

中国科学技术大学
20xx—20xx 学年第一学期期末考试试卷

开课院系: 物理学院 科目: 理论力学 A 考试形式: 闭卷
 学生所在系: _____ 姓名: 样卷 学号: _____

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

注意事项: 在试卷留空处答题。写不下时, 请在试卷反面接着答题。不交草稿纸。

可能用到的一些公式:

刚体的欧拉动力学方程 $I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = M_1$ $I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = M_2$ $I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = M_3$	欧拉运动学方程 $\omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$ $\omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$ $\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

球坐标系中的速度分解: $\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \vec{e}_\phi$

电磁场中运动的带电粒子的拉格朗日函数: $L = \frac{1}{2} m v^2 - e(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$

正则变换生成函数的四种常用形式

$F_1 = F_1(q, Q, t),$	$p_\alpha = \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha},$	$P_\alpha = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha},$	$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$
$F_2 = F_2(q, P, t),$	$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha},$	$Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha},$	$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$
$F_3 = F_3(p, Q, t),$	$q_\alpha = -\frac{\partial F_3}{\partial p_\alpha},$	$P_\alpha = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_\alpha},$	$H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$
$F_4 = F_4(p, P, t),$	$q_\alpha = -\frac{\partial F_4}{\partial p_\alpha},$	$Q_\alpha = \frac{\partial F_4}{\partial P_\alpha},$	$H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$

一、(20分) 位于坐标原点具有磁荷 b 的磁单极子产生磁场, 其矢势在球坐标系 (r, θ, ϕ) 中可以表示为

$$\vec{A} = \frac{b(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi$$

其中 \vec{e}_ϕ 为方位角的单位矢量。考虑一个电荷为 e 、质量为 m 的粒子在该磁场中的运动。

1. 写出球坐标系中该带电粒子的拉格朗日函数表达式, 并找出至少两个独立的运动积分。
2. 在直角坐标系 (x, y, z) 中写下相应的哈密顿函数 H 以及关于第三个自由度 (z, p_z) 的哈密顿正则方程。

二、(20分) 质量为 m 的拉格朗日陀螺, 即重力场中绕定点转动的对称重陀螺, 三个主转动惯量为 $I_1 = I_2 \neq I_3$, 质心到固定点的距离为 l 。

1. 选取三个欧拉角作为广义坐标, 写出哈密顿函数 $H(\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi)$ 。
2. 利用哈密顿-雅可比方程, 求哈密顿主函数 $S(t, \phi, \theta, \psi)$ 。(可保留积分形式, 无需求积)

三、 (20分) 以向下为 x -轴的正方向, 讨论落体运动。

1. 设初始时刻的位移为 $x(t=0) = x_0$, 动量为 $p(t=0) = p_0$, 证明

$$x(t), p(t) \rightarrow x_0, p_0$$

是正则变换。

2. 对此变换逐个判断四种常用生成函数是否存在; 若存在, 则求出各生成函数表达式和哈密顿函数 $K(t, x_0, p_0)$ 。

3. 分别求出初值 x_0, p_0 这两个守恒量所对应的(准)对称变换。

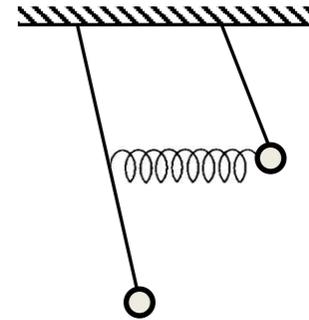
四、 (10分) 用弹性势能为

$$mgl(\theta_1 - \theta_2)^2$$

的轻弹簧连接两个平面单摆。单摆的刚性杆长度分别为 $2l, l$; 质点质量分别为 m, m ; 与垂直方向夹角为 θ_1, θ_2 。

1. 写出微振动拉氏量。

2. 求模态矩阵和自然频率。



五、 (15分) 取平面直角坐标系, 以水平为 x 轴, 向下为 y 轴。利用相空间的莫培督原理求抛物问题的相轨道。

六、 (15分) 自然长度为 l 、弹性系数为 k 的轻弹簧, 两端连结质量分别为 m_1 和 m_2 的质点, 整个系统放置在光滑桌面上运动。

1. 写出系统的拉格朗日函数。
2. 找出足够多的循环坐标, 用劳斯变换降阶, 求出径向运动的一维等效拉氏量。
3. 求一维等效运动的平衡点和微振动频率。