,y_2))$, 即显式曲面总是不自交的.

### 9.4.3 隐式曲线和隐式曲面

给定一个三元函数 $F(x,y,z)$, 则一般来说方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了空间一张曲面, 称为隐函数表示的曲面 (或一般曲面), 方程 $F(x,y,z)=0$ 称为曲面的隐表示.

如果在曲面上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ (即 $(x_0,y_0,z_0)$ 满足方程 $F(x_0,y_0,z_0)=0$) 附近 $F(x,y,z)$ 有一阶连续的偏微商, 而且

$$(F'_x(x_0,y_0,z_0),\ F'_y(x_0,y_0,z_0),\ F'_z(x_0,y_0,z_0)) \neq 0,$$

（即至少有一个不为零）那么, 根据隐函数存在定理, 在 $M_0$ 附近确定了一个连续可微的二元隐函数, 因而在 $M_0$ 附近, 曲面可以有显式表示.

设 $\Gamma$ 是曲面上过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的一条光滑曲线, 其参数方程为

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k},\quad t\in[\alpha,\beta]$$

其中 $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$. 由于 $\Gamma$ 在曲面上, 故必有

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad (t \in [\alpha, \beta]),$$

等式两端对 $t$ 求导, 并取 $t = t_0$, 就得到

$$F'_x(M_0)x'(t_0) + F'_y(M_0)y'(t_0) + F'_z(t_0)z'(t_0) = 0.$$

这可以写成 $\vec{n}(M_0) \cdot \vec{r}\,'(t_0) = 0$, 这里向量

$$\vec{n}(M_0) = \big(F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)\big).$$

因此向量 $\vec{n}(M_0)$ 与曲面上任一条过 $M_0$ 的曲线的切向量 $\vec{r}\,'(t_0)$ 在 $M_0$ 垂直, 所以向量 $\vec{n}(M_0)$ 就是曲面在 $M_0$ 的法向量. 以 $\vec{n}(M_0)$ 为法向量的并过 $M_0$ 的平面, 就是曲面在 $M_0$ 的切平面. 切平面的方程是

$$F'_x(M_0)(X - x_0) + F'_y(M_0)(Y - y_0) + F'_z(t_0)(Z - z_0) = 0.$$

这里 $(X, Y, Z)$ 是平面上的动点.

## 隐函数表示的曲线

空间中一般曲线由下列联立方程组表示

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad (x,y,z)\in D\subset \mathbb{R}^3$$

它也可看成是两个分别由方程 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 所表示的两张曲面的交线.

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲线上的一点, 且 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 附近有连续的偏微商. 因为曲线在两个曲面 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 上, 所以曲线在 $M_0$ 的切向量垂直于两平面的法向量

$$\vec{n}_1(M_0)=F'_x(M_0)\vec{i}+F'_y(M_0)\vec{j}+F'_z(M_0)\vec{k}$$

$$\vec{n}_2(M_0)=G'_x(M_0)\vec{i}+G'_y(M_0)\vec{j}+G'_z(M_0)\vec{k}$$

所以曲线的切向量可以表示成

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\vec{i} + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\vec{j} + \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\vec{k}$$

只要这个向量积不为零.

**例 1** 求曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2ax = 0 \end{cases}$$

在 $M_0(a, a, \sqrt{2}a)$ 处的切线方程和法平面方程.

**解** 方程组表示的曲线是球面与柱面的交线. 算出球面在 $M_0$ 处的法向量为

$$\vec{n}_1 = F'_x(M_0)\vec{i} + F'_y(M_0)\vec{j} + F'_z(M_0)\vec{k} = 2a\vec{i} + 2a\vec{j} + 2\sqrt{2}a\vec{k}$$

而柱面在 $M_0$ 处的法向量为

$$\vec{n}_2 = 2a\vec{j}$$

由此, 曲线在 $M_0$ 处的一个切向量为

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = -4\sqrt{2}a^2\vec{i} + 4a^2\vec{k} = 4a^2(-\sqrt{2}\vec{i} + \vec{k}),$$

从而, 所求的切线方程是

$$\frac{x-a}{-\sqrt{2}} = \frac{y-a}{0} = \frac{z-\sqrt{2}a}{1},$$

所求的法平面方程是

$$-\sqrt{2}(x-a) + 0(y-a) + (z-\sqrt{2}a) = 0,$$

化简得

$$\sqrt{2}x - z = 0.$$