

《随机过程A》期中考试试题

姓 名_____ 学 号_____ 得 分_____

(2017年05月08日上午9:45–11:45)

一. (30分) 填空或选择题, 答案可以直接写在试卷上.

1. 设随机变量 X 和 Y 的矩母函数 $g_X(t)$ 和 $g_Y(t)$ 均存在, 则下列说法错误的是().
(A) $g_X(t)$ 能唯一决定 X 的分布
(B) 若 X 的方差存在且 $g_X(t)$ 二阶可导, 则 $\text{Var}(X) = g_X''(0) - [g_X'(0)]^2$
(C) $X + Y$ 的矩母函数也存在且为 $g_X(t)g_Y(t)$
(D) 对任意 $n > 0$, n 阶矩 $E[X_n]$ 一定存在
2. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 λ 的Poisson过程, 则 $E[N(1)N(2)] =$ _____;
若又已知 $N(3) = 1$, 则 $P(N(2) - N(1) = 1) =$ _____.
3. 关于一般的更新过程, 下列说法中通常正确的是().
(A) 具有平稳独立增量性
(B) 具有独立增量性, 但不具有平稳增量性
(C) 不具有独立增量性, 但具有平稳增量性
(D) 既不具有独立增量性又不具有平稳增量性
4. 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个 Markov 链, 且一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 3 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 X_0 的分布律为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, 则 X_2 的分布律为_____;
且该 Markov 链的平稳分布为_____.

5. 在离散时间 Markov 链中, 关于常返性下列说法正确的是().
(A) 若状态 i 常返且 $j \rightarrow i$, 则状态 j 也是常返的
(B) 若状态 i 常返且 $i \rightarrow j$, 则状态 j 不一定是常返的
(C) 若状态 i 零常返, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)}$ 一定存在
(D) 若状态 i 正常返, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)}$ 一定存在
6. 关于离散时间 Markov 链的平稳分布和极限分布, 下列说法正确的是().
(A) 只要有正常返类, 则必有平稳分布
(B) 平稳分布和极限分布都存在, 则它们必相等
(C) 极限分布若存在则与 X_0 的取值无关
(D) 平稳分布若存在则必唯一

7. 关于直线上的简单对称随机游动 $\{X_n, n \geq 0\}$, 下列说法错误的是().
- (A) 所有状态的周期均为 2
- (B) $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一个 Markov 链且无平稳分布
- (C) 若 $X_0 = 0$, 则对任意整数 n , 其最终能到达它的概率为 1
- (D) 若 $X_0 = 0$, 则其首次返回原点所需平均时间是有限的
8. 在初始状态为 1 的分支过程中, 若每个个体繁衍下一代个体的数目服从参数为 $\lambda > 1$ 的 Poisson 分布, 则群体最终会灭绝的概率为方程_____的最小正根.
9. 若一连续时间 Markov 链在某个时刻所处的状态为 i , 且已知

$$q_{i,i-1} = \frac{1}{2}, \quad q_{i,i+1} = \frac{1}{3}, \quad q_{i,i+2} = \frac{1}{6}, \quad q_{i,j} = 0, \quad j \notin \{i-1, i, i+1, i+2\},$$

则其状态继续停留在 i 上的时间服从参数为_____的指数分布, 然后转移到 $i-1$ 上的概率为_____.

- 二. (12分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是满足第一题8小题条件的分支过程. 对任意 $n \geq 0$, 试求 X_n 的期望 $E[X_n]$ 与方差 $\text{Var}[X_n]$.

- 三. (18分) 设某路口轿车和客车分别按速率为 λ_1 和 λ_2 的 Poisson 过程通过, 且相互独立. 从某个时刻 t 开始, 试求

1. 有第一辆车通过该路口所需的平均时间.
2. 轿车首先通过该路口的概率.
3. 在相继两辆轿车之间恰有 n 辆客车通过该路口的概率, $n = 0, 1, 2, \dots$.

- 四. (20分) 设罐子中装有 4 个球, 它们要么是红色的, 要么是黑色的. 每次从罐中随机取出一个球, 然后换入一个另一种颜色的球. 经过 n 次这样的取球置换后, 记 X_n 为罐中黑球的个数.

1. 写出过程 $\{X_n, n \geq 0\}$ 状态空间, 并说明该过程是否为 Markov 链.
2. 讨论各状态的周期性和常返性(可直接写出你的结论, 无须计算过程).
3. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 试讨论 X_n 的极限分布.
4. 若初始时罐中没有黑球, 则平均需要多少次取球置换后罐中再次无黑球?

- 五. (20分) 两颗通信卫星放入轨道, 每颗卫星的工作寿命均服从参数为 μ 的指数分布. 一旦有某颗卫星失效就再发射一颗新卫星替换它, 所需的准备及发射时间服从参数为 λ 的指数分布. 记 $X(t)$ 为时刻 t 时在轨道中工作的卫星个数, 则 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一连续时间 Markov 链.

1. 问 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是否为一个生灭过程? 说明你的理由并指出状态空间.
2. 写出该 Markov 链的 Q 矩阵.
3. 建立其 Kolmogorov 向前微分方程(要求: 非矩阵形式).
4. 当时间 $t \rightarrow \infty$ 时, 在轨工作卫星数服从什么分布?