2024 数理统计期中考试

兰小红

2024.11.1

前四题 15 分，后两题 20 分。

问题 1. 假设从 $\mathcal{N}(0,4)$ 中抽取了 9 个简单样本，称为 X；又从 $\mathcal{N}(0,5)$ 中抽取了 15 个简单样本，称为 Y。设 $\overline{X},\overline{Y}$ 分别为 X,Y 的样本均值，S_X^2,S_Y^2 分别为 X,Y 的样本方差，求：

(1) 使得 $\Pr\left(\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}>k\right)=90\%$ 的 k。

(2) $\Pr\left(\left|\dfrac{\overline{X}}{S_X}\right|>0.466\right)$。

问题 2. 设有如下离散分布族的概率质量函数：

$$\Pr_\delta(X=k)=\frac{1}{\delta},\ k=1,2,\ldots,\delta$$

其中 $\delta\in\mathbb{N}^+$ 是未知参数。

(1) 该分布族是指数族吗？判断并说明理由。

(2) 求 δ 的一个充分统计量。

(3) 求 δ 的一个无偏矩估计 $\hat{\delta}_{MoM}$。

问题 3. 我们有如下分布族的概率密度函数：

$$f(x\mid\theta)=\begin{cases}c(\theta)\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & |x|<\theta\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

写出 $c(\theta)$ 的表达式，并且求 θ 和 $\eta=c(\theta)$ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_{MLE},\hat{\eta}_{MLE}$。

问题 4. 简单样本 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 抽取自如下离散分布组：

$$\Pr_\theta(X=k)=\theta(1-\theta)^{k-1},k=1,2,\ldots$$

其中 $0<\theta<1$ 是未知参数，其有先验分布 $U(0,1)$。

(1) 求后验分布 $\pi(\theta\mid\boldsymbol{x})$。

(2) 求 θ 和 $\eta=\theta^2$ 的贝叶斯估计 $\hat{\theta}_B,\hat{\eta}_B$。

问题 5. 有如下指数分布族：

$$f(x \mid \lambda) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0$$

其中 $\lambda > 0$ 为未知参数。

(1) 计算 Fisher 信息量 $I(\lambda)$。

(2) $g(\lambda) = \lambda^{-1}$ 无偏估计的方差下界存在吗？若存在说明理由并算出该下界，若不存在也请说明理由。

(3) $g(\lambda)$ 的 UMVUE 是否存在？若存在请求出其，并算出其效率。

(4) 设 $\varphi(X) = I(X_1 > \tau)$，而 $h(\lambda) = \mathbb{E}_\lambda[\varphi(X)]$。求 $\varphi(X)$ 的效率。

问题 6. 我们有如下双参数的均匀分布族 $\{U(\theta_1, \theta_2) \mid \theta_1 < \theta_2\}$。

(1) 求出 θ_1 和 θ_2 的一个充分完全统计量。

(2) 求出 θ_1 和 θ_2 各自的 UMVUE。