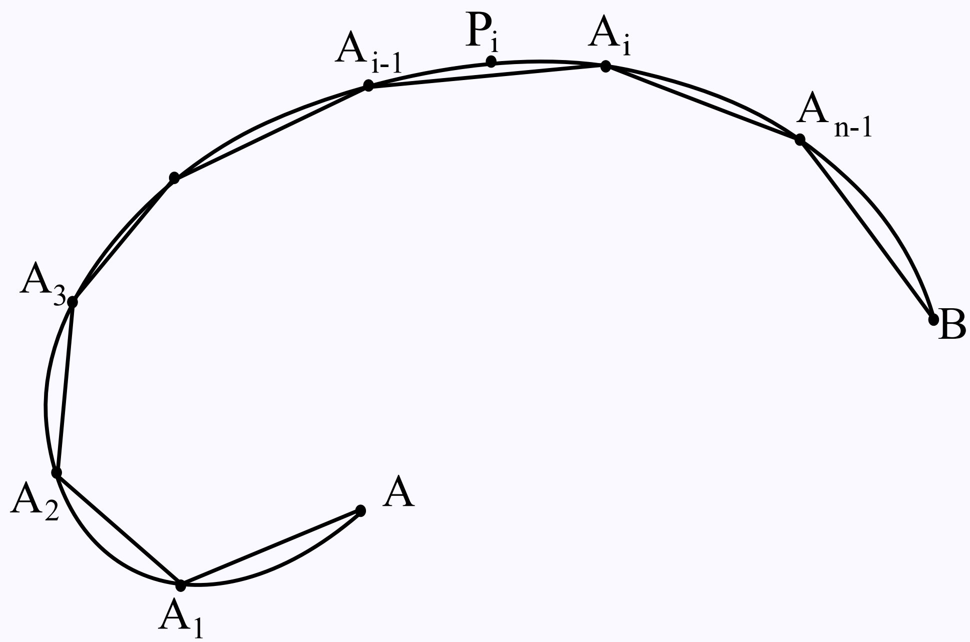
第 11 章复习

1. §11.1 第一型曲线积分
2. §11.2 第一型曲面积分
3. §11.3 第二型曲线积分，Green 公式
4. §11.4 第二型曲面积分
5. §11.5 Gauss 定理，Stokes定理
6. §11.7 保守场

1. **第一型曲线积分的定义** 设 L 是 $\mathbb{R}^3$ 中一条可求长的曲线, 起点和终点分别为 A 和 B. f 是定义在 L 上的一个函数. 从 A 到 B 在 L 上依次取点 $A=A_0, A_1, \cdots, A_n=B$, 它们将曲线 L 分成 n 小段, 形成 L 的一个分割 T, 记第 i 个小段 $L_i=\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 Δs_i $(i=1,2,\cdots,n)$, 并记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta s_i$, 称为分割 T 的宽度. 在 L_i 上任取一点 $P_i=(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$,



||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

作和式

$$S(f,T)=\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i. \tag{1}$$

如果存在一个数 I, 使得对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $\lambda < \delta$, 不论 $P_i \in L_i$ 如何选择都有

$$|S(f,T)-I|<\varepsilon,$$

则称 f 在曲线 L 上可积, 数 I 称为 f 在 L 上的第一型曲线积分, 记为

$$\int_L f(x,y,z)\,ds \quad \text{或} \quad \int_L f\,ds$$

2. **第一型曲线积分的计算：** 设 Γ 是区域 $D \in \mathbb{R}^3$ 中的一条光滑曲线, f 是定义在 D 上的一个连续函数, 如果 Γ 有参数表示 $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, 那么

$$\int_\Gamma f\,ds=\int_\alpha^\beta f\circ\vec{r}(t)\|\vec{r}'(t)\|\,dt.$$

3. **第二型曲线积分的定义** 设 $\vec{F}=(P,Q,R)$ 是空间区域 D 中一个向量场. L 是 D 中一条可求长的有向曲线, 起点为 A 终点为 B. 在 L 上依次从 A 到 B 的方向顺序取点 $\{\vec{r}_i:\ i=0,1,\cdots,n\}$ 使得 $\vec{r}_0=A, \vec{r}_n=B$. 令

$$\Delta\vec{r}_i=\vec{r}_i-\vec{r}_{i-1},\ i=1,2,\cdots,n, \quad \|T\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta\vec{r}_i|.$$

如果对于弧段 $\overset{\frown}{r_{i-1}r_i}$ 上任取的点 ξ_i, 极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(\xi_i)\cdot\Delta\vec{r}_i$$

为一个固定的数, 则将此数记为

$$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{2}$$

称为向量场 $\vec{F}$ 沿有向曲线 L 的第二型曲线积分.

若 L 是有向封闭曲线, 则上面的积分也称为向量场 $\vec{F}$ 沿环路 L 的环量, 常用 $\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r}$ 表示.

4. **第二型曲线积分的计算**：设 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是区域 $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^3$ 中的一条有向光滑曲线，$\boldsymbol{F} : \boldsymbol{D} \to \mathbb{R}^3$ 是定义在 $\boldsymbol{D}$ 上的连续映射，如果 $\boldsymbol{\Gamma}$ 有参数表示 $\vec{r} = \vec{r}(t)$，$t \in [\alpha, \beta]$，并且参数的增加对应 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的定向，那么

$$\int\limits_{\Gamma} F(p) \cdot \, d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} F \circ \vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) \, dt.$$

5. Green **公式**：设 $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^2$ 是由有限条分段光滑的曲线围成的闭区域。如果函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 $\boldsymbol{\Omega}$ 上连续并有连续的偏导数，那么有

$$\int\limits_{\partial\Omega} P \, dx + Q \, dy = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx dy,$$

其中 $\partial\Omega$ 是 Ω 的边界，方向按右手系。

6. **曲面的面积：** 设正则曲面 Σ 有参数向量方程 $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Delta$, 我们称

$$\sigma(\Sigma) = \iint\limits_{\Delta} \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, dudv$$

为曲面 Σ 的面积，并记

$$d\sigma = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, dudv$$

称为曲面的面积微元。

若曲面有显式表示：$z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, 则面积计算公式为

$$\sigma(\Sigma) = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dxdy.$$

7. **第一型曲面积分的定义** 设 S 是一张有界的光滑曲面, $f(x,y,z)$ 是定义在 S 上的函数. 用任意分法把 S 分成 n 块有面积的曲面 $S_1,S_2,\cdots,S_n$, 这些小曲面块的面积记为 ΔS_i. 在每块小曲面 S_i 上任取一点 $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$, 如果下列极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i,$$

是一个有限数, 而且与 $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 的选择无关, 其中 λ 是所有小块曲面的最大直径, 则称函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 S 上的可积, 极限值就是它的积分值, 记成

$$\iint_S f(x,y,z)dS,$$

返回 全屏 关闭 退出

8. **第一型曲面积分的计算：** 设正则曲面 Σ 有参数向量方程 $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in \Delta$, 函数 f 在 Σ 上连续，则 f 沿 Σ 的第一型曲面积分为

$$\int_{\Sigma} f\,d\sigma = \iint_{\Delta} f \circ \vec{r}\,\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\,dudv.$$

若曲面有显式表示：$z = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in D$, 则 f 沿 Σ 的第一型曲面积分为

$$\int_{\Sigma} f\,d\sigma = \iint_{D} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

注意在计算积分时要观察曲面是否具有对称性和奇偶性，以简化计算过程。

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

9. **第二型曲面积分的定义** 设 S 是三维空间向量场 $\vec{F}$ 中一张定向光滑曲面, $\vec{n}$ 是 S 上的单位法向. 将 S 分割成有限个充分小的有面积的小曲面片 $S_1, \cdots, S_n$. 在每个曲面片 S_i 上取一点 M_i, 作和式

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i) \Delta S_i,$$

其中 ΔS_i 为 S_i 的面积. 如果当分割的宽度 (小曲面片直径中的最大者) 趋于零时, 不论 M_i 在 S_i 中如何选, 上面的和式都有固定的极限 A, 那么这个极限 A 就称为向量场 $\vec{F}$ 在有向曲面 S 上的第二型曲面积分, 记为

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS, \tag{3}$$

其中 $d\vec{S} = \vec{n} dS$ 称为有向面积微元.

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

10. **第二型曲面积分的计算：** 设区域 $D \in \mathbb{R}^3$, $F = (P, Q, R)$ 是 D 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射，又设 $\Sigma \subset D$ 是一张有面积可定向的曲面片。若 $\vec{n}$ 是指向曲面正向的单位法向量，则 F 沿 Σ 的第二型曲面积分为

$$\int_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_{\Sigma} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy.$$

若曲面 Σ 的向量参数方程为 $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Delta$, 并且 $\vec{r}$ 实现了从 Δ 到 Σ 之间的一一对应，则曲面的单位法向量为

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}.$$

因为$d\sigma = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\, dudv$, 所以

$$\int_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, d\sigma = \pm \iint_{\Delta} (F \circ \vec{r}) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dudv.$$

注意，当 $\vec{n}$ 与 z 轴的正向成锐角时取正号，否则取负号。

11. Gauss **公式：** 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中有界闭区域，$\partial\Omega$ 是其边界，它是一个有向封闭曲面，法向指向外侧。如果 P,Q,R 都在 Ω 上可微，那么有

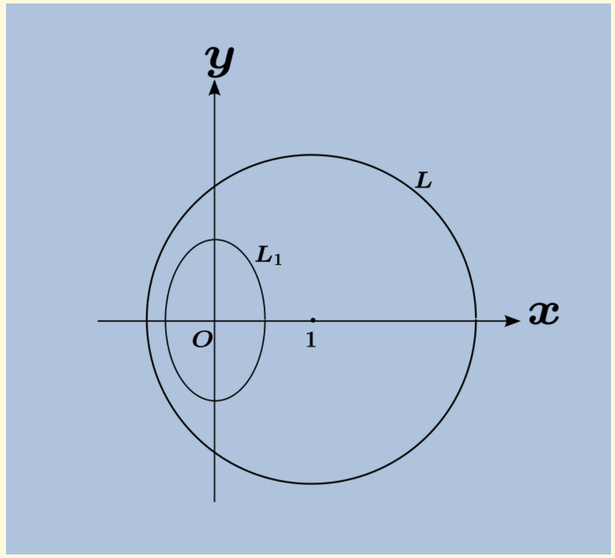
$$\oiint\limits_{\partial\Omega} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV.$$

12. Stokes **公式：** 设 Σ 是由有限块二阶连续可微的正则曲面片拼接而成的定向曲面。如果 P,Q,R 是定义在 Σ 上的连续可微函数，那么有

$$\int\limits_{\partial\Sigma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint\limits_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,d\sigma,$$

其中 $F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$，$\vec{n}$ 是 Σ 的单位法向。

例 1 计算积分 $A=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$, 其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周 $(R\neq 1)$, 取逆时针方向为正向。



解： 令 $P(x,y)=\frac{-y}{4x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\frac{x}{4x^2+y^2}$. 我们有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2},\ (x,y)\neq(0,0).$$

返回 全屏 关闭 退出

若 $R<1$, 则 L 不包围原点, 由 Green 公式, 得

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=0.$$

若 $R>1$, 则 L 包围原点, 在 L 和 L 内部的小椭圆

$$L_1=\begin{cases} x=\frac{1}{2}\varepsilon\cos\theta, \\ y=\varepsilon\sin\theta, \end{cases} \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

所围成的区域 D 内应用 Green 公式, 可得

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_{L_1} \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}.$$

对上式右边的积分作变换 $x=\frac{1}{2}\varepsilon\cos\theta$, $y=\varepsilon\sin\theta$, 有

$$\oint_{L_1} \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)d\theta=\pi.$$

于是所求的积分值为 π.

例 2 计算曲面积分

$$\iint\limits_{S} (xy + yz + zx)\, d\sigma,$$

S 为圆锥曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被曲面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截下的部分。

解： 对于圆锥曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

S 在 xy 平面上的投影区域为 D_{xy}： $(x - a)^2 + y^2 \leqslant a^2$. 于是

$$\iint\limits_{S} (xy + yz + zx)\, d\sigma = \sqrt{2} \iint\limits_{D_{xy}} \left(xy + (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}\right)\, dxdy.$$

在极坐标下 D_{xy} 可表为

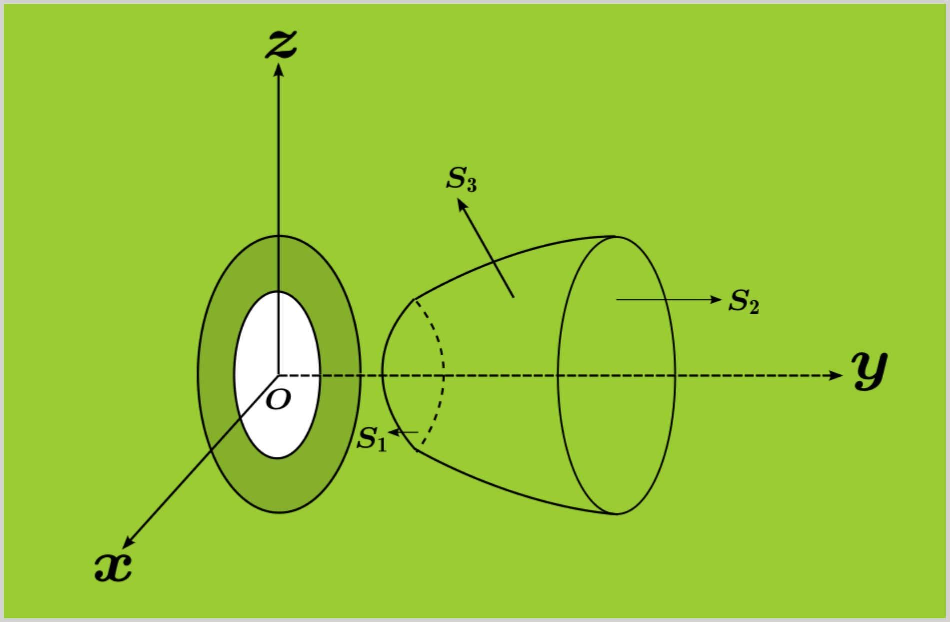
$$\left\{(r,\theta)\mid r\leqslant 2a\cos\theta,-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

于是有

$$\begin{aligned}\text{所求积分}&=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\,dr\\&=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta)\cos^4\theta\,d\theta\\&=8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,d\theta=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.\end{aligned}$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

例 3 计算第二型曲面积分 $\iint\limits_S \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}} dzdx$, 其中 S 是由曲面 $y = x^2+z^2$ 与平面 $y=1, y=2$ 所围成的立体表面的外侧。



解: 第二型曲面积分的计算的关键是曲面的定向及它在相应坐标平面上的投影的符号。本题中 S 由三部分组成, 曲面 S_1 取负侧, 曲面 S_2 取正侧, 曲面 S_3 又取负侧。在计算中应当注意曲面向 xz 平面的投影区域及其相应面积微元的符号。曲面 S_1 取负侧, 其投影区域为 $D_1: x^2+z^2 \leqslant 1$, 应用

返回 全屏 关闭 退出

极坐标可得

$$\iint\limits_{S_1} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dzdx = -\iint\limits_{D_1} \frac{e}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dzdx$$

$$= -e\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{r}\,r\,dr = -2e\pi.$$

曲面 S_2 取正侧，其投影区域为 D_2： $x^2+z^2 \leqslant 2$，应用极坐标可得

$$\iint\limits_{S_2} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dzdx = e^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{r}\,r\,dr = 2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\pi.$$

返回 全屏 关闭 退出

曲面 S_3 取负侧，其投影区域为 D_3：$1 \leqslant x^2+z^2 \leqslant 2$，应用极坐标可得

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S_3} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dzdx &= -\iint\limits_{D_3} \frac{e^{\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dzdx \\ &= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \frac{e^r}{r}\,r\,dr \\ &= -2(e^{\sqrt{2}}-e)\pi.\end{aligned}$$

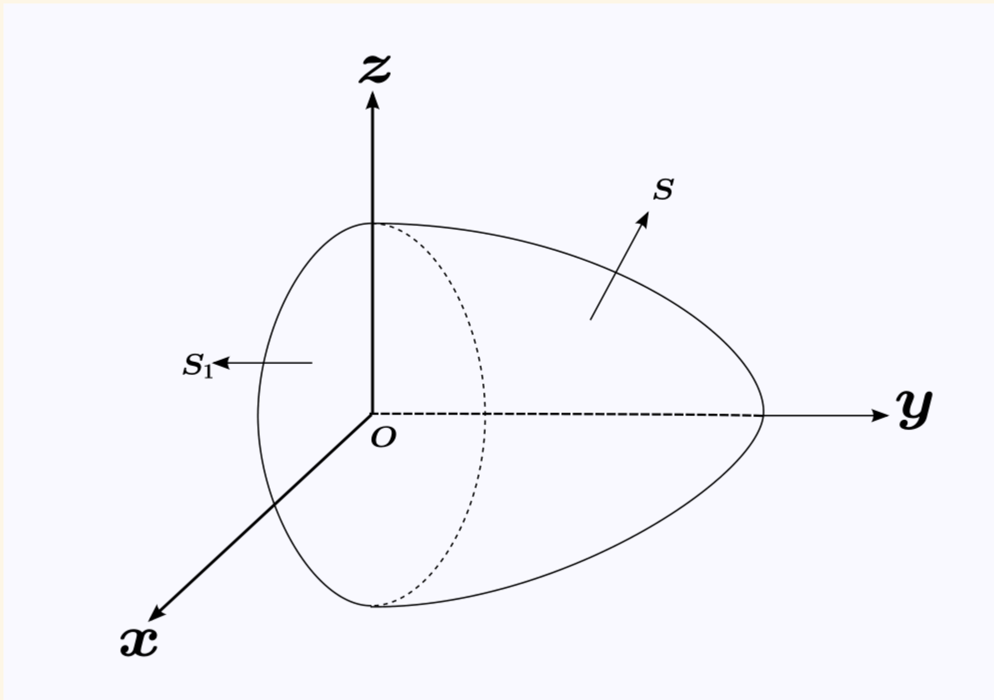
于是，有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dzdx &= \left(\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}+\iint\limits_{S_3}\right)\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dzdx \\ &= 2(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}\pi.\end{aligned}$$

例 4 计算积分

$$\iint\limits_S yzdydz+(x^2+z^2)ydzdx+xydxdy,$$

其中 S 为曲面 $4-y=x^2+z^2$ 上 $y\geqslant 0$ 的那部分取正侧。



解：为了便于应用 Gauss 公式，补上曲面 $S_1: y=0, x^2+z^2\leqslant 4$，$S_1$ 的方向取负侧。这样 $S\cup S_1$ 构成一个方向朝外的封闭曲面，设它围成的区域

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

为 V. 在 S_1 上由于 $y=0, dy=0$, 相应的曲面积分为零。因此

$$\iint\limits_{S} yzdydz+(x^2+z^2)ydzdx+xydxdy$$

$$=\oiint\limits_{S\cup S_1} yzdydz+(x^2+z^2)ydzdx+xydxdy$$

$$=\iiint\limits_{V}(x^2+z^2)\,dV=\int_0^4 dy\iint\limits_{x^2+z^2\leqslant 4-y}(x^2+z^2)\,dxdz$$

$$=\int_0^4 dy\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{4-y}}r^2\,rdr$$

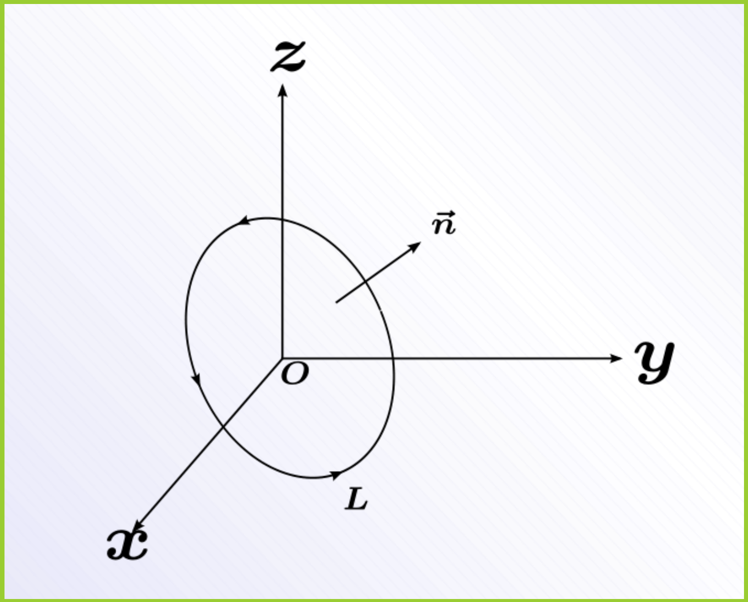
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^4(4-y)^2dy=\frac{32}{3}\pi.$$

返回 全屏 关闭 退出

例 5 计算曲线积分

$$\oint_L (y+1)dx + (z+2)dy + (x+3)dz,$$

其中 L 是圆周 $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=0$, 若从 x 轴正向看去, L 是沿逆时针方向运行。



解: 本题直接用曲线的参数方程计算积分相当繁琐, 但是利用 Stokes 公式把曲线积分转化成曲面积分来计算就方便许多。

曲线 L 按其方向所围成的曲面是半径为 R 的圆盘 S, 法向为 $\vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. 因为 $(P, Q, R) = (y+1, z+2, x+3)$, 所以

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (-1, -1, -1).$$

由 Stokes 公式, 有

$$\begin{aligned}
&\oint_L (y+1)dx + (z+2)dy + (x+3)dz \\
&= \iint_S (-1, -1, -1) \cdot \vec{n}\, d\sigma \\
&= -\frac{3}{\sqrt{3}} \iint_S d\sigma \\
&= -\sqrt{3}\pi R^2.
\end{aligned}$$

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

例 6 设 V 是 $\mathbb{R}^3$ 中由光滑封闭曲面 Σ 所围成的区域，$f(x,y,z)$ 在 V 的闭包上有二阶连续偏导数，且满足 Laplace 方程

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

设 f 在 Σ 上恒为零。求证 f 在 V 上也恒为零。

证明： 记

$$P(x,y,z) = f\frac{\partial f}{\partial x},\ Q(x,y,z) = f\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$R(x,y,z) = f\frac{\partial f}{\partial z}.$$

则 P, Q, R 在 V 的闭包上有一阶连续偏导数，并在 Σ 上恒为零。因此

$$\iint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = 0.$$

根据 Gauss 公式，有

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy \\
&= \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz \\
&= \iiint\limits_{V} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + f\Delta f\right) dxdydz
\end{aligned}
$$

因而根据条件可得

$$
\iiint\limits_{V} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right) dxdydz = 0.
$$

由此可知 f 的一阶偏导数在 V 上为零，因而 f 在 V 上为常数。由于 f 在 V 的闭包上连续且在边界上为零，所以 f 在 V 上恒为零。