代数学基础

欧阳毅
中国科学技术大学
数学科学学院

Email: yiouyang@ustc.edu.cn

目 录

第一章　预备知识

§1.1　集合与映射

§1.1.1　集合的定义

我们首先回顾一下集合的定义.

将一些不同的对象放在一起, 即为**集合** (set), 其中的对象称为集合的**元素** (element). 在本书中, 我们将使用大写字母 $A, B, C, \ldots$ 来表示集合, 用小写字母 $a, b, c, \ldots$ 来表示集合的元素. 记 A 为一个集合. 如果 a 是 A 中的元素, 则称 a 属于 A, 记为 $a \in A$, 否则记为 $a \notin A$. 我们也可以将集合 A 表示为 $A = \{a \mid a \in A\}$, 其中 $a \in A$ 可以用 A 中元素满足的共同性质代替, 比如说偶数集合=$\{a$为整数 $\mid a \equiv 0 \mod 2\}$. 注意到集合中元素总是不重复的.

如果集合 A 中的每一个元素均是集合 B 中元素, 则称 A 是 B 的**子集** (subset), 换言之, 即若 $a \in A$, 则 $a \in B$. 此时我们记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$. 可以用图 1.1 来表示 $A \subseteq B$.

如果集合 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 即 $a \in A$ 当且仅当 $a \in B$, 称 A 与 B **相等**, 并记为 $A = B$. 如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 我们称 A 为 B 的**真子集** (proper subset), 记为 $A \subset B$ 或者$A \subsetneq B$.

不含任何元素的集合称为**空集** (empty set), 记为 $\varnothing$. 由定义可知, 空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集, 且是任何非空集合的真子集.

如果集合A的元素个数有限, 称A 为**有限集** (finite set), 其元素个数称为**集合的阶** (cardinality 或order of finite set), 记为$|A|$. 元素个数无限的集合, 即**无限集** (infinite set), 它的阶定义为 ∞.

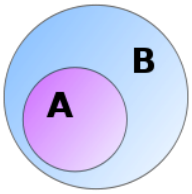


图 1.1: 集合的包含关系

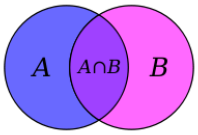


图 1.2: 集合的交

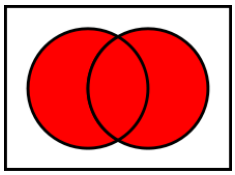


图 1.3: 集合的并

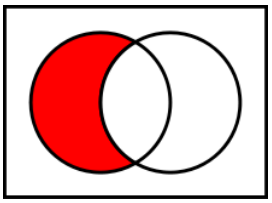


图 1.4: 集合的补集$A-B$

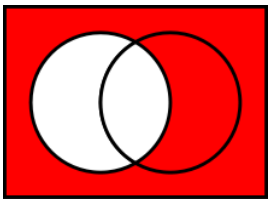


图 1.5: 集合的补集A^c

§1.1.2 集合的基本运算

一般来说, 集合有如下的四种基本运算.

(I) **集合的交** 设 A, B 为两个集合, 则A **与** B **的交集** (intersection)为

$$A \cap B := \{x \mid x \in A且x \in B\}.$$

可以用图 1.2 表示集合的交.

更一般地, 设 I 为集合, 设 I 中每个元素 i 对应集合 A_i, 则集合 $A_i (i \in I)$ 的交为

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid x \in A_i, 对每个 i \in I 成立\}.$$

(II) **集合的并** 设集合 A, B 如上所示, 则A **与** B **的并集** (union)为

$$A \cup B := \{x \mid x \in A或x \in B\}.$$

可以用图 1.2 表示集合的并. 更一般地, 集合 $A_i (i \in I)$ 的并为

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid x \in A_i, 对某个 i \in I 成立\}.$$

如果 A_i 两两不交(即交集为空集), 我们称 $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ 为**不交并**(disjoint union), 并记为 $\bigsqcup\limits_{i \in I} A_i$.

(III) **集合的差集与补集** 设 A, B 为某固定集合 U 的子集, 则A **对** B **的补集或差集** (complement)为

$$A - B := \{x \mid x \in A且x \notin B\}.$$

它可用图 1.4 表示. 由补集定义, 我们有

$$A = (A \cap B) \sqcup (A - B).$$

A **在** U **中的补集**为

$$A^c := \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

它可用图 1.5 表示.

由定义可知, 如果 A, B 为有限集, 记 $|A|$ 为 A 的元素个数, 则 $A \cup B, A \cap B$ 均为有限集, 且

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{1.1}$$

更进一步地, 我们有

命题1.1 (容斥原理)**.** *设 $A_i,\ i = 1, \ldots, n$ 为某固定集合 U 的有限子集, 则*

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_j\} \subseteq \{1,\ldots,n\}} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}|. \tag{1.2}$$

证明. 对集合个数n用归纳法. □

命题1.2. *设 $A_i\ (i \in I)$ 为某固定集合 U 的子集, 则*

$$\bigcap_{i \in I} A_i^c = \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)^c. \tag{1.3}$$

证明. 我们有

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i \in I} A_i^c &\iff x \in A_i^c \text{ 对任意} i \in I \text{ 成立} \\ &\iff x \notin A_i \text{ 对任意} i \in I \text{ 成立} \\ &\iff x \notin \bigcup_{i \in I} A_i, \text{ 即 } x \in \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)^c. \end{aligned}$$

等式得证. □

(IV) **集合的笛卡尔积** 集合 A 与 B 的**笛卡尔积** (Cartesian product)是所有元素对 (a, b), 其中 $a \in A, b \in B$ 构成的集合, 即

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

更进一步地, 集合族 $A_i\ (i \in I)$ 的笛卡尔积为

$$\prod_{i \in I} A_i := \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \in A_i\}.$$

注记. 我们可以用一个简单例子来理解集合.

- 班级 $\longleftrightarrow$ 集合,
- 班上的学生 $\longleftrightarrow$ 元素,
- 班上的一个学习小组 $\longleftrightarrow$ 子集合,
- 所有不参加该学习小组的人 $\longleftrightarrow$ 补集,
- 学校的所有班级 $\longleftrightarrow$ 集合构成的集族.

§1.1.3 一些常用的集合记号

在本书中, 我们将经常使用如下集合:

- $\mathbb{Z}_+$: 正整数集合;
- $\mathbb{N} = \mathbb{Z} \cup \{0\}$: 自然数集合;
- $\mathbb{Z}$: 整数集合;
- $\mathbb{Q}$: 有理数集合;
- $\mathbb{R}$: 实数集合;
- $F[X]$: F ($F = Z, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 等) 上的(一元) 多项式的集合.

§1.1.4 映射, 合成律和结合律

设 A, B 为两个集合. 如果对 A 中每个元素 a, 均有唯一元素 $b \in B$ 与之对应, 我们称此对应为 A 到 B 的**映射** (map), 记之为

$$f : A \to B, \quad a \mapsto b = f(b).$$

A 称为 f 的**定义域**, $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$ 称为f 的**值域** 或像集. b 称为a 的像, a 称为b 的原像.

当集合B 是数(有理数, 实数等) 的集合时, 映射f 习惯上称为**函数** (function).

如果对 $a_1, a_2 \in A$, 当 $f(a_1) = f(a_2)$ 时, 则有 $a_1 = a_2$, 我们称映射 f 为**单射** (injective); 如果对任意 $b \in B$, 存在 $a \in A$, 使得 $f(a) = b$, 我们称 f 为**满射** (surjective); 如果 f 既是单射, 又是满射, 我们称 f 为**一一对应** (one-to-one correspondence), 或**双射** (bijective).

对于映射$g, g : A \to B$, 如果对于任意$a \in A$, $f(a) = g(a)$, 称映射f 与g 相等, 记为$f = g$.

设 $f : A \to B, g : B \to C$ 为映射, 则映射

$$g \circ f : A \to C, \quad a \mapsto g(f(a))$$

称为 f 与 g 的**复合映射**(或谓复合律, composition law).

命题1.3 (结合律)**.** 设 $f : A \to B$ 和 $g : B \to C, h : C \to D$ 为集合间的映射, 则

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

定义1.4. 设 S 为集合. 我们称映射 $f : S \times S \to S$, $(a, b) \mapsto p$ 为 S 上的一个**二元运算** (binary operation).

注记. 在数学应用中, 记号 $p = f(a, b)$ 并不是一个很适宜的记号. 实际上, 我们经常使用 $+, \times, *, \cdot$ 等符号来表示二元运算, 即

$$\boxed{p = ab,\ a \times b,\ a + b,\ a * b,\ a \cdot b, \text{诸如此类.}}$$

例1.5. 四则运算均是二元运算.

例1.6. 记 Σ_A 为集合 A 到自身的所有映射的集合, 则映射的复合构成 Σ_A 上的二元运算.

记 S_A 为集合 A 到自身的所有双射构成的集合, 则映射的复合构成 S_A 上的二元运算.

定义1.7. 集合 S 上的二元运算如果满足条件对所有 $a, b, c \in S$,

$$(ab)c = a(bc), \tag{1.4}$$

则称该二元运算满足**结合律** (associative law). 如果对任意 $a, b \in S$,

$$ab = ba, \tag{1.5}$$

则称其满足**交换律** (commutative law).

注记. 如果直接用$f(a,b)$ 表示二元运算ab, 则(1.4) 即等式

$$f(f(a,b),c)=f(a,f(b,c)),$$

而(1.5) 即等式

$$f(a,b)=f(b,a).$$

由此可以看出使用乘法记号表示二元运算的简洁性.

容易看出, 上面例子中的二元运算均满足结合律, 但映射的复合并不满足交换律. 事实上, 我们有如下基本事实:

结合律是更一般的规律.

在本书中, 我们将赋予给定集合一个或数个(满足结合律)的二元运算, 从而赋予该集合群, 环或者域的代数结构.

§1.1.5 等价关系, 等价类与分拆

定义1.8. 集合 A 中的元素间的关系 $\sim$ 称为**等价关系** (equivalence relation), 如果下述三性质成立:

(1) (**自反性**) 对所有 $a\in A, a\sim a$.

(2) (**对称性**) 如果 $a\sim b$, 则 $b\sim a$.

(3) (**传递性**) 如果 $a\sim b$ 且 $b\sim c$, 则 $a\sim c$.

定义1.9. 集合 A 作为它的一些子集合的不交并, 称为 A 的一个**分拆** (partition).

设 $\sim$ 是 A 上的一个等价关系. 如 $a\in A$, 记 $[a]=\{b\in A\mid b\sim a\}$, 即 $[a]$ 为 A 中所有与 a 等价的元素构成的子集合, 则

$$[a]\cap[b]=\begin{cases}[a]=[b], & \text{如果}a\sim b,\\ \varnothing, & \text{如果}a\nsim b.\end{cases}$$

故

$$A=\bigsqcup_{a\in A}[a]. \tag{1.6}$$

我们得到 A 的一个分拆. 另一方面, 如果 $A = \bigsqcup_{i\in I} A_i$, 我们很容易在 A 上定义一个等价关系:

$$\begin{aligned} a \sim b &\quad \text{如果 } a, b \text{ 同属于同一个 } A_i, \\ a \nsim b &\quad \text{如果 } a, b \text{ 属于不同的 } A_i. \end{aligned}$$

故我们有如下定理

定理1.10. *集合 A 的分拆与其上的等价关系一一对应.*

例1.11. *整数集合 $\mathbb{Z}$ 可以分拆为偶数集合和奇数集合的不交并. 另一方面, 在 $\mathbb{Z}$ 上可以定义等价关系: $a \sim b$ 如果 $a \equiv b \pmod 2$, 故偶数集合是 0 所在的等价类, 奇数集合为 1 所在的等价类.*

设 $f : A \to B$ 为集合间的映射. 对于 $b \in B$, 令b 的原像集合 $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$. 则 $f^{-1}(b)$ 为 A 的子集, 两两不交, 且 $f^{-1}(b) = \varnothing$ 当且仅当 $b \notin f(A)$. 故我们得到分拆

$$A = \bigsqcup_{b\in f(A)} f^{-1}(b), \tag{1.7}$$

我们称为**集合A 由映射 f 决定的分拆**, **映射 f 决定的等价关系** 即

$$a \sim a' \iff f(a) = f(a').$$

例1.12. *我们定义 $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$, 其中 $f(2n) = 0$, $f(2n + 1) = 1$. 则映射 f 决定的等价关系和分拆与例1.11 一致.*

例1.13. *设 $f : \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为实数减法映射 $(x, y) \mapsto x - y$, 则 $f^{-1}(a)$ 为直线 $y = x - a$. 实平面 $\mathbb{R}^2$ 在映射 f 下是平行直线束 $y = x - a$ $(a \in \mathbb{R})$ 的并, 由此我们得到 $\mathbb{R}^2$ 的一个分拆和对应等价关系.*

§1.2 求和与求积符号

代数运算中常常需要对一串数进行加法和乘法. 此时求和符号 $\sum$ 与求积符号 $\prod$ 使得运算比较方便.

首先, 假设有 n 个数 $a_1, \ldots, a_n$, 则我们用

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{表示} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

同样用

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \quad \text{表示} \quad a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

注意到这里 $\sum$ 上的下标 $i = 1$ 和上标 n 表示变量(我们称之为指标) i 从 1 开始到 n 结束, 每个指标 i 对应数 a_i, $\sum$ 即表示对所有这n 个数求和.

我们还应注意到指标的具体字母表述不重要, 既可以用 i, 也可以用 j 或x 或其他字母表示, 即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{x=1}^{n} a_x.$$

将上述概念稍作推广, 设 I 为有限集合, 对 I 中任何元素 i 对应数 a_i, 则我们用 $\sum\limits_{i\in I} a_i$ 表示所有 a_i 的和, 用 $\prod\limits_{i\in I} a_i$ 表示所有 a_i 的积. I 称为指标集, I 中元素称为指标. 如果指标集从上下文容易得知, 我们也常简记为$\sum\limits_{i} a_i$

例1.14. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} a_i.$

例1.15. 设 n 为正整数, f 为 $\mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ 的函数, 则和 $\sum\limits_{1\le d|n} f(d)$ 表示对所有 $f(d)$ (d 为正整数且 $d \mid n$) 的求和.

例1.16. 如果对任意指标 $i \in I, a_i \equiv 1$, 则 $\sum\limits_{i\in I} 1 = |I|$, 即 I 的元素个数.

例1.17. 设 I 与 J 均为有限集合, 则它们的笛卡尔积 $I \times J$ 也是有限集合. 如每个 $(i, j) \in I \times J$ 对应于数 a_{ij}, 则求和

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}(\sum_{j\in J} a_{ij}) = \sum_{j\in J}(\sum_{i\in I} a_{ij}) \tag{1.8}$$

均表示对所有 a_{ij} 的求和. 特别地, 我们有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}). \tag{1.9}$$

例1.18. 如果有限集 I 是非空集合 I_1 与 I_2 的不交并, 则由定义易知

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i, \quad \prod_{i\in I} a_i = \prod_{i\in I_1} a_i \cdot \prod_{i\in I_2} a_i. \tag{1.10}$$

由于 $I = I \bigsqcup \varnothing$ 为 I 与空集的不交并, 为使上述等式对任何不交并成立, 我们定义

$$\sum_{i\in\varnothing} a_i = 0, \quad \prod_{i\in\varnothing} a_i = 1. \tag{1.11}$$

对于求和与求积符号, 我们有如下性质.

命题1.19. *(1)* $\sum\limits_{i\in I}(\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha \sum\limits_{i\in I} a_i + \beta \sum\limits_{i\in I} b_i$.

(2) $\prod\limits_{i\in I} a_i b_i = \prod\limits_{i\in I} a_i \prod\limits_{i\in I} b_i$.

例1.20. 计算

$$A_k = \sum_{i=1}^{n} i^k, \ (k = 0, 1, 2).$$

解. (i) 对于 $k = 0$, $i^k = 1$. 故

$$A_0 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n. \tag{1.12}$$

(ii) 对于 $k = 1$, 注意到如果 i 从 1 变化到 n, 则 $n+1-i$ 从 n 变化到 1.

$$A_1 = \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n}(n+1-i) = \sum_{i=1}^{n}(n+1) - \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1) - A_1,$$

故

$$A_1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.13}$$

(iii) 对于 $k = 2$, 由于对每个整数 i,

$$(i+1)^3 = i^3 + 3i^2 + 3i + 1,$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + 1.$$

等号左边与右边第一项消去 $\sum_{i=2}^{n} i^3$, 即

$$\sum_{i=2}^{n+1} i^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 = 3A_2 + 3A_1 + n,$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3A_2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n.$$

对 A_2 解此等式, 即得

$$A_2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.14}$$

□

定理1.21 (牛顿二项式定理). 设 n 为正整数, 则

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{1.15}$$

此处 $\binom{n}{k} = C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

注记. C_n^k 与 $\binom{n}{k}$ 为同一记号. 在中学数学我们常用记号 C_n^k, 在高等数学中更习惯使用记号 $\binom{n}{k}$.

证明. 对 n 个 $(x+y)$ 的乘积展开要得到 $x^k y^{n-k}$, 这说明要在 n 个 $(x+y)$ 中 k 个取 x, $n-k$ 个取 y, 故 $x^k y^{n-k}$ 的系数是 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. □

定理1.22 (Abel 求和, 或谓部分求和). 对于 $k = 1, 2, \ldots, n$, 令

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = S_k,$$

令 $S_0 = 0$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = S_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} S_i (b_i - b_{i+1}). \tag{1.16}$$

证明. 由于 $a_i = S_i - S_{i-1}$ 对 $i = 1, \ldots, n$ 成立, 故

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= \sum_{i=1}^{n} (S_i - S_{i-1}) b_i = \sum_{i=1}^{n} S_i b_i - \sum_{i=0}^{n-1} S_i b_{i+1} \\ &= S_n b_n + \sum_{i=0}^{n-1} S_i (b_i - b_{i+1}) - S_0 b_1 = S_n b_n + \sum_{i=0}^{n-1} S_i (b_i - b_{i+1}).\end{aligned}$$

定理得证. □

注记. Abel 求和公式是数学分析中, 特别是在研究数项级数和函数项级数收敛性时十分有用.

下面我们举一个应用 Abel 求和的例子.

例1.23. 我们有下述等式:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \begin{cases} \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, & \text{如果} x \neq 1, \\ n+1, & \text{如果} x = 1. \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i x^i = \begin{cases} \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}, & \text{如果 } x \neq 1, \\ \frac{n(n+1)}{2}, & \text{如果 } x = 1. \end{cases}$$

解. 第一个等式立得.

对于第二个等式, 如 $x = 1$, $\sum\limits_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. 如 $x \neq 1$, 令 $a_i = x^i$, $b_i = i$, 由第一个等式, 则$S_k = \sum\limits_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$. 故由 Abel 求和公式, 令 $S_{-1} = 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i x^i &= S_n \cdot n + \sum_{i=0}^{n-1} S_i (b_i - b_{i+1}) \\ &= \frac{n(x^{n+1}-1)}{x-1} - \frac{1}{x-1} \sum_{i=0}^{n-1} (x^{i+1} - 1) \\ &= \frac{n(x^{n+1}-1)}{x-1} - \frac{1}{x-1} \left(\frac{x^{n+1}-x}{x-1} - n \right) \\ &= \frac{n(x-1)(x^{n+1}-1) - x^{n+1} + x + n(x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

等式得证. □

§1.3 复数

§1.3.1 复数域的定义

我们已经学习过自然数, 整数, 实数的概念. 本节将引入实数的进一步推广, 即复数.

所谓**复数** (complex number), 即形如 $z = x + yi$ 的数, 其中 x, y 为实数, $i^2 = -1$. 由于 i 不可能为实数 (实数平方为正实数), 故复数不是实数. 我们称 x 为 z 的实部, 记为 $Re(z)$, y 为 z 的虚部, 记为 $Im(z)$. 所有复数的集合记为 $\mathbb{C}$.

在复数集 $\mathbb{C}$ 上我们有如下的**加法**和**乘法运算**. 对于 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 令

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i, \tag{1.17}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i. \tag{1.18}$$

容易看出

(1) 加法与乘法满足交换律, 结合律和分配律.

(2) 如果将实数 x 看成复数 $x + 0i$, 则两个实数在实数意义下的加法与乘法运算和在复数意义下的运算一致. 由此, 可以将实数集看成复数集的子集.

(3) 对于复数 z, $0 = 0 + 0i$ 和 $1 = 1 + 0i$, 有

$$z + 0 = 0 + z = z, \ z \cdot 1 = 1 \cdot z = z.$$

(4) 对于复数 $z = x + yi$, 存在唯一的复数 $-z = (-x) + (-y)i$ 使得

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

由(4), 我们可以定义复数集 $\mathbb{C}$ 上的**减法运算**

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2). \tag{1.19}$$

(5) 对于 $z = x + yi$, z 的**共轭复数** $\overline{z}$ 定义为 $x - yi$. 由复数乘法知

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2.$$

故当 $z \neq 0$ 时, 存在唯一复数

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{yi}{x^2 + y^2} \tag{1.20}$$

使得

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1.$$

由此可以定义复数集 $\mathbb{C}$ 上的**除法运算**

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} \ (z_2 \neq 0). \tag{1.21}$$

如上所示, 我们在复数集 $\mathbb{C}$ 上定义了四则运算, 并且满足相应的交换律, 结合律和分配律. 这样就得到复数域 $\mathbb{C}$. 我们有如下的集合包含关系

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

§1.3.2 复数的几何意义与复平面

在高中数学学习中, 我们用一条直线, 即实数轴来表示实数. 在复数 $z = x + yi$ 中有两个实变量, 故可以用平面上的点 (x, y) 来表示复数, 平面即称复平面, x 轴称为**实轴**, y 轴称为**虚轴**.

设点 z 与坐标原点 O(即点0)的距离为 r, Oz 与x 轴的夹角为θ. 则根据三角函数公式, 有

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta. \tag{1.22}$$

即

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{1.23}$$

定义1.24. 实数$r = \sqrt{x^2 + y^2} := |z|$ 称为 z 的**模长**, θ 称为 z 的**辐角**. 如 $z = 0$, θ 可以取任意值.

注记. 如果 θ 满足 (1.22), 则对所有整数 n, $\theta + 2n\pi$ 也满足 (1.22). 所有这些角度 $\theta + 2n\pi (n \in \mathbb{Z})$ 均是 z 的辐角, 其中有一个角度 θ_0 满足条件 $0 \leq \theta_0 < 2\pi$, 此角度称为 z 的**主辐角**.

由 z 的几何意义可以看出, z 的共轭 $\overline{z}$ 即是点 z 关于 x 轴的对称点 $(x,-y)$. 我们有

$$\overline{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta),\quad z\cdot\overline{z}=r^2=|z|^2. \tag{1.24}$$

我们不加证明地引入

定理1.25 (欧拉公式)**.** 设$\theta\in\mathbb{R}$, 则

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta. \tag{1.25}$$

对于此公式的证明将在复变函数中学习到. 由欧拉公式, 则

$$z=re^{i\theta},\quad \overline{z}=re^{-i\theta},\quad z^{-1}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}. \tag{1.26}$$

在证明公式 (1.25)前, 大家可以认为它给出 z 的一种简洁记录方式.

命题1.26. 如 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_1e^{i\theta_1}$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_2e^{i\theta_2}$, 则

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

即复数相乘相当于模长相乘, 辐角相加.

证明. 自然本命题是欧拉公式的推论. 此处我们只用定义和三角函数和角公式来证明.我们有

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_2\sin\theta_1))\\&=r_1r_2(\cos((\theta_1+\theta_2))+i\sin(\theta_1+\theta_2)),\end{aligned}$$

证毕. □

例1.27. 求出所有满足条件 $z^n=1$ 的集合.

证明. 设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 则

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

如 $z^n=1$, 则

$$\begin{cases}r^n=1,\\ \cos n\theta=1,\sin n\theta=0.\end{cases}$$

解得

$$r = 1,\ \theta = \frac{2k\pi}{n}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

由于 cos 与 sin 为周期函数, 故

$$z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\ (0 \le k < n).$$

令 $\zeta_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, 则满足 $z^n = 1$ 的复数集为

$$C_n = \{1, \zeta_n, \ldots, \zeta_n^{n-1}\}.$$

注意到它对应单位圆周 n 个点, 它们恰好构成正 n 边形. □

例1.28. 试求 $\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta$ 与 $\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta$.

解. 令 $z = \cos\theta + i\sin\theta$, 则

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n}\cos k\theta + i\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta.$$

只需求

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \frac{z^{n+1}-1}{z-1}, & \text{如果 } z \ne 1; \\ n+1, & \text{如果 } z = 1. \end{cases}$$

的实部与虚部即可. 如 $z \ne 1$,

$$\begin{aligned} z - 1 &= (\cos\theta - 1) + i\sin\theta \\ &= -2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ &= -2\sin\frac{\theta}{2}(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) - i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})) \\ &= -2\sin\frac{\theta}{2}\ e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})}. \end{aligned}$$

同理

$$z^{n+1} - 1 = -2\sin\frac{n+1}{2}\theta\ e^{i(\frac{n+1}{2}\theta - \frac{\pi}{2})}.$$

故

$$\frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\ e^{i\frac{n}{2}\theta}.$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta=\begin{cases}\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{n}{2}\theta, & \text{如 } \theta\neq 2m\pi;\\ n+1, & \text{如 } \theta=2m\pi.\end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta=\begin{cases}\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{n}{2}\theta, & \text{如 } \theta\neq 2m\pi;\\ 0, & \text{如 } \theta=2m\pi.\end{cases}$$

□

§1.4 根与系数的关系

令 $\mathbb{F}$ 为域 $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 域$\mathbb{F}$ 上的(一元) **多项式**即

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

其中 $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$, x 为未定元, 所有多项式集合记为 $\mathbb{F}[x]$. 如 $a_n\neq 0$, 称 a_n 为 $f(x)$ 的**首项系数**, 如 $a_n=1$, 称 $f(x)$ 为**首一多项式**, n 称为 f 的**次数**, 记为 $\deg f$, a_0 称为**常数项**. 如果所有 a_i 均为 0, 则称 $f(x)=0$ 为**零多项式**, 其次数定义为 $-\infty$.

设 $f(x)=\sum_i a_ix^i, g(x)=\sum_i b_ix^i\in\mathbb{F}[X]$, 定义**多项式的加法与乘法**如下

$$f(x)+g(x)=\sum_i(a_i+b_i)x^i, \tag{1.27}$$

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_k(\sum_{i+j=k}a_ib_j)x^k. \tag{1.28}$$

两个**多项式相等**是指其对应项系数相等, 即 $a_i=b_i$ 对所有 i 成立.

命题1.29. 设 $f(x),g(x)\in\mathbb{F}[x]$, 则

(1) $\deg(f(x)+g(x))\leq\max(\deg f(x),\deg g(x))$, 即 $f(x)+g(x)$ 的次数不大于 $f(x)$ 或 $g(x)$ 的次数.

(2) $\deg(f(x)\cdot g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)$. 此处我们设 $-\infty+a=-\infty$, 故 $f(x)\cdot g(x)\neq 0$ 如 $f(x),g(x)$ 均不为 0.

证明. 易验证. □

对于任意 $a \in \mathbb{F}$, $f(x) = \sum_i a_i x^i$, 则

$$f(a) = \sum_i a_i a^i \in \mathbb{F}$$

称为 $f(x)$ 在 a 处的**赋值**. 易验证

$$f(a) + g(a) = (f+g)(a),$$
$$f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a).$$

定义1.30. 设多项式 $f(x) \neq 0$, 如元素 $a \in \mathbb{F}$ 满足 $f(a) = 0$, 称 a 为 $f(x)$ 的**根** 或**零点**.

命题1.31. *a 是 $f(x)$ 的根当且仅当存在 $0 \neq g(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使得 $f(x) = (x-a)g(x)$.*

证明. 对任意 $a \in \mathbb{F}$,

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} a_i a^i = \sum_{i=1}^{n} a_i (x^i - a^i).$$

由 $x^i - a^i = (x-a)(x^{i-1} + x^{i-2}a + \cdots + xa^{i-2} + a^{i-1})$, 知

$$f(x) - f(a) = (x-a)g(x).$$

且若 $f(x) \neq 0$, 则$g(x) \neq 0$. 因此

$$f(a) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = (x-a)g(x),\ g(x) \neq 0.$$

命题得证. □

设 $f(x)$ 为 n 次多项式($n \geq 1$), $x_1, \ldots, x_n$ 是 $f(x)$ 的 n 个不同根, 则由上述命题

$$f(x) = (x - x_1)g(x),$$

由 $0 = f(x_2) = (x_2 - x_1)g(x_2)$ 知 $g(x_2) = 0$. 故由上述命题, $g(x) = (x - x_2)h(x)$, $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)h(x)$. 依次类推, 我们有

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)l(x).$$

考虑两边次数知 $l(x)$ 次数为 0, $l(x) = C(C \neq 0)$. 再考虑两边首项系数知 $C = a_n$, 故

$$f(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

定理1.32 (韦达定理, 根与系数的关系). *(1)* 设 $x_1,\dots,x_n$ 为 n 次多项式 $f(x)$ 的 n 个不同的根, 则

$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n). \tag{1.29}$$

(2) 如果多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-x_i),$$

*(*此时 x_i 可以相同*)*, 则对于$1\le k\le n$,

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}. \tag{1.30}$$

特别地,

$$x_1+\cdots+x_n=(-1)\frac{a_{n-1}}{a_n}, \tag{1.31}$$

$$x_1\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \tag{1.32}$$

证明. (1) 如上所证. (2) 比较两边系数即得. □

取 $n=2$ 与 3, 则回到大家熟悉情形.

定理1.33. *(1)* 如 $f(x)=x^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)$, 则

$$x_1+x_2=-b,\quad x_1\cdot x_2=c. \tag{1.33}$$

(2) 如 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, 则

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= -b,\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 &= c,\\ x_1x_2x_3 &= -d. \end{cases} \tag{1.34}$$

习　　题

习题1.1. 证明命题 *1.1.*

习题1.2. 设 $f : A \to B$ 是集合的映射, A 是非空集合. 试证:

(1) f 为单射⇔存在 $g : B \to A$, 使得 $g \circ f = 1_A$;

(2) f 为满射⇔存在 $h : B \to A$, 使得 $f \circ h = 1_B$.

习题1.3. 如果 $f : A \to B$, $g : B \to C$ 均是一一对应, 则 $g \circ f : A \to C$ 也是一一对应, 且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

习题1.4. 设 A 是有限集, $P(A)$ 是 A 的全部子集(包括空集)所构成的集族, 试证 $|P(A)| = 2^{|A|}$, 换句话说, n 元集合共有 2^n 个子集.

习题1.5. 证明等价关系的三个条件是互相独立的, 也就是说, 已知任意两个等价不能推出第三个条件.

习题1.6. 设集合A 中关系满足对称性和传递性, 且对A 中任意元素都和某元素有关系, 证明此关系为等价关系.

习题1.7. 设 A, B 是两个有限集合.

(1) A 到 B 的不同映射共有多少个?

(2) A 上不同的二元运算共有多少个?

习题1.8. 证明容斥原理.

习题1.9. 试求 A_3 与 A_4.

习题1.10. 试求下列式子的值:

$$(1)\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k},\quad (2)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)},$$
$$(3)\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k},\qquad (4)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2.$$

习题1.11. 在复数范围内求解方程$z^2 + z + 1 = 0$

习题1.12. 试用复数表示圆心为z_0, 半径为r 的圆的方程.

习题1.13. 如果直线$y = ax+b$ 交曲线$y^2 = x^3+cd+d$ 于两点(x_1, y_1), (x_2, y_2), 试用x_1, y_1, x_2, y_2 表示$a, b, , c$ 和d.

第二章　何为群、环、域

§2.1　什么是群?

§2.1.1　群论历史

群论的起源来自于三个方面：数论, 代数方程的求解以及几何学.

在数论方面, 主要是整数的同余理论, 也称为模的算术. 这方面的工作包括费马, 欧拉的工作, 最后在高斯1801年的《算术研究》中集大成. 中国人为之骄傲的中国剩余定理(孙子定理)是同余理论一个中心定理.

对于代数方程的根式求解, 吸引了拉格朗日等的研究, 在阿贝尔和伽罗瓦的手中得到彻底解决. 伽罗瓦在1830年左右首先提出了群的思想. 实际上他研究的是置换群的理论. 由此他证明了一般五次或以上代数方程根式不可解. 他的关于置换群的工作在柯西和凯莱等人手中继续得到发展.

群在几何上的作用首先体现在射影几何的研究上. 1871年, 克莱因提出著名的爱尔兰根纲领, 在其中他指出几何学是变换群的几何. 从此群论在几何中的作用越来越重要.

1880年以后, 这三个方面融合在一起, 开启了抽象群论和抽象代数的研究. 本书的目的主要就是讲述前两个方面的知识, 并给出群、环、域的概念和一些性质.

§2.1.2　群的定义和例子

我们首先给出群的定义.

定义2.1. 集合 G 及其上的二元运算 $\cdot$ 如果满足下述三条件:

(1) 结合律成立, 即对 $a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(2) 存在**单位元** (identity element) $1 = 1_G$, 即对任意 $a \in G$,

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

单位元也称为**幺元**.

(3) G 上每个元素 a 均有**逆元** (inverse), 即存在元素 $b \in G$ 使得

$$a \cdot b = b \cdot a = 1.$$

则称 $(G, \cdot)$ 为**群** (group), 二元运算 $\cdot$ 称为**群的乘法** (multiplication).

注记. (1) 习惯上, 我们常常省略乘法运算, 称 G 为群, 且记 $a \cdot b$ 为 ab.

(2) 如果 $(G, \cdot)$ 仅满足结合律, 我们称之为**半群** (semigroup); 如果 $(G, \cdot)$ 满足结合律且存在单位元, 我们称之为**含幺半群** (monoid).

命题2.2. *设 G 为群, 则下述性质成立:*

(1) G 中任何元素的逆元均唯一.

(2) **消去律**成立*: 如果 $ab = ac$, 则 $b = c$; 如果 $ba = ca$, 则 $b = c$.*

证明. (1) 如果 b, c 为 $a \in G$ 的逆元, 则

$$b = b \cdot 1 = b(ac) = (ba)c = 1 \cdot c = c.$$

(2) 如果 $ab = ac$, 则 $a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac)$, 由结合律即得 $b = c$. □

定义2.3. 如果群 G 的元素个数有限, 称 G 为**有限群** (finite group), 其元素个数称为 G 的**阶** (order). 无限群的阶记为无穷.

定义2.4. 如果群 G 上的二元运算满足交换律, 我们称 G 为**阿贝尔群** (abelian group), 亦称为**交换群** (commutative group). 我们常常用加法 $+$ 来表示阿贝尔群 G 的二元运算, 并将其上的单位元记为 0 或 0_G, 记 a 的逆元为 $-a$.

下面给出一些群的例子.

例2.5. *由群的定义, 群 G 一定包含单位元 1_G. 另一方面, 仅由单位元构成的集合满足群的三个公理, 故也是群.*

例2.6. *(1) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 在加法运算下构成无限阿贝尔群, 0 为加法单位元.*

(2) $\mathbb{Q}^\times$, $\mathbb{R}^\times$, $\mathbb{C}^\times$ 在乘法运算下构成阿贝尔群, 1 为乘法单位元.

(3) 令 $C_n = \{z \mid z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$ 为n 次单位根全体, 特别地, $C_2 = \{1, -1\}$, 则C_n 在乘法意义下构成n 阶群. 令$S^1 = \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ 为复平面上单位圆集合, 它是无限乘法群.

例2.7. 正四面体的旋转群. 考虑所有保持四面体不变的旋转变换, 这里有三种情况.

- 有两个顶点不动, 则剩下两个点也不动, 故为恒等变换.
- 有且仅有一个顶点 A 不动, 则 BCD 的中心 O 也不动. 旋转变换通过旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$ 将 B, C, D 旋转到 C, D, B 或 D, B, C, 共有两个变换. 将顶点 A 变动, 则得到 $4 \times 2 = 8$ 种旋转变换.
- 如果所有顶点都动, 则若 A 旋转到 B, 则 B 不能旋转到 C 或 D(否则 D 或 C 不动), 即 B 必然旋转到 A. 因此 C 旋转到 D, D 旋转到 C. 即 AB 中点 M 与 CD 中点 N 连接的直线保持不动. 这样的情况共有 3 种.

所有正四面旋转变换在复合意义下构成群, 恒等变换为单位元. 可以验证第二类变换和第三类变换的复合不交换, 故正四面体的旋转变换群是12 阶非阿贝尔群.

例2.8. 更一般地, 设 S 是一个刚体, 即不可压缩和拉伸的物体. 保持 S 不变的运动构成一个群, 称为 S 的**刚体运动群**. 一般而言它不是阿贝尔群.

例2.9 (对称群)**.** 设 A 为集合. 记 A 到自身的映射集合为 M_A. A 到自身的一一对应称为 A 的**置换** *(permutation)*. 记A 的所有置换集合为 S_A. 则 M_A 在映射的复合意义下是含幺半群但不是群, 而 S_A 是群, 其单位元为恒等映射, 我们称 S_A 为 A 的**对称群** *(symmetric group)*或**置换群** *(permutation group)*.

特别地, 设 $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, 记 $S_A = S_n$, 则 S_n 为 $\{1, \ldots, n\}$ 所有置换构成的集合. 我们知道 S_n 中含有 $n!$ 个置换. 如果 $n = 2$, 则 $S_2 = \{\mathrm{id}, \tau\}$, 其中 $\tau(1) = 2, \tau(2) = 1$. 容易验证 S_2 为阿贝尔群. 当 $n \geqslant 3$ 时, S_n 不是交换群.

例2.10. $\mathbb{R}$ 上 2 阶方阵*(*2×2 矩阵*)*是指元素

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

定义矩阵的加法为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

定义矩阵乘法为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

则

(1) 所有 R 上 2 阶方阵的集合 $M_2(\mathbb{R})$ 是加法交换群.

(2) (i) 矩阵乘法满足结合律*(*习题*)*.

(ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(iii) 如 $\delta = ad - bc \neq 0$. 令 $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\delta} & -\frac{b}{\delta} \\ -\frac{c}{\delta} & \frac{a}{\delta} \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由*(i),(ii),(iii),* 集合

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

在乘法意义下构成群, 称为 2 **阶一般线性群**. 作为练习, 可以证明它不是阿贝尔群.

(3) 将 2 换成 n, $\mathbb{R}$ 换成 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{C}$ 等就得到更一般的矩阵群. 我们将在解析几何和线性代数中学习到.

例2.11. 设 $SO_2(\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 中形如

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

的元素构成的集合, 则根据矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

由此容易验证 $SO_2(\mathbb{R})$ 满足群的三条公理且满足交换律, 故 $SO_2(\mathbb{R})$ 是阿贝尔群, 称为2 **阶特殊正交群**.

§2.1.3 子群与直积

有了群的概念和例子, 我们希望(1)研究群的结构, (2)得到更多的群的例子. 这时候, 需要子群与直积的概念.

定义2.12. 设 G 为群. 如果 H 是 G 的子集, 且对 G 的乘法运算构成群, 则称 H 是 G 的**子群** (subgroup), 记为 $H \leqslant G$. 如果 $H \neq G$, 称 H 为 G 的**真子群** (proper subgroup), 记为 $H < G$.

例2.13. 对任意群 G, $\{1\}$ 和 G 均是 G 的子群, 称为 G 的**平凡子群** *(trivial subgroup)*.

由定义可知, 要验证 H 为 G 的子群, 只需验证如下三点, 即

(1) $1 \in H$.

(2) 如果 $a \in H$, 则 $a^{-1} \in H$.

(3) 如果 $a, b \in H$, 则 $ab \in H$.

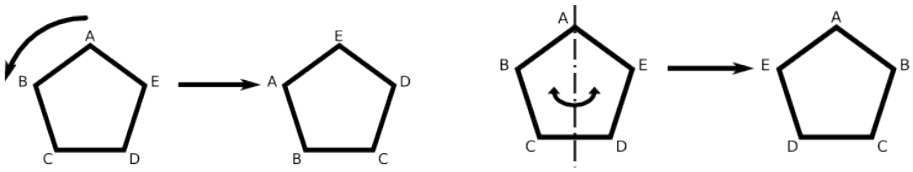
命题2.14. 子集合 H 恰是群 G 的子群当且仅当对任意 $a, b \in H, ab^{-1} \in H$.

证明. 如果 $H \leqslant G, a, b \in H$, 则 $b^{-1} \in H, ab^{-1} \in H$. 反过来, 取 $a = b \in H$, 则 $1 = aa^{-1} \in H$. 取 $a = 1, b = a$, 则 $1 \cdot a^{-1} = a^{-1} \in H$. 取 $a = a, b = b^{-1}$, 则 $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$. 故$H$ 是G 的子群. □

例2.15. $n\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的子群. C_n, S^1 是 $\mathbb{C}^\times$ 的子群. $\{\pm 1\}$ 是 $\mathbb{R}^\times$ 的子群.

例2.16 (二面体群)**.** 设 P 是正 n 边形$(n \geqslant 3)$, 保持 P 不变的所有刚性变换有两种: 旋转和反射, 如图 *2.1* 所示.

记 D_n 为所有旋转和反射在复合意义下构成的群, 则 D_n 为正 n 边形的对称群, 称为**二面体群** *(dihedral group)*. 由于每一个变换对应于正n 边形n 个顶点的置换, 故 $D_n \leqslant S_n$. D_n 的所有元素包括: 恒等变换, $n-1$ 个旋转, n 个反射, 故为$2n$ 阶群.



(a) 旋转 (b) 反射

图 2.1: 正5边形的旋转和反射

注记. 二面体群在不同文献中记为 D_n 或 D_{2n}. 习惯上, 几何学家喜欢用 D_n(强调正多边形的边数), 代数学家喜欢用 D_{2n} (强调正多边形对称群的阶).

定义2.17. 设 G_1, G_2 为群, 则 G_1 与 G_2 的笛卡尔积 $G = G_1 \times G_2$ 在乘法运算

$$(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$$

下构成群: 它的单位元是 $1_G = (1_{G_1}, 1_{G_2})$, 元素 (g_1, g_2) 的逆是 (g_1^{-1}, g_2^{-1}). 群 G 称为 G_1 与 G_2 的**直积** , 或者称为**笛卡尔积**.

注记. (1) 由定义立知群的直积的阶等于群的阶的乘积.

(2) 如果 H_1 和 H_2 分别是 G_1 和 G_2 的子群, 则 $H_1 \times H_2$ 是 $G_1 \times G_2$ 的子群. 特别地, $G_1 \times G_2$ 有子群 $\{1_{G_1}\} \times G_2$ 和 $G_1 \times \{1_{G_2}\}$.

§2.2 环与域的定义和例子

§2.2.1 环与域的定义和例子

定义2.18. 集合 R 称为**(含幺)环**(ring with identity), 如果 R 上存在加法和乘法两种运算, 且

(1) R 关于加法为阿贝尔群, 我们记它的加法单位元为 0;

(2) R 关于乘法满足结合律且有单位元 1;

(3) 加法和乘法运算满足**分配律**, 即对任意 $\lambda, a, b \in R$,

$$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b, \quad (a+b)\lambda = a\lambda + b\lambda.$$

如果乘法满足交换律, 则称 R 为**交换环**(commutative ring). 如果$R - \{0\}$ 是乘法阿贝尔群, 则称 R 为**域** (field).

例2.19. 令布尔代数 $\mathbb{B}=\{0,1\}$, 其加法与乘法定义为

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

,

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

则 $\mathbb{B}$ 构成域. 同样令 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}=\{0,1,2,3\}$, 加法和乘法如下

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$\times$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

则$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 为交换环.

例2.20. 我们熟知的$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ 和$\mathbb{C}$ 是交换环, 并且$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ 和$\mathbb{C}$ 是域, 而$\mathbb{N}$ 不是环.

例2.21. $\mathbb{R}$ 上所有 2 阶方阵的集合 $M_2(\mathbb{R})$ 是一非交换环. 同样, $M_2(\mathbb{Q}), M_2(\mathbb{C})$ 也是非交换环.

例2.22. 设 $\mathbb{H}\subseteq M_2(\mathbb{C})$ 为所有形如

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix},\ \text{其中 } a,b\in\mathbb{C}$$

的矩阵集合, 则在矩阵加法和乘法意义下 $\mathbb{H}$ 构成环, 且 $\mathbb{H}^\times=\mathbb{H}-\{0\}$ 是乘法群, 但由于乘法不交换, 故 $\mathbb{H}$ 不是域, 称为**四元数体**.

例2.23. 如果 R 是交换环, 设 $R[x]$ 为R 上的多项式集合

$$R[x]=\{\sum_i a_i x^i \mid a_i\in R\}.$$

多项式加法与乘法定义为

$$\sum_i a_i x^i+\sum_i b_i x^i=\sum_i (a_i+b_i)x^i,$$

$$\sum_i a_i x^i \cdot \sum_j b_j x^j = \sum_k (\sum_{i+j=k} a_i b_j) x^k.$$

则 $R[x]$ 还是交换环, 而$R[x]$ 的0 和1 就是R 的0 和1。

定义2.24. 环 R 上的**单位**是指 R 中乘法可逆元. 令 $R^\times$ 等于R 中所有单位的集合, 则 $R^\times$ 为乘法群, 称为R 的**单位群**.

例2.25. F 为域即是指单位群 $F^\times = F - \{0\}$ 是乘法阿贝尔群.

§2.2.2 环的性质

命题2.26. 设 R 为环, 则

(1) $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.

(2) 如果 $0 = 1$, 则 $R = \{0\}$.

(3) 对于R 中元素a_i $(1 \le i \le m)$ 和b_j $(1 \le j \le n)$, 则

$$\sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j, \quad \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_j a_i.$$

证明. (1) 由$x \cdot 0 = x(0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, 故$x \cdot 0 = 0$. 同理$0 \cdot x = 0$.

(2) 由(1), $x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$ 对任意$x \in R$ 成立.

(3) 首先我们可以用归纳法将分配律推广为对任意$m \ge 2$,

$$\begin{aligned} a(b_1 + b_2 + \cdots + b_m) =& ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_m, \\ (b_1 + b_2 + \cdots + b_m)a =& b_1 a + b_2 a + \cdots + b_m a. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} (\sum_{i=1}^m a_i)(\sum_{j=1}^n b_j) =& (\sum_{i=1}^m a_i)b_1 + (\sum_{i=1}^m a_i)b_2 + \cdots + (\sum_{i=1}^m a_i)b_n \\ =& \sum_{i=1}^m a_i b_1 + \sum_{i=1}^m a_i b_2 + \cdots + \sum_{i=1}^m a_i b_n \\ =& \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j. \end{aligned}$$

同理可得另外等式. □

注记. (1) 如果 $x, y \neq 0$, xy 可以为 0, 如在例 2.21, 在环 $M_2(\mathbb{R})$ 中,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

(2) 在环中一般而言$a_i b_j \neq b_j a_i$.

定义2.27. 设 R 为交换环, R 称为**整环**是指如 $ab = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$. 换言之, 即如果$a \neq 0$ 且$b \neq 0$, 则$ab \neq 0$.

例2.28. 我们有

(1) 域均是整环.

(2) 整数环$\mathbb{Z}$ 也是整环.

(3) 如果R 是整环, 则它的多项式环$R[X]$ 也是整环.

(4) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 不是整环, 因为在其中$2 \times 2 = 0$.

命题2.29. 设 R 为交换环, 下列两条件等价:

(1) R 为**整环**.

(2) R 上**乘法消去律**成立, 即如 $ab = ac$, 且 $a \neq 0$, 则 $b = c$.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2): 如$ab = ac$, 则$a(b - c) = 0$, 又由于 $a \neq 0$, 故 $b - c = 0$, 即$b = c$.

(2) $\Rightarrow$ (1): 如$ab = 0 = a \cdot 0$, 则或者$a = 0$, 或者$a \neq 0$, 则由消去律$b = 0$. □

§2.3 群与环的同态与同构

§2.3.1 群的同态与同构

我们已经学习到群的很多例子, 比如说

(i) 作为 2 阶群, 我们有

(1) $C_2 = \{1, -1\}$, 即 2 次单位根构成的乘法群.

(2) 布尔代数$\mathbb{B} = \{0, 1\}$ 作为加法群(例 2.19).

(ii) 作为 4 阶群, 我们有

(1) $C_4 = \{\pm 1, \pm i\}$, 4 次单位根群.

(2) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$ 作为加法群(例 2.19).

(3) $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$, 两个 2 元群的直积.

如何区分这些群? 如何理解它们的本质差别? 这需要研究群与群之间的关系, 也就是说需要研究群之间的映射. 但必须注意到, 群不仅是集合, 它上面有乘法运算, 故群与群之间的映射应该保持乘法运算. 我们有如下的定义.

定义2.30. 设 G_1 与 G_2 为群, 映射 $f : G_1 \to G_2$ 称为**群同态**是指对任意 $g, h \in G_1$,

$$f(gh) = f(g)f(h).$$

注意到左边 $g \cdot h$ 是 G_1 中的乘法运算, 右边 $f(g) \cdot f(h)$ 是 G_2 中的乘法运算.

如 f 作为集合映射为单射, 称 f 为**单同态**. 如 f 为满射, 称 f 为**满同态**. 如 f 为双射, 则称 f 为**同构**, 记为 $f : G_1 \cong G_2$.

命题2.31. *设$f : G_1 \to G_2$ 为群同态, 则*

(1) 群同态总是将单位映到单位, 即$f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$.

(2) 群同态总是将逆元映到逆元, 即对于$g \in G_1$, $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

证明. 由$f(1_{G_1}) = f(1_{G_1} \cdot 1_{G_1}) = f(1_{G_1}) \cdot f(1_{G_1})$, 再由消去律即得(1).

若$g \in G_1$, 则

$$f(g) \cdot f(g^{-1}) = f(g \cdot g^{-1}) = f(1_{G_1}) = 1_{G_2},$$

故 $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$, (2) 得证. □

我们来看一些群同态和同构的例子.

例2.32. *如果H 是G 的子群, 则包含映射$i : H \to G, h \mapsto h$ 为群同态, 且是单同态.*

例2.33. *对于加法群$\mathbb{R}$, 特殊正交群 $S0_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$, 和单位圆 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, 我们有群同构*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\sim} & SO_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & S^1 \\ \theta & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & \longmapsto & e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \end{array}$$

故在同构意义下, 这三者是同一群.

另外令 $\mathbb{R}_+^\times$ 为所有正实数构成的乘法群, 则指数函数

$$\exp:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^\times, x\to e^x$$

是群同构. 其逆为对数函数

$$\log=\ln:\ \mathbb{R}_+^\times\to\mathbb{R},\ y\mapsto\ln y.$$

例2.34. 对于 2 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, 我们定义 A 的**行列式**为

$$\det A=|A|=ad-bc. \tag{2.3}$$

命题2.35. 矩阵行列式的乘积是矩阵乘积的行列式. 即对 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $A'=\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}$,

$$\det A\cdot\det A'=\det(AA'). \tag{2.4}$$

故行列式映射给出群同态

$$\det:\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^\times,$$

且此同态为满同态.

证明. 设 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $A'=\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}$, 则 $AA'=\begin{pmatrix}aa'+bc'&ab'+bd'\\ca'+dc'&cb'+dd'\end{pmatrix}$. 故

$$\begin{aligned}\det(AA')&=(aa'+bc')(cb'+dd')-(ab'+bd')(ca'+dc')\\&=aa'dd'+bb'cc'-bd'ca'-ab'dc'\\&=(ad-bc)(a'd'-b'c')\\&=\det A\cdot\det A'.\end{aligned}$$

由 $\det\begin{pmatrix}x&0\\0&1\end{pmatrix}=x$, 故 $\det:\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^\times$ 为群的满同态. □

通过构造群同态, 我们将得到子群和一类特殊子群: **正规子群**的例子. 在今后的群论学习中, 正规子群将会是最重要的一个概念, 它将帮助我们定义群上的等价关系, 构造**商群**. 首先我们给出正规子群的定义.

定义2.36. 设G 是群, $x \in G$. 对任意 $g \in G$, gxg^{-1} 称为 x 的**共轭元**.

定义2.37. 设 $H \leq G$, 如对任何 $x \in H$, x 的共轭元均在 H 中, 即 $gHg^{-1} \subseteq H$ 对任意 $g \in G$ 成立, 称 H 是 G 的**正规子群**, 记为 $H \triangleleft G$.

例2.38. *设 G 为阿贝尔群, 则 $gxg^{-1} = x$ 恒成立, 故阿贝尔群的任何子群均是正规子群.*

定义2.39. 设$f : G \to H$ 为群同态. f 的**核** $\ker f$ 定义为H 中单位元的原像, 即

$$\ker f = \{g \in G \mid f(g) = 1\}.$$

f 的**像** $\mathrm{im}f$ 定义为G 中所有元素的像集, 即

$$\mathrm{im}f = \{f(g) \mid g \in G\}.$$

命题2.40. *设$f : G \to H$ 为群同态. 则$\ker f$ 是G 的正规子群, $\mathrm{im}f$ 是H 的子群.*

证明. $\mathrm{im}f$ 是H 的子群由同态的定义立刻可得. 我们只证$\ker f$ 是G 的正规子群.

设$g_1, g_2 \in \ker f$, 则

$$f(g_1 g_2^{-1}) = f(g_1)f(g_2)^{-1} = 1,$$

故$g_1 g_2^{-1} \in \ker f$, 所以$\ker f$ 是G 的子群. 设$g \in \ker f$, $x \in G$, 则

$$f(xgx^{-1}) = f(x)f(g)f(x)^{-1} = 1,$$

故$xgx^{-1} \in \ker f$, 所以$\ker f$ 是G 的正规子群. □

上述命题是群论中最重要定理: **同态基本定理** 的一部分, 我们将在抽象代数进一步学习.

例2.41. 对于行列式同态$\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to R^\times$, 它的核为$\{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det A = ad - bc = 1$, 我们记之为$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, 称为$\mathbb{R}$ 上的2 **阶特殊线性群**.

在群论研究中, 经常会将同构视为相同, 或者说在同构意义下一样. 另一方面, 也会问及同构群之间可以构造多少种同构. 我们有

定义2.42. 如群同态是群 G 到自身的同构, 则称为 G 的自同构.

命题2.43. *(1) 群 G 的所有自同构在复合映射作为乘法下构成群, 称为 G 的自同构群, 记为* $\mathrm{Aut}G$.

(2) 如 $\varphi : G \to H$ 为 G 到 H 同构. 则 G 到 H 的所有同构为 $\varphi\mathrm{Aut}G = \{\varphi \circ f \mid f \in \mathrm{Aut}G\}$.

证明. (1) 显然.

(2) 首先, $\varphi \circ f : G \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\varphi} H$ 为 G 到 H 的同构. 另一方面, 如 φ' 为 $G \to H$ 的同构, 则 $\varphi^{-1} \circ \varphi' : G \to H \to G$ 为 G 的自同构. 故 $\varphi' = \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi') \in \varphi\mathrm{Aut}G$. □

§2.3.2 环的同态与同构

与群的情况类似, 研究环, 主要还是研究环之间的关系, 这就需要研究环之间的映射. 但由于环是特殊的集合, 具有加法和乘法两种运算, 在研究环间映射的时候, 我们需要映射保持运算, 就得到环的同态的概念.

定义2.44. 设R_1, R_2 为环. 映射$f : R_1 \to R_2$ 称为**环同态** 是指下列条件成立:

(1) $f(1) = 1$, 即f 将乘法单位元映到单位元.

(2) 对任意 $g, h \in R_1$,

$$f(g + h) = f(g) + f(h), \quad f(gh) = f(g)f(h).$$

如 f 作为集合映射为单射, 称 f 为**单同态**. 如 f 为满射, 称 f 为**满同态**. 如 f 为双射, 则称 f 为**同构**, 记为 $f : R_1 \cong R_2$.

注记. 只有条件(2) 成立不能保证(1) 成立. 如映射

$$\mathbb{R} \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \quad x \longmapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

满足条件(2) 但不满足条件(1).

由环同态定义, 我们立刻有

命题2.45. *设$f: R_1 \to R_2$ 为环同态, 则$f(0)=0$, $f(-g)=-f(g)$ $(g \in R_1)$, 且$f(g^{-1})=f(g)^{-1}$ (如$g \in R_1^\times$ 可逆). 后者说明环同态将可逆元映到可逆元.*

例2.46. *域F 到任何非零环R 的同态$f: F \to R$ 均是单同态, 事实上, 如果$f(g)=f(h)$ 且$g \neq h$, 则*

$$f(1)=f(g-h)f((g-h)^{-1})=0$$

与$f(1)=1$ 矛盾. 正是由于这一事实, 我们极少考虑域的同态.

例2.47. 映射

$$\mathbb{R} \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \quad x \longmapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

是环的单同态.

例2.48. 映射

$$\mathbb{Z} \to \{0,1\},\ \text{偶数} \mapsto\ 0,\ \text{奇数} \mapsto\ 1$$

是环的满同态.

例2.49. *在上一节中我们定义了四元数体$\mathbb{H}=\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) \mid$ 其中 $a,b \in \mathbb{C}\}$. 我们考虑集合*

$$\mathbb{H}'=\{x+yi+zj+wk \mid x,y,z,w \in \mathbb{R}\},$$

其中加法为对应项相加, 乘法满足结合律及

$$i^2=j^2=k^2=-1,\ ij=-ji=k,\ jk=-kj=i, ki=-ik=j,$$

且加法和乘法满足分配律. 在此加法和乘法运算下, $\mathbb{H}'$ 构成环. 映射

$$f:\ \mathbb{H} \to \mathbb{H}',\ \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mapsto a+bj$$

是环的同构(练习). $\mathbb{H}'$ 是我们在科普书中常见的四元数定义.

通过构造环同态, 我们将得到环中一类特殊集合: **理想**的例子. 在今后的环论学习中, 理想将会是最重要的一个概念, 它将帮助我们定义环上的等价关系, 构造**商环**. 首先我们给出理想的定义.

定义2.50. 设 R 为交换环, R 上的**理想** I 是指 R 的非空子集合, 且满足条件

(1) 对任意 $x, y \in I$, 则 $x \pm y \in I$.

(2) 对任意 $x \in I, r \in R$, 则 $rx \in I$.

例2.51. 设$x \in R$, 则$xR = \{xr \mid r \in R\}$ 是 R 的理想. 特别地, $\{0\}$ 和R 均是R 中的理想. 这样由一个元素生成的理想称为**主理想**.

定义2.52. 设$f : R_1 \to R_2$ 为环同态. f 的**核** $\ker f$ 定义为R_2 中零元的原像, 即

$$\ker f = \{g \in R_1 \mid f(g) = 0\}.$$

f 的**像** $\mathrm{im} f$ 定义为R_1 中所有元素的像集, 即

$$\mathrm{im} f = \{f(g) \mid g \in R_1\}.$$

命题2.53. 设R_1 是交换环, $f : R_1 \to R_2$ 为环同态. 则$\ker f$ 是R_1 的理想, $\mathrm{im} f$ 在R_2 的加法和乘法运算下构成环 (即R_2 的子环).

证明. $\mathrm{im} f$ 在R_2 的加法和乘法运算下构成环由同态的定义立得. 我们只证$\ker f$ 是R_1 的理想, 即需证明: (i) 如$x, y \in \ker f$，则$x \pm y \in \ker f$; (ii) 如$r \in R_1$, $x \in \ker f$，则$rx \in \ker f$. 而这些都是显然的. □

注记. 交换环中的理想概念可以扩充到一般环上的理想, 此时上面命题仍然成立, 这是**环同态基本定理** 的一部分.

习　　题

习题2.1. 证明矩阵乘法满足结合律.

习题2.2. 令

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

证明H 是$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 的子群.

习题2.3. 从平面到自身的函数如果保持平面上任何两点的距离, 则称为**保距映射**. 证明保距映射都是双射, 且所有保距映射在函数复合意义下构成群.

习题2.4. 如果G 是群, $x, y \in G$, 则$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

习题2.5. 判断下面哪些2 阶方阵集合在矩阵乘法意义下构成群:

(i) $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$, $ac \neq b^2$.

(ii) $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & a \end{smallmatrix}\right)$, $a^2 \neq bc$.

(iii) $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)$, $ac \neq 0$.

(iv) $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $ad \neq bc$.

习题2.6. 证明集合$\bigcup_{n\geq 1} C_n$ 在复数乘法意义下构成群.

习题2.7. 如果A 是G 的子群, B 是H 的子群, 证明$A \times B$ 是$G \times H$ 的子群. 举例说明不是所有$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 如此得到.

习题2.8. 设集合$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. 证明它在实数加法和乘法意义下构成域.

习题2.9. 设集合$\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. 证明它在实数加法和乘法意义下构成环.

习题2.10. 如果G 是群. 证明映射$x \mapsto x^{-1}$ 是群同构当且仅当G 为阿贝尔群.

习题2.11. 如果G 是群, 证明对任何$x \in G$, 映射$g \mapsto xgx^{-1}$ 是G 的自同构.

习题2.12. 证明乘法群$\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}_+^\times \times S^1$, 其中$\mathbb{R}_+^\times$ 是正实数构成的乘法群.

习题2.13. 证明$\mathbb{H} \cong \mathbb{H}'$.

习题2.14. 设R 是交换环. 对于$a \in R$ 以及正整数n, 定义na 为n 个a 的和, 定义$(-n)a = -(na)$. 证明在R 中牛顿二项式定理成立, 即

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}. \tag{2.5}$$

习题2.15. 设R 是交换环. 证明$(R[x])[y] \cong R[x, y]$.

习题2.16. 如果H, K 均是G 的正规子群, 证明$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ 是G 的正规子群.

习题2.17. 如果I, J 均是交换环R 的理想, 证明$I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$ 是R 的理想.

第三章　整数理论

§3.1　整除

§3.1.1　整除的定义

整数理论中最重要的是数的整除性. 我们首先回顾一下定义.

定义3.1. 设 a, b 为整数, $b \neq 0$, 如果存在整数 c 使得 $a = bc$, 称 b 整除 a, 表示为 $b \mid a$. 此时称 b 是 a 的**因子** (或**约数**), a 是 b 的**倍数**. 如不存在上述整数 c, 则称 b 不整除 a, 记为 $b \nmid a$.

注意到由定义任意非零整数均是 0 的因子.

命题3.2. 设 a, b, c 为整数, 则

(1) 如 $b \mid a$ 且 $c \neq 0$, 则 $b \mid ac$. 反之亦然. 特别地, $b \mid a$ 等价于 $(\pm b) \mid (\pm a)$.

(2) 如 $b \mid c$ 且 $c \mid a$, 则 $b \mid a$. 即整除关系满足传递性.

(3) 如 $a \mid b$ 且 $a \mid c$, 则对任意 $x, y \in \mathbb{Z}$, $a \mid bx + cy$. 即 b, c 的任意整系数线性组合均是 a 的倍数.

(4) 如 $b \mid a$ 且 $a \neq 0$, 则 $|b| \leq |a|$. 故若 $a \mid b$ 且 $b \mid a$, 则 $|a| = |b|$, 即 $a = \pm b$.

证明. 显然. 留做习题. □

整数最基本的性质是带余除法.

定理3.3. 设 a, b 为整数, $b \neq 0$, 则存在整数 q 与 r 使得

$$a = bq + r, \text{ 其中 } 0 \leq r < |b|.$$

并且 q 与 r 由上述条件唯一确定.

证明. 先证存在性. 设$I = \{a - bk \mid k \in \mathbb{Z}\}$. 由于当$k$ 足够小时(比如$k < -|a|b$), $a - bk > 0$, 故$I \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$. 设$r$ 是I 中最小的自然数, 则$0 \leq r < |b|$: 事实上, 如果$r \geq |b|$, 则$r - |b| \geq 0$ 还是在I 中.

再证唯一性. 如$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, 不妨设$r_2 \geq r_1$, 则$0 \leq r_2 - r_1 = (k_1 - k_2)b < |b|$, 故$k_2 = k_1$ 且$r_2 = r_1$。 □

注记. q 与r 分别称为a 被b 整除的**商** (quotient)与**余数** (remainder).

§3.1.2 最大公因子

定义3.4. 设 a, b 为不全为零的整数, d 称为 a 与 b 的**最大公因子** (又名**最大公约数**) 是指下述两条件成立.

(1) d 是 a 与 b 的公因子, 即 $d \mid a$ 且 $d \mid b$.

(2) d 是 a 与 b 的公因子中最大的, 即若 $d' \mid a$ 且 $d' \mid b$, 则 $d' \leq d$.

我们记 (a, b) 为 a 与 b 的最大公因子. 如 $(a, b) = 1$, 称 a 与 b **互素**.

命题3.5. *(1)* $(\pm a, \pm b) = (a, b)$.

(2) $(a, b) = (b, a)$.

(3) 如 $a \neq 0$, $(a, a) = (a, 0) = |a|$.

(4) $(a, b) = (a + by, b) = (a, b + ax)$, 其中$x, y$ 为任意整数.

证明. 我们只证明$(a, b) = (a + by, b)$, 其余留做习题.

由定义, 我们只需证明a 和b 的公因子集合与$a + by$ 和b 的公因子集合相同即可. 如果d 是a 和b 的公因子, 则$d \mid a + by$, 故d 是$a + by$ 和b 的公因子. 同理可证反过来也成立. □

定理3.6. 设 a, b 不全为 0, $d = (a, b)$, 则

$$\{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = d\mathbb{Z} = \{dz \mid z \in \mathbb{Z}\}.$$

换言之, 即 a, b 的整系数线性组合集合即 a 与 b 的最大公因子的倍数集合. 特别地,

(1) 存在整数 x, y 使得 $(a, b) = ax + by$.

(2) a, b 互素当且仅当存在 x, y 使得 $ax + by = 1$.

证明. 令 $I = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$, 设 d_1 为 I 中最小的正整数, 则由 $d \mid ax + by$, 有 $d \mid d_1$. 反过来, 若 $d_1 \nmid a$, 由带余除法, 存在 $0 \leq r < d_1$ 使得 $r = a - qd_1 = a(1 - qx_1) - qby_1 \in I$. 这与 d_1 的最小性矛盾, 故 $d_1 \mid a$. 同理, $d_1 \mid b$. 故 $d_1 \mid d$. 由 d 与 d_1 均为正整数, 故 $d = d_1$. 再由带余除法, $I = d\mathbb{Z}$. (1),(2)显然. □

注记. $\{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ 即为 a, b 生成的 $\mathbb{Z}$ 中的理想, $d\mathbb{Z}$ 即为由 d 生成的理想. 定理中的等式称为**Bezout 等式**.

将上述定理 3.6 的证明应用到 $\mathbb{Z}$ 中任意理想的情形, 就可以得到如下定理.

定理3.7. *设 I 为 $\mathbb{Z}$ 中的理想, 则 $I = d\mathbb{Z}$, $d = 0$ 或为正整数.*

证明. 如 $I \neq 0$, 则存在 $x \in I, x \neq 0$. 由于 $-x \in I$, 故存在正整数 $x \in I$. 设 d 是 I 中最小正整数, 则一方面我们有 $I \supseteq d\mathbb{Z}$. 另一方面, 如 $x \in I$, 则由 $x = qd + r, 0 \leq r < d$, 知 $r = x - qd \in I$. 由 d 的最小性, 故 $r = 0$. 所以 $I \subseteq d\mathbb{Z}$. □

命题3.8. *(1) a 与 b 的公因子均是 (a, b) 的因子.*

(2) 如 $m > 0$, $m(a, b) = (ma, mb)$.

(3) 如 $(a, b) = d$, 则 $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

(4) 如 $(a, m) = (b, m) = 1$, 则 $(ab, m) = 1$.

(5) 如 $c \mid ab$, 且 $(c, b) = 1$, 则 $c \mid a$.

证明. (1) 设$(a, b) = ax + by$, 由于a 与 b 的任意公因子均整除$ax + by$, 故是(a, b) 的因子.

(2) 由Bezout等式, $(ma, mb) = max + mby = m(ax + by)$, 故$(ma, mb)$是$m(a, b)$ 的倍数. 反过来由$(a, b) = ax' + by'$, $m(a, b) = max' + mby'$, 故$m(a, b)$ 是(ma, mb) 的倍数. 两者都是正整数, 故相等.

(3) 由(2), $d(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = (a, b) = d$, 故 $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

(4) 由条件, 存在$x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$, $ax_1 + my_1 = bx_2 + my_2 = 1$, 故

$$(ax_1 + my_1)(bx_2 + my_2) = abx_1x_2 + m(ax_1y_2 + bx_2y_1 + my_1y_2) = 1.$$

由Bezout 等式知$(ab, m) = 1$.

(5) 由$(c, b) = 1$ 知存在Bezout 等式$cx+by = 1$ ($x, y \in \mathbb{Z}$), 故$cax+aby = a$. 由于c 是cax 和aby 的因子, 故 $c \mid a$. □

§3.1.3 欧几里得算法

由上面的定理 3.6, 我们得到求两个整数 a, b 的最大公因子的欧几里得算法. 这是现存最古老的算法, 出现在公元前三世纪欧几里得的《原本》(即《几何原本》)中, 至今仍然广泛运用.

目标: 给定 a, b 求它们的最大公因子 d.

算法：

第零步, 互换 a, b 使得 $|b| \leq |a|$. 如 $b = 0$, 则 $(a, b) = |a|$, 算法终止.

第一步, 用 b 整除 a, $a = bq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < |b|$. 如 $r_1 = 0$, 则 $(a, b) = b$, 算法终止.

第二步, 如 $r_1 \neq 0$, 令$(a, b) = (b, r_1)$, 继续第一步, 即做带余除法 $b = r_1q_2 + r_2$.

$\cdots$

第n 步, 如$r_n = 0$, 则算法终止, 且$(a, b) = r_{n-1}$.

由于每进行一次带余除法, 总有$\cdots < r_2 < r_1 < |b|$, 而 $|b|$ 有限, 故算法总会终止. 至于如 $r_n = 0$, 则 $(a, b) = r_{n-1}$, 这是由于

$$(a, b) = (b, r_1) = \cdots = (r_{n-1}, r_n) = (r_{n-1}, 0) = r_{n-1}.$$

另外, 由

$$\begin{aligned} r_1 &= a - bq_1 \\ r_2 &= b - r_1q_2 = b - (a - bq_1)q_2 = b(1 + q_1q_2) - aq_2 \\ &\cdots \end{aligned}$$

递归可以得到

$$r_{n-1} = ax + by,$$

即欧几里得算法得到整数 x, y, 满足Bezout 等式

$$ax + by = (a, b).$$

例3.9. *试求*$(1517, 481)$*, 并求它满足的*$Bezout$ *等式.*

解. 由欧几里得算法, 我们有

$$\begin{aligned} 1517 &= 3 \times 481 + 74, \\ 481 &= 6 \times 74 + 37, \\ 74 &= 2 \times 37, \end{aligned}$$

故$(1517, 481) = 37$, 且

$$37 = 481 - 6 \times 74 = 481 - 6 \times (1517 - 3 \times 481) = 19 \times 481 - 6 \times 1517.$$

即$481 \times 19 - 1517 \times 6 = 37$. □

§3.1.4 最小公倍数

定义3.10. 设 a,b 为非零整数, 正整数 m 称为 a,b 的**最小公倍数**是指下列两条件成立.

(1) m 是 a 与 b 的倍数, 即 $a \mid m$, 且 $b \mid m$.

(2) 如 $m' > 0$ 是 a 与 b 的倍数, 则 $m \leq m'$.

记 $m = [a,b]$.

命题3.11. *设 a,b 为非零整数, 则*

(1) a 与 b 的公倍数均是 $[a,b]$ 的倍数.

(2) $[ma,mb] = |m|[a,b]$.

(3) $(a,b)[a,b] = |ab|$. 特别地, 如 a,b 互素, 则 $[a,b] = |ab|$.

证明. (1) 记 I 为 $\mathbb{Z}$ 中 a,b 的所有公倍数的集合. 我们容易验证(i) 对任意 $x,y \in I$, $x \pm y \in I$. (ii) 如 $r \in \mathbb{Z}, x \in I$, 则 $rx \in I$. 故 I 是 $\mathbb{Z}$ 中的理想. 由定理 3.7, $I = m\mathbb{Z}$, 其中 m 为 I 中最小正整数. 但根据定义, m 还是 $[a,b]$, 故 I 中任何元素均是 $[a,b]$ 的倍数.

(2) 显然.

(3) 由(2),

$$[\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}] = \frac{[a,b]}{(a,b)},$$

$$(a,b)[a,b] = |ab| \Leftrightarrow [\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}] = \frac{|ab|}{(a,b)^2}.$$

故只需证明 $(a,b) = 1$ 的情形. 在此情形, 首先 $|ab|$ 是 a 与 b 的倍数, 故 $[a,b] \leq |ab|$. 另一方面设 $ax = [a,b] = by$, 所以 $b \mid ax$. 但由于 $(a,b) = 1$, 故 $b \mid x$. 因此, $ab \mid ax = [a,b]$. 故 $ab \leq [a,b]$, 故得等式. □

例3.12. *由 $(1517,481) = 37$, 故 $[1517,481] = 1517 \times 481 \div 37 = 19721$.*

§3.2 素数与算术基本定理

定义3.13. 设 $p \geq 2$ 为正整数, 如 p 的正因子只有 1 和 p 自身, 称 p 为**素数**(或**质数**), 否则称为**合数**.

引理3.14 (欧几里得引理)**.** *设 p 为素数, 则如 $p \mid ab$, 则 $p \mid a$ 或 $p \mid b$.*

证明. 如 $p \nmid a$, 则 $(p,a)=1$, 故 $p \mid b$ (命题 3.8). □

对于任意 $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$, 由定义, n 的大于 1 的正因子最小者必为素数. 事实上我们有

定理3.15 (欧几里得)**.** *素数有无穷多个.*

证明. 用反证法. 如果素数只有有限多个, 设为$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$. 令$N = p_1p_2\cdots p_n + 1$. 则对所有的p_i, $(N,p_i)=1$. 故N 的素因子不在$\{p_1,\cdots,p_n\}$中, 矛盾. □

定理3.16 (算术基本定理)**.** *每个不等于 1 的正整数可分解为有限个素数的乘积, 且如果不计素因子在乘积中的次序, 则分解方式唯一.*

证明. 先证存在性. 设 $X = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 2$且不能分解为有限个素数的乘积$\}$. 我们证明 X 是空集. 如 X 非空, 则必有最小数 $n_0 \in X$, 故 n_0 不能是素数. 设 $n_0 = n_1n_2, n_1 \geq 2, n_2 \geq 2$, 由于 $n_1 < n_0, n_2 < n_0$, 故 $n_1 \notin X, n_2 \notin X$, 即 n_1 与 n_2 均是有限个素数的乘积, 所以 $n_0 = n_1n_2$ 也是有限个素数的乘积, 矛盾!

再证唯一性. 设 $n = p_1\cdots p_s = q_1\cdots q_t$, 其中$p_i, q_j$ 全是素数. 由欧几里得引理, $p_1 \mid q_j$, 故 $p_1 = q_j$. 重新安排次序后不妨设 $q_1 = p_1$. 继续考虑 $p_2\cdots p_s = q_2\cdots q_t$. 知 $s = t$ 且分解唯一. □

将定理中乘积的相同素因子合并, 则有

推论3.17. *任何大于 1 的正整数可以唯一写为 $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 的形式, 其中$p_1,\ldots,p_s$ 为不同素数, 且$\alpha_1,\cdots,\alpha_s \in \mathbb{Z}_+$.*

注记. n 的上述乘积形式称为n 的**因式分解**.

由于每个非零有理数均可以写成$\frac{m}{n}$ 的形式, 且可以假设$(m,n)=1$, 则由算术基本定理有

推论3.18. *任何一个非零有理数可以唯一写为*

$$a = \varepsilon\ p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$$

的形式, 其中

$$\varepsilon = \pm 1,\ p_i \text{ 为不同素数},\ \alpha_i \in \mathbb{Z},$$

且去掉所有$\alpha_i = 0$ 的因子后表达式唯一.

我们下面给出算术基本定理的几个应用.

命题3.19. 设正整数$n=\prod_i p_i^{\alpha_i}$ (p_i 两两不同, $\alpha_i\geq 0$). 则d 是n 的正因子当且仅当 $d=\prod_i p_i^{\beta_i}$, 其中对所有i, $0\leq\beta_i\leq\alpha_i$.

证明. 如d 是n 的正因子, 记$n=dd'$. 如

$$d=\prod_i p_i^{\beta_i},\quad d'=\prod_i p_i^{\gamma_i},$$

其中p_i 各不相同且$\beta_i,\gamma_i\geq 0$. 则$n=\prod_i p_i^{\beta_i+\gamma_i}$, 故$\alpha_i=\beta_i+\gamma_i$, 即$0\leq\beta_i\leq\alpha_i$.

反过来, 如$0\leq\beta_i\leq\alpha_i$ 对所有i 成立, 则$n=dd'$, 其中$d'=\prod_i p_i^{\alpha_i-\beta_i}$, 故$d$是$n$ 的正因子. □

命题3.20. 设 $a=\prod_i p_i^{\alpha_i},\alpha_i\geq 0$,$b=\prod_i p_i^{\beta_i},\beta_i\geq 0$. 则

$$(a,b)=\prod_i p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)},\quad [a,b]=\prod_i p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}. \tag{3.1}$$

证明. 注意到添加a 中和b 中添加$\alpha_i=0$ 和$\beta_i=0$ 的项并不影响命题结论, 故可以假设a, b 的因式分解中有相同的素因子. 设$d=\prod_i p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}$, 要证明$(a,b)=d$, 根据命题3.8, 只需证明$(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$, 而再由$ab=(a,b)[a,b]$ (命题3.11, 即得$[a,b]=\prod_i p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$.

下面我们证明$(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$. 事实上, 由$a,b,d$ 的因式分解表达式, 我们有

$$\frac{a}{d}=\prod_i p_i^{\alpha_i-\min(\alpha_i,\beta_i)},\quad \frac{b}{d}=\prod_i p_i^{\beta_i-\min(\alpha_i,\beta_i)}.$$

如果$p\mid\frac{a}{d}$, 则p 等于某个p_i 且$\alpha_i-\min(\alpha_i,\beta_i)>0$, 故$\alpha_i>\beta_i$ 且$\beta_i-\min(\alpha_i,\beta_i)=0$, 因此$p\nmid\frac{b}{d}$. 同理如$p\mid\frac{b}{d}$, 则$p\nmid\frac{a}{d}$. 综上所述, 故$(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$. □

上述命题是一个很干净的结果, 只要知道因式分解, 则可以很快求得最大公因子和最小公倍数. 但在实际应用中, 因式分解不是容易得到的, 花在因式分解上的时间远远超过利欧几里得算法计算的时间, 而且欧几里得算法会顺带求出最大公因子满足的Bezout等式.

例3.21. 我们再来计算$(1517,481)$. 首先做因式分解, $157=37\times 41$, $481=37\times 13$, 故$(1517,481)=37$. 此时对*1517*和*481*的因式分解需要的步骤远远多出执行欧几里得算法需要的三步!

例3.22. 设 $n=\prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$, 其中$p_i$ 两两不同. 定义

$$\sigma_0(n)=\sum_{1\le d|n} 1, \qquad \sigma_1(n)=\sum_{1\le d|n} d. \tag{3.2}$$

则

(1) $\sigma_0(n)=(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_s+1)=\prod_i(\alpha_i+1)$.
(2) $\sigma_1(n)=\prod_i \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$.

解. (1) 由命题 3.19, n 的正因子d 的分解式中, p_i 的幂次有α_i+1 种取法, 故n 的正因子个数$\sigma_0(n)=(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_s+1)=\prod_i(\alpha_i+1)$.

(2) 同样由命题 3.19,

$$\begin{aligned}\sigma_1(n)=\sum_{1\le d|n} d &= \sum_{\substack{0\le\beta_i\le\alpha_i\\ 1\le i\le s}} p_1^{\beta_1}\cdots p_s^{\beta_s}\\ &= \sum_{0\le\beta_1\le\alpha_1} p_1^{\beta_1}\cdots\sum_{0\le\beta_s\le\alpha_s} p_1^{\beta_s}\\ &= \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_s^{\alpha_s+1}-1}{p_s-1}=\prod_{i=1}^{s}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}.\end{aligned}$$

即等式成立. □

由上述例子可以看出, 对于$(m,n)=1$, 我们有

$$\sigma_0(mn)=\sigma_0(m)\sigma_0(n), \quad \sigma_1(mn)=\sigma_1(m)\sigma_1(n). \tag{3.3}$$

它们是积性函数的两个例子.

定义3.23. 定义在正整数集合上的函数f 称为**积性函数** 是指对$(m,n)=1$,

$$f(mn)=f(m)f(n). \tag{3.4}$$

如果(3.4) 对所有$m,n\in\mathbb{Z}_+$ 成立, 称f 为**完全积性函数**.

由积性函数的定义, 我们立刻有

命题3.24. 设$m \in \mathbb{Z}_+$ 的因式分解为$m = \prod_i p_i^{\alpha_i}$, 则若$f$ 为积性函数,

$$f(m) = \prod_i f(p_i^{\alpha_i}). \tag{3.5}$$

若f 为完全积性函数,

$$f(m) = \prod_i f(p_i)^{\alpha_i}. \tag{3.6}$$

习　　题

习题3.1. 证明命题 *3.2.*

习题3.2. 设 n 是正整数, 证明 $(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$.

习题3.3. 设 m, n 为正整数, m 是奇数. 证明$(2^m - 1, 2^n + 1) = 1$.

习题3.4. 设 n 为正整数, 证明

(i) $(a^n, b^n) = (a, b)^n$;

(ii) 设 a, b 是互素的正整数, $ab = c^n$(c 为整数), 则 a, b 都是正整数的 n 次方幂. 事实上, $a = (a, c)^n, b = (b, c)^n$.

一般地, 如果若干个两两互素的正整数之积时整数的 n 次幂, 则这些整数都是 n 次方幂.

习题3.5. 用欧几里得算法求 963 和 657 的最大公约数, 并求出方程

$$963x + 657y = (963, 657) \tag{3.7}$$

的一组特解, 及所有整数解.

习题3.6. 设 a, b 为正整数且 $(a, b) = 1$. 证明: 当整数 $n > ab - a - b$ 时, 方程

$$ax + by = n \tag{3.8}$$

有非负的整数解; 但当 $n = ab - a - b$ 时, 方程 (3.8) 没有非负整数解.

习题3.7. 设 $n > 1$ 为整数, 如果对于任何整数 m, 或者 $n \mid m$ 或者 $(n, m) = 1$, 则 n 必是素数.

习题3.8. 设整数 $n>2$, 证明: n 和 $n!$ 之间必有素数. 由此证明素数有无穷多个.

习题3.9. 证明: (i) 形如 $4m+3$ 的素数有无穷多个;

(ii) 形如 $6m+5$ 的素数有无穷多个.

习题3.10. (i) 设 m 为正整数, 证明: 如果 2^m+1 为素数, 则 m 为 2 的方幂.

(ii) 对 $n\geqslant 0$, 记 $F_n=2^{2^n}+1$, 这称为**费马**(*Fermat*)**数**. 证明: 如果 $m>n$, 则 $F_n\mid(F_m-2)$;

(iii) 证明: 如果 $m\neq n$, 则 $(F_m,F_n)=1$. 由此证明素数有无穷多个.

注记. 费马数中的素数称为**费马素数**. 例如 $F_0=3,F_1=5,F_2=17,F_3=257,F_4=65537$ 都是素数. 费马曾经猜测所有的 F_n 都是素数, 但是欧拉在1732年证明了 $F_5=641\cdot 6700417$, 不是素数. 目前人们不知道是否还有费马素数, 更不知道这样的素数是否有无穷多个.

习题3.11. (i) 设 m,n 都是大于 1 的整数, 证明: 如果 m^n-1 是素数, 则 $m=2$ 并且 m 是素数.

(ii) 设 p 是素数, 记 $M_p=2^p-1$, 这称为**梅森**(*Merseme*)**数**. 证明: 如果 p,q 是不同的素数, 则 $(M_p,M_q)=1$.

注记. 1644年, 法国数学家梅森研究过形如 $M_p=2^p-1$ 的素数, 后来人们将这样的素数称为梅森素数, 它们与所谓的偶完全数紧密相关. 到1996年底, 共找到了34个梅森素数. 是否有无穷多个梅森素数, 这也是一个未解决的问题.

习题3.12. 设 $a_1,\cdots,a_k$ 为正整数, 证明 $\dfrac{(a_1+\cdots+a_k)!}{a_1!\cdots a_k!}$ 是整数.

习题3.13. 设 m,n 为正整数, 证明 $\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ 是整数.

习题3.14. 设 a,b 是整数, $a\neq b$, n 是正整数. 如果 $n\mid(a^n-b^n)$, 则 $n\mid\frac{a^n-b^n}{a-b}$.

习题3.15. 设 $n\geqslant 1$. 证明

(i) n 为完全平方数的充要条件是 $\sigma_0(n)$ 为奇数;

(ii) $\sigma_0(n)\leqslant 2\sqrt{n}+1$;

(iii) n 的正约数之积等于 $n^{\frac{\sigma_0(n)}{2}}$.

第四章　同余理论

§4.1　同余式

首先我们考虑一个熟知的问题.

问题4.1. 求 57863 被 9 整除的余数.

解. 将 578963 的各位相加的 29, 将 29 的各位相加得 11, 将 11 的各位相加得 2, 故 578963 被 9 整除的余数为 2.

上述问题的解答依赖于一个事实:

$$\text{对自然数 } n,\ 10^n \text{ 被 9 除余 1, 即 } 9 \mid 10^n - 1.$$

所以

$$9 \mid 5(10^4-1)+7(10^3-1)+8(10^2-1)+6(10-1)+3(1-1),$$

即 $9 \mid (57863-29)$. 同理 $9 \mid (29-11)$, $9 \mid (11-2)$. 故 $9 \mid (57863-2)$. □

由上述解答可以看出, 用整除符号 | 有时十分笨拙, 不利于代数计算, 为此我们引入同余式的概念.

定义4.2. 设 m 为正整数. 如整数 a 和 b 满足 $m \mid a-b$, 称 a 和 b **模** m **同余**, 并用**同余式**

$$a \equiv b \mod m \tag{4.1}$$

表示. 如 $m \nmid a-b$, 则称 a 和 b 模 m 不同余, 记作

$$a \not\equiv b \mod m. \tag{4.2}$$

例4.3. 令 $m=2$. 则$a \equiv 0 \mod 2$ 当且仅当 a 是偶数, $a \equiv 1 \mod 2$ 当且仅当 a 是奇数.

命题4.4. 同余关系式整数集合 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系, 即它满足自反性, 对称性和传递性.

证明. 我们只证传递性. 如$a \equiv b \mod m$, $b \equiv c \mod m$, 则$m \mid (a-b)$且$m \mid (b-c)$，故$m \mid (a-b)+(b-c) = a-c$, 即$a \equiv c \mod m$. □

例4.5. *在问题 4.1中*, 则$57863 \equiv 29 \equiv 11 \equiv 2 \mod 9$.

同余式有许多和等式类似的性质

命题4.6. *如 $a \equiv b \mod m$, $c \equiv d \mod m$, 则*

(1) $a \pm c \equiv b \pm d \mod m$,

(2) $ac \equiv bd \mod m$.

证明. (1) 留做练习. 对于(2), 我们有

$$ac - bd = (a-b)c + b(c-d),$$

而等式右边均被m 整除, 故左边亦然. 因此$ac \equiv bd \mod m$. □

推论4.7. *如 $f(X_1, \ldots, X_n)$ 为 n-元整系数多项式, 且对 $1 \le i \le n$, $a_i \equiv b_i \mod m$, 则*

$$f(a_1, \ldots, a_n) \equiv f(b_1, \ldots, b_n) \mod m.$$

证明. 由命题 4.6(1), 我们可以假设f 为单项式$aX_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$, 而单项式的情形又是命题中(2)的推论. □

命题4.8. (1) *$a \equiv b \mod m$, 则对任意 $d \mid m$, $a \equiv b \mod d$.*

(2) *如 $a \equiv b \mod m$, 则 $da \equiv db \mod dm$. 如 $d \neq 0$, 则反之亦然.*

(3) *如$a \equiv b \mod m_i$ 对所有$1 \le i \le n$ 成立, 则*

$$a \equiv b \mod ([m_1, \ldots, m_n]).$$

证明. 留做练习. □

命题4.9. *同余方程*

$$ax \equiv b \mod m \tag{4.3}$$

有解当且仅当

$$(a, m) \mid b.$$

特别地,

$$ax \equiv 1 \mod m \text{ 有解当且仅当 } (a, m) = 1.$$

证明. 我们有

$$ax \equiv b \mod m \iff \exists x, y, \quad ax - b = my \iff \exists x, y, \quad ax + my = b,$$

由Bezout等式, 后者等价于$b \in (a, m)\mathbb{Z}$. □

例4.10. 求满足 $24x \equiv 7 \mod 59$ 的解 x.

解. 由于 $(24, 59) = 1$, 故方程有解. 由欧几里得算法

$$\begin{aligned} 59 &= 24 \times 2 + 11 \\ 24 &= 11 \times 2 + 2 \\ 11 &= 5 \times 2 + 1 \end{aligned}$$

知

$$1 = 11 \times 59 - 27 \times 24, \qquad 24 \cdot (-27) \equiv 1 \mod 59.$$

所以$x \equiv 7 \times (-27) \equiv 47 \mod 59$. □

由于同余关系是等价关系, 对固定的 m, 我们考虑整数 r 模 m 的等价类 $[r]$ (称为**同余类**)

$$[r] = m\mathbb{Z} + r = \{mk + r \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

记模 m 的所有同余类集合为 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. 由于任何整数被 m 整除的余数为 $0, 1, \ldots, m-1$. 则

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[0], [1], \ldots, [m-1]\}. \tag{4.4}$$

注意到 $[r] = [mk + r]$, 故我们有很多可能选取 $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ 使得

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[a_0], [a_1], \ldots, [a_{m-1}]\}.$$

比如说

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} &= \{[1], [2], \ldots, [m-1]\} \\ &= \{[0], [1+m], [2+2m], \ldots, [m-1+(m-1)m]\}. \end{aligned}$$

如 $\alpha \in [r_1] = m\mathbb{Z} + r_1$, $\beta \in [r_2] = m\mathbb{Z} + r_2$, 则

$$\begin{aligned} \alpha \pm \beta &\in [r_1 \pm r_2] \\ \alpha \cdot \beta &\in [r_1 r_2]. \end{aligned}$$

由此, 我们尝试在 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 上定义加法和乘法

$$[a] + [b] = [a + b], \qquad [a][b] = [ab]. \tag{4.5}$$

命题4.6 说明上述定义只与同余类有关, 与同余类的代表元选取无关.

定理4.11. *$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 在上述加法和乘法意义下构成 m 元交换环.*

证明. 只需验证

(1) 加法和乘法满足交换律, 结合律和分配律.

(2) $[0]$ 为加法单位元, $[-a]$ 为 $[a]$ 的加法逆元.

(3) $[1]$ 为乘法单位元.

而这些都是显然的. □

注记. 如 m 不是素数, 则$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 不是整环. 事实上, 如 $m = m_1 m_2$, 则

$$[m_1][m_2] = [m] = [0].$$

现在我们来考虑 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 上的乘法单位群 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$.

由定义, 若 $[a] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 可逆, 则存在 $[b]$, 使得 $[ab] = 1$. 即 $[a]$ 可逆与否等价于同余方程

$$ax \equiv 1 \mod m$$

是否有解. 由命题 4.9, 同余方程有解等价于$(a, m) = 1$. 故我们有

定理4.12. $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times = \{[a] \mid (a, m) = 1, \quad 0 \le a \le m\}$.

定义4.13. 群 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ 的阶记为 $\varphi(m)$. 函数φ 称为**欧拉函数**.

例4.14. 设 $m = 6$, 则

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times = \{[1], [5]\},$$

其中 $[5]^2 = [25] = [1]$. 故$\varphi(6) = 2$.

定理4.15. 设 p 为素数, 则 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 为 p 元域.

定义4.16. 以后我们记 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

证明. 由定理4.11, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 为交换环. 由定理4.12

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{[0]\}.$$

故 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 为 p 元有限域. □

注记. 上面的事实说明当 m 为素数 p 时, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ 为域(自然也是整环), 而当 m 为和数时, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 不是整环.

从现在开始, 我们去掉 [ ], 记

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, m-1\}, \tag{4.6}$$

但时刻注意这里的 r 表示 r 所在的等价类. 如需强调这是 m 的同余类, 我们记 $r \mod m$.

§4.2 中国剩余定理

设$m \geq 1$ 为正整数. 我们有映射

$$\begin{aligned} f_m : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ r &\longmapsto r \mod m. \end{aligned}$$

若 $1 \leq d \mid m$, 则有映射

$$\begin{aligned} f_{m,d} : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \\ r \mod m &\longmapsto r \mod d. \end{aligned}$$

命题4.17. *对于给定的m 和d,*

(1) f_m 是整数环$\mathbb{Z}$ 到环$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 的环同态, 即对于$a, b \in \mathbb{Z}$,

$$f_m(1) = 1, \quad f_m(a \pm b) = f_m(a) \pm f_m(b), \quad f_m(ab) = f_m(a) \cdot f_m(b).$$

(2) $f_{m,d}$ 是环$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 到环$\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ 的环同态, 即对于$a, b \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$,

$$f_m(1) = 1, \quad f_m(a \pm b) = f_m(a) \pm f_m(b), \quad f_m(ab) = f_m(a) \cdot f_m(b).$$

并且对于 $r \mod d$

$$f_{m,d}^{-1}(r \mod d) = \{(r + kd) \mod m \mid 0 \leq k < \frac{m}{d}\}. \tag{4.7}$$

证明. 易证. □

定理4.18. *设 m, n 为互素的正整数, 则*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ a \mod mn &\longmapsto (a \mod m, a \mod n) \end{aligned}$$

是环的同构, 即满足条件

(1) $\Phi(0) = (0, 0)$, $\Phi(1) = (1, 1)$.

(2) *对于*$a, b \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, $\Phi(ab) = \Phi(a) \times \Phi(b)$, $\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$.

(3) Φ *为双射*.

(4) Φ *在* $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times$ *上的限制为双射*

$$\tilde{\Phi} : (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times.$$

证明. (1), (2) 显然.

(3) 由于映射两边均是 mn 元集合, 只要证明 Φ 为单射即可. 若$\Phi(a) = \Phi(b)$, 则

$$a \equiv b \mod m, \quad a \equiv b \mod n.$$

由$(m, n) = 1$, 故 $a \equiv b \mod mn$. 所以 $a \mod mn = b \mod mn$. 即 Φ 为单射.

(4) 如$(a, mn) = 1$, 则 $(a, m) = 1$ 且 $(a, n) = 1$. 故 Φ 将 $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times$ 映到 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

另一方面, 如$(a, mb) = d > 1$, 则 (a, m) 或 (a, n) 不可能全是1. 即 Φ 将集合

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} - (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times$$

映到集合

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} - (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$$

中. 由于 Φ 为双射, 故 $\tilde{\Phi}$ 必为满射. □

推论4.19. (1) *设 m, n 互素, 则*

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n). \tag{4.8}$$

即φ 为积性函数.

(2) *如 $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$, $p_1, \ldots, p_s$ 为两两不同的素数, 则*

$$\varphi(m) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdots \varphi(p_s^{\alpha_s}) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \cdots p_s^{\alpha_s - 1}(p_s - 1). \tag{4.9}$$

证明. 只要证明 $\varphi(p^s) = p^{s-1}(p-1)$ 即可. 但

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})^\times &= \{[a] \mid (a, p) = 1, \quad 0 \le a < p^s\} \\ &= \{[a + bp] \mid 0 < a \le p - 1, \quad 0 \le b < p^{s-1}\}. \end{aligned}$$

故

$$\varphi(p^s) = \left|(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})^\times\right| = p^{s-1}(p-1).$$

即得欲证. □

由定理4.18 作归纳, 我们有

定理4.20 (中国剩余定理)**.** *如 $m_1, \ldots, m_n$ 两两互素, 则映射*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Z}/m_1 \cdots m_n\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z} \\ (a \mod m_1 \cdots m_n) &\longmapsto (a \mod m_1, \ldots, a \mod m_n) \end{aligned}$$

是环的同构.

翻译成同余方程组的语言, 则有

定理4.21. 设 $m = m_1 \cdots m_n$, 其中 $m_1, \ldots, m_n$ 两两互素, 则同余方程组

$$x \equiv a_1 \mod m_1, \ldots, x \equiv a_n \mod m_n$$

必有解, 且全部解为模 m 的一个同余类.

我们刚才是用 Φ 是单射并且映射两边集合元素个数一样来证明Φ 是双射. 事实上, 也可以先证明 Φ 满射.

中国剩余定理中双射的另一种证明. 给定 $\tilde{a} = (a_1 \mod m_1, \ldots, a_n \mod m_n)$, 我们要证明存在 $a \mod m$, $\Phi(a \mod m) = \tilde{a}$.

首先我们寻找 $M_1 \in \mathbb{Z}$, 使得

$$\begin{cases} M_1 \equiv 1 \mod m_1 \\ M_2 \equiv 0 \mod m_2 \\ \cdots \\ M_n \equiv 0 \mod m_n. \end{cases}$$

由后面 $n-1$ 个同余式即得 $M_1 = km_2 \cdots m_n$, $k \in \mathbb{Z}$. 代入 $M_1 \equiv 1 \mod m_1$, 则要找到 k, 使得

$$km_2 \cdots m_n \equiv 1 \mod m_1.$$

由于$(m_2 \cdots m_n, m_1) = 1$, 这样的 k 存在, 故M_1 存在. 同样, 我们可找到 M_i, 使得

$$\begin{cases} M_i \equiv 0 \mod m_j \quad (j \neq i) \\ M_i \equiv 1 \mod m_i \end{cases}$$

现在令 $a = a_1M_1 + a_2M_2 + \cdots + a_nM_n \mod m$, 则

$$\begin{aligned} a \mod m_i &= a_iM_i \mod m_i \\ &= a_i \mod m_i, \end{aligned}$$

即 Φ 为满射. □

注记. 中国剩余定理是中国人的伟大发现, 最初起源于⟨⟨孙子算经⟩⟩ 中的问题:

"今有物不知其数, 三三数之余二, 五五数之余三, 七七数之余二, 问物几何?"

翻译成现在的语言, 就是寻找 x 使得

$$x \equiv 2 \mod 3, \quad x \equiv 3 \mod 5, \quad x \equiv 2 \mod 7.$$

程大位在⟨⟨算法统宗⟩⟩(1593年)将孙子问题解法总结如下:

三人同行**七十**稀, **五**树梅花**廿一**枝,
七 子团圆正**半月**, 除**百零五**便得知.

这里 $m = 3 \times 5 \times 7 = 105$. $m_1 = 3$, $m_2 = 5$, $m_3 = 7$. 根据上述证明知

$$M_1 = 2 \times 5 \times 7 = 70, \quad M_2 = 3 \times 7 = 21, \quad M_3 = 3 \times 5 = 15.$$

故孙子问题的解为

$$70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 \equiv 233 \equiv 23 \mod 105.$$

其最小解即 23.

§4.3 欧拉定理, 费马小定理和威尔逊定理

本节将讲述初等数论中几个重要定理. 首先我们介绍欧拉定理和费马小定理.

定理4.22 (欧拉). 对于任何 $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$, 则

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m. \tag{4.10}$$

定理4.23 (费马). 设 p 为素数, 则

$$a^p \equiv a \mod p. \tag{4.11}$$

欧拉定理的证明. 设 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times = \{r_1, \cdots, r_{\varphi(m)}\}$, 则对于任意 $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$

$$\{[a]r_1, \ldots, [a]r_{\varphi(m)}\} = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times.$$

故

$$[a]r_1 \cdots [a]r_{\varphi(m)} = [a]^{\varphi(m)} r_1 \cdots r_{\varphi(m)} = r_1 \cdots r_{\varphi(m)},$$

由于群上消去律成立, 故

$$[a^{\varphi(m)}] = [1],$$

即$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m$. □

费马小定理的证明. 由欧拉定理, $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$ 对任意 $(a, p) = 1$ 成立. 故 $a^p \equiv a \mod p$. 另外如 $a \equiv 0 \mod p$, 自然 $a^p \equiv a \mod p$. □

由于费马小定理和欧拉定理在应用中的重要性, 有必要进一步探索. 我们用另外一种办法来证明费马小定理和欧拉定理.

引理4.24. *对于 $1 \leq k \leq p-1$,*

$$p \mid \binom{p}{k}. \tag{4.12}$$

证明. 由$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$, $p \mid p!$, 但 p 不整除 $k!(p-k)!$, 故$p \mid \binom{p}{k}$. □

由上述引理, 立刻有

命题4.25. *在 $\mathbb{F}_p$ 中, $(a+b)^p = a^p + b^p$.*

证明. 这是由于上述引理, 且牛顿二项式定理对任意域(和交换环) 都成立. □

引理4.26. *设 a, b 为整数, $a \equiv b \mod p$, 则对于 $n \in \mathbb{N}$,*

$$a^{p^n} \equiv b^{p^n} \mod p^{n+1}. \tag{4.13}$$

证明. 我们用归纳法. $n = 0$ 时为假设条件. 设引理对 n 成立, 即 $a^{p^n} = b^{p^n} + xp^{n+1}$, $x \in \mathbb{Z}$. 故由牛顿二项式定理

$$\begin{aligned} a^{p^{n+1}} &= (a^{p^n})^p = (b^{p^n} + xp^{n+1})^p \\ &= b^{p^{n+1}} + \binom{p}{1} b^{p^n(p-1)}(xp^{n+1}) + \sum_{k\geq 2} \binom{p}{k} b^{p^n(p-k)}(xp^{n+1})^k \\ &= b^{p^{n+1}} + b^{p^n(p-1)} xp^{n+2} + \sum_{k\geq 2} \binom{p}{k} b^{p^n(p-k)} x^k p^{nk+k}. \end{aligned}$$

所以 $a^{p^{n+1}} \equiv b^{p^{n+1}} \mod p^{n+2}$. 引理得证. □

费马小定理的证明. 我们需要证明对 $n \in \mathbb{Z}$,

$$n^p \equiv n \mod p.$$

首先, $n = 0$ 时显然成立.

其次, 由

$$(n+1)^p = n^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k + 1$$

得

$$(n+1)^p \equiv n^p + 1 \mod p.$$

故由归纳假设知

$$n^p \equiv n \mod p.$$

费马小定理得证. □

欧拉定理的证明. 设 $m = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$, 我们有

$$\varphi(m) = \varphi(p_1^{e_1}) \cdots \varphi(p_s^{e_s}).$$

要证 $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m$, 由中国剩余定理, 只要证明对于 $i = 1, \ldots, s$, $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod p_i^{e_i}$, 故只要证明

$$a^{p_i^{e_i}} \equiv 1 \mod p_i^{e_i}.$$

这归结于证明对任意 p, 若 $(a, p) = 1$, 则

$$a^{p^{n-1}(p-1)} \equiv 1 \mod p^n.$$

当 $n=0$ 时, 这就是费马小定理. 现在对引理4.26 中应用$a=a^{p-1}$, $b=1$, 则

$$(a^{p-1})^{p^{n-1}} \equiv 1 \mod p^n.$$

欧拉定理得证. □

如果我们用有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的算术来表述费马小定理, 则有

定理4.27. *在有限域 $\mathbb{F}_p$ 上, $a^p=a$. 特别地, 如 $a\neq 0$, 则*

$$a^{-1}=a^{p-2}.$$

我们下面介绍Wilson定理.

定理4.28 (Wilson)**.** *设 p 为素数, 则*

$$\prod_{a\in\mathbb{F}_p^\times} a=-1. \tag{4.14}$$

引理4.29. *在 $\mathbb{F}_p$ 中, 如 $a^2=1$, 则$a=\pm 1$.*

证明. 由 $a^2=1$, 则 $(a+1)(a-1)=0$. 但在域中消去律成立, 故 $a=\pm 1$. □

Wilson定理的证明. 对于 $a\in\mathbb{F}_p^\times$, 将它与 a^{-1} 配对, 则由上述引理, 唯一与自身配对的a 是 1 或 -1. 集合$\mathbb{F}_p^\times$ 为 $\{1\},\{-1\}$ 及一些配对 $\{a,a^{-1}\}$ 的并. 故 $\prod_{a\in\mathbb{F}_p^\times} a=-1$. □

Wilson 定理有如下的等价形式:

定理4.30. *正整数 $n\geq 2$ 为素数当且仅当 $(n-1)!\equiv -1 \mod n$.*

证明. 当 n 为素数是定理即是说明 $(n-1)!\equiv -1 \mod n$.

如 n 为合数, 则 $n=n_1n_2$, $2\leq n_1,n_2\leq n-1$, 因此 $(n-1)!$ 与n 至少有公因子n_1, 故不互素, 即有 $(n-1)!\not\equiv -1 \mod n$. □

§4.4 同余式的算术

我们首先从素性判定问题谈起.

设 n 为大于 2 的奇数. 如何判定 n 是素数. 特别地, 如何有效判定 n 是素数是一个受到广泛关注的问题. Wilson定理给出了n 是素数的充分必要条件, 但由于计算$(n-1)!\mod n$ 的计算量十分庞大, 在实际应用中并不可行.

长期以来, 数学家们发展了很多方法来判断一个数是否为素数. 其中, 欧拉定理和费马小定理起了很大的作用.

习 题

习题4.1. 证明: 连续 n 个整数中恰有一个被 n 整除.

习题4.2. 对正整数 n, 记$T(n)$ 为其数码的正负交错和. 例如

$$T(1234) = -1 + 2 - 3 + 4 = 2.$$

证明

$$T(n) \equiv n \pmod{1}1.$$

习题4.3. 证明命题 *4.8.*

习题4.4. (i) 证明: 完全平方数模 3 同余于 0 或 1; 模 4 同余于 0 或 1; 模 5 同余与 $0, 1$ 或 4.

(ii) 证明: 完全平方数模 9 同余于 0 或 ± 1; 整数的四次幂模 16 同余于 0 或 1.

习题4.5. 设 a 是奇数, n 是正整数, 证明

$$a^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}.$$

习题4.6. (i) 证明: 当 $n \geqslant 3$ 时, $\varphi(n)$ 是偶数;

(ii) 证明: 当 $n \geqslant 2$ 时, 不超过 n 且与 n 互素的正整数之和是 $\frac{1}{2}n\varphi(n)$.

习题4.7. 设 m, n 都是正整数, $m = nt$. 则模 n 的任一个同余类

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv r \pmod{n}\}$$

可表示为 t 个模 m 的(两两不同的)同余类

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv r + in \pmod{m}\} \ (i = 0, 1, \cdots, t-1)$$

之并.

习题4.8. 求满足下面同余式的 x:

(i) $8x \equiv 5 \pmod{23}$;

(ii) $60x \equiv 7 \pmod{37}$.

习题4.9. 列出 $\mathbb{F}_7$ 中的加法和乘法表.

习题4.10. 设 p 是素数,

(i) 如果 $\bar{a} \in \mathbb{F}_p$, 则 $p\bar{a} = \underbrace{\bar{a} + \cdots + \bar{a}}_{p个} = \bar{0}$;

(ii) 设 n 是整数, $\bar{a} \in \mathbb{F}_p, \bar{a} \neq \bar{0}$. 若 $n\bar{a} = \bar{0}$, 则 $p \mid n$.

习题4.11. 设 p 是奇素数, 如果$r_1, \cdots, r_{p-1}$ 与 $r'_1, \cdots, r'_{p-1}$ 是都过模 p 的非零同余类$\{[1], [2], \cdots, [p-1]\}$, 证明: $r_1 r'_1, \cdots, r_{p-1} r'_{p-1}$ 不过模 p 非零同余类$\{[1], [2], \cdots, [p-1]\}$, 即存在$i \neq j$, $r_i r'_i \equiv r_j r'_j \mod p$.

习题4.12. 计算 $\varphi(360), \varphi(429)$.

习题4.13. 求 3^{400} (十进制表示中) 的末两位数码.

习题4.14. 设 m, n 为正整数, $(m, n) = 1$. 证明:

$$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}.$$

习题4.15. 设 $(a, 10) = 1$, 证明: $a^{20} \equiv 1 \pmod{100}$.

习题4.16. 设 $f(n), g(n)$ 是两个积性数论函数, 则

$$H(n) = \sum_{d \mid n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

也是积性函数.

第五章　更多的群论知识

§5.1　元素的阶和循环群

设 G 是群, g 是 G 中的元素, 由 g **生成的子群**即是包含 g 的最小子群. 我们用 $< g >$ 表示. 同样, 如 $S \subseteq G$ 为 G 的子集合, 则由 S 中元素生成的子群称为 S **生成的子群**, 记为 $< S >$.

我们首先讨论 $< g >$ 中的元素, 由群的公理, 它必包含

(i) $g^k = g \cdots g$, k 个 g 相乘.

(ii) $1 = g^0$.

(iii) $g^{-k} = g^{-1} \cdots g^{-1}$, k 个 g^{-1} 相乘.

另一方面, 由(i),(ii),(iii)的所有元素构成的集合的确是 G 的子群. 故

$$< g >= \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \text{ 此处 } g^k \text{ 可能相同.}$$

定义5.1. 群 G 中元素 g 的**阶**是指满足 $g^k = 1$ 的最小正整数, 此时称 g 为 k **阶有限元**. 如这样的 k 不存在, 称 g 的阶为无穷大, 此时称 g 为**无限阶元**.

引理5.2. *如 g 为 k 阶有限元, 则 $g^n = 1$ 当且仅当 $n \equiv 0 \mod k$, $g^i = g^j$ 当且仅当 $i \equiv j \mod k$. 此时, g 生成的子群 $< g >= \{1, g, \ldots, g^{k-1}\}$.*

如 g 为无限元, 则如果$i \neq j$, 则 $g^i \neq g^j$.

证明. 如 g 为 k 阶有限元, 设 $n = kq + r$, $0 \leq r < k$. 如 $r \neq 0$, 则 $g^r \neq 1$. 故 $g^n = g^{kq+r} = (g^k)^q \cdot g^r = g^r \neq 1$. 如 $r = 0$, 则 $g^n = g^{kq} = 1$. 由于 $g^i = g^j$ 当且仅当 $g^{i-j} = 1$, 故等价于 $i \equiv j \mod k$. 由于对任意 n, $n = kq + r$, $g^n = g^r$, 故 $< g >= \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{1, g, \ldots, g^{k-1}\}$.

当 g 为无限阶元时, $g^i = g^j \Leftrightarrow g^{i-j} = 1 \Leftrightarrow i - j = 0$, 即$i = i$. □

定义5.3. 如 $G =< S >$, 称 G 由 S 生成. 如 S 为有限集, 称 G 为**有限生成群**. 特别地, 如 G 由一个元素 g 生成, 称 G 为**循环群**, g 为 G 的一个**生成元**.

由定义知循环群必是交换群. 更进一步地, 我们有

定理5.4. *设 G 为循环群.*

(1) 如 G 为有限群, 其阶为 n, 则 $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(2) 如 G 为无限群, 则 $G \cong \mathbb{Z}$.

证明. 设 g 为 G 的生成元. 定义

$$\varphi : \mathbb{Z} \to G,\ k \mapsto g^k.$$

易知 φ 为满同态.

当 G 为无限群时, 由引理 5.2, 如 $i \neq j$, 则 $g^i \neq g^j$, 故 φ 为单同态. 因此 φ 为同构.

当 G 为 n 阶有限群时, φ 诱导同态 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to G,\ k \mod n \mapsto g^k$. 由引理 5.2, 此同态既单又满, 故为同构. □

定理5.5. *设 G 循环群, g 为 G 的生成元, 则*

(1) 如 G 为无限群, 则 G 的生成元为 g 或 g^{-1}.

(2) 如 G 为 n 阶有限群, 则 G 的生成元集合为

$$\{g^k \mid 0 \leq k < n, (k, n) = 1\}.$$

(3) G 的自同构群

$$\mathrm{Aut}G \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{如 } G \text{ 为无限群;} \\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, & \text{如 } G \text{ 为 } n \text{ 阶有限群,} \end{cases}$$

且 G 的每个自同构将生成元映为生成元.

证明. (1)和(2): 元素$h = g^a$ 是 G 的生成元当且仅当 $g = h^b$ 对某个 $b \in \mathbb{Z}$ 成立. 故 $g^{ab} = g$. 如 G 为无限群, 则 $ab = 1$, 故 $a = \pm 1$, 即 $h = g$ 或 g^{-1}. 如果 G 的阶为 n, 则 $ab \equiv 1 \mod n$, 所以 $(a, n) = 1$.

(3): 如 $f : G \to G$ 为自同构, g 为生成元, 则 $G = \{f(g^k) = f(g)^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, 故 $f(g)$ 也是G 的生成元. 我们定义映射

(i) 如G 无限,

$$\varphi : \mathrm{Aut}G \to \{\pm 1\}, \quad f \mapsto \begin{cases} 1, & \text{如 } f(g) = g; \\ -1, & \text{如 } f(g) = g^{-1}. \end{cases}$$

(ii) 如$|G| = n$,

$$\varphi : \mathrm{Aut}G \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad f \mapsto a \mod n \text{ 如 } f(g) = g^a.$$

则 φ 既单又满, 且 $\varphi(f_1 f_2) = \varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2)$, 即 φ 为群同构. □

§5.2 拉格朗日定理

§5.2.1 陪集表示

设 H 是 G 的子群.

定义5.6. 对于 $a \in G$, 集合 $aH = \{ah \mid h \in H\}$ 称为 G 关于 H 的**右陪集**. $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ 称为 G 关于 H 的**左陪集**.

引理5.7. *陪集 aH 与 bH 要么不交, 要么重合. 且 $aH = bH$ 当且仅当 $b^{-1}a \in H$(或 $a^{-1}b \in H$). 同理 Ha 与 Hb 要么不交, 要么重合. 且 $Ha = Hb$ 当且仅当 ab^{-1} 或 $ba^{-1} \in H$.*

证明. 如 $aH \cap bH \neq \varnothing$. 令 $ah_1 = bh_2$, 则 $b^{-1}a = h_2 h_1^{-1} \in H$. 此时

$$ah = ah_1(h_1^{-1}h) = bh_2(h_1^{-1}h) \in bH,$$

$$bh = bh_2(h_2^{-1}h) = ah_1(h_2^{-1}h) \in aH,$$

故 $aH = bH$. □

由引理 5.7, 设 $\{a_i H \mid i \in I\}$ 为 G 关于 H 的所有右陪集构成的集合, 则

$$G = \bigsqcup_{i \in I} a_i H \tag{5.1}$$

为 G 的一个分拆.

定义5.8. $\{a_i \mid i \in I\}$ 称为 G 的一个**右陪集代表元系**.

同理, 如 $\{Hb_j \mid j \in J\}$ 为 G 关于 H 的所有左陪集构成的集合, 则 $\{b_j \mid j \in J\}$ 称为 G 的一个**左陪集代表元系**. 注意到, $\{b_j \mid j \in J\}$ 为左陪集代表元系当且仅当

$$G = \bigsqcup_{j \in J} Hb_j \tag{5.2}$$

为 G 的分拆.

引理5.9. *如果 $\{a_i \mid \imath \in I\}$ 是 G 关于 H 的左(右)陪集代表元洗, 则 $\{a_i^{-1} \mid i \in I\}$ 是 G 关于 H 的右(左)陪集代表元系. 特别地, 如 G 关于 H 的左或右陪集代表元系有限, 则左、右陪集代表元系均有限, 且阶数相同.*

证明. 因为作为集合

$$(aH)^{-1} = \{(ah)^{-1} \mid h \in H\} = \{h^{-1}a^{-1} \mid h \in H\} = Ha^{-1}.$$

故引理得证. □

定义5.10. 群 G 关于子群 H 的**指数** $(G : H)$ 是指 G 关于 H 的陪集代表元个数. 我们规定它等于 ∞ 如陪集代表元个数无限.

定理5.11 (拉格朗日)**.** *如 G 为有限群, 则*

$$|G| = |H| \cdot (G : H) \tag{5.3}$$

注记. 如果规定 $\infty \cdot$ 正整数 $= \infty \cdot \infty = \infty$, 则 G 为无限群时(5.3)也成立.

证明. 由(5.1), 我们有

$$|G| = \sum_{i \in I} |a_i H| = \sum_{i \in I} |H| = |H| \cdot |I| = |H| \cdot (G : H).$$

定理得证. □

拉格朗日定理是群论中第一个重要定理, 它有很多重要推论.

推论5.12. *设 G 为有限群, $x \in G$, 则 $x^{|G|} = 1$, 即 x 的阶是群 G 的阶的因子.*

证明. 这是由于元素x 的阶等于子群$< x >$ 的阶. □

推论5.13. *欧拉定理与费马小定理成立.*

证明. 这是因为群 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ 的阶为 $\varphi(n)$, 再由推论 5.12即得. □

推论5.14. *素数阶群都是循环群.*

证明. 设 $g \neq 1, g \in G$, 则 g 的阶必为 p. 故 $G = \{1, g, \ldots, g^{p-1}\} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. □

推论5.15. *设 G 为 n 阶循环群, 则对于任意 $d \mid n, d \geq 1$, G 中有唯一 d 阶循环群 $\{1, x^{\frac{n}{d}}, \ldots, x^{\frac{n}{d}(d-1)}\}$, 其中 x 为 G 的生成元. 此子群也是循环群.*

证明. 首先易验证 $\{1, x^{\frac{n}{d}}, \ldots, x^{\frac{n}{d}(d-1)}\}$ 是 G 的 d 阶循环子群. 另一方面, 设 H 是G 的 d 阶子群, $y \in H$, 则 $y = x^a$, 由于 y 的阶数整除 d, 故 $y^d = x^{ad} = 1$. 所以 $ad = kn$, $y = x^{\frac{n}{d}k}$. □

推论5.16. *对于任意正整数 n,*

$$n = \sum_{1 \leq d \mid n} \varphi(d). \tag{5.4}$$

证明. 我们对 n 阶循环群的元素按阶分类, 则阶为 d 的元素生成唯一的 d 阶循环子群. 由于 d 阶循环群中共有 $\varphi(d)$ 个生成元(定理 5.5), 故恰有 $\varphi(d)$ 个元素阶为 d. 故 $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$. □

§5.2.2 陪集与正规子群

设 H 是 G 的子群, 很明显一般而言, $Ha \neq aH$. 那么什么时候它们相等呢?

引理5.17. *设 $H \leq G$, 则 $Ha = aH$ 对于 $a \in G$ 成立当且仅当 $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\} = H$.*

证明. 如$Ha = aH$, 则对于任意 $h \in H$, 存在 $h' \in H$, $ha = ah'$. 故 $h = h = ah'a^{-1} \in aHa^{-1}$, 即 $H \subseteq aHa^{-1}$. 同理, 对任意 $h' \in H$, 存在 $h \in H$, $ha = ah'$. 所以 $ah'a^{-1} = h \in H$, 即 $aHa^{-1} \subseteq H$. 故 $aHa^{-1} = H$. 反之, 若 $aHa^{-1} = H$, 则对于任意 $h \in H$, $h = ah'a^{-1}$, 即 $ha = ah'$. 所以 $Ha \subseteq aH$. 同理 $aH \subseteq Ha$. 故 $Ha = aH$. □

回忆起正规子群的定义, H 是G 的正规子群是指对任何 $x \in H$, x 的共轭元均在 H 中, 故$gHg^{-1} = H$ 对任意 $g \in G$ 成立. 我们有

命题5.18. *$H \triangleleft G$ 当且仅当对任意 $g \in G$, $gH = Hg$.*

习　　题

习题5.1. 设

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

试求A, B, AB 和BA 在$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 中的阶.

习题5.2. 证明群中元素a 的阶≤ 2 当且仅当$a=a^{-1}$.

习题5.3. 证明如果群G 中任何元素的阶≤ 2, 则G 是阿贝尔群.

习题5.4. 设$(m,n)=1$。如果G 是m 阶循环群, H 是n 阶循环群, 证明$G\times H$ 是mn 阶循环群.

习题5.5. 证明阶≤ 5 的群是阿贝尔群.

习题5.6. 在同构意义下确定所有4 阶群.

习题5.7. 设 a,b 是群 G 的任意两个元素. 试证: a 和 a^{-1}, ab 和 ba 有相同的阶.

习题5.8. 设G 是阿贝尔群, H 是G 中所有有限阶元素构成的集合. 证明H 是G 的子群.

习题5.9. 证明$\mathbb{Q}$ 作为加法群不是循环群. 更进一步证明$\mathbb{Q}$ 不是有限生成的.

习题5.10. S^1 的任意有限阶子群均为循环群.

习题5.11. 如果H 与K 是G的子群且阶互素， 证明$H\cap K=1$.

习题5.12. 设H 是G 的子群且$(G:H)=m$, 证明对于任何$g\in G$, $g^{m!}\in H$.

第六章　置换群

§6.1　置换及其表示

我们首先回顾一下, 如 A 为集合, S_A 是所有 A 到自身的双射的集合, 则 S_A 在映射复合作为乘法运算下构成群, 称为 A 的对称群.

如果 A 是有限集 $\{x_1,\ldots,x_n\}$, 则 A 到自身的双射就是将有序数组 $(x_1,\ldots,x_n)$ 映为 $(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$, 其中 $\sigma(1),\ldots,\sigma(n)$ 经过$1,\ldots,n$ 每一个元素恰好一次, 即$(1,\ldots,n)$ 到 $(\sigma(1),\ldots,\sigma(n))$ 是 $\{1,\ldots,n\}$ 上的双射.

定义6.1. 对于 $n\geq 1$, n **阶置换群** S_n 即集合 $\{1,\ldots,n\}$ 的对称群, 其中元素称为 $\{1,\ldots,n\}$ 的**置换** (或**排列**).

我们有

命题6.2. *S_n 是 $n!$ 阶有限群, 且当 $n\geq 3$ 时, S_n 为非交换群.*

证明. $|S_n|=n!$ 由排列数性质即知. 下证 S_n 非交换.

如 $\sigma,\tau\in S_n$, 其中

$$\sigma(1)=2,\sigma(2)=3,\ldots,\sigma(n-1)=n,\sigma(n)=1,$$

$$\tau(1)=2,\tau(2)=1,\tau(i)=i(i\geq 3).$$

则 $\sigma\tau(1)=\sigma(2)=3$, $\tau\sigma(1)=\tau(2)=1$. 故 $\sigma\tau\neq\tau\sigma$. 即 $S_n(n\geq 3)$ 不是阿贝尔群. □

为研究置换群 S_n, 需要一个好的形式来表示其中的置换 $\sigma\in S_n$. 一个自然的想法是将置换用两行式写出

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix},$$

其中同一列下面的数是上面的数在置换作用下的像. 例如

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 4 & 2 & 3 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

即是将 $1\mapsto 6, 2\mapsto 4, 3\mapsto 2, 4\mapsto 3, 5\mapsto 5, 6\mapsto 1$. 这种两行式的好处是简洁明了, 它的逆也容易求出.

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}\sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\overset{(*)}{=}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma^{-1}(1) & \sigma^{-1}(2) & \cdots & \sigma^{-1}(n)\end{pmatrix},$$

其中 $(*)$ 是将列自由移动, 使之上面一行变为 $(1\ 2\ \cdots\ n)$ 的有序数组. 例如上面的 σ, 我们有

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}6 & 4 & 2 & 3 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 3 & 4 & 2 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

两行式表示置换虽然简洁直观, 但记号略为繁琐, 而且在作群乘法运算时不是十分方便. 这时候需要用一行式来表示置换或者说用轮换的乘积来表示.

定义6.3. 设 k 为正整数, $\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}$. 置换 $(i_1\ \cdots\ i_k)$ 是指其将 $i_1\mapsto i_2\mapsto\cdots\mapsto i_k\mapsto i_1$ 且对于$j\notin\{i_1,\dots,i_k\}$, $j\mapsto j$. 此时称其为 k **轮换**. 对于$k=2$, 称 2 轮换 $\{i_1,i_2\}$ 为**对换**.

注记. 任何一个 1 轮换均是 S_n 中的单位元, 我们记为 1.

定义6.4. 如集合 $\{i_1,\dots,i_k\}\cap\{j_1,\dots,j_l\}=\varnothing$, 称 k 轮换 $(i_1,\dots,i_k)$ 与 l 轮换 $(j_1,\dots,j_l)$ **不相交**. 否则称它们相交.

定理6.5. *(1)* 两个不相交轮换必交换.

(2) S_n 中任何一个置换可以写为两两不相交轮换之积.

证明. (1) 设 $\sigma=(i_1\ i_2\cdots i_k)$, $\tau=(j_1\ j_2\cdots j_l)$, 则

$$\sigma\tau(i_1)=\sigma(i_1)=i_2=\tau\sigma(i_1)$$
$$\cdots$$
$$\sigma\tau(i_k)=\sigma(i_k)=i_1=\tau\sigma(i_k)$$
$$\sigma\tau(j_1)=\sigma(j_2)=j_2=\tau\sigma(j_1)$$
$$\cdots$$
$$\sigma\tau(j_l)=\sigma(j_1)=j_1=\tau\sigma(j_l)$$
$$\sigma\tau(\alpha)=\alpha=\tau\sigma(\alpha),\forall\alpha\notin\{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l\}$$

故$\sigma\tau = \tau\sigma$.

(2) 设 k_1 为最小的正整数使得 $\sigma^{k_1}(1) = 1$. 这样的 k_1 必然存在, 因为 $1, \sigma(1), \sigma^2(1), \ldots, \sigma^k(1), \ldots$ 为有限集. 设 i_2 是 $\{1, \ldots, n\}\backslash\{1, \sigma(1), \ldots, \sigma^{k_1-1}(1)\}$ 中最小元. 令 k_2 为最小正整数使得 $\sigma^{k_2}(i_2) = i_2$. 同样令 $i_3 = \min\{1, \ldots, n\}\backslash\{1, \sigma(1), \ldots, \sigma^{k_1-1}(1), i_2, \ldots, \sigma^{k_2-1}(i_2)\}$. 再取 k_3. $\cdots$, 依次类推, 我们有

$$\{1, \ldots, n\} = \{1, \sigma(1), \ldots, \sigma^{k_1-1}\} \sqcup \{i_2, \ldots, \sigma^{k_2-1}(i_2)\} \sqcup \cdots \sqcup \{i_s, \ldots, \sigma^{k_s-1}(i_s)\}.$$

我们断言

$$\sigma = (1\ \sigma(1) \cdots \sigma^{k_1-1}(1)) \cdots (i_s\ \sigma(i_s) \cdots \sigma^{k_s-1}(i_s)). \tag{6.1}$$

事实上, 对 $i \in \{1, \ldots, n\}$, 设 $i = \sigma^k(i_j)$. 令上式右边 $= \sigma'$, 则

$$\sigma(i) = \sigma^{k+1}(i_j) = \sigma'(i_j).$$

(6.1) 得证. □

例6.6. 对于 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\sigma = (1\ 6)(2\ 4\ 3)(5) = (1\ 6)(2\ 4\ 3)$.

例6.7. 对于 $n = 2$, $S_2 = \{1, (12)\}$.

对于 $n = 3$, $S_3 = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$.

对于 $n = 4$, 则

$$\begin{aligned} S_4 = \{&1, (12), (13), (14), (23), (24), (34), \\ &(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), \\ &(1234), (1243), (1324), (1423), (1342), (1432), \\ &(12)(34), (14)(23), (13)(24)\}. \end{aligned}$$

注记. k 轮换 $(i_1 \cdots i_k)$ 中哪个元素放在首位不是本质的, 事实上

$$(i_1\ i_2 \cdots i_k) = (i_2 \cdots i_k\ i_1) = \cdots = (i_k\ i_1\ i_2 \cdots i_{k-1}).$$

命题6.8. 如 $\sigma = (i_1 \cdots \imath_k)$ 为 k 轮换, 则 σ 的阶为 k, 且 $\sigma^{-1} = (i_k\ i_{k-1} \cdots i_1)$.

证明. 显然. □

对于一般的置换的阶, 我们可以使用如下结果.

引理6.9. *设 G 为群, $\sigma,\tau\in G, <\sigma>\cap<\tau>=\{1\}$ 且 $\sigma\tau=\tau\sigma$. 如 σ 的阶为 m, τ 的阶为 n, 则 $\sigma\cdot\tau$ 的阶为 $[m,n]$, 即 m 和 n 的最小公倍数.*

证明. 练习. □

§6.2 奇置换与偶置换

命题6.10. *S_n 由对换生成. 更一般地, S_n 可由对换 $(12),(13),\ldots,(1n)$ 生成.*

证明. 这是由于

$$(i_1\cdots i_k)=(i_1i_k)(i_1i_{k-1})(i_1i_2)$$

以及

$$(ij)=(1i)(1j)(1i).$$

□

设 $f=f(x_1,\ldots,x_n)$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 到 $\mathbb{Z}$ 的 n 变量函数, 对于 $\sigma\in S_n$ 定义

$$\sigma(f)(x_1,\ldots,x_n)=f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}). \tag{6.2}$$

故 $\sigma(f)$ 也是 $\mathbb{Z}^n$ 到 $\mathbb{Z}$ 上的 n 变量函数.

例6.11. *如$n=3$, $\sigma-(123)$, $f(x_1,x_2,x_3)=x_3^2-x_1$, 则$\sigma(f)(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2$.*

引理6.12. *我们有*

(1) 如 $\sigma=1$, 则 $\sigma(f)=f$.

(2) 如 $\sigma,\tau\in S_n$, 则 $\sigma\tau(f)=\sigma(\tau(f))$.

(3) 如 f,g 为 n 变量函数, c 为整常数, 则

$$\sigma(f+g)=\sigma(f)+\sigma(g),\sigma(cf)=c\sigma(f).$$

证明. (1),(3) 留给读者.

(2) 一方面,

$$\sigma\tau(f)(x_1,\ldots,x_n)=f(x_{\sigma\tau(1),\ldots,x_{\sigma\tau(n)}}).$$

另一方面, 由$\tau(f)(x) = f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)})$,

$$\begin{aligned}\sigma(\tau(f))(x) &= f(x_{\sigma(\tau(1))}, \ldots, x_{\sigma(\tau(n))}) \\ &= f(x_{\sigma\tau(1)}, \ldots, x_{\sigma\tau(n)}).\end{aligned}$$

故 $\sigma\tau(f) = \sigma(\tau(f))$. □

定理6.13. *存在唯一的群同态* $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ *使得对所有对换* τ *有*

$$\varepsilon(\tau) = -1.$$

证明. 令 $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)$. 如果 σ 是 i 个对换的积, 则

$$\sigma\Delta = (-1)^i\Delta.$$

于是 $\tau\Delta = -\Delta$ 对所有对换 τ 成立. 令 $\varepsilon(\sigma) = (-1)^i$, 由 $\sigma\tau(\Delta) = \sigma(\tau(\Delta))$ 有 $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$. 故 ε 为群同态.

唯一性显然. □

由上述定理, 一个置换写成对换乘积时, 对换个数的奇偶性不变. 我们有如下定义.

定义6.14. 如 σ 为偶数个对换的乘积, 称 σ 为偶置换. 如 σ 为奇数个对换的乘积, 则称 σ 为奇置换.

我们有

$$\begin{aligned}&\text{偶置换} \cdot \text{奇置换} = \text{奇置换} \\ &\text{偶置换} \cdot \text{偶置换} = \text{偶置换} \\ &\text{奇置换} \cdot \text{奇置换} = \text{偶置换}\end{aligned}$$

§6.3 交错群

定义6.15. S_n 中所有偶置换构成的子群, 即 $\ker\varepsilon$, 称为 n 阶交错群, 记为 A_n.

由上述讨论即知, A_n 是 S_n 的正规子群, 阶为 $\frac{n!}{2}$.

定义6.16. 设 $\sigma \in S_n$. 当 σ 写为不交轮换乘积时, k 轮换的个数为 λ_k, 则称 σ 的型为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$.

由型的定义, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, 满足方程

$$\sum_{i=1}^{n} i\lambda_i = n. \tag{6.3}$$

用组合数学的术语, 我们得到 n 的一个分(满足 (6.3) 的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 只有有限多个).

引理6.17. *置换 σ 与 σ' 的型相同当且仅当 σ 与 σ' 在 S_n 中共轭, 即存在 $\tau \in S_n$, $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$.*

证明. 设 $\sigma = (i_1 \cdots i_k)(j_1 \cdots j_l)\cdots$, 则

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(i_1)\cdots\tau(i_k))(\tau(j_1)\cdots\tau(j_l))\cdots,$$

它的型与 σ 一致.

反过来, 如 $\sigma = (i_1 \cdots i_k)(j_1 \cdots j_l)\cdots$), $\sigma' = (i'_1 \cdots i'_k)(j'_1 \cdots j_l)'\cdots$). 令

$$\tau = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k & j_1 & \cdots & j_l & \cdots \\ i'_1 & \cdots & i'_k & j'_1 & \cdots & j'_l & \cdots \end{pmatrix}$$

则 $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma'$, 即 σ 与 σ' 共轭. □

定理6.18. *A_5 中无非平凡正规子群, 即若 $1 \neq N \triangleleft A_5$, 则 $N = A_5$.*

证明. 若 $N \triangleleft A_5$, 则 N 包含 A_5 的一些共轭类. 根据上述引理, A_5 中元素型为 $1^5, 2^2 \cdot 1, 3 \cdot 1^2$ 和 5, 同型元素在 S_5 中共轭. 令

$$X_1 = \{\text{所有 } 2^2 \cdot 1 \text{ 型元素 } \sigma = (ab)(cd)\},$$
$$X_2 = \{\text{所有 } 3 \cdot 1^2 \text{ 型元素 } \sigma = (abc)\},$$
$$X_3 = \{\text{所有 } 5 \text{ 型元素 } \sigma = (abcde)\}.$$

我们断言

(1) X_1 与 X_2 均是 A_5 中共轭类.

(2) X_3 要么是 A_5 中共轭类, 要么 $X_3 = Y \sqcup Z, Y, Z$ 为 A_5 中共轭类且 $|Y| = |Z| = 12$.

断言(1)的证明:

如 $\sigma = (ab)(cd), \sigma' = (a'b')(c'd')$, 令 $\tau \in S_5$, 使得 $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$, 则

$$\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1} = (a'b')\tau\sigma\tau^{-1}(a'b').$$

由于 τ 与 $(a'b')\tau$ 必有一个在 A_5 中, 故 σ 与 σ' 在 A_5 中共轭.

如 $\sigma = (abc), \sigma' = (a'b'c')$, $\tau \in S_5$ 使得 $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$. 设 $e', f' \neq a', b', c'$, 则

$$\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1} = (e'f')\tau\sigma((e'f')\tau)^{-1}.$$

由于 τ 与 $(e'f')\tau$ 必有一个在 A_5 中, 故 σ 与 σ' 在 A_5 中共轭.

断言(2)的证明:

令

$$Y = \{\sigma(12345)\sigma^{-1} \mid \sigma \text{ 为奇}\},$$
$$Z = \{\sigma(12345)\sigma^{-1} \mid \sigma \text{ 为偶}\}.$$

则 $X_3 = Y \cup Z$, 且 Y, Z 为 A_5 中共轭类, 并且映射 $Y \to Z, \tau \mapsto (12)\tau(12)$ 为双射. 若 $Y \cap Z \neq \varnothing$, 令

$$\sigma(12345)\sigma^{-1} = \sigma'(12345)\sigma'^{-1},$$

其中 σ 为偶置换, σ' 为奇置换, 故

$$(12345) = \tau(12345)\tau^{-1}$$

对某个奇置换 τ 成立. 故对于任何 $(abcde) \in X_3$,

$$(abcde) = \sigma(12345)\sigma^{-1} = \sigma\tau(12345)(\sigma\tau)^{-1},$$

其中 σ 与 $\sigma\tau$ 不同奇偶. 故此时 $Y = Z = X_3$.

由断言, 若 $N \neq 1$, N 必为 $\{1\}$ 与 X_1, X_2, Y, Z 的若干组合之并. 但由拉格朗日定理, N 是 60 的因子, 由于$|X_1| = 15$, $|X_2| = 20$, $|Y| = |Z| = 12$ 或 24. 唯一可能的情况是 $N = A_5$. □

定义6.19. 如群 G 无非平凡正规子群, 则称 G 为单群.

Galois 对五次以上代数方程根式解不存在的证明就依赖于

定理6.20. *$A_n(n \geq 5)$ 是单群.*

我们前面证明的定理是它的一种特殊情况. 单群就如整数中的素数, 是群论的各种群的建筑基块. 对于单群, 特别是有限单群的研究, 在上个世纪六十年代到八十年代是数学研究的一个热点, 最终群论学家成功地对所有有限单群进行分类. 有限单群分类定理的证明是群论研究的一个高峰, 这个定理被广泛应用到数学研究的各个方面.

§6.4 置换群的子群

§6.4.1 Cayley 定理

置换群在群论研究中起着中心作用, 一个关键的原因就是由于Cayley 的著名定理.

定理6.21. *如 G 是有限群, 则 G 是某置换群的子群.*

证明. 令 $S_G = S_{|G|}$, 即 G 中所有元素的置换群. 对于 $\rho \in G$, ρ_g 为双射: $G \to G, g' \mapsto gg'$. 则 $\rho_g \in S_G$. 我们验证

$$\rho : G \to S_G, g \mapsto \rho_g$$

为群的单同态. 首先

$$\rho_{g_1 g_2}(g') = g_1 g_2 g' = g_1(g_2 g') = g_1 \cdot \rho_{g_2}(g') = \rho_{g_1} \circ \rho_{g_2}(g'),$$

故 ρ 为同态. 另一方面, 如 $\rho_{g_1} = \rho_{g_2}$, 则对任何 g', $g_1 g' = g_2 g'$, 故 $g_1 = g_2$. 所以 ρ 为单射. □

§6.4.2 二面体群

由于 $|S_G| = |G|!$ 随着 $|G|$ 的增长而快速增长. 在实际应用中, Cayley 定理并不十分好用. 在数学研究中, 我们有许多其他的置换群的子群例子. 本节我们讨论其中一个: 二面体群.

首先考虑正三角形. 我们令 D_3 = 正三角形的对称群. 令 s = 保持 $A0$ 不动的对折, r = 将 OA 旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 角度到 OB 的旋转. 则我们有 D_3 中的元素为 $1, r, r^2, s, rs, r^2s$. 而且

$$\begin{cases} sr^2 = C \text{ 不变}, A \leftrightarrow B = rs \\ r^3 = 1, s^2 = 1 \end{cases}.$$

反过来, 如果群 G 中元素由 r, s 生成, 且 $r^3 = 1, s^2 = 1, sr^2 = rs$, 则 $G = \{1, r, r^2, s, rs, r^2s\}$. 它与 D_3 同构.

如果我们将 A, B, C 用 $1, 2, 3$ 标记, 则 s 即是保持 1 不变, $2, 3$ 互换, 即 $s = (2\ 3)$. 同样 $r = (1\ 2\ 3)$. 我们有

$$D_3 = \{1, r, r^2, s, rs, r^2s\} = \{1, (123), (132), (23), (12), (13)\} \cong S_3.$$

这说明正三角形的对称群是 S_3.

定义6.22. 正 n 边形的对称群记为 D_{2n}, 称为二面体群.

注记. 在文献中, 几何学家习惯用 D_n 表示正 n 边形的二面体群, 代数学家习惯用 D_{2n} 来表示. 需要大家注意.

对于正 n 边形, 令 r = 逆时针旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 角度, s = 沿对称轴对折. 则 $r^n = s^2 = 1$. $D_{2n} = \{1, r, \ldots, r^{n-1}, s, rs, \ldots, r^{n-1}s\}$. 现在如果标记顶点, 则 r = 轮换 $(1\ 2\ 3 \cdots n)$, s = 对换 $(1\ n)(2\ n-1)\cdots$. D_{2n} 可以看成是 S_n 的子群.

习　　题

习题6.1. 把置换 $\sigma = (456)(567)(761)$ 写成不相交轮换的积.

习题6.2. 讨论置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

的奇偶性.

习题6.3. 求$\sigma(f)(x_1, x_2, x_3, x_4)$, 其中$\sigma = (143)$ 和$\sigma = (23)(412)$.

习题6.4. 证明一个置换的阶等于它的轮换表示中各个轮换的长度的最小公倍数.

习题6.5. S_n 中型为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$ 的置换共有 $n!/\prod_{i=1}^{n}\lambda_i!i^{\lambda_i}$ 个. 由此证明

$$\sum_{\substack{\lambda_i\geqslant 0\\ \lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=n}}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\lambda_i!i^{\lambda_i}}=1.$$

习题6.6. 给出S_4 的一个6 阶子群. 试说明 A_4 没有 6 阶子群.

习题6.7. 当 $n\geqslant 2$ 时, (12) 和 $(123\cdots n)$ 是 S_n 的一组生成元.

习题6.8. 如果矩阵 $A\in \mathrm{GL}_n$ 每一行每一列都有且仅有一个元素为 1, 其余元素为 0, 则称 A 为**置换矩阵**. 令 G 为所有的置换阵构成的集合. 证明 G 是 GL_n 的一个子群, 且 G 同构于 S_n.

习题6.9. 设$\alpha,\beta\in S_n$. 证明$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\in A_n$, 且$\alpha\beta\alpha^{-1}\in A_n$ 当且仅当$\beta\in A_n$.

第七章　$\mathbb{F}_p^\times$ 的结构和二次剩余

§7.1　乘法群 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ 与 $\mathbb{F}_p^\times$ 的结构

设 m 是正整数, $m = p_1^{e_1}\cdots p_s^{e_s}$. 根据中国剩余定理, 我们有

定理7.1. 映射

$$\begin{aligned}\varphi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times &\longrightarrow \prod_{i=1}^{s}(\mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z})^\times\\ a \mod m &\longmapsto (a \mod p_i^{e_i})_{i=1}^{s}\end{aligned}$$

是群同构.

因此要研究群 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ 的结构, 我们只需要研究 $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$ 的结构, 其中 p 为素数, $k \geq 1$. 特别地, 需要研究 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \mathbb{F}_p^\times$ 的结构.

首先假设 p 为奇素数.

定理7.2. $\mathbb{F}_p^\times$ 为循环群. 即存在 $g \mod p$, 它的阶为 $p-1$.

证明. 对于 $d \mid p-1$, 令 $S(d) = \#\{a \in \mathbb{F}_p^\times \mid a \text{ 的阶为 } d\}$ 为$\mathbb{F}_p^\times$ 中阶位d 的元素的个数, 故 $p-1 = \sum_{d\mid p-1} S(d)$. 我们只需证明$S(p-1) \neq 0$ 即可.

另一方面, 如果 a 的阶为 d, 则 $\{1, a, \ldots, a^{d-1}\}$ 均是多项式 $x^d - 1$ 在域 $\mathbb{F}_p$ 上的 d 个不同根. 但由多项式的拉格朗日定理, 它们必然是 $x^d - 1$ 的全部根. 这些根中, $a^d : 1 \leq k < d, (k,d) = 1$ 的阶恰好为 d, 而其他元素的阶小于 d. 故

$$S(d) = \begin{cases}\varphi(d), & \text{如存在 } a \text{ 的阶为 } d;\\ 0, & \text{如不存在 } a \text{ 的阶为 } d.\end{cases}$$

即 $S(d) \leq \varphi(d)$ 对所有 $d \mid p-1$ 成立. 所以

$$p-1 = \sum_{d\mid p-1} S(d) \leq \sum_{d\mid p-1}\varphi(d) = p-1.$$

因此 $S(d) = \varphi(d)$. 特别地, $S(p-1) = \varphi(p-1) \geq 1$. □

在讨论 $k > 1$ 的情形前, 我们有

引理7.3. *设 $f: G \to H$ 为群同态, $f(g) = h$. 如 h 的阶为 k, 则 g 的阶被 k 整除.*

证明. 如 g 的阶为 m, 则 $g^m = 1$, 所以 $f(g^m) = h^m = 1$, 故 $k \mid m$. □

定理7.4. *对于 $k \geq 1$, $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$ 为循环群.*

证明. $k = 1$ 的情形即上面的定理.
对于 $k \geq 1$, 我们要应用上述引理到群同态

$$(\mathbb{Z}/p^{k+1}\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$$
$$a \mod p^{k+1} \mapsto a \mod p^k$$

- $k = 2$ 的情形. 如 $g \mod p$ 为 $\mathbb{F}_p^\times$ 的生成元, 则由引理 7.3, $g \mod p^2$ 与 $(g+p) \mod p^2$ 在 $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^\times$ 的阶被 $p-1$ 整除. 由于 $\varphi(p^2) = p(p-1)$, 故只要证明它们中有一个元素的阶不是 $p-1$ 即可. 但

$$(g+p)^{p-1} - g^{p-1} = \sum_{k \geq 1} \binom{p-1}{k} g^{p-1} p^k \equiv (p-1)g^{p-2} \not\equiv 0 \mod p^2,$$

故得欲证.

- $k \geq 2$的情形. 设 $g \mod p^2$ 为 $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^\times$ 的一个生成元, 则

$$g^{p-1} \not\equiv 1 \mod p^2. \tag{7.1}$$

我们归纳证明, 对于 $k \geq 1$,

$$g^{\varphi(p^k)} = 1 + p^k \alpha_k,\ p \nmid \alpha_k. \tag{7.2}$$

当 $k = 1$ 时, 即条件 (7.1). 设当 $k = r$ 时 (7.2)成立, 则

$$g^{\varphi(p^{r+1})} = (1 + p^r \alpha_r)^p \equiv 1 + p^{r+1}\alpha_r \mod p^{r+1}.$$

故由归纳假设, (7.2)成立.

现在我们归纳证明 $g \mod p^k$ 为 $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$ 的生成元. 当 $k = 2$ 时, 这由 g 的选取决定. 设当 $k = r$ 时 $g \mod p^r$ 在 $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$ 的阶为 $\varphi(p^r)$, 则由引理 7.3, $g \mod p^{r+1}$ 在 $\mathbb{Z}/p^{r+1}\mathbb{Z}$ 的阶被 $\varphi(p^r)$ 整除. 但 (7.2)说明它的阶不等于 $\varphi(p^r)$, 故只能是 $\varphi(p^{r+1}) = p\varphi(p^r)$. 定理得证.

□

现在讨论 $p=2$ 的情形. 当 $k=1,2$ 时, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times$ 与 $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$ 分别是 $\{1\}$ 和 $\{\pm 1\}$, 自然是循环群.

命题7.5. *如 $k\geq 3$, 则 $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^\times$ 不是循环群.*

证明. 只要证明对任何奇数 a, $a^{2^{k-2}}\equiv 1 \mod 2^k$ 即可. 这由归纳法立得. □

定义7.6. 设 $m\geq 1$, 如果 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ 为循环群, 则它的一个生成元 $g \mod m$(或 $g\in\mathbb{Z}$)称为模 m 的一个**原根**.

综合以上结果, 我们有

定理7.7. *$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 中原根存在(即 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$为循环群) 当且仅当 $m=2,4,p^\alpha$ 或 $2p^\alpha$, 其中 p 为奇素数, $\alpha\geq 1$.*

证明. 我们已经对 $m=2,4,p^\alpha$ 证明了原根存在, 而对 $m=2^k(k\geq 3)$ 原根不存在. 当 $m=2p^\alpha$ 时,

$$(\mathbb{Z}/2p^\alpha\mathbb{Z})^\times\cong(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times\cong(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times,$$

故它为循环群.

对于其他情况, 我们有 $m=m_1\cdot m_2, m_1,m_2>2$ 且 $(m_1,m_2)=1$. 此时

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\cong(\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z})\times\times(\mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z}).$$

由于 $\varphi(m_1)$ 与 $\varphi(m_2)$ 有共同的素因子 2. 故由下面引理, $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ 任何元素的阶被$\varphi(m_1)\varphi(m_2)/2=\varphi(m)/2$ 整除, 故它不是循环群. □

引理7.8. *设群G 和H 为有限群, 则群 $G\times H$ 中任何元素的阶均整除G 与H 的阶的最小公倍数$[|G|,|H|]$.*

证明. 设 $(g,h)\in G\times H$, $m=[|G|,|H|]$, 则 $g^m=h^m=1$. 所以 $(g,h)^m=1$. □

§7.2 $\mathbb{F}_p^\times$ 的平方元与二次剩余

设 p 为奇素数, 由上节知 $\mathbb{F}_p^\times$ 为循环群. 如果 g 是 $\mathbb{F}_p$ 的一个原根(生成元), 则它的平方元集合为

$$\mathbb{F}_p^{\times 2} = \{a^2 \mid a \in \mathbb{F}_p^\times\} = \{1, g^2, \ldots, g^{p-2}\}. \tag{7.3}$$

定义7.9. 如果 $a \mod p$ 是 $\mathbb{F}_p^\times$ 中的平方元, 称 $a \mod p$ 为**二次剩余**. 反之, 则称为**二次非剩余**.

定义7.10. 对于 $a \in \mathbb{F}_p$, **勒让德符号**定义为

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{如 } a \text{ 为二次剩余;} \\ 0, & \text{如 } a = 0; \\ -1, & \text{如 } a \text{ 为二次非剩余.} \end{cases}$$

对于 $a \in \mathbb{Z}$, 定义 $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a \mod p}{p}\right)$.

定理7.11. 映射

$$\left(\frac{\cdot}{p}\right) : \mathbb{F}_p^\times \longrightarrow \{\pm 1\}$$

是群的满同态, 即满足

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right). \tag{7.4}$$

换言之, 二次剩余之积为二次剩余, 二次非剩余之积为二次剩余, 二次剩余与二次非剩余之积为二次非剩余.

注记. 对于 $a, b \in \mathbb{F}_p$, 我们总有$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$.

证明. 设 g 为 $\mathbb{F}_p^\times$ 的生成元. 如 $a = g^k$, $b = g^l$, 则 $ab = g^{k+l}$. 而

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^k, \quad \left(\frac{b}{p}\right) = (-1)^l, \quad \left(\frac{ab}{p}\right) = (-1)^{k+l}.$$

故得欲证. □

设 $a \in \mathbb{Z}$, 由算术基本定理. 设

$$a = (-1)^\varepsilon 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}.$$

如 $(a,p) = p$, 则 $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$. 如 $(a,p) = 1$, 则

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)^\varepsilon \left(\frac{2}{p}\right)^\alpha \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{p_s}{p}\right)^{\alpha_s}. \tag{7.5}$$

要求得 $\left(\frac{a}{p}\right)$ 的值, 只需要求

$$\left(\frac{-1}{p}\right), \left(\frac{2}{p}\right), \left(\frac{q}{p}\right) \ (p, q \text{ 为奇素数}).$$

定理7.12 (欧拉判别法)**.** $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \mod p$.

证明. 如 $(a,p) = p$, 则左边 = 右边 $\equiv 0 \mod p$. 否则, 如 $a = g^k \in \mathbb{F}_p^\times$, 则 $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^k$, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv g^{\frac{p-1}{2}k} \mod p$. 故

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow 2 \mid k \Leftrightarrow g^{\frac{p-1}{2}k} \equiv 1 \mod p.$$

定理得证. □

推论7.13. $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

证明. 由欧拉判别法, $\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \mod p$. 但由于 $p > 2$, 故 $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$. □

定理7.14. $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 & \text{如} \ p \equiv \pm 1 \mod 8 \\ -1 & \text{如} \ p \equiv \pm 3 \mod 8 \end{cases}$.

证明. 记 $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)$, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2n)$. 我们有

$$(2n)! = (2n-1)!!(2n)!!,$$

$$(2n)!! = 2^n n!.$$

如 $p=1+4n$, 则

$$\begin{aligned}(4n)! &\equiv (4n)!!(4n-1)!!\\ &\equiv 2^{2n}(2n)!\cdot(2n-1)!!\cdot(2n+1)\cdots(4n-1)\\ &\equiv 2^{2n}(2n)!\cdot(-1)^n(-1)(-3)\cdots(-2n+1)(2n+1)\cdots(4n-1)\\ &\equiv (-1)^n 2^{2n}(2n)!4n\cdot(4n-2)\cdots(2n+2)(2n+1)\cdots(4n-1)\\ &\equiv (-1)^n 2^{2n}(2n)!(2n+1)(2n+2)\cdots(4n-1)(4n)\\ &\equiv (-1)^n 2^{2n}(4n)! \mod p\end{aligned}$$

故 $\left(\frac{2}{p}\right)\equiv 2^{2n}\equiv(-1)^n\equiv(-1)^{\frac{p-1}{4}} \mod p$, 所以 $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{4}}(p\equiv 1 \mod 4)$. 同理, 如 $p=3+4n$, 可得 $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p+1}{4}}$. 综合即得定理. □

对于 $\left(\frac{q}{p}\right)$, 我们需要有下述

定理7.15 (二次互反律)**.** *设 p,q 为奇素数, 则*

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

即

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\begin{cases}\left(\frac{p}{q}\right) & \text{如 } p,q \text{ 不全为 } 3 \mod 4\\ -\left(\frac{p}{q}\right) & \text{如 } p\equiv q\equiv 3 \mod 4\end{cases}.$$

二次互反律是高斯对数论的重要贡献. 它是古典数论的结束, 现代数论的开始. 直到现代, 数论研究的核心问题仍是二次互反律的各种(极其复杂和深刻的)推广. 二次互反律也是被证明最多的数学定理之一, 迄今已经有超过一百多种证明. 我们将在下一节证明二次互反律.

我们举例说明如何应用二次互反律计算勒让德符号.

例7.16. *计算 $\left(\frac{219}{383}\right)$.*

解. 首先, 由于勒让德符号是积性的,

$$\left(\frac{219}{383}\right)=\left(\frac{73}{383}\right)\cdot\left(\frac{3}{383}\right).$$

由二次互反律,

$$\left(\frac{73}{383}\right)=\left(\frac{383}{73}\right)=\left(\frac{18}{73}\right)=\left(\frac{2}{73}\right)=1,$$

$$\left(\frac{3}{383}\right)=\left(\frac{383}{3}\right)=-\left(\frac{2}{3}\right)=(-1)\cdot(-1)=1.$$

故 $\left(\frac{219}{383}\right)=1$. □

命题7.17. 二次同余方程 $x^2\equiv a \mod p$ 的解数恰好为 $\left(\frac{a}{p}\right)+1$.

例7.18. 判定同余方程 $x^2\equiv 219 \mod 383$ 是否有解？

设 $a=\pm 2q_1\cdots q_s$, 求 p 使得 $\left(\frac{a}{p}\right)=1$. 这等价于求解方程组

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{p}\right) &= \delta_{-1} \\ \left(\frac{a}{p}\right) &= \delta_2 \\ &\vdots \\ \left(\frac{a}{p}\right) &= \delta_{q_i} \\ \delta_{-1}\delta_2\cdots\delta_{q_i} &= 1 \\ \delta_i &= \pm 1 \end{cases}$$

- 如 $q\equiv 1 \mod 4$, $\left(\frac{q}{p}\right)=1\Leftrightarrow\left(\frac{p}{q}\right)=1$.
- 如 $q\equiv 3 \mod 4$, $\left(\frac{q}{p}\right)=1\Leftrightarrow\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

例7.19. 确定以 6 为二次剩余的素数.

§7.3 二次互反律的证明

本节的证明采用了中国剩余定理.

证明. 设 p,q 为不同的奇素数. 令 $S=\{x \mid 1\le x\le \frac{pq-1}{2}, (x,pq=1)\}$. $\{1,2,\ldots,\frac{pq-1}{2}\}$ 中与 p 互素的数为 $kp+r$, 其中 $r=1,2,\ldots,p-1$ 若 $0\le k\le \frac{q-3}{2}$, $r=1,2,\ldots,\frac{p-1}{2}$ 若 $k=\frac{q-1}{2}$. 而 $\{1,2,\cdots,\frac{pq-1}{2}\}$ 中 q 的倍数为 $lq, l=1,2,\ldots,\frac{p-1}{2}$. 于是 $|T|=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$, 且

$$\begin{aligned}\prod_{x\in S}x &\equiv (p-1)!^{\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\right)!\diagup q^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\right)! \mod p\\ &\equiv (-1)^{\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{p}\right) \mod p\end{aligned}$$

这其中第二个同余用到了Wilson定理和欧拉判别法. 类似地, 我们有

$$\prod_{x\in S} x \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) \mod q.$$

将上面两个单独的乘积写成数组乘积的形式, 即

$$\prod_{x\in S}(x,x) \equiv \left((-1)^{\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right), (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)\right) \ (\mod p, \mod q). \tag{7.6}$$

下面我们换种方式计算 $\prod_{s\in S}(x,x)$. 令 $T = \{(a,b) \mid 1 \le a \le p-1, 1 \le b \le \frac{q-1}{2}\}$. 对任意的 $(a,b) \in T$, 由中国剩余定理, 存在唯一的 $x \in \{1,2,pq-1\}$ 且 $(x,pq) = 1$, 使得 $(a,b) = (x \mod p, x \mod q)$. 若 $x \notin S$, 则 $pq - x \in S$, 此时 $(pq - x \mod p, pq - x \mod q) = (-a,-b)$. 于是对 T 中的每个元素 (a,b), S 中存在唯一的元素 x 满足 $(x \mod p, x \mod q) = (a,b)$ 或 $(x \mod p, x \mod q) = (-a,-b)$. 又 $|S| = |T|$, 故这是一个双射. 于是

$$\begin{aligned}\prod_{x\in S}(x,x) &\equiv \pm \prod_{(a,b)\in T}(a,b) \ (\mod p, \mod q)\\ &\equiv \pm \left((p-1)!^{\frac{q-1}{2}}, (\frac{q-1}{2})!^{p-1}\right) \ (\mod p, \mod q)\end{aligned} \tag{7.7}$$

由于 $(p-1)! \equiv -1 \mod p$, 于是 $(p-1)!^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{q-1}{2}} \mod p$. 由

$$\begin{aligned}-1 &\equiv (q-1)! \mod q\\ &\equiv 1\cdots 2\cdots(\frac{q-1}{2})\cdot(-\frac{q-1}{2})\cdots(-2)\cdot(-1) \mod q\\ &\equiv (\frac{q-1}{2})!^2(-1)^{\frac{q-1}{2}} \mod q\end{aligned}$$

得 $(\frac{q-1}{2})!^2 \equiv (-1)(-1)^{\frac{q-1}{2}} \mod q$. 因此 $(\frac{q-1}{2})!^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$. 则 (7.7) 可以写成

$$\prod_{x\in S}(x,x) \equiv \pm \left((-1)^{\frac{q-1}{2}}, (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\right) \ (\mod p, \mod q). \tag{7.8}$$

比较 (7.8) 和 (7.6), 我们有

$$\left(\frac{q}{p}\right) = 1, \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}},$$

或者

$$\left(\frac{q}{p}\right)=-1, \left(\frac{p}{q}\right)=-(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

无论哪种情况都有

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

二次互反律得证. □

习　　题

习题7.1. 设 p 是奇素数. 证明: 模 p 的任意两个原根之积不是模 p 的原根.

习题7.2. 设 p 是一个奇素数, 假设存在一个 a 使得对 $p-1$ 的所有素因子 q, 有 $a^{(p-1)/q}\not\equiv 1 \pmod p$, 则 a 是模 p 的原根. 反过来的命题显然也成立.

习题7.3. 设 n, a 都是正整数且 $a>1$, 证明: $n \mid \varphi(a^n-1)$.

习题7.4. 设 m 是正整数, 整数 a 和 b 对于模 m 的阶分别是 s 及 t, 且 $(s,t)=1$. 证明: ab 模 m 的阶是 st.

习题7.5. (i) 设 $a\geqslant 2$, p 为奇素数, 证明: a^p-1 的素因子如果不整除 $a-1$, 则必有形式 $2px+1$, x 为整数;

(ii) 设 p 是给定的奇素数, 证明: 由无穷多个素数具有 $2px+1$ 的形式.

习题7.6. (i) 对 $p=3,5,7,11,13,17,19,23$, 求模 p 的最小正原根;

(ii) 求模 7^2 及模 5^{10} 的一个原根.

习题7.7. 证明: 形如 $8n+3, 8n+5, 8n+7$ 的素数均有无穷多个.

习题7.8. 设 p 与 $q=2p+1$ 都是素数. 证明

(i) 当 $p\equiv 1 \pmod 4$ 时, 2 是模 q 的原根;

(ii) 当 $p\equiv 3 \pmod 4$ 时, -2 是模p 的原根.

习题7.9. 设 p 是素数, $p\equiv 1 \pmod 4$. 证明

(i) $\displaystyle\sum_{r=1,\left(\frac{r}{p}\right)=1}^{p-1} r=\frac{p(p-1)}{4}$;

(ii) $\sum\limits_{a=1}^{p-1} a\left(\frac{a}{p}\right)=0$;

(iii) $\sum\limits_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{k^2}{p}\right]=\frac{(p-1)(p-5)}{24}$.

习题7.10. 设 p 是素数, $p\equiv 3 \pmod 4$. 证明

(i) $\sum\limits_{r=1,\left(\frac{r}{p}\right)=1}^{p-1} r\equiv 0 \pmod p$;

(ii) $\sum\limits_{a=1}^{p-1} a\left(\frac{a}{p}\right)\equiv 0 \pmod p$.

习题7.11. 设 p 是奇素数, a 是整数.

(i) 证明: 同余方程 $x^2-y^2\equiv a \pmod p$ 必有解;

(ii) 若 (x,y) 和 (x',y') 均是上述同余方程的解, 当 $x\equiv x'$ 且 $y\equiv y' \pmod p$ 时, 我们将 (x,y) 和 (x',y') 看成是模 p 的同一个解. 证明:(i)中同余方程的解数是 $p-1$(如果 $p\nmid a$) 或 $2p-1$(如果 $p\mid a$).

习题7.12. 设 p 是奇素数, $f(x)=ax^2+bx+c$ 且 $p\nmid a$. 记

$$D=b^2-4ac.$$

证明

$$\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{f(x)}{p}\right)=\begin{cases}-\left(\frac{a}{p}\right), & \text{如果 } p\nmid D,\\ (p-1)\left(\frac{a}{p}\right), & \text{如果 } p\mid D.\end{cases}$$

习题7.13. 设 a 是奇数, 则

(i) $x^2\equiv a \pmod 2$ 对所有 a 有解;

(ii) $x^2\equiv a \pmod 4$ 有解的充要条件是 $a\equiv 1 \pmod 4$, 并且在此条件满足时, 恰有两个不同的解;

(iii) 同余方程$x^2\equiv a \pmod{2^k}(k\geqslant 3)$ 有解的充要条件是 $a\equiv 1 \pmod 8$, 并且在此条件成立时恰有四个解. 如果 x_0 是一个解, 则$\pm x_0, \pm x_0+2^{k-1}$ 是所有解.

习题7.14. 计算 $\left(\frac{17}{23}\right),\left(\frac{19}{37}\right),\left(\frac{60}{79}\right),\left(\frac{92}{101}\right)$.

习题7.15. (i) 确定以 -3 为二次剩余的素数;

(ii) 确定以 5 为二次剩余的素数;

(iii) 确定以 15 为二次剩余的素数.

习题7.16. 设 $p = 4k + 1$ 是素数, a 是 k 的约束. 证明: $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$.

习题7.17. 设 $p = 10n - 1$ 是素数, 证明: $p \mid 5^{5n-1} - 1$.

习题7.18. 设 $n > 1, p = 2^n + 1$ 是素数. 证明: 模 p 的原根之集与模 p 的二次非剩余之集相同; 进而证明 $3, 7$ 都是模 p 的原根.

第八章　多项式环

设 R 为交换环. 我们已经定义了 R 上的多项式环 $R[x]$. 如果多项式 $f(x) \neq 0$, 则 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ $(n \neq 0)$, 则 $f(x)$ 的**次数**为 n, a_0 称为 $f(x)$ 的**常数项**, a_n 称为 $f(x)$ 的**首项系数**. 如果 $f(x)$ 为零多项式, 定义 $f(x)$ 的次数为 $-\infty$. 映射 $i : R \to R[x]$, $a \mapsto a$ 是环的单同态, 由此我们视 R 为 $R[x]$ 的子环.

引理8.1. 设 $f(x), g(x) \in R[x]$, 则

(1) $\deg(f(x) + g(x)) \leqslant \max(\deg f(x), \deg g(x))$.

(2) $\deg(f(x) \cdot g(x)) \leqslant \deg f(x) + \deg g(x)$.

当 R 为整环时, (2) 中的等号成立.

证明. 练习. □

注记. 如果 R 不是整环, (2) 中的等号不一定成立. 例如 $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $f(x) = g(x) = 2x$, 则 $f(x)g(x) = 0$, 次数 $-\infty < 2$.

命题8.2. 整环 R 的多项式环 $R[x]$ 的单位群 $(R[x])^\times = R^\times$.

证明. 显然 $R^\times \subset (R[x])^\times$. 反过来, 如果 $f(x) \in R[x]^\times$, 令 $g(x)$ 为它的逆, 则 $f(x)g(x) = 1$, 故 $\deg f(x) = \deg g(x) = 0$, $f(x) = a \in R^\times$ 为常多项式. □

在本章, 我们将讨论两种多项式环: (1) $R = F$ 为域; (2) $R = \mathbb{Z}$ 为整数环.

§8.1　域上的多项式

设 F 为域. 本节将讨论 F 上的多项式环 $F[x]$ 的性质. 我们将看到 $F[x]$ 与整数环 $\mathbb{Z}$ 的性质惊人相似.

§8.1.1　基本概念和性质

定义8.3. 设 $f(x), g(x) \in F[x]$. 如果存在 $h(x) \in F[x]$, 使得

$$f(x) = g(x)h(x),$$

称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的**因子**, $f(x)$ 为 $g(x)$ 的**倍数**, 记为 $g(x) \mid f(x)$, 否则记为 $g(x) \nmid f(x)$.

例8.4. *多项式 $a \in F^\times$ 及 $af(x)$ 总是 $f(x)$ 的因子, 我们称之为 $f(x)$ 的*平凡因子.

定理8.5 (带余除法)**.** *设 $f(x), g(x) \in F[x]$ 且 $g(x) \neq 0$, 则存在唯一的 $q(x), r(x) \in F[x]$,*

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \ (\deg r < \deg g). \tag{8.1}$$

证明. 先证存在性. 令 $I = \{f(x) - a(x)g(x) \mid a(x) \in F[x]\}$, 则 I 不是空集. 令 $r(x)$ 是 I 中次数最低的. 如果 $\deg r > \deg g$, 令

$$\begin{aligned} g(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m, \\ r(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \end{aligned}$$

则 $n \geqslant m$. 令 $r_1(x) = r(x) - \frac{a_n}{b_m} g(x) x^{n-m}$, 则 $r_1(x) \in I$ 且 $\deg r_1 < n = \deg r$, 矛盾. 故 $\deg r < \deg g$.

再证唯一性. 如果 $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x)$, 则 $r_1(x) - r_2(x) = g(x)(q_2(x) - q_1(x))$. 比较两边次数知 $r_1 = r_2$, 故 $q_1 = q_2$. □

注记. $q(x)$ 域 $r(x)$ 分别称为 $f(x)$ 被 $g(x)$ 整除的**商**与**余数**. 大家可以比较上述证明与整数带余除法的证明.

定义8.6. 设 $f(x), g(x) \in F[x]$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**最大公因子**是指满足如下条件的首一多项式 $d(x) \in F[x]$,

(1) $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因子;

(2) 如果 $d'(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因子, 则 $\deg d' \leqslant \deg d(x)$.

此时记 $d(x) = (f(x), g(x))$. 如果 $d = 1$, 称 f 与 g **互素**.

可以看出, 如果 $d(x) \in F[x]$ 满足 (1) 和 (2), 则 $cd(x)$ $(c \neq 0)$ 也满足 (1) 和 (2). 为了保证 $d(x)$ 的唯一性, 我们假设 $d(x)$ 首一(类似于整数最大公因子中 d 为正整数).

定理8.7. 设 $f(x), g(x) \in F[x]$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 生成的理想与 $d(x)$ 生成的理想一致, 即

$$\begin{aligned}&\{f(x)u(x)+g(x)v(x) \mid u(x), v(x) \in F[x]\}\\ =&\{d(x)w(x) \mid w(x) \in F[x]\}.\end{aligned}$$

特别地,

(1) 存在 $u(x), v(x) \in F[x]$,

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)=(f(x), g(x)). \tag{8.2}$$

(2) f 与 g 互素当且仅当存在 $u(x), v(x) \in F[x]$, 使得 $fu+gv=1$.

注记. 我们同样称上面的等式为 *Bezout* **等式**.

证明. 令 $I=f(x)$ 与 $g(x)$ 生成的理想. 设 $d'(x)$ 为 I 中的非零元次数最小者, 不妨设 d' 首一. 首先, 由 $d(x) \mid f(x)$ 且 $d(x) \mid g(x)$ 和 $d(x) \mid d'(x)$.

另一方面, 我们断言 $d'(x) \mid f(x)$ 且 $d'(x) \mid g(x)$. 事实上, $f(x)=q(x)d'(x)+r(x)\,(\deg r < \deg d')$. 由此 $r(x) \in I$, 故由 $d'(x)$ 次数最小性知 $r(x)=0$, 即 $d' \mid f$. 同理 $d' \mid g$, 我们同时也证明了 $f(x)$ 与 $g(x)$ 生成的理想与 $d'(x)$ 生成的理想是一样的.

由于 $d \mid d'$, 我们有 $\deg d \leqslant d'$. 由 d' 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因子, 故 $\deg d' \leqslant \deg d$, 所以 $\deg d=\deg d'$. 由于它们均首一, 故 $d=d'$. □

注记. 本定理的证明与定理3.6的证明完全类似.

同样我们有

定理8.8. $F[x]$ 中的理想 I 均由一个元素生成, 即

$$I=f(x)F[x]=\{f(x)u(x) \mid u(x \in F[x])\}.$$

同样我们也有计算 $f(x)$ 与 $g(x)$ 最大公因子的欧几里得算法.

目的. 给定不全为零的 $f(x), g(x) \in F[x]$, 计算 $(f(x), g(x))$.

算法.

第0步. 如果 $f(x)=0$, 则 $(f(x), g(x))=g(x)$.

第1步. 如果 $f(x), g(x) \neq 0$, 作带余除法

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x).$$

如果 $r_1(x) = 0$, 则算法终止, $(f(x), g(x)) = cg(x)$, 其中 $0 \neq c \in F$, $cg(x)$ 首一.

第2步. 如果 $r_1(x) \neq 0$, 作带余除法

$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x).$$

重复第1步, 直至 $r_n(x) = 0$. 则 $(f(x), g(x)) = cr_{n-1}(x)$, $0 \neq c \in F$, $cr_{n-1}(x)$ 首一.

例8.9. 设$F = \mathbb{F}_2$, 求$(x^2 + 1, x^4 + x^2 + x + 1)$.

证明. 我们有

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + x + 1 =& x^2(x^2 + 1) + (x + 1), \\ x^2 + 1 =& (x + 1)(x + 1), \end{aligned}$$

(注意到在$\mathbb{F}_2$ 中$2 = 0$), 故$(x^2 + 1, x^4 + x^2 + x + 1) = x + 1$. □

命题8.10. (1) 设 $f(x), g(x) \in F[x]$, $d(x) = (f(x), g(x))$. 如果 $d' \mid f, d' \mid g$, 则 $d' \mid d$.

(2) 如果 $(f(x), g(x)) = 1$ 且 $(f(x), h(x)) = 1$, 则 $(f(x), g(x)h(x)) = 1$.

证明. (1) 由 Bezout 等式, $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$, 故 $d' \mid d$.

(2) 设

$$\begin{aligned} f(x)u_1(x) + g(x)v_1(x) = 1, \\ f(x)u_2(x) + h(x)v_2(x) = 1, \end{aligned}$$

则$f(fu_1u_2 + u_1hv_2 + u_2gv_1) + gh \cdot v_1v_2 = 1$, 故$(f, gh) = 1$. □

§8.1.2 因式分解

定义8.11. 多项式$p(x) \in F[x]$ 称为**不可约多项式**是指它的因子只有平凡因子 c 和 $cp(x)$ $(0 \neq c \in F)$.

引理8.12 (欧几里得)**.** 如果 p 为不可约多项式, $p \mid fg$, 则 $p \mid f$ 或 $p \mid g$.

证明. 反证法. 如果 $p \nmid f$ 且 $p \nmid g$, 则$(p, f) = (p, g) = 1$, 故 $(p, fg) = 1$, 这与 $p \mid fg$ 矛盾. □

定理8.13. 对任意非零多项式 $f(x) \in F[x]$,

$$f(x) = cp_1(x) \cdots p_r(x), \tag{8.3}$$

其中 c 为 $f(x)$ 的首项系数, $p_1, \cdots, p_r$ 为首一不可约多项式, 并且如不计因子次序则表达式唯一.

证明. 与算术基本定理的证明完全类似. □

将 $p_1, \cdots, p_r$ 中相同的因子合并起来, 则

$$f(x) = cp_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}, \tag{8.4}$$

其中 $p_1, \cdots, p_s$ 两两不同, $e_1, \cdots, e_s$ 为正整数. 我们有以下推论.

推论8.14. 如果 $f(x) = c_1 p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$, $g(x) = c_2 p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s}$, 其中 p_i 为两两不同的首一不可约多项式, $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_s \geqslant 0$, 则

$$(f, g) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdots p_s^{\min(\alpha_s, \beta_s)}. \tag{8.5}$$

§8.1.3 多项式的零点

在带余除法中, 令 $g(x) = x - a$, $f(x) = q(x)(x - a) + r(x)$, 由 $\deg r < 1$ 知 $r(x)$ 为常多项式. 将 $x = a$ 带入, 知 $r(x) = f(a)$. 我们有

定理8.15 (余数定理)**.** 设 $f(x) \in F[x]$, 则

$$f(x) = q(x)(x - a) + f(a).$$

故 $f(a) = 0$ 当且仅当 $x - a \mid f(x)$.

定义8.16. 如果 $f(a) = 0$, 称 a 为 $f(x)$ 的一个**零点**.

定理8.17 (拉格朗日)**.** 设 $f(x) \in F[x]$ 是次数为 n 的多项式, 则 $f(x)$ 的零点个数 $\leqslant n$.

证明. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 为 $f(x)$ 的零点, 则由余数定理

$$f(x) = f_1(x)(x - a_1).$$

由 $f(a_2) = 0 = f_1(a_2)(a_2 - a_1)$, 故 $f_1(a_2) = 0$, 同理 $a_2, \cdots, a_s$ 也是 $f_1(x)$ 的根. 由于 $\deg f(x) = n$ 当期仅当 $\deg f_1(x) = n - 1$, 所以 $s \leqslant n$ 当且仅当 $s - 1 \leqslant n - 1$. 故由归纳法即得. □

注记. 对于一般的环, 这个结论不成立. 比如在四元数体 $\mathbb{H}$ 中

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)^2 = -1.$$

对于一般的域, 我们同样有描述根与系数的关系的韦达定理.

定理8.18 (韦达定理)**.** 设$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 是域F 上次数大于0 的多项式.

(1) 设 $x_1, \ldots, x_n$ 为 n 次多项式 $f(x)$ 的 n 个不同的根, 则

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n). \tag{8.6}$$

(2) 如果多项式

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^{n}(x - x_i),$$

*(*此时 x_i 可以相同*)*, 则对于$1 \leq k \leq n$,

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}. \tag{8.7}$$

特别地,

$$x_1 + \cdots + x_n = (-1)\frac{a_{n-1}}{a_n}, \tag{8.8}$$

$$x_1 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \tag{8.9}$$

证明. 证明与第一章中根与系数的关系的证明完全一样, 关键是乘积的展开, 这对于所有的域都是一样的. □

§8.1.4 多项式的同余

设 $m(x) \neq 0, m(x) \in F[x]$.

定义8.19. $f(x)$ 与 $g(x)$ 模 $m(x)$ **同余**是指 $f(x) - g(x) \mid m(x)$, 此时用同余式

$$f(x) \equiv g(x) \mod m(x)$$

来表示.

命题8.20. 模 $m(x)$ 同余关系是 $F[x]$ 上的等价关系, 且如果 $a(x) \equiv b(x) \mod m(x)$, $c(x) \equiv d(x) \mod m(x)$, 则

(1) $a(x) \pm c(x) \equiv b(x) \pm d(x) \mod m(x)$.

(2) $a(x)c(x) \equiv b(x)d(x) \mod m(x)$.

证明. 显然. □

由带余除法, $F[x]$ 模 $m(x)$ 的每个代表类可用 $r(x) \in F[x], \deg r < \deg m$ 来表示, 记

$$F[x]/m(x) = F[x]/m(x)F[x] = \{[r(x)] = r(x) \mod m(x) \mid \deg r < \deg m\} \tag{8.10}$$

表示所有同余类集合, 则由上述命题, 如果定义

$$[r_1(x)] + [r_2(x)] = [r_1(x) + r_2(x)],$$
$$[r_1(x)] \cdot [r_2(x)] = [r_1(x)r_2(x)],$$

则 $F[x]/m(x)F[x]$ 在上述加法和乘法运算下成为交换环, 即有下述定理:

定理8.21. $F[x]/m(x)F[x]$ 为交换环, 它的元素为

$$\{r(x) \mod m(x) \mid \deg r(x) < \deg m(x)\},$$

它的单位群 $(F[x]/m(x)F[x])^\times$ 为

$$\{a(x) \mod m(x) \mid (a, m) = 1, \deg a < \deg m\}.$$

特别地, $F[x]/m(x)F[x]$ 为整环当且仅当 $m(x)$ 为不可约多项式.

应用到 $F=\mathbb{F}_p$ 为 p 元有限域的情形, 我们有

推论8.22. *如果 $m(x)\in\mathbb{F}_p[x]$, $\deg m(x)=n>0$, 则 $\mathbb{F}_p[x]/m(x)\mathbb{F}_p[x]$ 为 p^n 元环. 如果 $m(x)=p(x)$ 为首一不可约多项式, 则 $\mathbb{F}_p[x]/m(x)\mathbb{F}_p[x]$ 为 p^n 元有限域.*

定理的证明. 如果 $(a,m)=1$, 则存在 $u(x),v(x)\in F[x]$,

$$a(x)u(x)+m(x)v(x)=1,$$

故 $a(x)u(x)\equiv 1 \mod m(x)$, $[a(x)]$ 有逆元 $[u(x)]$. 另一方面, 如果 $a(x) \mod m(x)$ 可逆, 则存在 $b(x)$,

$$a(x)b(x)\equiv 1 \mod m(x),$$

故存在 $v(x)$, $a(x)b(x)=1+m(x)v(x)$, 所以 $(a,m)=1$. 综上,

$$(F[x]/m(x)F[x])^\times=\{a\mid (a,m)=1,\deg a<\deg m\}.$$

如果 $m(x)=m_1(x)m_2(x)$, $0<\deg m_1<\deg m$, 则 $[m_1(x)]\cdot[m_2(x)]=0$, 故 $F[x]/m(x)F[x]$ 不是整环. 如果 $m(x)$ 不可约, 对任意 $a\neq 0$, $a(x)\in F[x]$, $\deg a<\deg m$, 有 $(a(x),m(x))=1$, 故

$$(F[x]/m(x)F[x])^\times=F[x]/m(x)F[x]-\{0 \mod m(x)\},$$

所以 $F[x]/m(x)F[x]$ 为域. □

设 $m(x)\mid n(x)$, 则我们有自然映射

$$\begin{aligned} F[x]/n(x)F[x] &\longrightarrow F[x]/m(x)F[x]\\ a \mod n(x) &\longmapsto a \mod m(x).\end{aligned}$$

如同整数环情形, 这是环的满同态. 我们同样有中国剩余定理:

定理8.23. *如果 $m(x)=m_1(x)m_2(x)\cdots m_s(x)$, 其中 m_i 两两互素, 则我们有环同构*

$$\begin{aligned} F[x]/m(x) &\longrightarrow F[x]/m_1(x)\times\cdots\times F[x]/m_s(x)\\ a(x) \mod m(x) &\longmapsto (a(x) \mod m_1(x),\cdots,a(x) \mod m_s(x)),\end{aligned}$$

它诱导群同构

$$(F[x]/m(x))^\times\longrightarrow (F[x]/m_1(x))^\times\times\cdots\times(F[x]/m_s(x))^\times.$$

此定理的证明完全类似于整数环中国剩余定理的证明, 我们留作练习. 同样, 可以用中国剩余定理来解多项式同余方程.

§8.2 整系数多项式环 $\mathbb{Z}[x]$

我们已经看到域上的多项式环的性质与整数环 $\mathbb{Z}$ 十分类似. 本节我们将考虑 $\mathbb{Z}$ 上的多项式环 $\mathbb{Z}[x]$, 它将有一些不同的性质. 在以后的近世(抽象)代数学习中, 这些性质将被推广到一般整环的多项式环上.

我们首先来看一下有理数域上多项式与整数环上多项式的不同.

- 令 $f(x)=2x+1$, $g(x)=4x+2$, 我们有

$$g(x)=2f(x),\quad f(x)=\frac{1}{2}g(x).$$

在 $\mathbb{Q}[x]$ 中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为因子, 但在 $\mathbb{Z}[x]$ 中, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的因子但 $g(x)$ 不是 $f(x)$ 的因子.

- 带余除法. 令 $f(x)=x^2$, $g(x)=2x+1$, 则

$$x^2=(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4})(2x+1)+\frac{1}{4}.$$

这是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的带余除法, $q(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$, $r(x)=\frac{1}{4}$. 但在 $\mathbb{Z}[x]$ 中不可能存在 $q(x),r(x)\in\mathbb{Z}[x]$,

$$x^2=q(x)(2x+1)+r(x),\ \deg r<1.$$

事实上, 由于 $q(x)\in\mathbb{Z}[x]$, $q(x)(2x+1)$ 的首项系数为偶数, $x^2-q(x)(2x+1)$ 的次数大于或等于 2.

- $\mathbb{Q}[x]$ 中任何理想都是由一个元素生成的, 但在 $\mathbb{Z}[x]$ 中这是不对的. 例如由 2 和 x 生成的理想, 如果它是由 $a(x)$ 生成, 则

$$2=a(x)b(x),\quad x=a(x)c(x).$$

由前一个等式, $\deg a=\deg b=0$, 故 $a=\pm2$ 或 ±1. 由第二个等式, $a=\pm1$, 故 $1=2u(x)+xv(x)$. 考虑两边的常数项, 则 $1=$偶数, 矛盾!

正是有这些不同, 我们需要考虑 $\mathbb{Z}[x]$ 上的多项式.

定理8.24 (带余除法)**.** *如果 $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 为首一多项式, 则对于任何 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 存在唯一的 $q(x)$ 与 $r(x)$,*

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),\ \deg r < \deg g.$$

证明. 唯一性的证明与域上的多项式一样. 对于存在性, 检查域上的证明. 如果 $\deg r \geqslant \deg g$, 令

$$I = \{f(x) - a(x)g(x) \mid a(x) \in \mathbb{Z}[x]\},$$

$r(x) \in I$ 且次数最低. 如果 $\deg r \geqslant \deg g$, 在域的多项式证明中, 令

$$r_1(x) = r(x) - \frac{r(x)\text{ 首项系数}}{g(x)\text{ 首项系数}} g(x) \cdot x^{\deg r - \deg g},$$

则 $\deg r_1 < \deg r$, 且 $r_1(x) \in I$. 在我们的情形, $g(x)$ 的首项系数为 1, 故仍有 $r_1(x) \in I$. □

在上一节同构类的构造中, 我们知道如果 $p(x)$ 不可约, 则 $F[x]/p(x)$ 为域. 这是最常见的构造域的办法. 特别在实际应用中, 如果 $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约, 我们立即可以构造新的域 $\mathbb{Q}[x]/p(x)$.

我们因此有一个自然的问题: 设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 如果 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约, 自然 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中不可约. 那么反过来是否也对呢?

定理8.25 (高斯引理)**.** *如果 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 且 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中可约, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中可约, 即如果*

$$f(x) = g(x)h(x),\ 0 < \deg g < \deg f,$$

则

$$f(x) = g_1(x)h_1(x),\ g_1, h_1 \in \mathbb{Z}[x],\ 0 < \deg g_1 < \deg f.$$

我们需要几个引理:

引理8.26. 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{Z}[x]$, p 为素数,

$$\bar{f}(x)=f(x)\mod p=\sum_{i=0}^{n}[a_i]x^i\in\mathbb{F}_p[x],$$

即将 $f(x)$ 的每项系数 $a_i\in\mathbb{Z}$ 视为 $\mathbb{F}_p$ 中元素, 则

$$\varphi:\mathbb{Z}[x]\to\mathbb{F}_p[x],\ f\mapsto\bar{f}$$

为环同态. 特别地, 如果 $\bar{f}(x)$ 不可约, 则 $f(x)$ 必不可约.

证明. 验算即得. □

引理8.27. 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{Z}[x]$, $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j\in\mathbb{Z}[x]$,

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{k=0}^{n+m}c_kx^k.$$

若 (a_i) 没有公共素因子, (b_j) 也没有公共素因子, 则 (c_k) 也没有公共素因子.

证明. 用反证法. 如果 $p\mid c_k$, 对 $k=0,\cdots,n+m$ 成立, 则 $\bar{f}(x)\cdot\bar{g}(x)=0\in\mathbb{F}_p[x]$. 由 $\mathbb{F}_p[x]$ 是整环知 $\bar{f}(x)=0$ 或 $\bar{g}(x)=0$, 但由已知条件这不可能. □

定义8.28. 如果整系数多项式系数间没有公共素因子, 称此多项式为**本原多项式**.

由定义, 本原多项式的乘积还是本原多项式.

引理8.29. 任何非零多项式 $a(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 均可以唯一写成

$$a(x)=ca_1(x)\tag{8.11}$$

的形式, 其中$c\in\mathbb{Q}$, $a_1(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 为本原多项式且首项系数为正.

注记. 上式中的c 称为$a(x)$ 的**容度**.

证明. 取 N 足够大, 使得 $(\pm N)a(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$, 令 α 是所有 α_i 的最大公因子, 则

$$a(x) = \frac{\alpha}{\pm N} a_1(x) = c a_1(x), \tag{8.12}$$

其中 $a_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 且 $a_1(x)$ 的系数无公共素因子, 我们取 N 或 $-N$ 使得 $a_1(x)$ 首项系数为正, 故$a(x)$ 有(8.11) 的形式.

另一方面, 如果

$$a(x) = a a_1(x) = b a_2(x), a, b \in \mathbb{Q},$$

我们可以通分后假设$a,\ b \in \mathbb{Z}$ 互素. 由于$a_1(x)$ 与$a_2(x)$ 均是本原多项式, 故$a = b = \pm 1$。又由于$s_1(x)$ 与$a_2(x)$ 首项都为正, ￥啊，a, b 同正负, 故$a = b$ 且$a_1(x) = a_2(x)$. □

高斯引理的证明. 设 $f(x) = g(x)h(x) \in \mathbb{Q}[x]$. 将它们都写为(8.11) 的形式

$$f(x) = c(f) f_1(x), \quad g(x) = c(g) g_1(x), \quad h(x) = c(h) h_1(x),$$

则

$$f(x) = c(f) f_1(x) = c(g) c(h) g_1(x) h_1(x).$$

由于$g_1(x)h_1(x)$ 为本原多项式, 且首项为正, 故等于 $f_1(x)$, 所以

$$f(x) = g_1(x) \cdot (c(f) h_1(x)),$$

$g_1(x), h_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 而$c(f) = \pm f(x)$ 各项系数的最大公因子, 故高斯引理得证. □

高斯引理说明整系数多项式的不可约性在 $\mathbb{Z}[x]$ 中与 $\mathbb{Q}[x]$ 中是一样的, 那么是否有办法来判断呢? 引理 8.26告诉我们:

定理8.30 (Eisenstein 判别法)**.** 如果 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, p 为素数且 $p \nmid a_n$, $p \mid a_i\ (0 \leqslant i \leqslant n-1)$, $p^2 \nmid a_0$, 则 $f(x)$ 不可约.

证明. 如果 $f(x)$ 可约, 则 $f(x) = g(x)h(x),\ 0 < \deg g < n$, 故

$$\bar{f}(x) = \bar{a}_n x^n = \bar{g}(x)\bar{h}(x) \in \mathbb{F}_p[x],$$

所以 $\bar{g}(x) = \bar{b} x^m$, $\bar{h}(x) = \bar{c} x^{n-m}$, 即 $p \mid b_0$, $p \mid c_0$, 故 $p^2 \mid b_0 c_0 = a_0$. □

例8.31. $f(x)=x^4+2x+6$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约.

例8.32. 令

$$\Phi_p(x)=1+x+\cdots+x^{p-1}=\frac{x^p-1}{x-1},$$

则

$$\Phi_p(x+1)=\frac{(x+1)^p-1}{x}=x^{p-1}+\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}x^{k-1}.$$

由于 $p\mid\binom{p}{k}$, $p^2\nmid p$, 故 $\Phi_p(x+1)$ 不可约, 因此 $\Phi_p(x)$ 不可约.

§8.3 多元多项式

设 R 为交换环, 我们添加一个未定元即得到 R 上的多项式环 $R[x]$, 它也是交换环. 由此类推, 我们得到 R 上的 n 元多项式环 $R[x_1,\cdots,x_n]=(R[x_1,\cdots,x_{n-1}])[x_n]$, 它的每个元素可表示为

$$f(x)=\sum_{i_1,\cdots,i_n}a_{i_1,\cdots,i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n},\ a_{i_1,\cdots,i_n}\in R.$$

$f(x)$ 的**次数**为

$$\deg f=\max\{i_1+i_2+\cdots+i_n\mid a_{i_1,\cdots,i_n}\neq 0\}.$$

如果 $f(x)\neq 0$, 仍定义 $\deg 0=-\infty$. 另外可以定义 f 关于 x_k 的次数

$$\deg_{x_k} f=\max\{i_k\mid a_{i_1,\cdots,i_n}\neq 0\}.$$

定义形如 $ax_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ 的多项式称为**单项式**. 如果对于所有 $a_{i_1,\cdots,i_n}\neq 0$, $i_1+\cdots+i_n=d$ 为常值, 即$f(x)$ 包含的每个单项式的次数均等于 d, 称 $f(x)$ 为 d **次齐次多项式**.

对于多元多项式环, 在今后的代数和代数几何学习中会经常遇到. 本书主要考虑一类特殊的多项式: 对称多项式.

回忆在定义奇置换与偶置换的时候, 对于 $\sigma\in S_n$, $f(x_1,\cdot,x_n)\in R[x_1,\cdots,x_n]$, 我们定义

$$\sigma(f)(x_1,\cdots,x_n)=f(x_{\sigma(1),\cdots,x_{\sigma(n)}}).$$

比如说, $\sigma=(123)$, $f(x_1,x_2,x_3)=x_3^2-x_2$, 则

$$\sigma(f)(x_1,x_2,x_3)=x_{\sigma(3)}^2-x_{\sigma(2)}=x_1^2-x_3.$$

定义8.33. n 元多项式 $f(x_1,\cdot,x_n)$ 称为**对称多项式**是指对所有 $\sigma\in S_n$,

$$f(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)})=f(x_1,\cdots,x_n),$$

即 $\sigma(f)=f$.

例8.34. 对于 $k\in\mathbb{N}$, $p_k(x_1,\cdots,x_n)=x_1^k+\cdots+x_n^k$ 是对称多项式.

例8.35. 设 $F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-s_1x^{n-1}+s_2x^{n-2}+\cdots+(-1)^ns_n$. 根据韦达定理,

$$\begin{aligned}
s_1&=x_1+x_2+\cdots+x_n\\
s_2&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\\
&\vdots\\
s_k&=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}\\
&\vdots\\
s_n&=x_1\cdots x_n.
\end{aligned}$$

$s_1,\cdots,s_n$ 为 $x_1,\cdots,x_n$ 的对称多项式, 称之为**初等对称多项式**.

定理8.36. 设 R 为整环, 则 R 上的 n 元对称多项式均是初等对称多项式的多项式, 即如果 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为对称多项式, 则

$$f(x_1,\cdots,x_n)=g(s_1,\cdots,s_n),$$

其中g 为 n 元多项式.

例8.37. 对于 $n=3$,

$$\begin{aligned}
p_2(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+x_2^2+x_3^2\\
&=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\\
&=s_1^2-2s_2.
\end{aligned}$$

证明. 对于单项式 $x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$, 定义它的权为

$$i_1+2i_2+\cdots+ni_n.$$

对于多项式, 则定义它的权为其中单项式的最大权. 我们证明, 如果多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为次数为 d 的对称多项式, 则存在权 $\leqslant d$ 的多项式 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 使得

$$f(x_1,\cdots,x_n)=g(s_1,\cdots,s_n).$$

我们对 n 归纳. $n=1$ 显然, 此时 $s_1=x_1$.

假设定理对 $n-1$ 元多项式成立, 在 $F(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ 中取 $x_n=0$, 则

$$(x-x_1)\cdots(x-x_n)=x^n-(s_1)_0x^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}(s_{n-1})_0x,$$

其中 $(s_i)_0=s_i(x_1,\cdots,x_{n-1},0)$, 故对于 $i=1,\cdots,n-1$, $(s_i)_0=s_i(x_1,\cdots,x_{n-1})$, 即 $n-1$ 元初等对称多项式.

我们现在对 d 作归纳. $d=0$ 是平凡情况. 设 $d>0$ 且断言对次数 $<d$ 的多项式成立. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的次数为 d, 故存在 $g_1(x_1,\cdots,x_n)$, 权 $\leqslant d$, 且

$$f(x_1,\cdots,x_{n-1},0)=g_1((s_1)_0,\cdots,(s_{n-1})_0).$$

注意到 $g_1(x_1,\cdots,x_n)$的权 $\leqslant d$, 故

$$f_1(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)-g_1(s_1,\cdots,s_n)$$

的次数 $\leqslant d$ (相对于 $(x_1,\cdots,x_n)$ 而言) 且为对称多项式. 由于$f_1(x_1,\cdots,x_{n-1},0)=0$, 故 f_1 被 x_n 整除. 又由于 f_1 对称, 故它包含因子 $s_n=x_1\cdots x_n$, 所以

$$f_1=s_nf_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

对某个 f_2 成立, 显然 f_2 是对称的, 且其次数 $\leqslant d-n<n$. 由归纳假设, 存在 g_2, 权 $\leqslant d-n$, 且

$$f_2(x_1,\cdots,x_n)=g_2(s_1,\cdots,s_n),$$

故

$$f(x_1,\cdots,x_n)=g_1(x_1,\cdots,x_n)+s_ng_2(s_1,\cdots,s_n),$$

其中每一项的权 $\leqslant d$, 定理证毕. □

定理8.38. 如果 $f(x_1,\cdots,x_n)\in R[x]$ 且$f(s_1,\cdots,s_n)=0$, 则 $f=0$.

注记. 上述定理说明初等对称多项式是代数独立的.

证明. 反证法. 若 $f\neq 0$, 取所有满足 $f(s_1,\cdots,s_n)=0$ 的非零多项式中 元n 最小且对于此n 次数最小的 f, 记

$$f(x_1,\cdots,x_n)=f_0(x_1,\cdots,x_{n-1})+\cdots+f_d(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n^d. \tag{8.13}$$

我们断言 $f_0\neq 0$. 事实上, 如果 $f_0=0$, 则 $f(x)=x_n\psi(x)$, 故 $s_n\psi(s_1,\cdots,s_n)=0$, 所以 $\psi(s_1,\cdots,s_n)=0$, 而ψ 的次数小于 f, 与 f 的最小性矛盾.

现在在 (8.13) 中令 $x_i=s_i$, 则

$$0=f_0(s_1,\cdots,s_{n-1})+\cdots+f_d(s_1,\cdots,s_{n-1})s_n^d.$$

这是 $R[x_1,\cdots,x_n]$ 中的一个等式. 令 $x_n=0$, 则

$$0=f_0((s_1)_0,\cdots,(s_{n-1})_0),$$

这与 n 最小性矛盾. □

我们最后讲一个对称多项式: 多项式的判别式做例子.

定义8.39. 令多项式 $f(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, 则

$$D(x_1,\cdots,x_n)=D_f=\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2, \tag{8.14}$$

称为 f 的**判别式**.

很明显$D(f)$ 是$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的对称多项式. 对于简单情形, 我们有

命题8.40. *(1) 若* $f(x)=x^2+bx+c$,

$$D_f=(x_1-x_2)^2=b^2-4c. \tag{8.15}$$

(2) 若$f(x)=x^3+ax+b$,

$$D_f=(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_1-x_3)^2=-4a^3-27b^2. \tag{8.16}$$

证明. (1) 我们有$D(f)=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=b^2-4c$.

(2) 注意到在定理 8.36 的证明过程中, 如果f 为d 次齐次多项式, 得到的多项式g 中各项的权相等, 也等于d. 在我们的情况, $D(f)$ 是x_1,x_2,x_3 的6 次齐次多项式, 权为6 的多项式共7 种: x_1^6, $x_1^4x_2$, $x_1^3x_3$, $x_1^2x_2^2$, $x_1x_2x_3$, x_2^3 和x_3^2. 故

$$D(f)=c_1s_1^6+c_2s_1^4s_2+cs_1^3s_3+c_4s_1^2s_2^2+c_5s_1s_2s_3+c_6s_2^3+c_7s_3^2.$$

又由于$s_1=-x_1+x_2+x_3=0$, $s_2=a$, $s_3=-b$, 我们可以假设$D(f)=c_6a^3+c_7b^2$. 取$x_1=1$, $x_2=-1$, 故$x_3=0$, $a=-1$, $b=0$ 及$D=4$, 故$c_6=-4$. 取$x_1=x_2=1$ 及$x_3=-2$, 则可解得$c_7=-27$. 故

$$D_f=(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_1-x_3)^2=-4a^3-27b^2.$$

命题证毕. □

习　　题

习题8.1. (i) 设 n 是正整数, $\alpha\in F$. 证明: $x-a$ 整除 x^n-a^n;

(ii) 设 n 是正奇数, $\alpha\in F$. 证明: $x+a$ 整除 x^n+a^n.

习题8.2. 对下面的情形, 用欧几里得算法求 $(f(x),g(x))$:

(i) $F=\mathbb{Q}, f(x)=x^3+x-1, g(x)=x^2+1$;

(ii) $F=\mathbb{F}_2, f(x)=x^7+1, g(x)=x^6+x^5+x^4+1$;

(iii) $F=\mathbb{F}_3, f(x)=x^8+2x^5+x^3+x^2+1, g(x)=2x^6+x^5+2x^3+2x^2+2$.

习题8.3. 设 m,n 是正整数, 证明: $F[x]$ 上多项式 x^m-1 与 x^n-1 的最大公因式是 $x^{(m,n)}-1$.

习题8.4. 设 $f(x),g(x)\in F[x]$, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素. 则对任意正整数 n, $f(x^n)$ 与 $g(x^n)$ 也互素.

习题8.5. 求有理系数多项式 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$, 使得

$$x^3\alpha(x)+(1-x)^2\beta(x)=1.$$

习题8.6. 设 $f(x), g(x) \in F[x]$ 且 $g(x) \neq 0$. 表达式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 称为 F 上的**有理分式**.

(i) 设 $g(x) = a(x)b(x)$, 其中 $a(x)$ 与 $b(x)$ 互素且均非常数; 假设 $\deg f < \deg g$, 则存在唯一确定的 $r(x), s(x) \in F[x]$, $\deg r < \deg a$, $\deg s < \deg b$, 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{r(x)}{a(x)} + \frac{s(x)}{b(x)};$$

(ii) 设 $g(x)$ 首项系数为 1, 其标准分解是 $g(x) = \prod_{i=1}^{l} p_i^{m_i}(x)$. 假设 $\deg f < \deg g$. 则存在唯一确定的多项式 $h_i(x) \in F[x]$, $\deg h_i < m_i \deg p_i$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{h_1(x)}{p_1^{m_1}(x)} + \cdots + \frac{h_l(x)}{p_l^{m_l}(x)};$$

(iii) 设 $p(x) \in F[x]$ 是不可约多项式, m 是正整数. 则对任意 $h(x) \in F[x], h(x) \neq 0$ 且 $\deg h < m \deg p$, 存在唯一确定的多项式 $\alpha_i(x) \in F[x] (1 \leqslant i \leqslant m)$, 使得

$$\frac{h(x)}{p^m(x)} = \frac{\alpha_m(x)}{p(x)} + \cdots + \frac{\alpha_1(x)}{p^m(x)},$$

其中 $\alpha_i(x)$ 或者为零, 或者 $\deg \alpha_i < \deg p$;

(iv) 证明: 每一个分子的次数小于分母的次数, 且分母有标准分解

$$f(x) = p_1^{m_1}(x) \cdots p_l^{m_l}(x)$$

的有理分式 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 是**部分分式**的和, 每个部分分式的分母是 $p_i^{k_i}(x)$ $(k_i = 1, \cdots, m_i; i = 1, \cdots, l)$, 而分子或者是零, 或者其次数小于 $\deg p_i$.

习题8.7. 设 $f(x) \in F[x]$, 且 $\deg f = 2$ 或 3. 则 $f(x)$ 在 F 上不可约的充要条件是 $f(x)$ 在 F 中无零点.

习题8.8. 确定 $\mathbb{F}_2[x]$ 与 $\mathbb{F}_3[x]$ 中所有 2 次及 3 次的首项系数为 1 的不可约多项式.

习题8.9. 设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 且 $f(0) \equiv f(1) \equiv 1 \pmod 2$. 证明: $f(x)$ 没有整数根.

习题8.10. 对 $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 且 $f(x)\neq 0$, 用 $c(f)$ 表示 $f(x)$ 的容度.

(i) 对任意 $a\in\mathbb{Z}$, $a\neq 0$, 证明: $c(af)=|a|c(f)$;

(ii) 证明: $c(fg)=c(f)\cdot c(g)$.

习题8.11. 设 $f(x)$ 是本原多项式, $g(x)\in\mathbb{Q}[x]$, 且 $f(x)g(x)\in\mathbb{Z}[x]$, 则 $g(x)\in\mathbb{Z}[x]$.

习题8.12. 设 $p(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 是本原的不可约多项式, 证明: 对 $f(x),g(x)\in\mathbb{Z}[x]$, 若 $p(x)\mid f(x)g(x)$, 则 $p(x)\mid f(x)$ 或 $p(x)\mid g(x)$.

习题8.13. 证明下面的多项式在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约:

(i) x^4+3x+5;

(ii) $x^5+4x^4+2x^3+6x^2-x+5$.

习题8.14. (i) 设 p 是素数, 证明: $x^{p-1}+\cdots+x+1$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约;

(ii) 设 $n>1$ 是素数, 证明: 如果 $x^{n-1}+\cdots+x+1$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约, 则 n 是素数.

习题8.15. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是互不相同的整数, 证明: $(x-a_1)\cdots(x-a_n)-1$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约.

习题8.16. 设 p 是素数, 证明: $\mathbb{F}_p[x]$ 中形如 $x^2+\alpha x+\beta$ 的二次多项式中, 共有 $\frac{p(p-1)}{2}$ 个不可约多项式.

习题8.17. 设 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 是一个 n 次多项式, 满足

$$f(k)=2^k\ (k=1,2,\cdots,n+1).$$

求 $f(n+2)$.

习题8.18. 设 $f(x)\in\mathbb{F}_p[x]$, $\deg f=p-2$. 若对所有 $\alpha\in\mathbb{F}_p(\alpha\neq 0)$ 有 $f(\alpha)=\alpha^{-1}$, 试确定 $f(x)$.

习题8.19. 将下列对称多项式写为初等对称多项式的多项式:

(i) $x_1^2x_2+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_2$;

(ii) $x_1(x_2^3+x_3^3)+x_2(x_1^3+x_3^3)+x_3(x_1^3+x_2^3)$.

习题8.20. 设x_1,x_2,x_3 是整系数三次方程$x^3+ax^2+bx+c=0$ 的根. 记$a_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$. 证明对$n\in\mathbb{N}$, a_n 是整数.

索　引