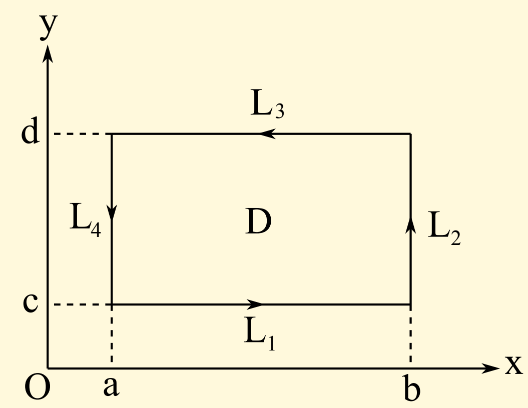
11.3.3 格林公式

当第二型曲线积分与路径无关，而只与起点和终点有关时，沿环路的积分必为零. 因此，为了搞清积分是否与路径无关，就要讨论何时沿环路的积分为零.

先看矩形环路的情形. 如图设 $D = [a, b] \times [c, d]$. $L = \partial D$, L 的方向为逆时针方向. 设 $F = (P(x, y), Q(x, y))$ 是一个向量场，且 $P, Q \in C^1(D)$. 则有



$$\oint_L Pdx + Qdy = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} + \int_{L_4}$$

$$\int_{L_1}+\int_{L_3}=\int_a^b P(x,c)dx-\int_a^b P(x,d)dx=\int_a^b\big(P(x,c)-P(x,d)\big)dx$$
$$=-\int_a^b\left(\int_c^d\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy\right)dx=-\iint_D\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy$$

$$\int_{L_2}+\int_{L_4}=\int_c^d Q(b,y)dy-\int_c^d Q(a,y)dy=\int_c^d\big(Q(b,y)-Q(a,y)\big)dy$$
$$=\int_c^d\left(\int_a^b\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dx\right)dy=\iint_D\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy$$

$$\therefore\quad \oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy.$$

此式表明向量场 $F=(P,Q)$ 沿环路 L 的环量等于 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 上的二重积分.

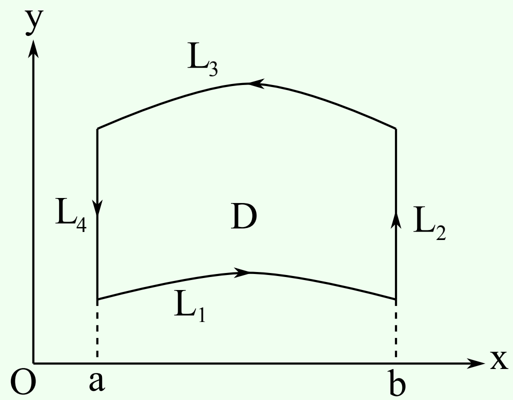
定理 1 (Green 公式) 设 D 是由有限条逐段光滑的封闭曲线 L 围成的平面闭区域. $F=(P(x,y),Q(x,y))$ 是 D 上光滑向量场. 则有

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy, \tag{11.1}$$

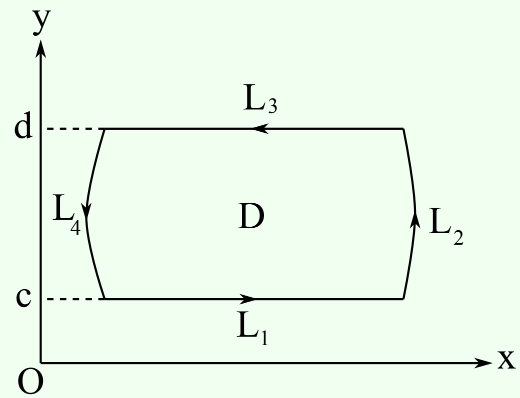
其中 $L=\partial D$ 的方向这样确定: 在 L 上行走时, D 在左侧.

甲类区域 $D:=\{(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\}$

乙类区域 $D:=\{(x,y)\,|\,c\leqslant y\leqslant d,\varphi(y)\leqslant x\leqslant\psi(y)\}$



甲类区域



乙类区域

设 D 是一个甲类区域. 我们有

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} Pdx &= \left(\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}+\int_{L_4}\right) Pdx = \left(\int_{L_1}+\int_{L_3}\right) Pdx \\ &= \int_a^b P(x,\varphi(x))dx - \int_a^b P(x,\psi(x))dx \\ &= \int_a^b \Big(P(x,\varphi(x)) - P(x,\psi(x))\Big)dx \\ &= -\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy\end{aligned}$$

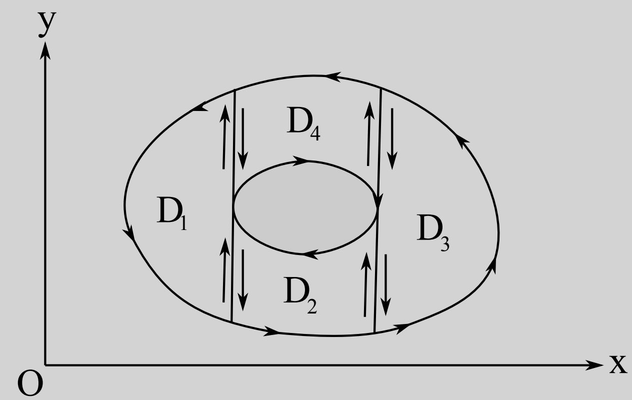
即当 D 是一个甲类区域时, 有

$$\oint_{\partial D} Pdx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy. \tag{11.2}$$

现在设 D 是由有限个甲类区域拼接而成的区域, 即,

$$D = D_1 + D_2 + \cdots + D_n,$$

其中每个 D_i 都是甲类区域. 由于在相邻两个甲类区域的公共边上, 曲线积分按相反的方向各积分了一次. 因此在这样的边上线积分的值也相互抵消. 所以



$$\partial D = \partial D_1 + \partial D_2 + \cdots + \partial D_n.$$

由积分的可加性和 (11.2), 可得

$$\oint_{\partial D} P dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial D_j} P dx = -\sum_{j=1}^{n} \iint_{D_j} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\iint_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

这说明 (11.2) 对由有限个甲类区域拼接而成的区域也是成立的.

类似地, 当 D 是由有限个乙类区域拼接而成的区域时, 有

$$\oint_{\partial D} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \tag{11.3}$$

于是当区域 D 既可拆分为有限个甲类区域, 又可拆分为有限个乙类区域时, 就有

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

注: 虽然我们没有在一般的情况下证明 Green 公式, 但 "既可拆分为有限个甲类区域, 又可拆分为有限个乙类区域" 这个条件已经相当宽了, 在实际问题中的区域基本都满足这个条件.

推论 1 设 D 是由有限条逐段光滑的封闭曲线围成的区域, $F=(P,Q)$ 是 D 上的光滑向量场, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0,$$

则对于 D 中任意一条光滑封闭曲线 L, 只要 L 的内部还在 D 中, 就有

$$\oint_L P dx+Q dy=0.$$

推论 2 设 D 是由有限条逐段光滑的封闭曲线围成的区域, 其面积为 A, 则

$$A=\oint_{\partial D} x dy=-\oint_{\partial D} y dx=\frac{1}{2}\oint_{\partial D} x dy-y dx.$$

其中 ∂D 的方向取正向. 特别, 若 ∂D 的参数方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$, 则

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\big(x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\big)dt.$$

例 1 若 $f(x,y)$ 在单连通区域 D 内有连续的二阶偏导数, 则 f 的梯度场 $\mathbf{grad}\, f = (f'_x, f'_y)$ 的曲线积分在 D 内与路径无关.

证明 设 $P = f'_x,\ Q = f'_y$. 则

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\\
&= \frac{\partial f'_y}{\partial x} - \frac{\partial f'_x}{\partial y}\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

所以根据推论 1 知, 结论成立.

例 2 计算积分 $\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, 其中 $L: x^2+y^2=R^2$, 逆时针方向.

解 因为在 $(0,0)$ 上 $x^2+y^2=0$, 所以不能直接用 Green 公式. 设 L 的参数方程为 $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$. 则有

$$\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, dt = 2\pi.$$

或者

$$\begin{aligned}\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} &= \frac{1}{R^2}\int_L xdy - ydx \\ &= \frac{1}{R^2}\iint_D 2dxdy \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

例 3 计算积分 $\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, L 是不经过原点的逐段光滑封闭曲线, 方向为逆时针方向.

解 当原点在 L 的外部时, 向量场 $\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ 在 L 的内部是 C^2 的, 且

$$\frac{\partial \frac{x}{x^2+y^2}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{-y}{x^2+y^2}}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

所以由 Green 公式知, 所求积分为零.

当原点在 L 的内部时, 在 L 的内部作一个小圆 L_1 包含原点. 设 L_1 的方向为逆时针方向, 则在由 L 与 $-L_1$ 围成的区域 D 上可用 Green 公式, 且

$$\int_{L-L_1} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0,$$

所以

$$\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \int_{L_1} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 2\pi.$$

例 4 计算积分 $\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$, $L: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 逆时针方向.

解 因为 $P=x+y, Q=y-x$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微, L 是光滑的, 所以可以用 Green 公式,

$$\int_L (x+y)dx+(y-x)dy = \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} \left(\frac{\partial(y-x)}{\partial x}-\frac{\partial(x+y)}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= -2\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} dxdy$$

$$= -2\pi ab.$$

例 5 设 L 是圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 方向为逆时针方向. $f(x)$ 是一个正值可微函数, 且满足

$$\int_L -\frac{y}{f(x)}dx + xf(y)dy = 2\pi.$$

求 $f(x)$.

解 设 L 所围的圆周为 D. 根据 Green 公式, 有

$$\int_L -\frac{y}{f(x)}dx + xf(y)dy = \iint_D \left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)dxdy.$$

因为 D 关于 x, y 是对称的, 所以

$$\iint_D \left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)dxdy = \iint_D \left(f(x)+\frac{1}{f(y)}\right)dxdy.$$

因此

$$\int_L -\frac{y}{f(x)}dx + xf(y)dy = \frac{1}{2}\iint_D \left(f(x)+f(y)+\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}\right)dxdy.$$

由于

$$\int_L -\frac{y}{f(x)}dx + xf(y)dy = 2\pi = 2\iint_D dxdy.$$

因而有

$$\iint_D \left(\left(\sqrt{f(x)} - \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)^2 + \left(\sqrt{f(y)} - \frac{1}{\sqrt{f(y)}}\right)^2\right) dxdy = 0.$$

这说明 $\sqrt{f(x)} - \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}} = 0$, 即 $f(x) = 1$.

例 6 如果 $f(x,y)$ 在 $\overline{B}(P_0,R)$ 上有二阶连续偏导数, 且满足 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, 那么有

$$f(P_0)=\frac{1}{2\pi r}\int_L f(x,y)ds,$$

其中 $P_0=(x_0,y_0)$, $L:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2, 0\leqslant r\leqslant R$.

证明 令 $g(r)=\frac{1}{2\pi r}\int_L f(x,y)ds$. 因为 L 的参数方程为 $x=x_0+r\cos\varphi$, $y=y_0+r\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. 所以

$$\begin{aligned}
g(r)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0+r\cos\varphi, y_0+r\sin\varphi)d\varphi.\\
g'(r)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\varphi=\frac{1}{2\pi r}\int_L -\frac{\partial f}{\partial y}dx+\frac{\partial f}{\partial x}dy\\
&=\frac{1}{2\pi r}\iint_B\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy=0,
\end{aligned}$$

这说明 $g(r)$ 为常数. 所以 $g(r)=g(0)=f(P_0)$.

例 7 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{x^2+y^2\leqslant a^2\}$ $(a>0)$ 上具有一阶连续偏导数, 且满足 $f(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2}=a^2$, 以及 $\max\limits_{(x,y)\in D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=a^2$. 证明: $\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right|\leqslant\frac{4}{3}\pi a^4$. (第九届全国大学生数学竞赛决赛)

证明 设 $P(x,y)=-yf(x,y), Q(x,y)=xf(x,y)$. 则 P,Q 在 D 上有一阶连续偏导数. 记 $L=\partial D$. 由于 f 在 L 上为常数 a^2, 由 Green 公式,

$$\oint_L Pdx+Qdy=a^2\oint_L -ydx+xdy=a^2\iint_D 2dxdy=2\pi a^4.$$

另一方面, 直接用 Green 公式, 得

$$\begin{aligned}\oint_L Pdx+Qdy&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\\&=\iint_D\left(2f(x,y)+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy.\end{aligned}$$

故,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\pi a^4-\frac{1}{2}\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy. \tag{1}$$

利用 Cauchy 不等式和条件, 可得

$$\begin{aligned}\left|\iint_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\,dxdy\right| &\leqslant \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy\\ &\leqslant a\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\\ &= a\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\,d\varphi dr\\ &= \frac{2}{3}\pi a^4.\end{aligned}$$

结合 (1), 可得

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right| \leqslant \pi a^4+\frac{1}{3}\pi a^4=\frac{4}{3}\pi a^4.$$