§2.2 有界闭区间上连续函数的性质

2.2.1 零点定理与介值定理

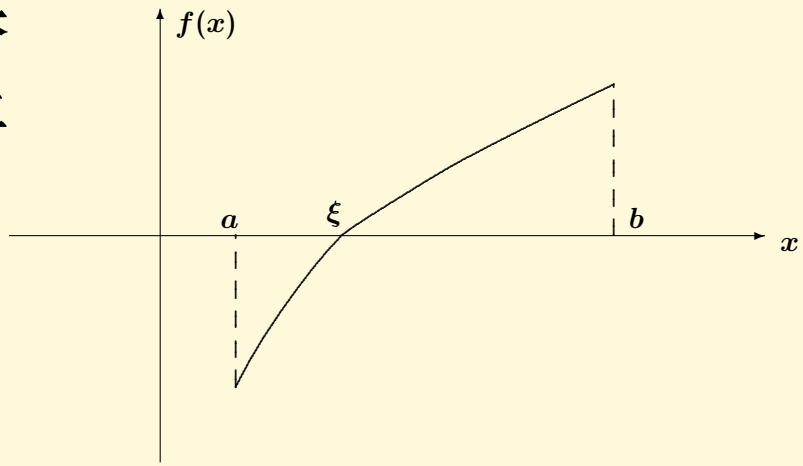
定理 1 (零点定理) 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且函数在两个端点的值 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号, 即 $f(a)f(b) < 0$, 则必有一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = 0$.

§2.2 有界闭区间上连续函数的性质

2.2.1 零点定理与介值定理

定理 1 (零点定理) 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且函数在两个端点的值 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号, 即 $f(a)f(b) < 0$, 则必有一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = 0$.

证明 不妨设 $f(a) < 0 < f(b)$. 根据局部保号性, 存在 $\delta > 0$, 使得 f 在区间 $[a, a+\delta]$ 上为负, 而在 $[b-\delta, b]$ 为正, 因此, 集合



$$E = \{x \in [a,b] \mid f \text{ 在 } [a,x] \text{ 上为负}\}$$

是非空有界集. 设 ξ 是 E 的上确界, 则根据函数的连续性有

$$f(\xi) \leqslant 0, \quad a+\delta \leqslant \xi \leqslant b-\delta.$$

假设 $f(\xi) < 0$, 则再由保号性存在 $\delta_1 \in (0, \delta)$, 使得 f 在 $(\xi, \xi + \delta_1)$ 上为负, 从而 f 在 $[a, \xi + \delta_1)$ 上为负, 即, $\xi + \delta_1 \in E$. 但这与 ξ 为 E 的上确界矛盾. 假设不成立, 所以 $f(\xi) = 0$. 证毕.

假设 $f(\xi) < 0$, 则再由保号性存在 $\delta_1 \in (0, \delta)$, 使得 f 在 $(\xi, \xi + \delta_1)$ 上为负, 从而 f 在 $[a, \xi + \delta_1)$ 上为负, 即, $\xi + \delta_1 \in E$. 但这与 ξ 为 E 的上确界矛盾. 假设不成立, 所以 $f(\xi) = 0$. 证毕.

注: 也可以用二分区间法来证明.

假设 $f(\xi) < 0$, 则再由保号性存在 $\delta_1 \in (0, \delta)$, 使得 f 在 $(\xi, \xi + \delta_1)$ 上为负, 从而 f 在 $[a, \xi + \delta_1)$ 上为负, 即, $\xi + \delta_1 \in E$. 但这与 ξ 为 E 的上确界矛盾. 假设不成立, 所以 $f(\xi) = 0$. 证毕.

注: 也可以用二分区间法来证明.

当 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ 时, 证明结束. 若 $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, 则令 $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$. 若 $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, 则令 $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$. 不管哪种情况都有 $f(a_1) < 0 < f(b_1)$, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.

假设 $f(\xi) < 0$, 则再由保号性存在 $\delta_1 \in (0, \delta)$, 使得 f 在 $(\xi, \xi + \delta_1)$ 上为负, 从而 f 在 $[a, \xi + \delta_1)$ 上为负, 即, $\xi + \delta_1 \in E$. 但这与 ξ 为 E 的上确界矛盾. 假设不成立, 所以 $f(\xi) = 0$. 证毕.

注: 也可以用二分区间法来证明.

当 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ 时, 证明结束. 若 $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, 则令 $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$. 若 $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, 则令 $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$. 不管哪种情况都有 $f(a_1) < 0 < f(b_1)$, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.

再考察区间 $[a_1, b_1]$, 若 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$, 则证明结束. 若 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) \neq 0$, 则将 $[a_1, b_1]$ 二等分, 可得 $[a_2, b_2]$.

假设 $f(\xi) < 0$, 则再由保号性存在 $\delta_1 \in (0, \delta)$, 使得 f 在 $(\xi, \xi + \delta_1)$ 上为负, 从而 f 在 $[a, \xi + \delta_1)$ 上为负, 即, $\xi + \delta_1 \in E$. 但这与 ξ 为 E 的上确界矛盾. 假设不成立, 所以 $f(\xi) = 0$. 证毕.

注: 也可以用二分区间法来证明.

当 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ 时, 证明结束. 若 $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, 则令 $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$. 若 $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, 则令 $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$. 不管哪种情况都有 $f(a_1) < 0 < f(b_1)$, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.

再考察区间 $[a_1, b_1]$, 若 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$, 则证明结束. 若 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) \neq 0$, 则将 $[a_1, b_1]$ 二等分, 可得 $[a_2, b_2]$.

继续同样的过程, 得区间序列 $[a_n, b_n]$. 始终有 $f(a_n) < 0 < f(b_n)$, 以及 $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. 由此可知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 有相同的极限 ξ, 满足 $f(\xi) = 0$.

定理 2 (介值定理) 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 能取到介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意值.

定理 2 (**介值定理**) 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 能取到介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意值.

证明 不妨设 $f(a) < f(b)$, 且 r 是介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一个数: $f(a) < r < f(b)$, 考虑辅助函数 $g(x) = f(x) - r$, 则 $g(x)$ 也是 $[a,b]$ 上连续函数, 而且

$$g(a) = f(a) - r < 0, \quad g(b) = f(b) - r > 0$$

故满足零点定理的条件, 因而有 $\xi \in (a,b)$ 使 $g(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = r$. 证毕.

定理 2 (介值定理) 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 能取到介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意值.

证明 不妨设 $f(a) < f(b)$, 且 r 是介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一个数: $f(a) < r < f(b)$, 考虑辅助函数 $g(x) = f(x) - r$, 则 $g(x)$ 也是 $[a,b]$ 上连续函数, 而且

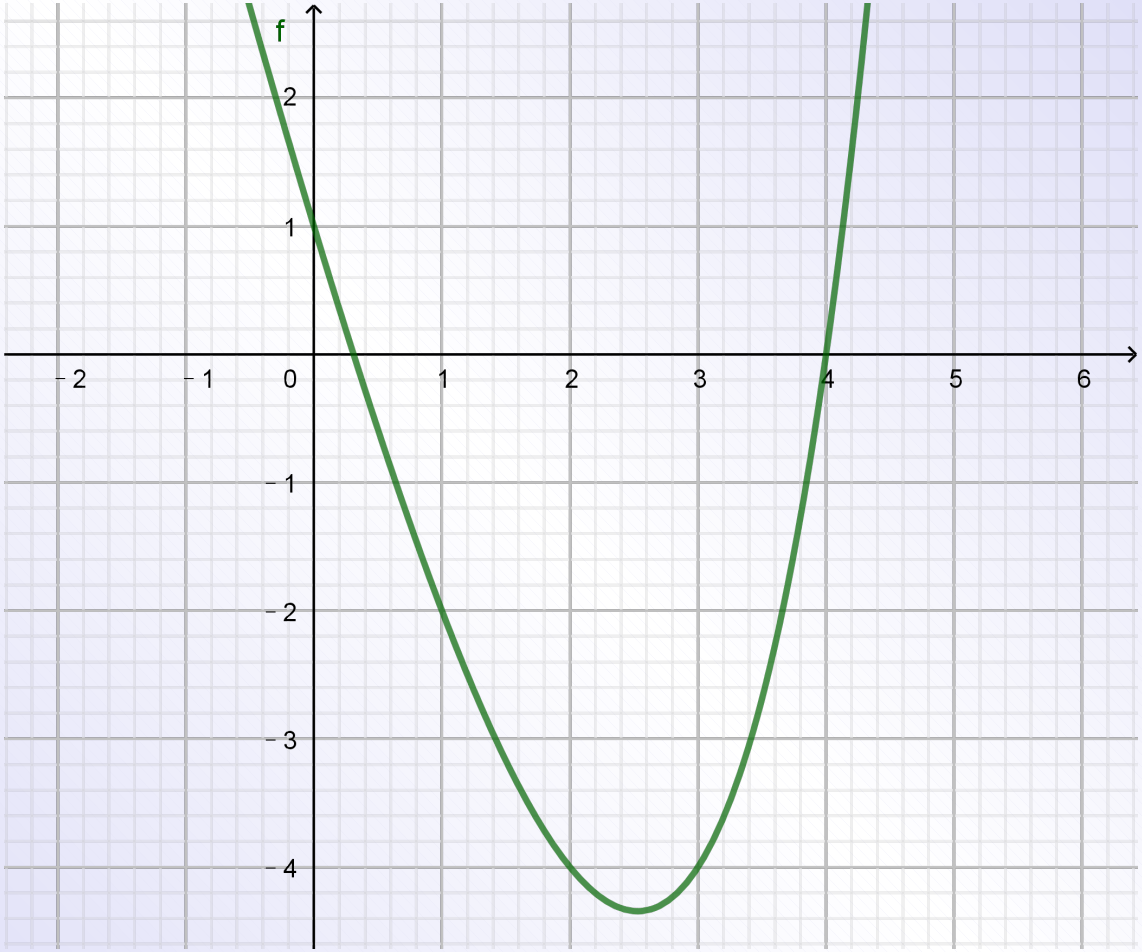
$$g(a) = f(a) - r < 0, \quad g(b) = f(b) - r > 0$$

故满足零点定理的条件, 因而有 $\xi \in (a,b)$ 使 $g(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = r$. 证毕.

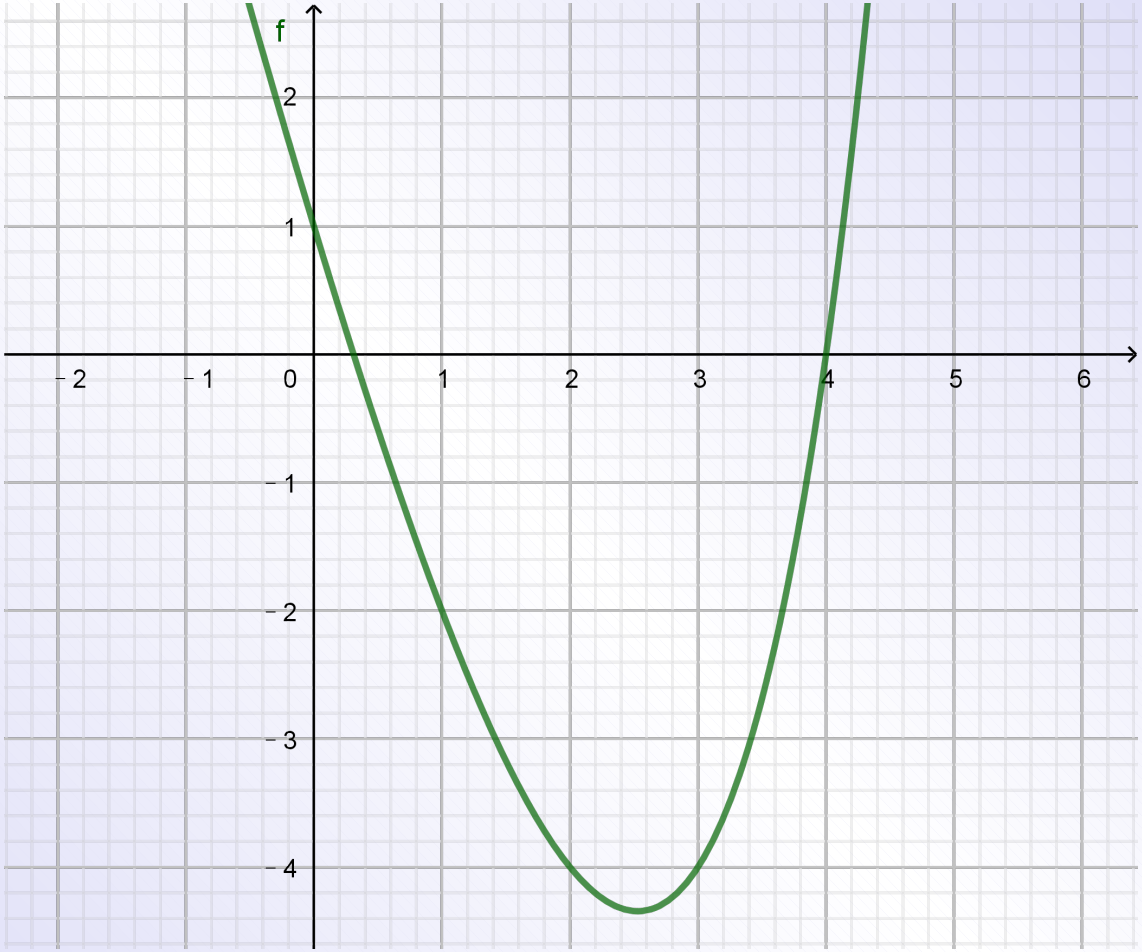
注: 根据零点定理, 在一个区间上的连续函数只要在区间内有两点的值是异号的, 就一定有零点. 当然, 在介值定理中, 函数一定能取到介于任意两点之间的值. 介值定理也可以看成是通过将零值定理沿 y 轴向上平移到 $y = r$ 处的情况.

例 1 证明函数 $f(x) = 2^x - 4x$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内有零点.

例 1 证明函数 $f(x) = 2^x - 4x$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内有零点.



例 1 证明函数 $f(x) = 2^x - 4x$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内有零点.



证明 显然, $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上连续. 且 $f(0) = 1 > 0$, $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{2} - 2 < 0$, 所以 $f(x) = 2^x - 4x$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内有零点.

例 2 证明任何奇次多项式至少有一个实根.

例 2 证明任何奇次多项式至少有一个实根.

证明 设 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一个奇次多项式, 即 n 是奇数, $a_n \neq 0$. 不妨设 $a_n > 0$. 则 $P(x) \sim a_n x^n$, $(x \to \infty)$. 因为 n 是奇数, 所以当 $x \to \pm\infty$ 时, $P(x) \to \pm\infty$. 故存在两个数 $A < B$, 使得 $f(A) < 0 < f(B)$, 由零点定理知 $P(x)$ 一定有零点.

对于偶次多项式结果就不是这样了, 例如 $P(x) = x^2 + 1$, 就没有实根.

例 2 证明任何奇次多项式至少有一个实根.

证明 设 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一个奇次多项式, 即 n 是奇数, $a_n \neq 0$. 不妨设 $a_n > 0$. 则 $P(x) \sim a_n x^n$, $(x \to \infty)$. 因为 n 是奇数, 所以当 $x \to \pm\infty$ 时, $P(x) \to \pm\infty$. 故存在两个数 $A < B$, 使得 $f(A) < 0 < f(B)$, 由零点定理知 $P(x)$ 一定有零点.

对于偶次多项式结果就不是这样了, 例如 $P(x) = x^2 + 1$, 就没有实根.

例 3 设函数 $f(x) \in C[a,b]$ 且 $a \leqslant f(x) \leqslant b$. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有不动点, 即存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = \xi$.

例 2 证明任何奇次多项式至少有一个实根.

证明 设 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一个奇次多项式, 即 n 是奇数, $a_n \neq 0$. 不妨设 $a_n > 0$. 则 $P(x) \sim a_n x^n$, ($x \to \infty$). 因为 n 是奇数, 所以当 $x \to \pm\infty$ 时, $P(x) \to \pm\infty$. 故存在两个数 $A < B$, 使得 $f(A) < 0 < f(B)$, 由零点定理知 $P(x)$ 一定有零点.

对于偶次多项式结果就不是这样了, 例如 $P(x) = x^2 + 1$, 就没有实根.

例 3 设函数 $f(x) \in C[a,b]$ 且 $a \leqslant f(x) \leqslant b$. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有不动点, 即存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = \xi$.

证明 考虑函数 $g(x) = f(x) - x$. 则 $f(b) \leqslant 0 \leqslant f(a)$. 根据零点定理可得证.

定理 3 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则它在整个区间上有界. 即存在一个常数 M, 使得当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$.

定理 3 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则它在整个区间上有界. 即存在一个常数 M, 使得当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$.

证明 (反证) 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 则对于任意自然数 n, 存在 $x_n \in [a,b]$ 使得

$$|f(x_n)| \geqslant n.$$

定理 3 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则它在整个区间上有界. 即存在一个常数 M, 使得当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$.

证明 (反证) 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 则对于任意自然数 n, 存在 $x_n \in [a,b]$ 使得

$$|f(x_n)| \geqslant n.$$

因为 $\{x_n\}$ 是有界数列, 所以根据 Bolzano-Weierestrass 定理知存在收敛子列. 设

$$x_{n_k} \to x \ (k \to \infty)$$

是一个收敛子列. 显然, $x \in [a,b]$. 由 f 的连续性, 得 $f(x_{n_k}) \to f(x)$. 但是根据 x_n 的选择, 有

$$|f(x_{n_k})| \geqslant n_k \to +\infty, \ (k \to \infty).$$

这是矛盾的. 因此, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 证毕.

定理 4 (最值定理) 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上能取到最大值和最小值. 即存在 $x_* \in [a,b]$ 和 $x^* \in [a,b]$, 使得对所有的 $x \in [a,b]$, 有

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*)$$

定理 4 (最值定理) 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上能取到最大值和最小值. 即存在 $x_* \in [a,b]$ 和 $x^* \in [a,b]$, 使得对所有的 $x \in [a,b]$, 有

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*)$$

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以在 $[a,b]$ 上有界. 设 $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$.

定理 4 (最值定理) 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上能取到最大值和最小值. 即存在 $x_* \in [a,b]$ 和 $x^* \in [a,b]$, 使得对所有的 $x \in [a,b]$, 有

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*)$$

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以在 $[a,b]$ 上有界. 设 $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. 对任意自然数 n 存在 $x_n \in [a,b]$ 使得

定理 4 (最值定理) 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上能取到最大值和最小值. 即存在 $x_* \in [a,b]$ 和 $x^* \in [a,b]$, 使得对所有的 $x \in [a,b]$, 有

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*)$$

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以在 $[a,b]$ 上有界. 设 $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. 对任意自然数 n 存在 $x_n \in [a,b]$ 使得

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M.$$

定理 4 (最值定理) 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上能取到最大值和最小值. 即存在 $x_* \in [a,b]$ 和 $x^* \in [a,b]$, 使得对所有的 $x \in [a,b]$, 有

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*)$$

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以在 $[a,b]$ 上有界. 设 $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. 对任意自然数 n 存在 $x_n \in [a,b]$ 使得

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M.$$

这说明 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 M.

定理 4 (最值定理) 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上能取到最大值和最小值. 即存在 $x_* \in [a,b]$ 和 $x^* \in [a,b]$, 使得对所有的 $x \in [a,b]$, 有

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*)$$

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以在 $[a,b]$ 上有界. 设 $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. 对任意自然数 n 存在 $x_n \in [a,b]$ 使得

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M.$$

这说明 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 M. 根据 Bolzano-Weierestrass 定理知存在 $\{x_n\}$ 的收敛

定理 4 (最值定理) 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上能取到最大值和最小值. 即存在 $x_* \in [a,b]$ 和 $x^* \in [a,b]$, 使得对所有的 $x \in [a,b]$, 有

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*)$$

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以在 $[a,b]$ 上有界. 设 $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. 对任意自然数 n 存在 $x_n \in [a,b]$ 使得

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M.$$

这说明 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 M. 根据 Bolzano-Weierestrass 定理知存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $x_{n_k} \to x^* \in [a,b]$.

定理 4 (最值定理) 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上能取到最大值和最小值. 即存在 $x_* \in [a,b]$ 和 $x^* \in [a,b]$, 使得对所有的 $x \in [a,b]$, 有

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*)$$

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以在 $[a,b]$ 上有界. 设 $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. 对任意自然数 n 存在 $x_n \in [a,b]$ 使得

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M.$$

这说明 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 M. 根据 Bolzano-Weierestrass 定理知存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $x_{n_k} \to x^* \in [a,b]$. 于是

定理 4 (最值定理) 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上能取到最大值和最小值. 即存在 $x_* \in [a,b]$ 和 $x^* \in [a,b]$, 使得对所有的 $x \in [a,b]$, 有

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*)$$

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以在 $[a,b]$ 上有界. 设 $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. 对任意自然数 n 存在 $x_n \in [a,b]$ 使得

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M.$$

这说明 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 M. 根据 Bolzano-Weierestrass 定理知存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $x_{n_k} \to x^* \in [a,b]$. 于是

$$M = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*).$$

定理 4 (最值定理) 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上能取到最大值和最小值. 即存在 $x_* \in [a,b]$ 和 $x^* \in [a,b]$, 使得对所有的 $x \in [a,b]$, 有

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*)$$

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以在 $[a,b]$ 上有界. 设 $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. 对任意自然数 n 存在 $x_n \in [a,b]$ 使得

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M.$$

这说明 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 M. 根据 Bolzano-Weierestrass 定理知存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $x_{n_k} \to x^* \in [a,b]$. 于是

$$M = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*).$$

这就证明了 f 在 $[a,b]$ 上取到上确界 M. 同理可证 f 在 $[a,b]$ 上取到下确界.

定理 4 (最值定理) 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上能取到最大值和最小值. 即存在 $x_* \in [a,b]$ 和 $x^* \in [a,b]$, 使得对所有的 $x \in [a,b]$, 有

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*)$$

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以在 $[a,b]$ 上有界. 设 $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. 对任意自然数 n 存在 $x_n \in [a,b]$ 使得

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M.$$

这说明 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 M. 根据 Bolzano-Weierestrass 定理知存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $x_{n_k} \to x^* \in [a,b]$. 于是

$$M = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*).$$

这就证明了 f 在 $[a,b]$ 上取到上确界 M. 同理可证 f 在 $[a,b]$ 上取到下确界.

这个定理说明连续函数将闭区间映为闭区间.

2.2.2 一致连续性

函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续时, 对于 I 中每一点 x_0, f 在 x_0 连续, 因此, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得只要 $|x - x_0| < \delta$, $x \in I$, 就有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

2.2.2 一致连续性

函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续时, 对于 I 中每一点 x_0, f 在 x_0 连续, 因此, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得只要 $|x - x_0| < \delta$, $x \in I$, 就有

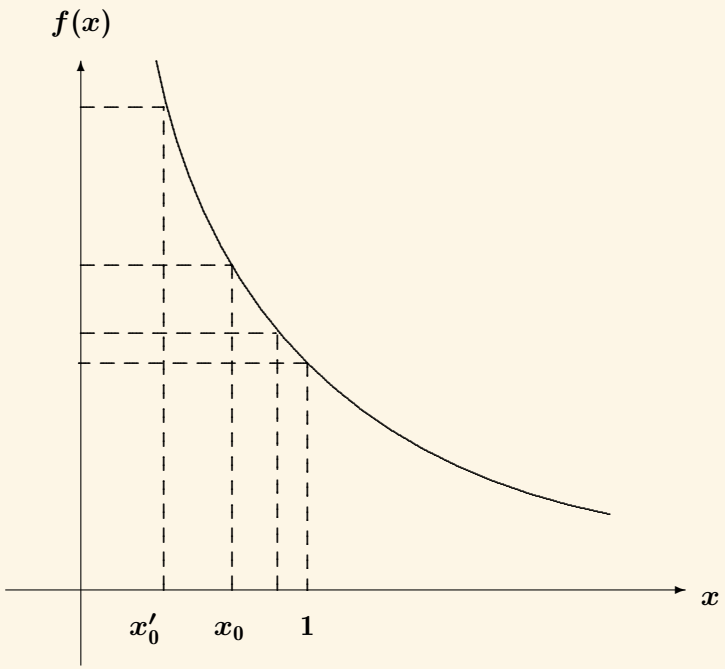
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

一般来说其中的 δ 不仅依赖于 ε, 也依赖于 x_0.

观察一个例子

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1)$$

显然它是区间 $(0, 1)$ 上的连续函数, 即在每一点 $x \in (0, 1)$ 都连续.



对于 $x_0 = \frac{1}{n}$, 要使

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{1}{x} - n\right| < \varepsilon$$

必须

$$-\frac{\varepsilon}{n(n+\varepsilon)} < x - \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{n(n-\varepsilon)}$$

因此, 对于 $x_0 = \frac{1}{n}$, 取

$$\delta = \frac{\varepsilon}{n(n+\varepsilon)} \sim \frac{\varepsilon}{n^2}$$

则当 $|x - x_0| < \delta$, 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

而对于同一个正数 ε, 在点 $x_0' = 1 - \frac{1}{n}$ 处, 要使

$$|f(x) - f(x_0')| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0'}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{n}{n-1}\right| < \varepsilon$$

必须

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\varepsilon(n-1)^2}{n(n+\varepsilon(n-1))} < x - x_0' \\
&= x - \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{\varepsilon(n-1)^2}{n(n-\varepsilon(n-1))}.
\end{aligned}
$$

因此, 对于 $x_0' = 1 - \frac{1}{n}$, 取

$$
\delta' = \frac{\varepsilon(n-1)^2}{n(n+\varepsilon(n-1))} \sim \varepsilon
$$

则当 $|x - x_0| < \delta'$, 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

显然, 对于同一个正数 ε, 当 x_0 越靠近 0, 对 δ 的要求越严, 而当 x_0 越靠近 1, δ 的选择越宽. 所以对于不同的连续点来说, 对应的 δ 是不一致的.

因此, 对于任何一个给定的正数 ε, 如果对于所有的点 x_0, 存在统一的正数 δ, 使得 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 则说这样的连续性是 "一致" 的.

定义 1 设 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 如果存在 $\delta > 0$, 使得任取一点 $x_0 \in I$, 只要 $|x - x_0| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 则称函数 f 在 I 上是一致连续的.

一个等价的说法是: 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $x_1, x_2 \in I$ 及 $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

定义 1 设 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 如果存在 $\delta > 0$, 使得任取一点 $x_0 \in I$, 只要 $|x - x_0| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 则称函数 f 在 I 上是一致连续的.

一个等价的说法是: 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $x_1, x_2 \in I$ 及 $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

$f(x)$ 在 I 上不一致连续:

存在 $\varepsilon_0 > 0$, 及数列 $x_n, y_n \in I$ 使得

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0, \quad |x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n}, \ n = 1, 2, \cdots$$

例 4 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 不是一致连续的.

例 4 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 不是一致连续的.

这是因为对于 $\varepsilon_0=1$, 有数列 $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n+1}$ 使得

$$|f(y_n)-f(x_n)|=1,\quad |x_n-y_n|=\frac{1}{n(n+1)}\leqslant\frac{1}{n}.$$

例 4 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 不是一致连续的.

这是因为对于 $\varepsilon_0=1$, 有数列 $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n+1}$ 使得

$$|f(y_n)-f(x_n)|=1,\quad |x_n-y_n|=\frac{1}{n(n+1)}\leqslant\frac{1}{n}.$$

例 5 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

例 4 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 不是一致连续的.

这是因为对于 $\varepsilon_0=1$, 有数列 $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n+1}$ 使得

$$|f(y_n)-f(x_n)|=1,\quad |x_n-y_n|=\frac{1}{n(n+1)}\leqslant\frac{1}{n}.$$

例 5 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

这是因为

$$|\sin x_1-\sin x_2|=2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\leqslant|x_1-x_2|.$$

所以, 任给 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时就有

$$|\sin x_1-\sin x_2|<\varepsilon.$$

问题 1 函数 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是否一致连续?

问题 1 函数 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是否一致连续?

答: 不一致连续. 取 $y_n = n + \frac{1}{n}$, $x_n = n$, 则

$$|f(y_n) - f(x_n)| = \frac{1}{n}(2n + \frac{1}{n}) > 2,$$

但 $|y_n - x_n| = \frac{1}{n}$.

问题 1 函数 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是否一致连续?

答: 不一致连续. 取 $y_n = n + \frac{1}{n}$, $x_n = n$, 则

$$|f(y_n) - f(x_n)| = \frac{1}{n}(2n + \frac{1}{n}) > 2,$$

但 $|y_n - x_n| = \frac{1}{n}$.

问题 2 函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 是否一致连续?

问题 1 函数 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是否一致连续?

答: 不一致连续. 取 $y_n = n + \frac{1}{n}$, $x_n = n$, 则

$$|f(y_n) - f(x_n)| = \frac{1}{n}(2n + \frac{1}{n}) > 2,$$

但 $|y_n - x_n| = \frac{1}{n}$.

问题 2 函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 是否一致连续?

答: 一致连续. 因为对于 $0 < x < y$ 有

$$\begin{aligned} 0 < \sqrt{y} - \sqrt{x} &= \sqrt{y}\left(1 - \sqrt{\frac{x}{y}}\right) \\ &\leqslant \sqrt{y}\left(1 - \frac{x}{y}\right) \leqslant \sqrt{y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)^{1/2} \\ &= (y - x)^{1/2}. \end{aligned}$$

所以对 $\varepsilon > 0$, 可取 $\delta = \varepsilon^2$.

定理 5 (一致连续定理) 有限闭区间 $[a, b]$ 上定义的连续函数 $f(x)$, 一定在 $[a, b]$ 上一致连续.

定理 5 (**一致连续定理**) 有限闭区间 $[a,b]$ 上定义的连续函数 $f(x)$, 一定在 $[a,b]$ 上一致连续.

证明 (反证) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不是一致连续的, 则存在固定的正数 ε_0 使得对任意自然数 n, 都存在 $x_n, y_n \in [a,b]$ 满足 $|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n}$, 而且 $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$. 由 Bolzano-Weierestrass 定理, 数列 $\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 $x \in [a,b]$. 从 $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ 知, $\{y_{n_k}\}$ 也收敛于 x. 由于 f 连续, 有

$$\lim_{k\to\infty}\big(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big) = f(x) - f(x) = 0.$$

这是与 $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0$ 矛盾的. 证毕.

例 6 若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在有限, 则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

例 6 若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在有限, 则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, 所以对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $M>\max\{0,a+1\}$ 使得当 $x,y\geqslant M$ 时有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,M+1]$ 连续, 因而一致连续, 于是存在 $\delta\in(0,1)$ 使得当 $x,y\in[a,M+1]$ 且 $|x-y|<\delta$ 时, 上面的不等式也成立. 因为当 $|x-y|<\delta$ 时, 必有 $x,y\geqslant M$ 或者 $x,y\in[a,M+1]$, 因此只要 $|x-y|<\delta$ 上面不等式就成立. 证毕.

定义 2 (Lipshitz **连续**) 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数. 若存在正常数 L 及 $\alpha \in (0,1]$, 使得对于任意 $x, y \in I$ 有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|^{\alpha},$$

则称 $f(x)$ 在 I 上满足 α 阶 Lipshitz 连续条件. 特别 $\alpha = 1$ 时, 就称为 Lipshitz 连续条件.

定义 2 (Lipshitz **连续**) 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数. 若存在正常数 L 及 $\alpha \in (0,1]$, 使得对于任意 $x, y \in I$ 有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|^{\alpha},$$

则称 $f(x)$ 在 I 上满足 α 阶 Lipshitz 连续条件. 特别 $\alpha = 1$ 时, 就称为 Lipshitz 连续条件.

例如, $\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足 Lipshitz 连续条件. x^{α} $(0 < \alpha \leqslant 1)$ 在 $[0, +\infty)$ 上满足 α 阶 Lipshitz 连续条件.

定义 2 (Lipshitz **连续**) 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数. 若存在正常数 L 及 $\alpha \in (0,1]$, 使得对于任意 $x, y \in I$ 有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|^{\alpha},$$

则称 $f(x)$ 在 I 上满足 α 阶 Lipshitz 连续条件. 特别 $\alpha = 1$ 时, 就称为 Lipshitz 连续条件.

例如, $\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足 Lipshitz 连续条件. x^{α} $(0 < \alpha \leqslant 1)$ 在 $[0, +\infty)$ 上满足 α 阶 Lipshitz 连续条件.

性质 1 若 $f(x)$ 在区间 I 上满足 α 阶 Lipshitz 连续条件, 则 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

定义 3 (**压缩映射**) 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数. 若存在常数 $\alpha \in (0,1)$, 使得对于任意 $x, y \in I$ 有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|,$$

则称 $f(x)$ 是定义在 I 上的 压缩映射, α 称为压缩因子.

例如, 当 $\alpha \in (0,1)$ 时, $\sin \alpha x$, $\ln(1 + \alpha^2 x^2)$ 都是实轴上的压缩映射.

定义 3 (**压缩映射**) 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数. 若存在常数 $\alpha \in (0,1)$, 使得对于任意 $x, y \in I$ 有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|,$$

则称 $f(x)$ 是定义在 I 上的 压缩映射, α 称为压缩因子.

例如, 当 $\alpha \in (0,1)$ 时, $\sin \alpha x$, $\ln(1 + \alpha^2 x^2)$ 都是实轴上的压缩映射.

性质 2 若 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的压缩映射, 则 $f(x)$ 有唯一的不动点, 即存在唯一的实数 c, 使得 $f(c) = c$.

定义 3 (**压缩映射**) 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数. 若存在常数 $\alpha \in (0,1)$, 使得对于任意 $x, y \in I$ 有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|,$$

则称 $f(x)$ 是定义在 I 上的 压缩映射, α 称为压缩因子.

例如, 当 $\alpha \in (0,1)$ 时, $\sin \alpha x$, $\ln(1 + \alpha^2 x^2)$ 都是实轴上的压缩映射.

性质 2 若 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的压缩映射, 则 $f(x)$ 有唯一的不动点, 即存在唯一的实数 c, 使得 $f(c) = c$.

证明 设 $k \in (0,1)$ 是压缩因子, 则对于 $x, y \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

任取实数 x_0, 由

$$x_{n+1} = f(x_n), \ n = 0, 1, 2, \cdots$$

归纳地构造数列 $\{x_n\}$. 下证此数列收敛到 $f(x)$ 的不动点.

因为

$$|x_n - x_{n-1}| = |f(x_{n-1} - f(x_{n-2})| \leqslant k|x_{n-1} - x_{n-2}|, \ n = 2, 3, \cdots$$

所以取 $d = |x_1 - x_0|$, 根据上面这个递推式可得

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant k^{n-1}d.$$

对于任意自然数 p, 有

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| &\leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leqslant k^{n+p-1}d + k^{n+p-2}d + \cdots + k^n d \\ &= k^n \frac{1-k^p}{1-k} d \leqslant \frac{d}{1-k} k^n.\end{aligned}$$

由此可知 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 数列. 设 $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 由 $x_{n+1} = f(x_n)$ 及 f 的连续性可得 $f(c) = c$. 唯一性是显然的.