

# 线性动态电路暂态过程的复频域分析

## ◎ 暂态过程的时域分析存在的问题

- 在高阶电路时，电路必须使用高阶微分方程的情形下，求解微分方程非常的困难

## ◎ 本章内容

- 采用拉普拉斯变换将时间函数变换为复变量，从而使常微分方程问题化为代数方程
- 利用线性直流电路的分析方法继续分析该代数方程电路

## ◎ 教学内容

- 拉普拉斯变换及其基本性质
- 电路及其元件的复频域形式
- 电路的复频域分析方法

# 本章作业

## ◎ 第11章作业

- 11.3 ~11.7
- 11.9 11.11~11.14 11.17 11.20
- 11.22 11.25~11.27
- 11.32~11.35

# 拉普拉斯变换

**Definition 1:**  $f(t) (t \geq 0) < \infty$ ,  $\int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$   
is convergent in a region

$$F(s) = L(f(t)) = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

拉普拉斯逆变换定义：

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

一些相关名词：

像函数 $F(s)$ ，原函数 $f(t)$ ，复频率 $s$

# 常用的Laplace变换对

## 单位阶跃函数

$$f(t) = \varepsilon(t)$$

$$F(s) = L\{\varepsilon(t)\} = -\frac{1}{s} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} \Big|_{0-}^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (\sigma > 0)$$

## 指数函数

$$f(t) = e^{-\alpha t}$$

$$F(s) = L\{f(t)\} = \frac{1}{\alpha - s} e^{-(\alpha + s)t} \Big|_{0-}^{\infty} = \frac{1}{\alpha + s}$$
$$\operatorname{Re}\{s\} < \operatorname{Re}\{\alpha\}$$

# Laplace变换-Examples

## 单位冲击函数

$$\begin{cases} f(t) = \delta(t) \\ F(s) = L\{\delta(t)\} = 1 \end{cases}$$

## 正弦函数

$$\begin{cases} f(t) = e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) \\ F(s) = \frac{(s + \alpha) \sin(\varphi) + \omega \cos(\varphi)}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \end{cases}$$

# Laplace变换基本性质

线性特性  $f_1(t) \xrightarrow{L} F_1(s), f_2(t) \xrightarrow{L} F_2(s),$   
 $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \xrightarrow{L} a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$

微分特性  $f(t) \xrightarrow{L} F(s) \Rightarrow \frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{L} sF(s) - f(0^-)$

积分特性  $f(t) \xrightarrow{L} F(s) \Rightarrow \int_{0^-}^t f(\xi) d\xi \xrightarrow{L} \frac{1}{s} F(s)$

延迟特性  $f(t) \xrightarrow{L} F(s) \Rightarrow f(t - t_0) \varepsilon(t - t_0) \xrightarrow{L} e^{-st_0} F(s)$

# Laplace变换性质

位移特性  $f(t) \xrightarrow{L} F(s) \Rightarrow e^{\alpha t} f(t) \xrightarrow{L} F(s - \alpha)$

初值定理  $f(t) \xrightarrow{L} F(s) \Rightarrow f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s f(s)$

中值定理  $f(t) \xrightarrow{L} F(s) \Rightarrow f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s f(s)$

卷积定理  $f_1(t) \xrightarrow{L} F_1(s), f_2(t) \xrightarrow{L} F_2(s)$   
 $\Rightarrow f_1(t) * f_2(t) \xrightarrow{L} F_1(s) F_2(s)$

# Laplace 逆变换

复频域分析方法首先将电路和电路元件映射到复频域, 得到复频域的结果还需要对复频域结果求出相应的原函数, 才能得到电路的真实信号

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, a_i, b_i \in R$$

该像函数的原函数求解分多种情况进行讨论



# 拉普拉斯逆变换( $n > M$ )

对于 $n < m$ 的情况，分为2种情况讨论进行讨论，即有重根和仅仅有单根的情形进行讨论。

Situation 1:  $F(s)$  仅仅有单根的情况

$$F(s) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - p_k} \quad \begin{array}{l} p_k \text{ 是 } F(s) \text{ 的极点, 根据假设可以知道} \\ \text{若 } k_1 \neq k_2 \text{ 则 } p_{k_1} \neq p_{k_2} \end{array}$$

$$A_k = \lim_{s \rightarrow p_k} F(s) (s - p_k) = \lim_{s \rightarrow p_k} \frac{F_1(s) (s - p_k)}{F_2(s)}$$

# 拉普拉斯逆变换 ( $n > m$ )

已知  $F(s) = \frac{2s+1}{s^3+7s^2+10s}$ ，求它的原函数  $f(t)$

$$p_1 = 0, p_2 = 2, p_3 = 5 \Rightarrow F(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+5}$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) s = 0.1$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)} \times (s+2) = 0.5$$

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow -5} \frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)} \times (s+5) = -0.6$$

$$F(s) = \frac{0.1}{s} + \frac{0.5}{s+2} - \frac{0.6}{s+5} \rightarrow f(t) = 0.1 + 0.5e^{-2t} - 0.6e^{-5t}$$

# 拉普拉斯变换的逆变换

若 $F(s)$ 是有理实多项式，存在一个复根 $p$ ，则必然存在共轭复根 $p^*$ ，两根对应的待定系数也为共轭复数。在这种情况下，逆变换具有一定的特殊性

$$F(s) = \frac{A_k}{s - p_k} + \frac{A_k^*}{s - p_k^*}, p = \alpha + j\beta, A = |A|e^{j\theta}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1} \{F(s)\} = Ae^{pt} + A^*e^{p^*t} \\ &= 2|A|e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) \end{aligned}$$

# 拉普拉斯变换逆变换

$$F(s) = \frac{s+1}{s^3+2s^2+2s} = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \frac{A_2^*}{s-p_2^*}$$

$$p_1 = 0, p_2 = -1 + j, p_2^* = -1 - j$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = 0.5$$

$$A_2 = \frac{F_1(p_2)}{F_1'(p_2)} = \left. \frac{s+1}{3s^2+4s+2} \right|_{s=p_2} = 0.25\sqrt{2}e^{-j\frac{3}{4}\pi}$$

$$f(t) = 0.5\varepsilon(t) + 0.5\sqrt{2}e^{-t}\cos(t - 135^\circ)$$

# 拉普拉斯逆变换

考虑 $F_2(s)$ 的有多重极点的情形，假定有一个 $m$ 次重根展开讨论

$$F(s) = \left( \sum_{k=1}^{n-m} \frac{A_k}{s - p_k} \right) + \sum_{l=1}^m \frac{B_l}{(s - p_n)^l}$$

$$B_{m-k} = \lim_{s \rightarrow p_n} \frac{d}{ds^k} \left[ \frac{F_1(s)}{F_2(s)} (s - p_n)^m \right]$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n-m} A_k e^{p_k t} + \sum_{k=1}^m \left[ \frac{B_{m-k+1}}{(m-k)!} t^{m-k} \right] e^{p_n t}$$

# 关于多重极点分式的逆变换

$$F(s) = \left( \sum_{k=1}^{n-m} \frac{A_k}{s - p_k} \right) + \sum_{l=1}^m \frac{B_l}{(s - p_n)^l} \quad \text{两边同乘以 } (s - p_n)^m$$

$$F(s)(s - p_n)^m = \left( \sum_{k=1}^{n-m} \frac{A_k}{s - p_k} \right) (s - p_n)^m + \sum_{l=1}^m B_l (s - p_n)^{m-l}$$

$$\lim_{s \rightarrow p_n} \frac{d^{(l')} [F(s)(s - p_n)^m]}{ds^{l'}} = \lim_{s \rightarrow p_n} \left( \sum_{l=1}^m B_l (s - p_n)^{m-l} \right)^{(l')}$$

$$\lim_{s \rightarrow p_n} \frac{d^{(l')} [F(s)(s - p_n)^m]}{ds^{l'}} = (l')! B_{m-l'}$$

# 关于多重极点的拉普拉斯逆变换

$$B_l = \lim_{s \rightarrow p_n} \frac{1}{(m-l)!} \frac{d^{(m-l)} F(s) (s - p_n)^m}{ds^{m-l}}, 1 \leq l \leq m$$

$$F_1(s) = F(s) (s - p_n)^m$$

对 $F_1(s)$ 进行 $l$  ( $0 \leq l \leq m-1$ ) 次微分, 并对 $s \rightarrow p_n$ 取极限, 结果为 $l! B_{m-l}$

对 $s^n$ 其逆变换为 $\delta^{(n)}(t)$ , 于是有 $n < m$ :

$$\sum_{k=0}^{m-n} a_k s^k \rightarrow \sum_{k=0}^{m-n} a_k \delta^{(k)}(t)$$

# 拉普拉斯逆变换

$$F(s) = \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{B_2}{(s+2)^2} + \frac{B_1}{(s+2)}$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} [F(s)s] = 1$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -1} [F(s)(s+1)] = -14$$

$$B_2 = \lim_{s \rightarrow -2} [F(s)(s+2)^2] = 22$$

$$B_1 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left( \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2} (s+2)^2 \right) = 13$$

$$f(t) = \varepsilon(t) - 14e^{-t}\varepsilon(t) + 22te^{-2t}\varepsilon(t) + 13e^{-2t}\varepsilon(t)$$



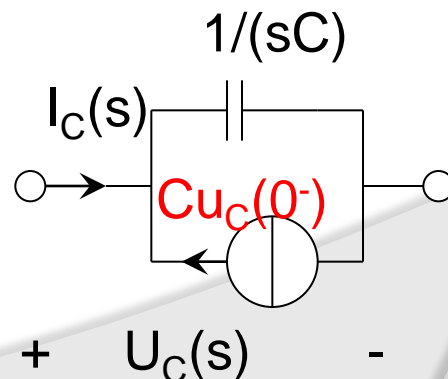
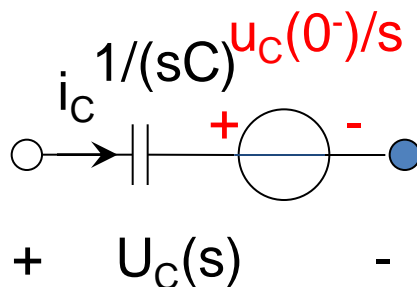
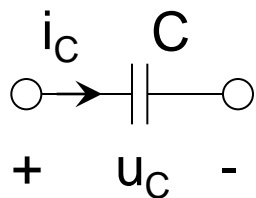
# 复频域的元件模型和电路模型

◎ 电阻元件  $u = iR \rightarrow U_R(s) = RI_R(s)$

■ 电容元件

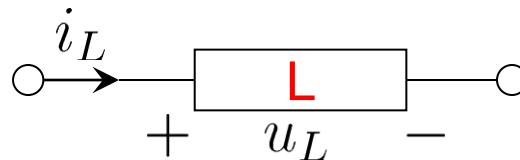
$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow I_C(s) = Cs u_C(s) - C u_C(0^-)$$

$$U_C(s) = \frac{1}{Cs} I_C(s) + \frac{u_C(0^-)}{s}$$



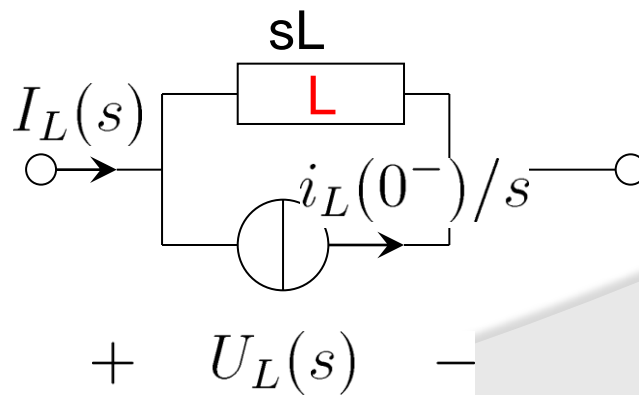
# 复频域的元件模型和电路模型

电感元件  $u_L = L \frac{di_L}{dt}$



$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$

$$I_L(s) = \frac{U_L(s)}{sL} + \frac{i_L(0^-)}{s}$$



# 复频域的元件模型和电路模型

## ■ 互感元件

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$U_1(s) = sL_1 I_1(s) + sM I_2(s) - sL_1 i_1(0^-) - M i_2(0^-)$$

$$U_2(s) = sM I_1(s) + sL_2 I_2(s) - sM i_1(0^-) - L_2 i_2(0^-)$$

# 复频域的元件模型和电路模型

## 复频域电路模型

- 将电路中所有元件均采用复频域模型表示，所得到的电路模型成为原电路的复频域电路模型为运算电路
- 运算阻抗
- 运算导纳

# 使用Laplace变换分析暂态过程

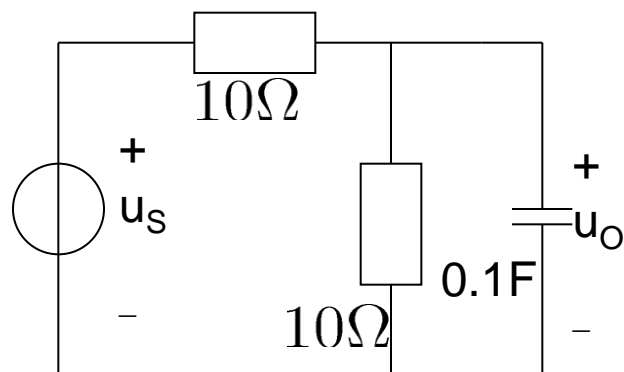
## ◎ 分析方法

- 将阻抗对应为运算阻抗
- 将导纳推广为运算导纳
- 电压源,电流源映射到电压, 电流像函数, 注意附加电源的产生和处理和独立电源同样处理
- 采用直流分析得到结果

## ◎ 运算步骤

- 计算电路换路时的电容初值 $u_C(0_-)$ 和电感初值 $i_L(0_-)$ ,激励的时域函数变换为像函数;
- 利用换路后的电路画出运算电路, 注意电容和电感初值引入的附加电源: 其中电路 RLC元件用复频域阻抗表示, 待求量用像函数表示
- 使用直流分析方法进行电路运算,得到响应的像函数
- 根据像函数求取响应的原函数

# 使用拉普拉斯变换分析暂态过程

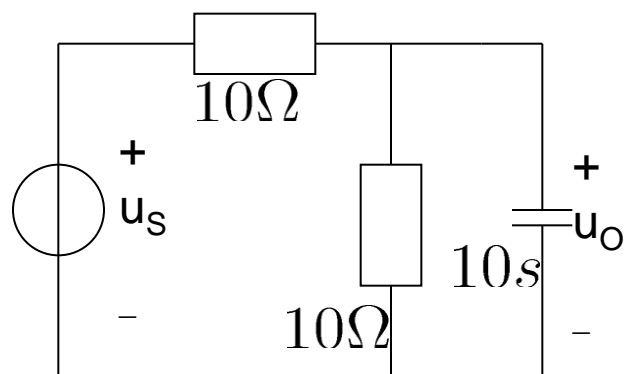


所示电路中,  $u_s(t) = 20e^{-t}\varepsilon(t)V$   
 电路为零状态, 求  $t \geq 0$  时  $u_o$  的变化规律

电源像函数:  $U_S(s) = \frac{20}{s+1}$

电容对应的阻抗:  $Z_c = \frac{1}{0.1s} = \frac{10}{s}$

列节点电压方程

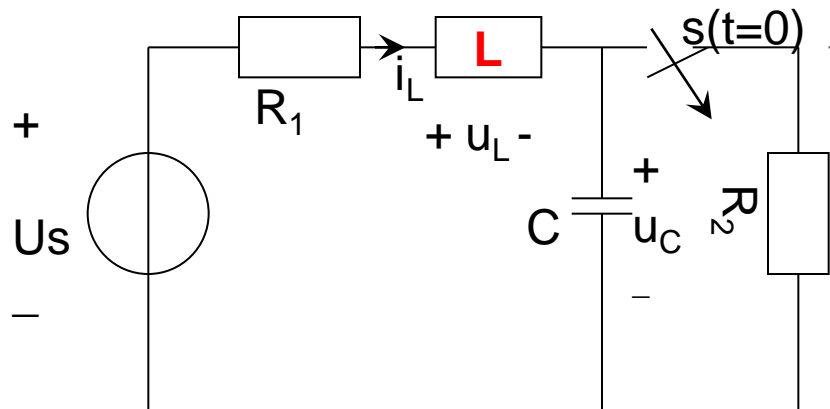


$$\left( \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + 0.1s \right) U_o(s) = \frac{U_s(s)}{10} = \frac{2}{s+1}$$

$$U_o(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)} = \frac{20}{s+1} - \frac{20}{s+2}$$

求解原函数:  $u_o(t) = (20e^{-t}\varepsilon(t) - 20e^{-2t}\varepsilon(t))V$

# 使用拉普拉斯变换求解暂态过程

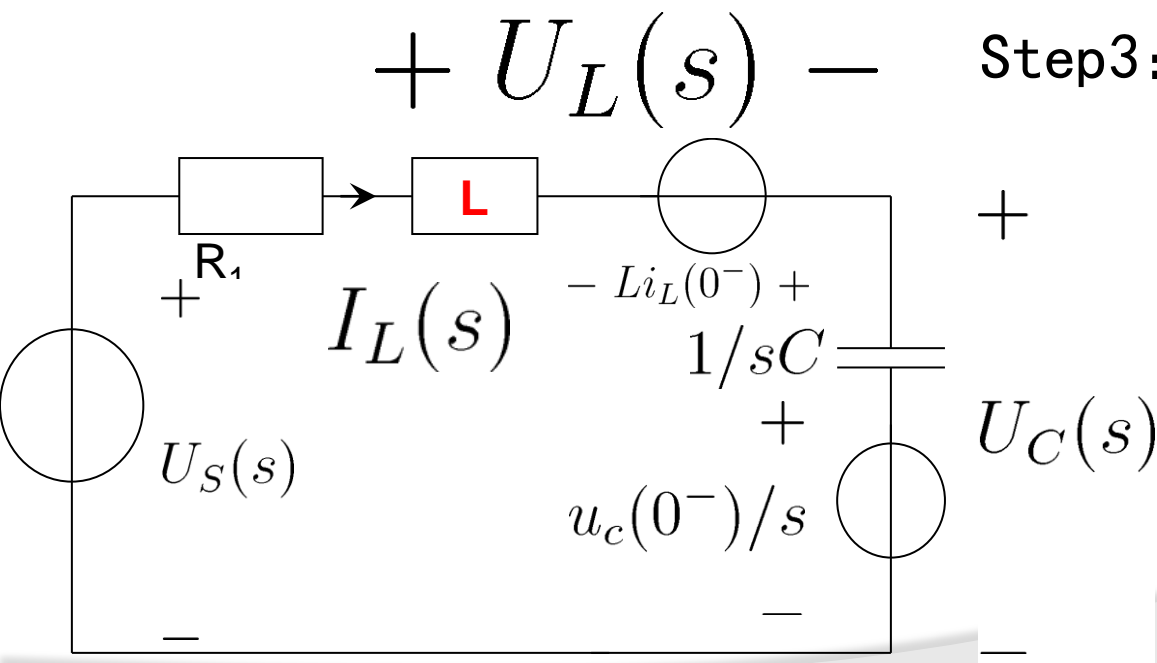


所示电路 $t < 0$ 是稳态,  $t = 0$ 时开关断开,  $U_s = 30\text{V}$ ,  $R_1 = 25\ \Omega$ ,  $R_2 = 75\ \Omega$ ,  $L = 0.5\text{H}$ ,  $C = 5\text{mF}$ . 求 $t > 0$ 时的全响应 $u_L$ 和 $u_C$

Step1: 求初始值 $i_L(0^-)$ ,  $u_C(0^-)$

Step2: 画出等效运算电路

Step3: 计算待求响应的象函数



# 使用拉普拉斯变换求解

$$I_L(s) = \frac{U_s(s) + Li_L(0^-) - \frac{u_c(0^-)}{s}}{R_1 + Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{0.3s + 15}{s^2 + 50s + 400}$$

$$u_c(s) = \frac{1}{sC}I_L(s) + \frac{u_c(0^-)}{s} = \frac{22.5s^2 + 1185s + 12000}{s(s^2 + 50s + 400)}$$

$$u_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-) = \frac{-60}{s^2 + s50 + 400}$$

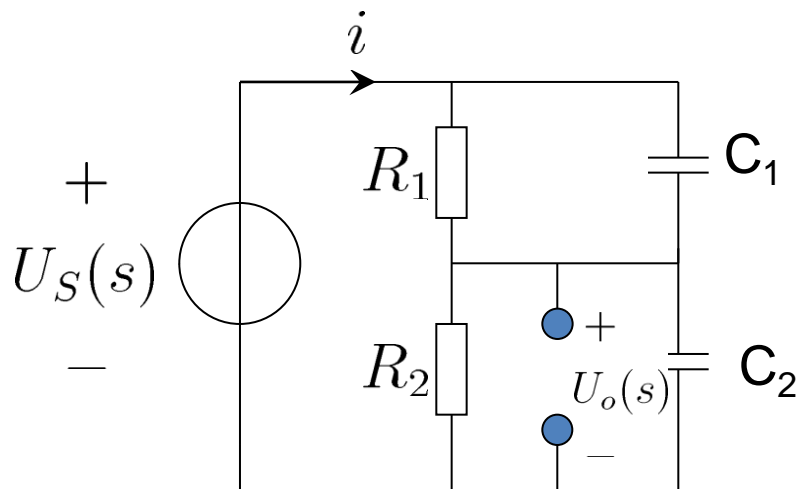
Step4: 求取信号的原函数

$$u_L(s) = \frac{-2}{s + 10} + \frac{2}{s + 40} \Rightarrow u_L(t) = (-2e^{-10t} + 2e^{-40t})V(t \geq 0)$$

$$u_c(t) = (30 - 8e^{-10t} + 0.5e^{-40t})V(t > 0)$$



# 使用Laplace变换分析暂态过程



$$R_1 = 9\Omega, R_2 = 1\Omega, C_1 = 1F, C_2 = 4F,$$

$$u_S = 10\varepsilon(t)V$$

电路为零状态。求电流*i*和电压*u<sub>o</sub>*。

$$Z(s) = \frac{R_1 / (sC_1)}{R_1 + 1/sC_1} + \frac{R_2 / (sC_2)}{R_2 + 1/sC_2} = \frac{45s + 10}{(9s + 1)(4s + 1)}$$

$$I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} = \frac{10(9s + 1)(4s + 1)}{s(45s + 10)} = 8C + \frac{1A}{s} + \frac{1/9A}{s + 1/4.5}$$

$$U_o(s) = I(s) \times \frac{R_2 / (sC_2)}{R_2 + 1/sC_2} = \frac{1V}{s} + \frac{1V}{s + 1/4.5}$$

# 使用Laplace变换分析暂态过程

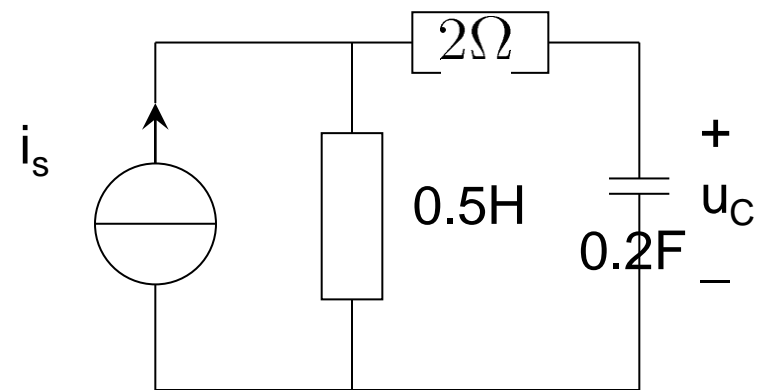
求取原函数

$$u_o(t) = \varepsilon(t) V + e^{-t/4.5} \varepsilon(t) V$$

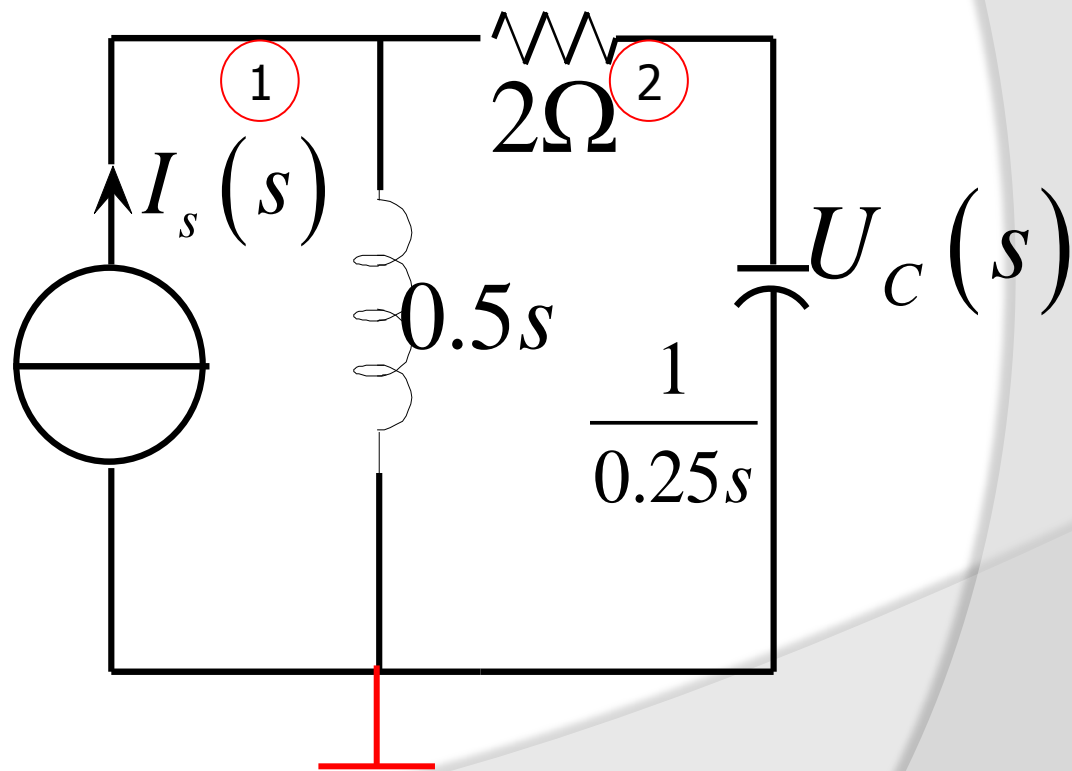
$$i(t) = 8C \times \delta(t) + \left(1 + \frac{1}{9}e^{-t/4.5}\right) \varepsilon(t) A$$

# 拉普拉斯变换求解暂态电路

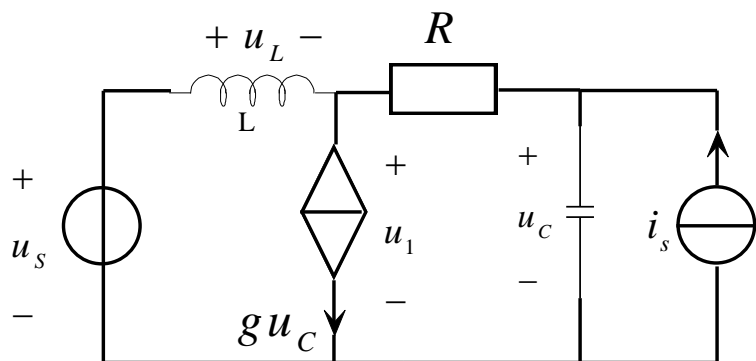
$$i_s = 1C \times \delta(t), u_c = ?$$



运算电路图



# 拉普拉斯变换求解电路暂态过程

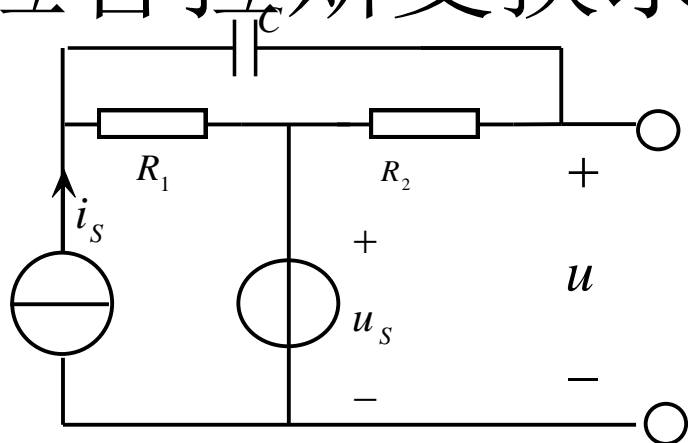


$$\begin{pmatrix} \frac{1}{sL} + \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} + cS \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_c(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_s}{sL} - gU_c(s) \\ I_s(s) \end{pmatrix}$$

$$R = 1\Omega, L = 1H, C = 0.2F, g = 1S, U_s = 6\varepsilon V, I_s = 4C \times \delta(t)$$

求零状态时的  $u_C(t)$ ,  $u_L(t)$

# 拉普拉斯变换求解电路暂态过程



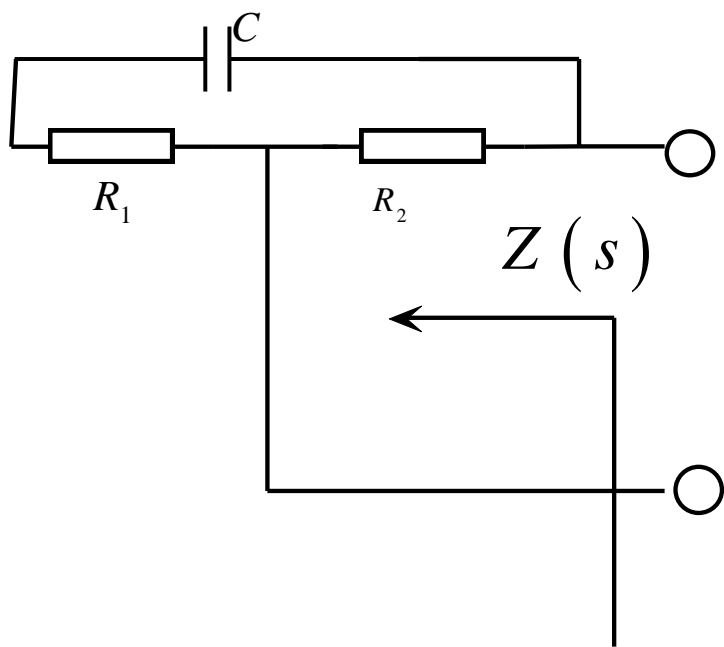
$$R_1 = 1\Omega, R_2 = 1.5\Omega, u_s = \varepsilon(t)V, i_s = \varepsilon(t)A$$

$$\text{当 } R_{ab} = 3\Omega, i = (2 + 2e^{-50t}\varepsilon(t))A.$$

$$\text{如果 } L_{ab} = 0.25H, i_L(0^-) = 0, u_{ab} = ?$$

思路：戴维南等效，求出参数，即可求解

## Step 1、戴维南等效

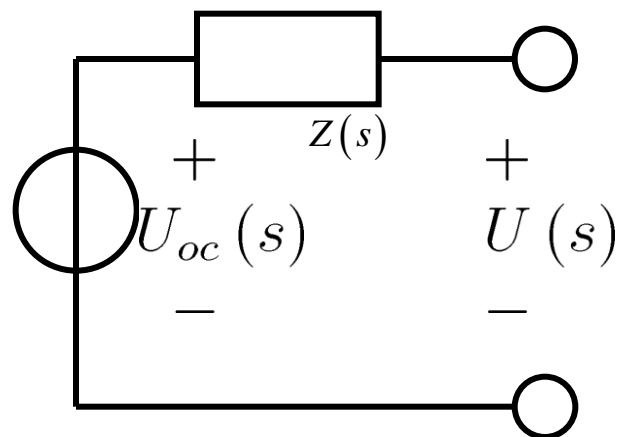


$$\tau = 0.02$$

$$\tau = RC = (R_1 + R_2 \parallel R_3) C = 2C, C = \frac{\tau}{2} = 0.01F$$

$$Z(s) = R_2 \parallel \left( R_1 + \frac{1}{sC} \right) = \frac{0.6s + 60}{s + 40}$$

# 拉普拉斯变换求解电路暂态过程



$$I(s) = \frac{2}{s} + \frac{2}{s+50}$$

$$U_{oc}(s) = I(s)(Z(s) + R) = \frac{14.4s + 300}{s(s+40)}$$

$$I'(s) = \frac{U_{oc}(s)}{(Z(s) + sL)}$$

Step 2:  $L_{ab} = 0.25H$

$$I'(s) = \frac{U_{oc}(s)}{(Z(s) + sL)}$$

$$U_{ab}(s) = I'(s) sL = (14.4s + 360) / (s^2 + 42.4s + 240)$$

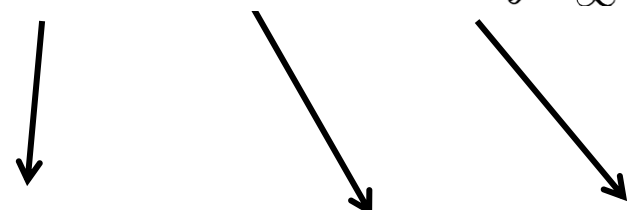
$$u_{ab}(t) = (9.09e^{-6.73t} + 5.31e^{-35.67t}) V (t > 0)$$

# 关于卷积及其拉普拉斯变换

$\delta(t) \rightarrow h(t)$  即一个电路的电源为冲激函数的时候响应为  $h(t)$

当电源为  $x(t)$  时，响应可以表示为：

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$


$$Y(s) = X(s) H(s)$$

如果已知一个系统的冲激响应，则电源是  $x(t)$  的时候，输出是  $x(t)$  和  $h(t)$  的卷积若作为拉普拉斯变换，输出的拉普拉斯变换等于输入的拉普拉斯变换和冲激响应的拉普拉斯变换的乘积



# 网络函数

零状态响应:

$$\begin{cases} x(t) \xrightarrow{L} X(s), y(t) \xrightarrow{L} Y(s) \\ Y(s) = H(s) X(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} \end{cases}$$

**强制分量:** 输入信号的极点, 与外加激励形式相同

**自由分量:** 网络函数的极点, 由网络参数和结构决定

# 网络函数

## ◎ 网络函数

- 响应象函数 $Y(s)$ 与激励象函数 $X(s)$ 的比值

$$H(s) \triangleq \frac{Y(s)}{X(s)}$$

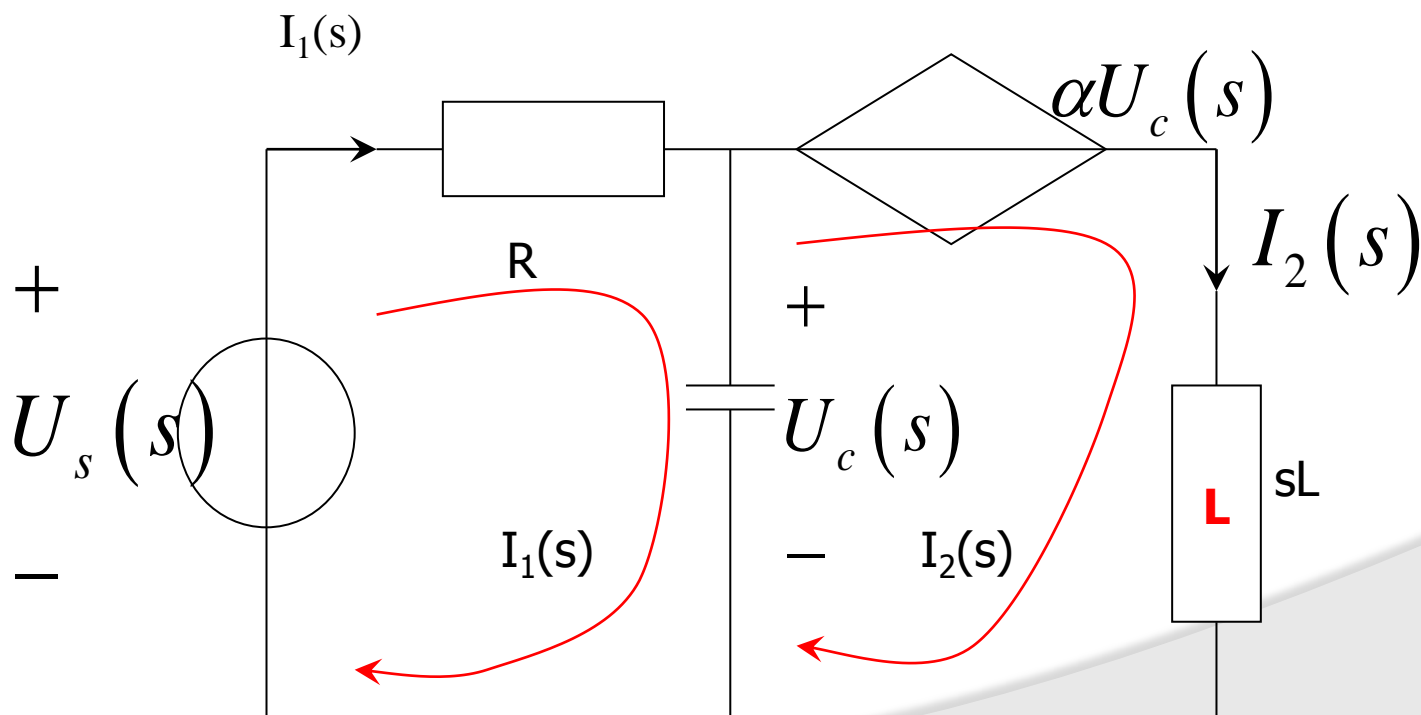
$$x(t) = \delta(t) \rightarrow y(t) = h(t)$$

$$H(s) \xLeftrightarrow{L} h(t)$$

# 网络函数举例

已知 $R=0.5\Omega, L=1H, C=1F, \alpha=0.25$ .

求：定义网络函数 $H(s)=I_2(s)/U_s(s)$ , 求 $H(s)$ 和单位冲激响应 $h(t)$   
求当 $u_s(t) = 3e^{-t}\varepsilon(t)V$ 时的输出 $i_2(t)$



# 网络函数

- ◎ 网络函数的极点位置和单位冲激特性的关系
  - 网络函数的极点称为网络函数的自然频率

$$H(s) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{m=1}^{i_k} \frac{A_{k,m}}{(s - p_k)^m} \right)$$

$$\frac{A_{k,m}}{(s - p_k)^m} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{(m-1)!} A_{k,m} t^{m-1} e^{p_k t}$$

自然频率取决于电路结构和电路参数，决定了自由响应的频率和信号形式。

# 网络函数

## ◎ 网络函数的极点位置和单位冲激特性的关系

- 极点位于原点,输出为阶跃函数
- 极点位于左半平面,按照指数规律衰减
- 位于虚轴和右半平面
  - 系统不稳定,输出幅度不收敛

## ◎ 复频域网络函数和复数网络函数的的关系:

$$H(s) \Big|_{s=j\omega} = H(j\omega)$$

# 复频域的电路定理

- ◎ 所有电路定理均成立

- 线性定理
- 戴维南定理
- 诺顿定理
- 互易定理

- ◎ 注意使用电路定理要用运算电路方可使用电路定理，不能时域形式利用电路定理

- 互易定理使用L,C要为零状态，否则会导入附加电源，不满足互易定理条件

# 线性动态电路的频域分析方法总结

## ◎ 拉普拉斯变换定义

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

## ◎ 电路中电压、电流分别服从复频域的基尔霍夫电压定律和基尔霍夫电流定律

$$\sum I_k(s) = 0, \sum U_k(s) = 0$$

## ◎ 线性电阻、电容、电感上的电压电流关系

$$\begin{cases} U_R(s) = RI_R(s) \\ U_C(s) = I_C(s) / (sC) + u_C(0^-) / s \\ U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-) \end{cases}$$