参考解答和参考评分标准

一　**解**：特征线方程为：

$$(\frac{dy}{dx})^2 - 3\frac{dy}{dx} - 4 = 0$$

得到两个首次积分：

$$x + y = c_1,\ \ y - 4x = c_2\,.$$

作变换$\xi = x + y,\ \eta = y - 4x$, 方程化为:

$$u_{\xi\eta} = 0 \Longrightarrow u = f(\xi) + g(\eta) = f(x+y) + g(y-4x)$$

....(5分)

代入定解条件得到：

$$f(x) + g(-4x) = \sin 3x,\ \ f'(x) + g'(-4x) = 2x$$

解得：
$$f(x) = \frac{1}{5}(\sin 3x + 4x^2 + 4c),\quad g(-4x) = \frac{1}{5}(4\sin 3x - 4x^2 - 4c)$$

即：
$$f(x) = \frac{1}{5}(\sin 3x + 4x^2 + 4c),\quad g(x) = \frac{1}{5}(-4\sin\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - 4c)$$

所以，原定解问题解为：

$$u = \frac{1}{5}(\sin 3(x+y) + 4(x+y)^2 + 4c) + \frac{1}{5}(-4\sin\frac{3}{4}(y-4x) - \frac{1}{4}(y-4x)^2 - 4c)$$

$$= \mathbf{\frac{1}{5}\sin(3x+3y) + \frac{4}{5}\sin(3x - \frac{3}{4}y) + \frac{3}{4}y^2 + 2xy}\,.$$

....(10分)

二　**解**：1) 在$f(x,y) = 0$时，方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0\,.$$

其特征线方程为：

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-y} \Longrightarrow ye^x = c$$

作变量替换：$\xi = e^x y,\ \eta = y$, 方程化为$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$. 解得通解：

$$\mathbf{u = F(e^x y)}$$

....(6分)

2)在$f(x,y) = xy$时，仍使用变换：$\xi = e^x y,\ \eta = y$

$$-\eta\frac{\partial u}{\partial \eta} = (\ln\xi - \ln\eta)\eta \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = \ln\eta - \ln\xi$$

解得：

$$u = \eta\ln\eta - \eta - \eta\ln\xi + \varphi(\xi) = \varphi(e^x y) - y - xy$$

……………………………………………………………………………………………(10分)

这样$u(0,y)=\varphi(y)-y=y$, 即$\varphi(y)=2y$ 最后得到

$$u(x,y)=\mathbf{2e^xy-y-xy}\,.$$

……………………………………………………………………………………………(12分)

三　**解**：直接讨论或根据Strum-Liouville 定理，固有值$\lambda>0$, 故可令$\lambda=\omega^2$, 代入方程得到

$$y(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$$

……………………………………………………………………………………………(6分)

由$y(0)=0$, 得出$A=0$, 因此$y(x)=B\sin\omega x$. 再由另一边界条件$y'(20)=B\omega\cos20\omega=0$, 得出$\cos20\omega=0$, 即

$$20\omega=n\pi+\frac{\pi}{2}\Longrightarrow\omega_n=\frac{n\pi+\frac{\pi}{2}}{20},\quad n=0,1,2....$$

$$\text{固有值：}\ \lambda_{\mathbf{n}}=\left(\frac{\mathbf{n}\pi+\frac{\pi}{\mathbf{2}}}{\mathbf{20}}\right)^{\mathbf{2}},\quad\text{固有函数：}\ \mathbf{y_n(x)}=\sin\frac{\mathbf{n}\pi+\frac{\pi}{\mathbf{2}}}{\mathbf{20}}\mathbf{x}$$

……………………………………………………………………………………………(12分)

四　**解**：利用分离变量，令$u=T(t)X(x)$, 代入方程得到

$$\frac{X''(x)}{X(x)}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda$$

并利用边界条件，得到固有值问题：

$$\begin{cases}X''+(\lambda-\frac{3}{4})X=0,\ (0<x<5)\\X(0)=0,\ \ X(5)=0.\end{cases}$$

并相应有$T(t)$的方程:$T''(t)+4\lambda T=0$. 解固有值问题解得到：

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{5}\right)^2+\frac{3}{4},\quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{5}x,\quad n=1,2,...$$

……………………………………………………………………………………………(7分)

相应地

$$T_n(t)=C_n\cos\left(\sqrt{\frac{4n^2\pi^2}{25}+3}\right)t+D_n\sin\left(\sqrt{\frac{4n^2\pi^2}{25}+3}\right)t$$

利用叠加原理，设

$$u=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[C_n\cos\left(\sqrt{\frac{4n^2\pi^2}{25}+3}\right)t+D_n\sin\left(\sqrt{\frac{4n^2\pi^2}{25}+3}\right)t\right]\sin\frac{n\pi}{5}x$$

最后利用初值条件：

$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{5}x=\varphi(x)\Longrightarrow C_n=\frac{2}{5}\int_0^5\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{5}\xi\,d\xi$$

以及$u_t(0,x)=0$得出$D_n=0$. 最后求得

$$\mathbf{u}=\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{5}}\varphi(\xi)\sin\frac{\mathbf{n}\pi}{\mathbf{5}}\xi\,\mathbf{d}\xi\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\mathbf{4n^2}\pi^{\mathbf{2}}}{\mathbf{25}}+\mathbf{3}}\right)\mathbf{t}\cdot\sin\frac{\mathbf{n}\pi}{\mathbf{5}}\mathbf{x}$$

....(14分)

五)

解： (1)由于z方向无限长并且定解条件只与r有关，故借助柱坐标方程化为：

$$u_t=a^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})\right]$$

作分离变量, 令$u=T(t)H(r)$, 得到

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{H''+\frac{1}{r}H'}{H}=-\lambda$$

结合边界条件，得零阶Bessel方程国有值问题：

$$\begin{cases}r^2H''+rH'+\lambda r^2H=0\\ H(0)\text{ 有界，}\ H(R)=0\end{cases}$$

和方程

$$T'+\lambda a^2T=0\,.$$

解固有值问题得到：固有值 : $\lambda_n=\omega_n^2$, 固有函数$J_0(\omega_n r)$, 而ω_n是$J_0(\omega R)=0$的第n个正根 .相应地:$T_n(t)=e^{-a^2\omega_n^2t}$.设

$$u(t,r)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_ne^{-a^2\omega_n^2t}J_0(\omega_n r)$$

....(7分)

再由初值条件：

$$u\mid_{t=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}C_nJ_0(\omega_n r)=R^2-r^2$$

根据Bessel 函数系数确定公式

$$C_n=\frac{\int_0^R r(R^2-r^2)J_0(\omega_n r)dr}{N_{01n}^2}=\frac{1}{N_{01n}^2}\frac{1}{\omega_n^2}\int_0^{\omega_n R}t\left(R^2-\frac{t^2}{\omega_n^2}\right)J_0(t)dt$$

$$= \frac{1}{N_{01n}^2\omega_n^2}\left[(R^2-\frac{t^2}{\omega_n^2})tJ_1(t)\Big|_0^{\omega_n R}+\frac{2}{\omega_n^2}\int_0^{\omega_n R}t^2J_1(t)dt\right]$$

$$= \frac{2}{R^2J_1^2(\omega_nR)\omega_n^2}.\frac{2}{\omega_n^2}.\omega_n^2R^2J_2(\omega_nR)=\frac{4J_2(\omega_nR)}{\omega_n^2J_1^2(\omega_nR)}=\frac{8}{\omega_n^3RJ_1(\omega_nR)}$$

所以得到解

$$u=\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty}\frac{\mathbf{8}}{\omega_{\mathbf{n}}^{\mathbf{3}}\mathbf{RJ_1}(\omega_{\mathbf{n}}\mathbf{R})}\mathbf{e}^{-\mathbf{a^2}\omega_{\mathbf{n}}^{\mathbf{2}}\mathbf{t}}\mathbf{J_0}(\omega_{\mathbf{n}}\mathbf{r})$$

....(12分)

2)当$u_1=1$时，作变换$V=u-u_1$, 则V的定解问题同情形(1), 因此这时

$$u=u_1+V=\mathbf{1}+\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty}\frac{\mathbf{8}}{\omega_{\mathbf{n}}^{\mathbf{3}}\mathbf{RJ_1}(\omega_{\mathbf{n}}\mathbf{R})}\mathbf{e}^{-\mathbf{a^2}\omega_{\mathbf{n}}^{\mathbf{2}}\mathbf{t}}\mathbf{J_0}(\omega_{\mathbf{n}}\mathbf{r})$$

....(14分)

六)

解：(1) 由于是球内问题, 因此

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_nr^nP_n(\cos\theta).$$

....(4分)

而

$$u\,|_{r=2}=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n2^nP_n(\cos\theta)=1+\cos^2\theta\Longrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}A_n2^nP_n(x)=1+x^2\,.$$

比较得到：$A_0P_0(x)+4A_2P_2(x)=1+x^2\Longrightarrow A_0+4A_2\times\frac{1}{2}(3x^2-1)=1+x^2$ 比较系数，易得: $A_0=\frac{4}{3}$, $A_2=\frac{1}{6}$.这样

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\theta)=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\mathbf{r^2P_2}(\cos\theta),\quad\left(\text{或}\mathbf{u}(\mathbf{r},\theta)=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}+\mathbf{r^2}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\cos^{\mathbf{2}}\theta-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\right)\right).$$

....(8分)

(2)同样

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_nr^nP_n(\cos\theta).$$

而

$$u\,|_{r=2}=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n2^nP_n(\cos\theta)=f(\theta)=\begin{cases}4, & 0\le\theta\le\alpha,\\ 0, & \alpha<\theta\le\pi.\end{cases}$$

.

因此

$$A_0=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)P_0(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{4}{2}\int_0^{\alpha}P_0(\cos\theta)\sin\theta d\theta=2\int_0^{\alpha}\sin\theta d\theta=2(1-\cos\alpha).$$

$n\geq 1$ 时,

$$\begin{aligned}A_n2^n&=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\alpha}4P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\\&=2\int_{\cos\alpha}^{1}(2n+1)P_n(x)\,dx=2\int_{\cos\alpha}^{1}\left(P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)\right)\,dx\\&=2\left(P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)\right),\end{aligned}$$

即

$$A_n=\frac{P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)}{2^{n-1}},\ n\geq 1$$

因此

$$\mathbf{u(r,\theta)=2(1-\cos\alpha)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)}{2^{n-1}}\right]r^nP_n(\cos\theta).}$$

....(14分)

七 解: 记$\delta(x-2)+3e^{-x^2}=\varphi(x)$,并令$\widehat{u}(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t,x)e^{-i\lambda x}\,dx$,再作Fourier变换得:

$$\begin{cases}\widehat{u}_t=-\lambda^2\widehat{u}+20i\lambda\widehat{u}+\widehat{u},\\ \widehat{u}\mid_{t=0}=\widehat{\varphi}(\lambda)\end{cases}$$

解得:

$$\widehat{u}=\widehat{\varphi}(\lambda)e^{(-\lambda^2+20i\lambda+1)t}.$$

....(5分)

因此

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\varphi}(\lambda)e^{(-\lambda^2+20i\lambda+1)t}e^{i\lambda x}d\lambda=e^t\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\varphi}(\lambda)e^{-\lambda^2t}e^{i\lambda(x+20t)}d\lambda$$

记$h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\varphi}(\lambda)e^{-\lambda^2t}e^{i\lambda x}dx$, 则由上式知:$u(t,x)=e^th(x+20t)$, 而

$$h(x)=F^{-1}[\widehat{\varphi}(\lambda)e^{-\lambda^2t}]=\varphi(x)*\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{4t}\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\}d\xi$$

而

$$\delta(x-2)*\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4t})=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{(x-2)^2}{4t})$$

$$e^{-x^2}*\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{4t}\}=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{1}{1+4t}x^2}$$

这样

$$\mathbf{u(t,x)=e^t h(x+20t)=\frac{e^t}{2\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{(x-2+20t)^2}{4t})+\frac{3e^t}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{1}{1+4t}(x+20t)^2}}$$

....(12分)

八) 解 1)记$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$, 利用镜像法，在$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$放$+\epsilon$点电荷，在$M_1=(-\xi,\eta,\zeta)$放$-\epsilon$点电荷,在$M_2=(\xi,-\eta,\zeta)$放$-\epsilon$点电荷, $M_3=(-\xi,-\eta,\zeta)$放$+\epsilon$点电荷. 产生的电场的势函数叠加即为格林函数：

$$G=\frac{1}{4\pi r(M,M_0)}-\frac{1}{4\pi r(M,M_1)}-\frac{1}{4\pi r(M,M_2)}+\frac{1}{4\pi r(M,M_3)}$$

其中

$$r(M,M_0)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},\quad r(M,M_1)=\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$
$$r(M,M_2)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2},\quad r(M,M_3)=\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

....(7分)

2) 对于区域在$y=0$的边界, 其外法方向$\vec{n_0}=(0,-1,0)$, 则

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n_0}}\mid_{\eta=0}=-\frac{\partial G}{\partial \eta}\mid_{\eta=0}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta}\Big|_{\eta=0}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{y-\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}+\frac{y+\eta}{[(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}\right)\Bigg|_{\eta=0}$$
$$+\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{y-\eta}{[(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{y+\eta}{[(x+\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}\right)\Bigg|_{\eta=0}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{y}{[(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{y}{[(x+\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}\right)$$

同理

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{[x^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{x}{[x^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}\right).$$

最后

$$u(x,y,z)=\int_{\substack{\xi=0\\(\eta>0)}}g(\eta,\zeta)\frac{\partial G}{\partial \xi}dS_0+\int_{\substack{\eta=0\\(\xi>0)}}\varphi(\xi,\zeta)\frac{\partial G}{\partial \eta}dS_0$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\zeta\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{[(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{y}{[(x+\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}\right)\varphi(\xi,\zeta)\,d\xi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\zeta\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{[x^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{x}{[x^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}\right)g(\eta,\zeta)d\eta$$

....(14分)