



《交叉学科：光学》习题解答

作者：杨又维

时间：February 25, 2025



目录

前言	2
第 1 章 光的几何描述及几何光学成像	3
第 2 章 光的电磁波描述及叠加	11
第 3 章 光的干涉	16
第 4 章 光的衍射	25
第 5 章 光的双折射	30
第 6 章 光的吸收、色散、散射	35
第 7 章 光的量子性	37
第 8 章 激光基础	39
第 9 章 2024 秋光学 B 半期考试 (回忆版)	41

前言

本书为交叉学科系列光学的习题解答集，并对原书中题干、图片的错误进行了修正，同时对一些题目进行了知识点的补充，希望能对读者有所帮助。

在此特别感谢我的光学助教白云腾同学在编写过程中给予我的帮助。如发现任何错误或疏漏，请及时与我联系：yow@mail.ustc.edu.cn。

第1章 光的几何描述及几何光学成像

- 练习 1.1 光线以入射角 i 射到折射率为 n 的物体上，设反射光与折射光成直角，问入射角与折射率之间的关系如何。

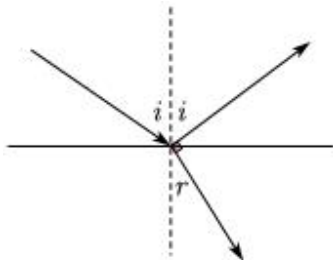


图 1.1

解 如图所示，由几何关系 $i + r = 90^\circ$ 可得 $\sin r = \cos i$ 。带入折射定律 $\sin i = n \sin r$ 得 $n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin i}{\cos i} = \tan i$ 。

- 练习 1.2 把一片两侧表面相互平行的玻璃板放在装满水的玻璃杯上，从空气射入玻璃的光线能否在另一侧面发生全反射？从水射入玻璃的光线能否在另一侧面发生全反射？已知玻璃的折射率为 1.50，水的折射率为 1.33。

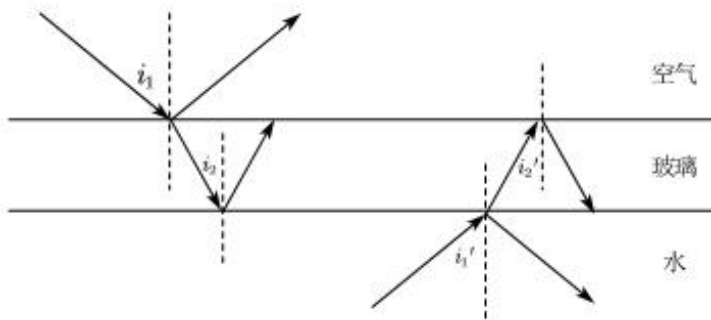


图 1.2

解 如图，记空气，玻璃，水的折射率分别为 n_a, n_g, n_w ，则由折射定律可得 $n_a \sin i_1 = n_g \sin i_2$ 和 $n_w \sin i_1' = n_g \sin i_2'$ 。发生全反射的条件是 $n_g \sin i_2 (i_2') > 1$ ，即 $n_a \sin i_1 > 1 \setminus n_w \sin i_1' > 1$ ，即 $\sin i_1 > 1 \setminus \sin i_1' > \frac{1}{1.33}$ 。因此，从空气射入玻璃的光线不可能在另一侧面发生全反射，而从水射入玻璃的光线能在另一侧面发生全反射。

- 练习 1.3 红光和紫光对同种玻璃的折射率分别是 1.51 和 1.53，当这两种光线射到玻璃和空气的分界面上时，全反射的最小角度是多少？当白光以 41° 角入射到玻璃和空气的界面上时，将会有何现象发生？

解 全反射时，入射角 i 满足 $\sin i = \frac{1}{n}$ ，则红光和紫光的全反射最小角度分别为 $i_{red} = \arcsin \frac{1}{1.51} = 41.47^\circ$ 和 $i_{purple} = \arcsin \frac{1}{1.53} = 40.81^\circ$ 。白光以 41° 角入射到玻璃和空气的界面上时，由于白光是由多种波长的光组成的，不同波长的光在玻璃和空气的界面上发生的全反射角度不同，因此会发生色散现象，而紫光的全反射角度小于 41° ，因此会看到一束彩色光（不含紫光）从玻璃另一侧射出。

- 练习 1.4 证明：当一条光线通过平板玻璃时，出射光线方向不变，只产生侧向平移。当入射角 i_1 很小时，位移 $\Delta x = \frac{n-1}{n} i_1 t$ 。其中， n 为玻璃的折射率， t 为玻璃板的厚度。

解 如图，由折射定律得 $\sin i_1 = n \sin i_2 = \sin i_1'$ 可得 $i_1 = i_1'$ ，即出射光线方向不变。由几何关

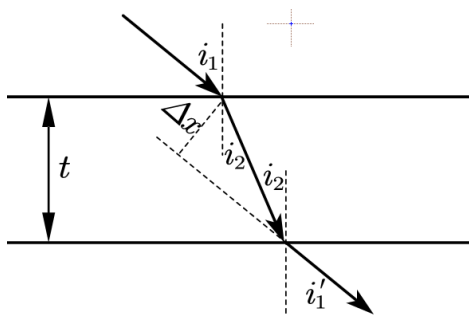


图 1.3

系可得 $\Delta x = \frac{t}{\cos i_2} \cdot \sin(i'_1 - i_2) = \frac{t \sin(i_1 - i_2)}{\cos i_2}$ 。 i_1 很小时，利用小角近似 $\sin i \approx i$ 和 $\cos i \approx 1$ 可得 $\Delta x = \frac{t \sin(i_1 - i_2)}{\cos i_2} \approx t(i_1 - i_2) \approx t(i_1 - \sin i_2) = t(i_1 - \frac{\sin i_1}{n}) \approx \frac{n-1}{n} i_1 t$ 。

练习 1.5 如图 1.4 所示，一条光线通过一顶角为 α 的棱镜。

(1) 证明出射光线相对于入射光线的偏向角为 $\delta = i_1 + i'_1 - \alpha$ 。

(2) 证明在 $i_1 = i'_1$ 时，有最小偏向角 δ_m ，而且 $n = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_m}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ ，式中 n 为棱镜材料的折射率。（在已知 α 的情况下，通过测量 δ_m ，利用上式可以算出棱镜材料的折射率。）

(3) 顶角 α 很小的棱镜称为光楔，证明以小角度入射的光线经光楔产生的偏向角为 $\delta = (n - 1)\alpha$ 。

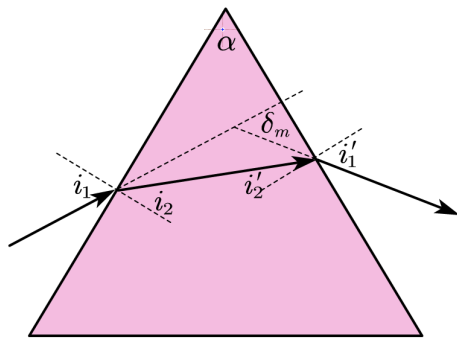


图 1.4

解 (1) 偏向角 $\delta = (i_1 - i_2) + (i'_1 - i'_2)$ (两次折射偏转角度之和)，而 $\alpha + (90^\circ - i_2) + (90^\circ - i'_2) = 180^\circ$ ，即 $i_2 + i'_2 = \alpha$ ，因此 $\delta = i_1 + i'_1 - \alpha$ 。

(2) 由折射定律 $\sin i_1 = n \sin i_2$ 和 $\sin i'_1 = n \sin i'_2$ ，可得 $\delta = i_1 + i'_1 - \alpha = \arcsin(n \sin i_2) + \arcsin(n \sin i'_2) - \alpha$ 。在 $i_2 + i'_2 = \alpha$ 两边对 i_2 求导，有 $\frac{di'_2}{di_2} = -1$ 。于是令 $\frac{d\delta}{di_2} = 0$ ，得 $\frac{n \cos i_2}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_2}} + \frac{n \cos i'_2}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i'_2}} \frac{di'_2}{di_2} = 0$ ，即 $\frac{\cos i_2}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_2}} = \frac{\cos i'_2}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i'_2}}$ ，即 $\cos^2 i_2 (1 - n^2 + n^2 \cos^2 i'_2) = \cos^2 i'_2 (1 - n^2 + n^2 \cos^2 i_2)$ ，解得 $\cos i_2 = \cos i'_2$ ，即 $i_2 = i'_2 = \frac{\alpha}{2}$ 。此时 $\frac{\delta_m + \alpha}{2} = \arcsin(n \sin \frac{\alpha}{2})$ ，即 $n = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_m}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ 。

(3) 当光楔的顶角 α 、入射角 i_1 很小时，利用小角近似 $\sin x \approx x$ 可得 $\delta = i_1 + i'_1 - \alpha \approx \sin i_1 + \sin i'_1 - \alpha = n \sin i_2 + n \sin i'_2 - \alpha \approx n(i_2 + i'_2) - \alpha = (n - 1)\alpha$ 。

练习 1.6 顶角为 50° 的棱镜的 $\delta_m = 35^\circ$ ，如果浸入水中，最小偏向角等于多少？水的折射率为 1.33。

解 类似于上题第二问，不难推出当外界折射率为 n' 时最小偏向角满足的关系为 $\frac{n}{n'} = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_m}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ 。

记相对折射率 $n_r = \frac{n}{n'}$ ，那么最小偏向角仅与相对折射率有关。由题意可得 $n = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_m}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ ， $\frac{n}{1.33} =$

$\frac{\sin \frac{\alpha + \delta'_m}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ 。两式相除可得 $1.33 = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_m}{2}}{\sin \frac{\alpha + \delta'_m}{2}}$ ，解得 $\delta'_m = 11.06^\circ$ 。

- 练习 1.7 如图 1.5 所示, 一束光线以入射角 i_1 射入折射率为 n 的球形水滴。
- (1) 此光线在水滴内另一侧球面的入射角为 α , 这条光线是被全反射还是部分反射?
 - (2) 求偏向角 δ 的表示式。
 - (3) 求偏向角最小时的入射角 i 。

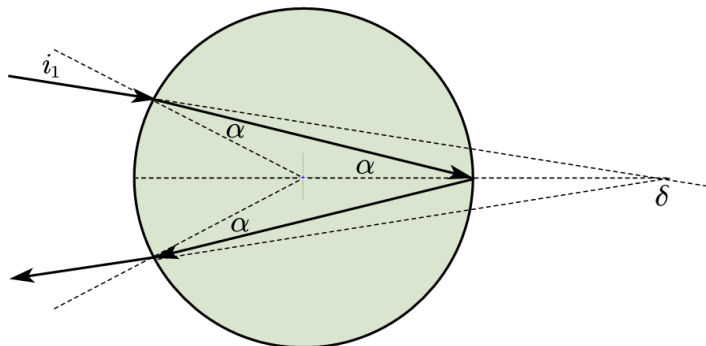


图 1.5

- 解 (1) 由折射定律得 $n \sin \alpha = \sin i_1 < 1$, 因此是部分反射。
- (2) $\delta = 2(i_1 - \alpha) + (\pi - 2\alpha) = \pi - 4 \arcsin \frac{\sin i_1}{n} + 2i_1$ 。(两次折射偏转角加一次反射偏转角)
- (3) 求导可得 $\frac{d\delta}{di_1} = 2 - \frac{4 \cos i_1}{n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i_1}{n^2}}} = 0$, 解得 $i = \arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}$ 。

本题有一种错误解法, 即由几何关系得到 $(2\alpha - i_1)$ 为“入射光线与水平线的夹角”, 但本题并不存在所谓“水平线”。

笔记 由本题第一问可知光线在球内不管第几次反射都必有折射光线射出。本题第三问中入射角为 i 时的出射光线称为虹。当 i_1 使反射两次后的出射光线的偏转角最小时, 称对应的出射光线为霓, 也叫副虹。

- 练习 1.8 一球面反射镜将平行光会聚在 $x_0 = 20\text{cm}$ 处, 将水 (折射率约为 $4/3$) 注满球面, 光通过一张白纸片上的针孔射向反射镜, 如图 1.6 所示, 问距离 x 为多大时在纸片上能有清晰的成像。

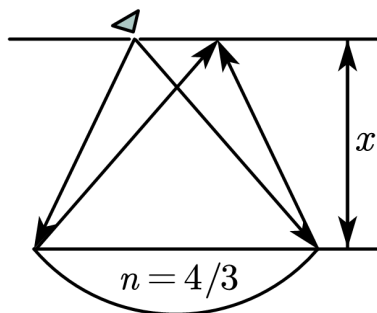


图 1.6

解 由球面反射成像公式 $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{x_0} = -\frac{2}{R}$ 可得 $R = -40\text{cm}$ 。空气-水界面相当于一个半径为 ∞ 的球面, 由成像公式 $\frac{1}{x} + \frac{4/3}{s_1} = \frac{4/3 - 1}{\infty}$ 可得 $s_1 = -4/3x$ 。 s_1 再经反射镜成像于 s_2 , 则有 $-\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = -\frac{2}{R}$ 。 s_2 再经空气-水界面成像于 s_3 , 则有 $-\frac{4/3}{s_2} + \frac{1}{s_3} = \frac{4/3 - 1}{\infty}$ 。由题意 $s_3 = x$, 解得 $x = 30\text{cm}$ 。

另解: 无水时, 球面焦距为 $f = 20\text{cm}$ 。注水后, 焦距变为 $f' = f/n = 15\text{cm}$, 此时要成清晰像且物距像距相等, 则 $x = 2f' = 30\text{cm}$ 。

练习 1.9 一玻璃球半径为 R , 折射率为 n , 若以平行光入射, 问当玻璃的折射率为何值时会聚点恰好落在球的后表面上。

解 由成像公式 $\frac{1}{\infty} + \frac{n}{2R} = \frac{n-1}{R}$ 得 $n = 2$ 。

练习 1.10 一个实物放在曲率半径为 R 的凹面镜前的什么地方, 才能使横向放大率为能成:

(1) 4 倍的实像;

(2) 4 倍的虚像。

解 由成像公式 $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{2}{R}$ 和横向放大率 $V = -\frac{s_2}{s_1}$ 可得 $V = \frac{R}{R-2s_1}$ 。 $V = -4$ 时成 4 倍的实像, 解得 $s_1 = \frac{5R}{8}$; $V = 4$ 时成 4 倍的虚像, 解得 $s_1 = \frac{3R}{8}$ 。

练习 1.11 一平面物在凹球面镜前 310mm 时成实像于镜前 190mm 处。若物为虚物且在镜后 310mm 处, 问像在何处。

解 $\frac{1}{310} + \frac{1}{190} = \frac{1}{f}$, $-\frac{1}{310} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f}$, 解得 $x = 85.4\text{mm}$, 即成像于镜前 85.4mm 处。

练习 1.12 欲用球面反射镜将其前 10cm 处的灯丝成像于 3m 处的墙上, 该反射镜形状应是凸的还是凹的? 半径应有多大? 这时像可放大多少倍?

解 $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = -\frac{2}{R}$, 而 s_1 、 s_2 均大于 0, 则 $R < 0$, 所以为凹镜。解得半径为 4.84cm , 放大倍数为 $\frac{s_2}{s_1} = 30$ 倍。

练习 1.13 如图 1.7 所示, 一平行平面玻璃板的折射率为 n , 厚度为 h , 点光源 Q 发出的傍轴光束经上表面反射, 成像于 Q'_1 ; 穿过上表面后在下表面反射, 再从上表面折射的光束成像于 Q'_2 。证明 Q'_1 与 Q'_2 间的距离为 $2h/n$ 。

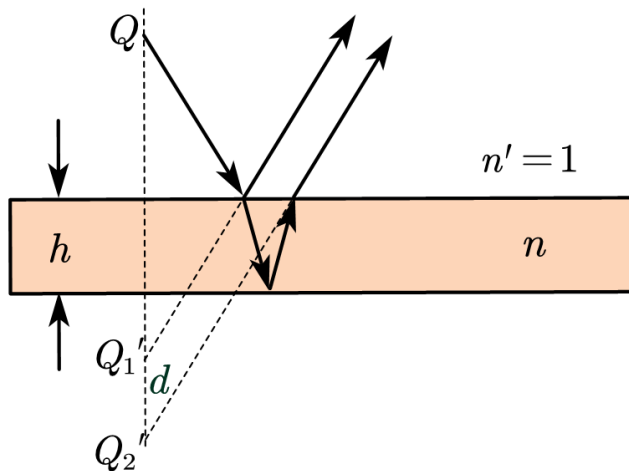


图 1.7

证明 两交界面均可视作半径为 ∞ 的球面, 设 Q 到上界面距离 s_0 , 由于 Q'_1 是反射成像, 则 Q'_1 到上界面距离 $d_1 = s_0$ 。由成像公式 $\frac{1}{s_0} + \frac{n}{s_1} = \frac{n-1}{\infty}$ 可得 $s_1 = -ns_0$, 即第一次折射成像后在上界面上方 ns_0 处, 距下界面距离为 $ns_0 + h$, 再经下界面反射后, 像距离上界面 $s_2 = (ns_0 + h) + h = ns_0 + 2h$ 。由成像公式 $\frac{n}{s_2} + \frac{1}{s_3} = \frac{1-n}{\infty}$ 可得 $s_3 = -s_0 - \frac{2h}{n}$, 即 Q'_2 距上界面 $d_2 = -s_3 = s_0 + \frac{2h}{n}$ 。于是 $d = Q'_1Q'_2 = d_2 - d_1 = 2h/n$ 。

练习 1.14 已知一玻璃棒长 $d = 60\text{mm}$, 折射率 $n = 1.5$ 。现将其两端均磨成曲率半径为 10mm 的凸球面, 问此棒的光学性质如何。

解 直接计算其光线变换矩阵。

球面折射矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{n_2\rho} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$, 则总的光线变换矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{\rho} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{-n\rho} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(n-1)d}{n\rho} & \frac{d}{n} \\ \frac{(n-1)^2d}{n\rho^2} - \frac{2(n-1)}{\rho} & 1 - \frac{(n-1)d}{n\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 40\text{mm} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 。(注: 中间矩阵右上角就是 d 而不是 d/n)

下图展示了两条比较特殊的入射光线。

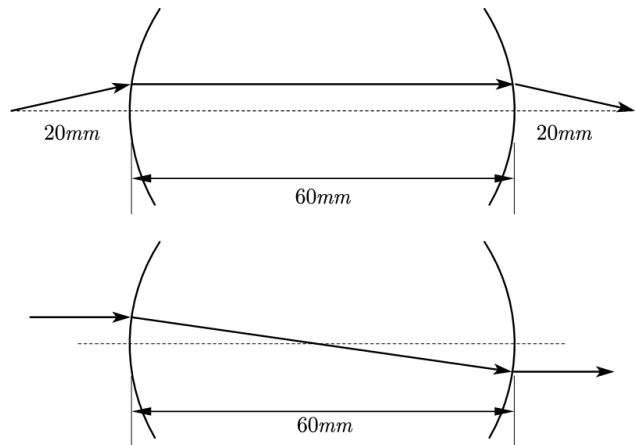


图 1.8

练习 1.15 一薄透镜折射率为 1.50，光焦度为 5.00D，将它漫入某液体，光焦度变为 1.00D，求此液体的折射率。

解 设液体折射率 n ，透镜折射率 $n_L = 1.5$ ，透镜的光焦度为 $P = \frac{n}{f}$ ，则 $P_1 = (n_L - 1)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$ ， $P_2 = (n_L - n)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$ ，两式相除得 $\frac{P_1}{P_2} = \frac{n_L - 1}{n_L - n}$ ，解得 $n = 1.4$ 。

注：此类型题在网上大部分的做法都认为 $P = \frac{1}{f}$ ，从而解得 $n = 1.36$ 。这样做也有一定道理，因为在不知液体折射率的情况下只能测得透镜的焦距，无法测出光焦度，原题的问法属于是先把折射率测出来再问你是多少了。个人觉得把“光焦度变为 1.00D”改成“焦距变为 1m”更合适一些。

笔记 眼镜的度数为光焦度乘以 100，例如 -1.00D 等于近视眼镜（凹透镜）的 100 度，2.00D 等于远视眼镜（凸透镜）的 200 度。

练习 1.16 已知一个凹透镜的两球面的光焦度分别为 $5m^{-1}$ 和 $-10m^{-1}$ ，透镜的直径为 30mm，中心厚 2mm，则用以制造该透镜的平板玻璃（折射率为 1.5）至少应用多厚？该透镜的边缘有多厚？

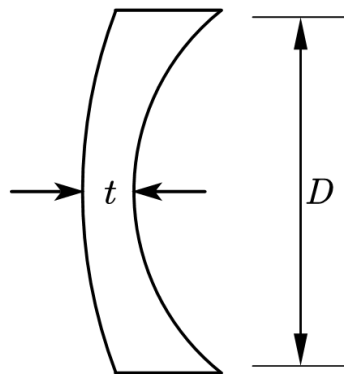


图 1.9

解 如图所示，由题意 $t = 2mm$ ， $D = 30mm$ 。两球面的光焦度分别为 $P_1 = \frac{n-1}{r_1}$ 和 $P_2 = \frac{1-n}{r_2}$ ，所以 $r_1 = 100mm$ ， $r_2 = 50mm$ 。则玻璃至少厚 $(r_2 - \sqrt{r_2^2 - (\frac{D}{2})^2}) + t = 4.3mm$ ，边缘厚度为 $(r_2 - \sqrt{r_2^2 - (\frac{D}{2})^2}) + t - ((r_1 - \sqrt{r_1^2 - (\frac{D}{2})^2})) = 3.17mm$ 。

练习 1.17 半径为 R 的透明球体的半面镀一反射膜，问此球的折射率为何值时，从空气中入射的光经此球反射后仍沿原方向返回。

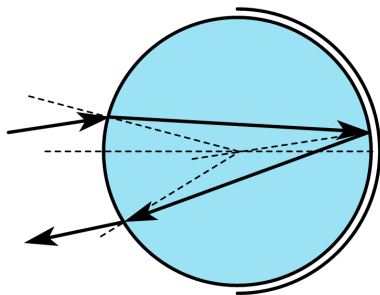


图 1.10

解 如图所示,不妨设是平行光入射,则有 $\frac{1}{\infty} + \frac{n}{s_1} = \frac{n-1}{R}$ 。再经反射镜成像, $\frac{1}{2R-s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{2}{R}$,再经折射出射至无穷远,于是 $\frac{n}{2R-s_2} + \frac{1}{\infty} = \frac{1-n}{-R}$,解得 $n=2$,此时第一次折射成像在反射膜上。(注:如果通过第一和第三个式子算出 s_1 、 s_2 带入反射公式求解会发现 n 无解,这是因为 $n-2$ 在分母上,但稍加计算会发现 $n=2$ 是成立的)

另解:计算其光线变换矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{-nR} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} \frac{n-4}{nR} & -\frac{4R}{n} \\ \frac{(1-n)(n-4)}{nR} - \frac{3-n}{R} & \frac{4(n-1)}{n} - 3 \end{pmatrix}$ 。根据题意,有 $\frac{(1-n)(n-4)}{nR} - \frac{3-n}{R} = 0$, $\frac{4(n-1)}{n} - 3 = -1$,

解得 $n=2$ 。

练习 1.18 一折射率为 1.50、厚度为 20mm 的平凸透镜放在纸面上,球面的曲率半径为 80mm,分别求当球面向下和平面向下时,纸上与透镜接触处的文字的成像位置。

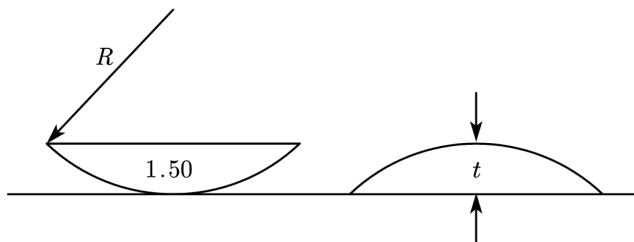


图 1.11

解 如图所示,由题意有 $t=20\text{mm}$, $R=80\text{mm}$ 。球面向下时,字先由球面成像在原处,再经平面成像,有 $\frac{n}{t} + \frac{1}{s_1} = \frac{1-n}{\infty}$ (平面可视作半径为 ∞ 的球面), $s_1 = -\frac{t}{n}$,所以字在纸面上方 $t + s_1 = 6.67\text{mm}$ 。

球面向上时,字先由平面成像在原处,再经球面成像,有 $\frac{n}{t} + \frac{1}{s_2} = \frac{1-n}{-R}$, $s_2 = -\frac{160}{11}\text{mm}$,所以字在纸面上方 $t + s_2 = 5.45\text{mm}$ 。

练习 1.19 一凸球面镜浸没在折射率为 1.33 的水中,高为 1cm 的物体在凸面镜前 40cm 处,像在镜后 8cm 处,求像的大小、正倒、虚实以及凸面镜的曲率半径和光焦度。

解 $s_1 = 40\text{cm}$, $s_2 = -8\text{cm}$, 像高 $h' = h \cdot \left| \frac{s_2}{s_1} \right| = 0.2\text{cm}$, 横向放大率为 $V = -\frac{s_2}{s_1} = 0.2 > 0$, 所以为正的虚像。由成像公式 $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = -\frac{2}{R}$, 解得 $R = 20\text{cm}$, 光焦度 $P = -\frac{2n}{R} = -13.3\text{D}$ 。

笔记 反射镜的成像公式为 $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = -\frac{2}{R}$, 设环境折射率为 n , 如果定义反射镜另一侧折射率为 $n' = -n$, 则对成像公式两边乘 n 后可改写为 $\frac{n}{s_1} + \frac{n'}{s_2} = \frac{n'-n}{R}$, $s_2' = -s_2$, 与折射成像公式形式一致,因此反射镜的光焦度为 $P = \frac{n'-n}{R} = -\frac{2n}{R}$ 。

练习 1.20 实物放在凹面镜前什么位置能成倒立的放大像?为什么?此像是实像还是虚像?

解 $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{2}{R}$, 横向放大率 $V = -\frac{s_2}{s_1} = \frac{R}{R-2s_1}$ 。由题意有 $V < 0$ 且 $|V| > 1$, 得 $\frac{R}{2} < s_1 < R$ 。

练习 1.21 如图 1.12 所示, 一玻璃半球的曲率半径为 R , 折射率为 1.5, 其平面的一侧镀银, 有一物高为 h , 放在曲面顶点前 $2R$ 处, 求:

- (1) 由曲面所成的第一个像的位置;
- (2) 该光具组最后所成像的位置。

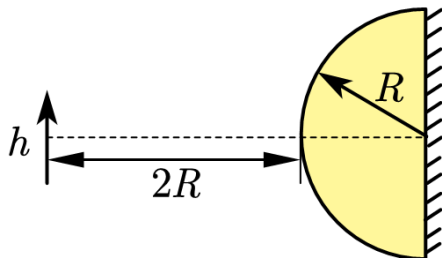


图 1.12

解 (1) 由成像公式 $\frac{1}{2R} + \frac{n}{s_1} = \frac{n-1}{R}$, 得 $s_1 = \infty$, 即第一次折射后成平行光, 像在无穷远处。

(2) 反射镜反射后依旧为平行光, 再经球面成像, 有 $\frac{n}{\infty} + \frac{1}{s_2} = \frac{1-n}{-R}$, 得 $s_2 = 2R$, 所以最后成像于物体处, 为等大倒立实像。

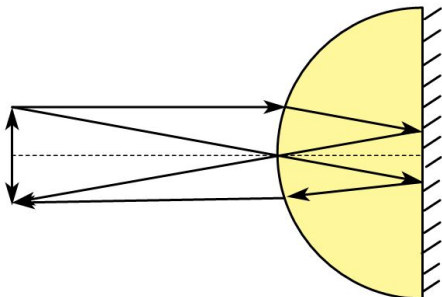


图 1.13

练习 1.22 一架显微镜, 物镜焦距为 4mm , 中间像成在物镜第二焦点后面 160mm 处。如果目镜是 $20\times$ 的, 问显微镜的视角放大率是多少。

解 物镜横向放大率为 $V_0 = -\frac{\Delta}{f_o} = -40$, 则总放大率为 $M = V_0 \times M_E = -800$, 所以视角放大率为 -800 。

笔记 直接观测和使用显微镜观测物体时, 物体都在明视距离处, 所以显微镜的视角放大率就等于总放大率。

练习 1.23 一架显微镜的物镜和目镜相距 20.0cm , 物镜焦距为 7.0mm , 目镜焦距为 5.0mm , 把物镜和目镜都看成是薄透镜, 求:

- (1) 被观测物到物镜的距离;
- (2) 物镜的横向放大率;
- (3) 显微镜的视角放大率。

解 (1) $s_2 = 200 - 5 = 195\text{mm}$, 由 $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f}$ 得 $s_1 = 7.26\text{mm}$ 。

(2) $\Delta = 200 - 7 - 5 = 188\text{mm}$, 则横向放大率 $V = -\frac{\Delta}{f_1} = -26.9$ 。

(3) 视角放大率为 $V \cdot \frac{s_0}{f_2} = -1343$, 其中 $s_0 = 25\text{cm}$ 是明视距离。

练习 1.24 拟制作一个 $3\times$ 的望远镜, 现已有一个焦距为 50cm 的物镜, 问: 在 (1) 开普勒型; (2) 伽利略型望远镜中目镜的光焦度和物镜到目镜的距离各为多少?

解 (1) $\frac{f_o}{f_E} = 3$, $P = \frac{1}{f_E} = 6\text{D}$, $d = f_o + f_E = 0.67\text{m}$ 。

(2) $\frac{f_o}{f_E} = -3$, $P = \frac{1}{f_E} = -6\text{D}$, $d = f_o + f_E = 0.33\text{m}$ 。

练习 1.25 倒置望远镜可用于激光扩束，设一望远镜物镜焦距为 30cm ，目镜焦距为 15cm ，它能使激光光束的直径扩大几倍？

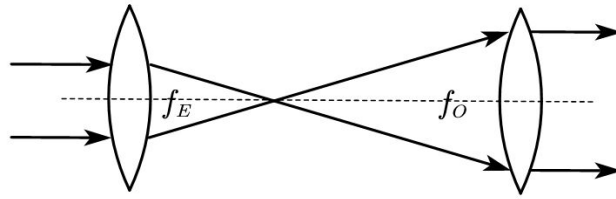


图 1.14

解 扩大到原来的 $\frac{f_O}{f_E} = 2$ 倍。

第2章 光的电磁波描述及叠加

练习 2.1 一列波长为 λ 、振幅为 A 的平面光，在直角坐标系中其波矢与三个坐标轴间的夹角分别为 α 、 β 和 γ ，已知 $\alpha = 30^\circ$ ， $\beta = 75^\circ$ ，原点处相位为 0。

(1) 写出这列波的表达式(波函数) $U(x, y, z)$ 。

(2) 写出这列波在 $z = 0$ 平面上的表达式(波前函数) $U(x, y, z)$ 。

(3) 若方向角 β 分别改为 $\beta = 90^\circ$ 和 $\beta = 120^\circ$ ，分别求其波前函数 $U_1(x, y, z)$ 、 $U_2(x, y, z)$ 。

解 (1) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ，所以 $\cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{3}-1}}{2}$ 。于是波函数为 $U(x, y, z) = A \cos[\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z + \varphi_0)] = A \cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ct - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}y - \frac{\sqrt{\sqrt{3}-1}}{2}z)]$ 或 $A \cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ct - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}y + \frac{\sqrt{\sqrt{3}-1}}{2}z)]$ 。

(2) 令 $z = 0$ ，得波前函数为 $\tilde{U}(x, y, z) = A \exp[i\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}y)]$ 。

(3) $\beta = 90^\circ$ ， $\tilde{U}_1(x, y, z) = A \exp[i\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z)]$ 或 $A \exp[i\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}z)]$ 。

$\beta = 120^\circ$ ， $\tilde{U}_2(x, y, z) = A \cos[i\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y)]$ 。

练习 2.2 钠黄光(D 双线)包含的波长为 $\lambda_1 = 589 \text{ nm}$ ， $\lambda_2 = 589.6 \text{ nm}$ 。设 $t = 0$ 时两波列的波峰在 O 点重合。问：

(1) 自 O 点算起，沿传播方向多远的地方两波列的波峰还会重合？

(2) 经过多长时间以后，在 O 点又会出现两列波的波峰重合的现象？

解 (1) 设重合处到 O 点距离 L ，则 L 为 λ_1 、 λ_2 的整数倍，于是 $L = (m+n)\lambda_1 = m\lambda_2$ ， m, n 均为正整数，解得 $L = n\frac{\lambda_1\lambda_2}{\Delta\lambda} = k \cdot 0.579 \text{ mm}$ ，其中 $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$

(2) 设重合时间为 t ，则 t 为 $T_1 = \frac{\lambda_1}{c}$ 、 $T_2 = \frac{\lambda_2}{c}$ 的整数倍，于是 $t = (m+n)T_1 = mT_2$ ， m, n 均为正整数，解得 $t = n\frac{T_1 T_2}{\Delta T} = n \cdot 1.93 \times 10^{-12} \text{ s}$ ，其中 $\Delta T = T_2 - T_1$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$ 。

练习 2.3 一平面波的波函数为 $E(P, t) = A \cos[5t - (2x - 3y + 4z)]$ ，式中， x, y, z 的单位为 m ， t 的单位为 s 。试求：(1) 时间频率；(2) 波长；(3) 波矢的大小和方向；(4) 在 $z = 0$ 和 $z = 1$ 波前上的相位分布。

解 (1) $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$ ，于是 $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5}{2\pi} = 0.769 \text{ Hz}$ 。

(2) $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{29}} = 1.17 \text{ m}$ 。

(3) 大小为 $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{29} = 5.39 \text{ m}^{-1}$ ，方向(波矢的单位向量)为 $\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2\mathbf{e}_x - 3\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z)$ 。

(4) $\varphi|_{z=0} = 2x - 3y$ ， $\varphi|_{z=1} = 2x - 3y + 4$ 。

练习 2.4 如图 2.1 所示，一平面简谐波沿 x 方向传播，波长为 λ ，设 $r = 0$ 的点的相位为 $\varphi_0 = 0$ 。

(1) 写出沿 x 轴波的相位分布 $\varphi(x)$ 。

(2) 写出沿 y 轴波的相位分布 $\varphi(y)$ 。

(3) 写出沿 r 方向波的相位分布 $\varphi(r)$ 。

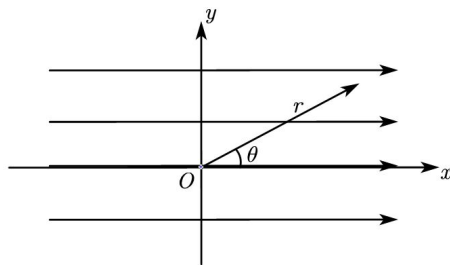


图 2.1

解 $\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, 所以 (1) $\varphi(x) = \mathbf{k} \cdot x\mathbf{e}_x = \frac{2\pi x}{\lambda}$. (2) $\varphi(y) = \mathbf{k} \cdot y\mathbf{e}_y = 0$ (3) $\varphi(r) = \mathbf{k} \cdot r\mathbf{e}_r = \frac{2\pi r}{\lambda} \cos \theta$.

笔记 原题目“沿 r 方向传播”应改为“沿 x 方向传播”。

练习 2.5 如图 2.2 所示, 一平面简谐波沿 r 方向传播, 波长为 λ , 设 $r = 0$ 的点的相位为 φ_0 . (1) 写出沿 r 方向波的相位分布 $\varphi(r)$. (2) 写出沿 x 轴波的相位分布 $\varphi(x)$. (3) 写出沿 y 轴波的相位分布 $\varphi(y)$.

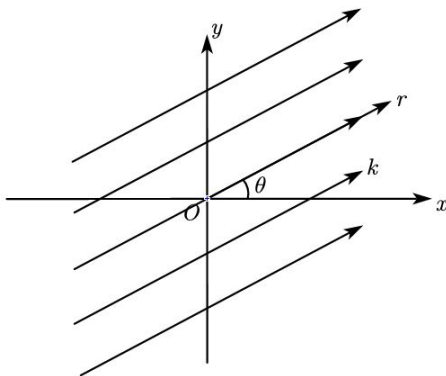


图 2.2

解

$\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0$, 所以 (1) $\varphi(r) = \mathbf{k} \cdot r\mathbf{e}_r + \varphi_0 = \frac{2\pi r}{\lambda} + \varphi_0$. (2) $\varphi(x) = \mathbf{k} \cdot x\mathbf{e}_x + \varphi_0 = \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \theta + \varphi_0$. (3) $\varphi(y) = \mathbf{k} \cdot y\mathbf{e}_y + \varphi_0 = \frac{2\pi y}{\lambda} \sin \theta + \varphi_0$.

练习 2.6 一平面波的复振幅为 $E(P) = A \exp[-i\frac{k}{5}(3x - 4z)]$, 试求波的传播方向, 并写出波在 Oxy 平面上的相位分布。

解 $\mathbf{k} = -\frac{3k}{5}\mathbf{e}_x + \frac{4k}{5}\mathbf{e}_z$, 所以方向为 $\hat{\mathbf{k}} = -\frac{3}{5}\mathbf{e}_x + \frac{4}{5}\mathbf{e}_z$, 相位分布为 $\varphi|_{z=0} = -\frac{3kx}{5}$.

练习 2.7 一列单色波在折射率为 n 的介质中由 A 点传播到 B 点, 其相位改变了 2π , 则光程改变了多少? 从 A 到 B 的距离是多少?

解 $k \cdot \Delta L = 2\pi$, 所以光程改变 $\Delta L = \frac{2\pi}{k} = \lambda$, 距离为 $s = \frac{\Delta L}{n} = \frac{\lambda}{n}$, λ 为真空中波长。

练习 2.8 一个顶角 α 很小的三棱镜 (即所谓“光楔”), 折射率为 n , 可以使平面光发生折射, 计算表明, 若光从一侧正入射, 从另一侧出射的光波方向偏转 $\delta = (n - 1)\alpha$, 如图 2.3 所示。求在光楔右侧距离入射的一侧波前 Σ_0 为 s 处平面 Σ_1 上的波前函数。

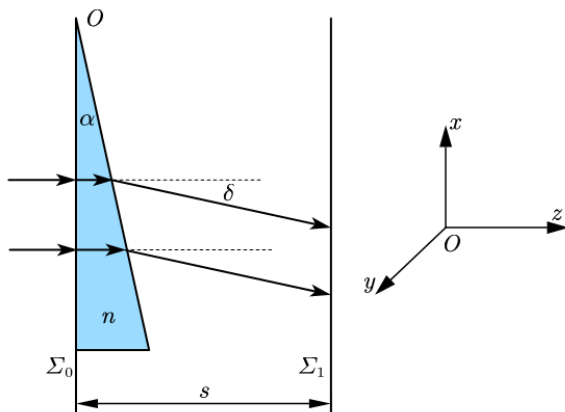


图 2.3

解 Oxy 平面为 Σ_0 , 设波在 Σ_0 上的相位为 φ_0 , 光线穿过光楔后, 波矢变为 $\mathbf{k} = -k \sin \delta \mathbf{e}_x + k \cos \delta \mathbf{e}_z$, 于是波前函数为 $\tilde{U}(x, y, s) = A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0)]$ (光线穿过光楔后依然为平面波) $= A \exp[i(-k \sin \delta x + k \cos \delta s + \varphi_0)] \approx A \exp[i(-k(n - 1)\alpha x + ks + \varphi_0)] \propto \exp(-ik(n - 1)\alpha x)$.

练习 2.9 计算表明, 当单色点光源 S 距离光楔 (顶角为 α , 折射率为 n) 为 l 时, 从另一侧看到光源 S' 位于 S 的正上方 $h = (n-1)\alpha l$ 处, 如图 2.4 所示。据此求出在光楔右侧距离 s 处平面 Σ 上的波前函数。设图中 O 点处的相位为 φ_0 。

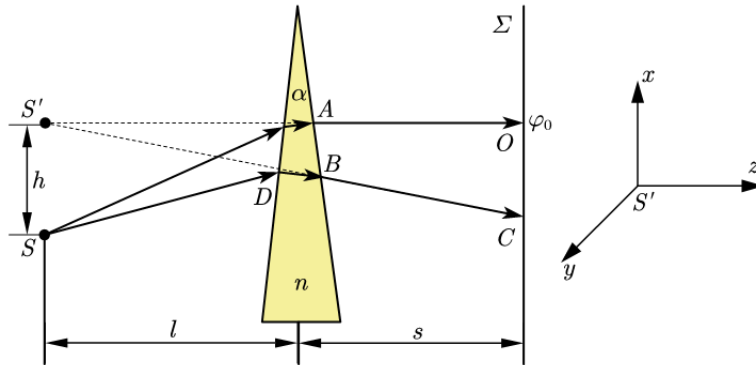


图 2.4

解 用 L 表示光程, 由于 S' 为虚像, 所以由光程相等得 $L_{SA} - S'A = L_{SB} - S'B$ (如果光楔右侧折射率为 n , 等式为 $L_{SA} - nS'A = L_{SB} - nS'B$), 则 $L_{SC} - L_{SO} = (L_{SB} + BC) - (L_{SA} + AO) = S'C - S'O$, 因此波前函数为 $\tilde{U}(x, y, l+s) = \frac{A}{\sqrt{(l+s)^2 + x^2 + y^2}} \exp[ik(\sqrt{(l+s)^2 + x^2 + y^2} - (l+s) + \varphi_0)]$ 。

如果满足傍轴条件, $\tilde{U}(x, y, l+s) = \frac{A}{l+s} \exp[ik(\frac{x^2+y^2}{2(l+s)} + \varphi_0)]$ 。

笔记 答案中振幅因子 $\frac{A}{\sqrt{(l+s)^2 + x^2 + y^2}}$ 是近似而来的, 设 D 处振幅 A_D , 设 B 处振幅 A_B , 设 C 处振幅 A_C , 则 $A_D \propto \frac{1}{SD}$, $\frac{A_B}{A_C} = \frac{S'C}{S'B}$, 由于光楔顶角很小, 于是 BD 很短, 可近似认为光穿过光楔振幅不变 (忽略光穿过光楔的能量损耗), 即 $A_D \approx A_B$, 于是 $A_C \propto \frac{S'B}{S'C} \cdot \frac{1}{SD}$, 而考虑到 h 为小量, 于是 $S'B \approx SD$, 于是 $A_C \propto \frac{1}{S'C}$ 。

练习 2.10 将一单色点光源置于凸透镜物方 (左侧) 2 倍焦距处, 如图 2.5 所示。计算该点发出的光波经透镜后, 在像方 (右侧) 的会聚点前、后 1 倍焦距处平面 Σ_1 和 Σ_2 上的波前函数 (认为透镜的孔径很小, 光波满足傍轴条件; 可设会聚点处的初相位为 0)。

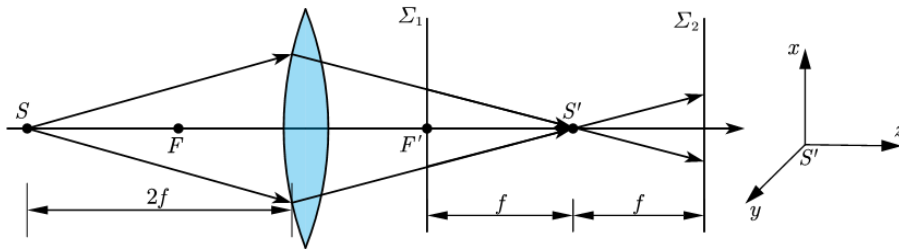


图 2.5

解 波先从 Σ_1 方向会聚到 S' 再发散到 Σ_2 上, 所以 $\tilde{U}_1(x, y, -f) = \frac{A}{r} \exp(-ikr)$, $\tilde{U}_2(x, y, f) = \frac{A}{r} \exp(ikr)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + f^2}$, 由于满足傍轴条件, 所以 $\tilde{U}_1(x, y, -f) = \frac{A}{f} \exp[-ik(\frac{x^2+y^2}{2f} + f)]$, $\tilde{U}_2(x, y, f) = \frac{A}{f} \exp[ik(\frac{x^2+y^2}{2f} + f)]$ 。

笔记 实际上, 在傍轴条件下 Σ_1 上的振幅因子与 S 的位置无关。如图, 设 M 处振幅 A_M , N 处振幅 A_N , P 处振幅 A_P , 则 $A_M = \frac{a}{SM} \approx \frac{a}{s}$, a 是由光源 S 决定的常数, $\frac{A_P}{A_N} = \frac{S'N}{S'P} \approx \frac{s'}{s'-f}$, 忽略透镜对光能的损耗, 于是 $A_M \approx A_N$, $A_P \approx a \frac{s'}{s(s'-f)}$ 。而 s, s' 满足透镜公式 $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$, $\frac{1}{s} = \frac{s'-f}{fs'}$, 则 $A_P = \frac{a}{f}$, 与光源的位置无关。

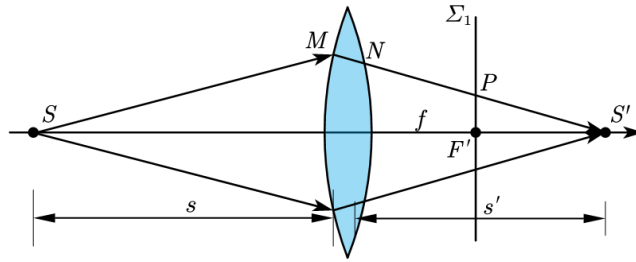


图 2.6

2.8 和 2.9 忽略透镜对能量损耗并不是很好的近似，其实，即使有反射、透射，只要透过率与入射位置 (x, y) 无关，我们就可以忽略透镜（光楔）对振幅的影响。

练习 2.11 在波前 Oxy 平面上，分别出现了以下的波前函数的相位：

$$(1)\tilde{U}_1 \propto \exp\left(i5k \frac{x^2+y^2}{D}\right); (2)\tilde{U}_2 \propto \exp\left(ik \frac{x^2+y^2}{2D}\right); (3)\tilde{U}_3 \propto \exp\left(i4k \frac{x^2+y^2}{2D}\right) \cdot \exp\left(-i4k \frac{5x+8y}{2D}\right).$$

其中， k 为波数， $D > 0$ 。请根据这些波前函数判断波场的类型和特征。

解 $\tilde{U}_3 \propto \exp\left[i4k \frac{(x-\frac{5}{2})^2+(y-4)^2}{2D}\right]$ ，所以均为发散球面波，(1) 的发散中心在 $(0, 0, -\frac{D}{10})$ ，(2) 的发散中心在 $(0, 0, -D)$ ，(3) 的发散中心在 $(\frac{5}{2}, 4, -\frac{D}{4})$ 。

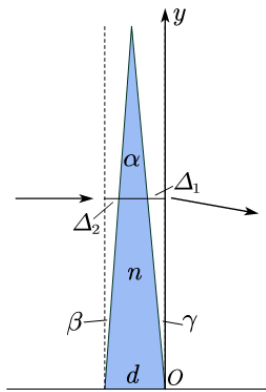


图 2.7

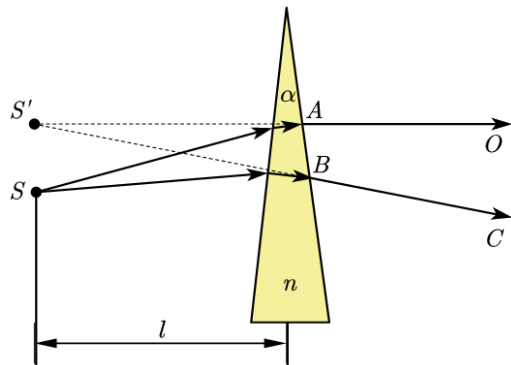


图 2.8

笔记 我们来推导棱镜的相位变换函数 \tilde{t}_P ：如图 2.7，光通过棱镜后相位改变为（忽略 y 方向上的位移） $k[\Delta_1+n(d-\Delta_1-\Delta_2)+\Delta_1] = k(nd-(n-1)y(\tan\beta+\tan\gamma)) \approx k(nd-(n-1)y(\beta+\gamma)) = k(nd-(n-1)\alpha y)$ ，所以 $\tilde{t}_P = \exp[-ik(n-1)\alpha y]$ ，与平面波波前形式相同，所以光通过棱镜后会偏转 $(n-1)\alpha$ ，习题 2.8 也提到了这一结论。

更一般的，光通过一般位置的棱镜其相位变换函数为 $\tilde{t}_P = \exp[-ik(n-1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y)]$ ，则如图 2.8，对于形如 $\tilde{U}_3 \propto \exp\left(i4k \frac{x^2+y^2}{2D}\right) \cdot \exp\left(-i4k \frac{5x+8y}{2D}\right)$ 的波前函数，我们既可以视为从 S 发出的波经过一个棱镜后的波前函数，也可以视为直接从 S' 发出的波，这就证明了从光源 S 发出的光经过棱镜后将成像于与 S 同平面的 S' 点，这也是习题 2.9 所提到的结论。

练习 2.12 (1) 从太阳上的一点发出的球面光波到达地球，试估算在地面上一个多大的范围内，可以将太阳光视为平面波处理。已知太阳距地球 $1.8 \times 10^8 \text{ km}$ ，其所发出的可见光为中心波长 550 nm 的光波。

(2) 月亮上一点发出的球面波到达地球，试估算在地面上一个多大的范围内，可以将月光视为平面波处理。已知月亮距地球 $3.8 \times 10^5 \text{ km}$ ，其所发出的可见光为中心波长 550 nm 的光波。

解 取 100 倍作为远大于条件，于是远场条件为 $100\rho^2 = \lambda z, \rho = \frac{1}{10}\sqrt{\lambda z}$ ，则 (1) 对于太阳， $\rho = 31.5 \text{ m}$ 。(2) 对于月亮， $\rho' = 1.45 \text{ m}$ 。

练习 2.13 一射电源距地面高度约 300km , 向地面发射波长 20cm 的微波, 接收器的孔径为 2m , 这种情况下是否满足远场条件?

解 $\rho = 1\text{m}$, $\frac{\lambda z}{\rho^2} = 60000$, 满足远场条件。

练习 2.14 一束自然光和平面偏振光的混合光, 通过一个可旋转的理想偏振片后, 光强随着偏振片的取向可以有 5 倍的改变。求混合光中两种成分光强的比例。

解 设自然光光强为 I_1 , 平面偏振光光强为 I_2 , 则 $\frac{I_1 + I_2}{\frac{I_1}{2}} = 5$, 解得 $\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2}$ 。

练习 2.15 两偏振片的透振方向成 30° 夹角时, 自然光的透过光强为 I_1 , 若其他条件不变而使上述夹角变为 45° , 仍以自然光入射, 透射光强变为多少?

解 设初始光强 I_0 , 则透过光强 $I_2 = I_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos^2 45^\circ = I_1 \cdot \frac{\cos^2 45^\circ}{\cos^2 30^\circ} = \frac{2}{3} I_1$ 。

练习 2.16 (1) 欲使一平面偏振光的振动面旋转 90° , 只用两块理想的偏振片, 怎样做到这一点?

(2) 如果用两块理想偏振片使平面偏振光的振动面旋转了 90° , 则最大的光强为原来的多少倍?

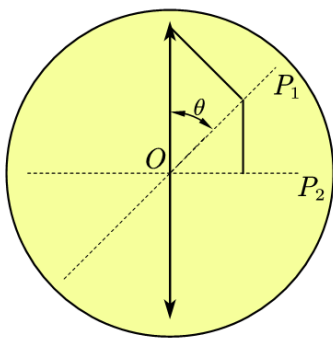


图 2.9

解 (1) 如图, 使 P_2 与最初振动面成 90° 即可。

(2) 透射光强为 $I = I_0 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \leq \frac{1}{4} I_0$, $\theta = 45^\circ$ 时不等式成立。

练习 2.17 一对偏振器和检偏器的取向使透射光强为最大, 当检偏器转过 30° 、 45° 、 60° 时, 透射光强各减小至最大光强的多少?

解 各减小至 $\cos^2 30^\circ = \frac{3}{4}$ 、 $\cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}$ 、 $\cos^2 60^\circ = \frac{1}{4}$ 。

练习 2.18 在两个正交偏振片之间插入第三个偏振片, 以自然光入射。

(1) 求透射光强变为入射光强的 $1/8$ 时, 第三偏振片的方位角。

(2) 如何放置才能使最后的透射光强为零?

(3) 是否可以使透射光强变为入射的自然光强的 $1/2$?

解 (1) $I = (\frac{1}{2} I_0) \cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{1}{8} I_0$, 解得 $\theta = 45^\circ$, 即与第一个偏振片成 45° 夹角。

(2) 让第三个偏振片的透振方向与第一个偏振片相同即可。

(3) $I = (\frac{1}{2} I_0) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \leq \frac{1}{8} I_0$, 所以不可以。

练习 2.19 一束自然光入射到折射率为 1.72 的火石玻璃上, 若发现反射光是平面偏振光, 试求光在该火石玻璃中的折射角。

解 入射角 $i_B = \arctan n$, 折射角满足 $\sin \theta = n \sin i_B = \cos i_B$, 所以 $\theta = 90^\circ - \arctan n = 30.17^\circ$ 。

笔记 练习题 1.1 中的入射角即是布儒斯特角。

练习 2.20 有一空气-玻璃分界面, 已知光从空气一侧射入玻璃时, 其布儒斯特角为 57° , 计算这种光从玻璃一侧射入空气时的布儒斯特角。

解 $i'_B = \arctan \frac{1}{n} = 90^\circ - \arctan n = 90^\circ - i_B = 33^\circ$ 。

第3章 光的干涉

- 练习 3.1 如图 3.1 所示, 两列波长 500 nm 的单色波传过 100 cm 的距离, 由 A 到达 B 处, 其中一列波穿过盛水的玻璃杯, 玻璃杯壁厚 0.5 cm, 内壁间距 10 cm, 设两列波在 A 处同相位, 求在 B 处的相位差。已知玻璃和水的折射率分别为 1.52 和 1.33。

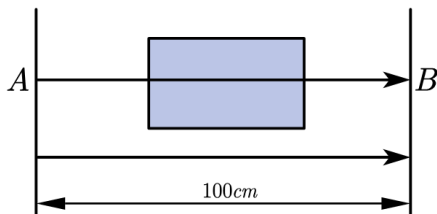


图 3.1

解 壁厚 t , 内壁间距 d , 则 $\Delta\varphi = k\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda}[2(n_{\text{玻璃}} - 1)t + (n_{\text{水}} - 1)d] = 152800\pi$ 。

- 练习 3.2 求两列波 $E_1 = A \cos(kz - \omega t)$, $E_2 = A \cos(-kz - \omega t)$ 的合振动。

解 合振动为 $E = E_1 + E_2 = 2A \cos(\omega t) \cos(kz)$ 。

- 练习 3.3 在双缝干涉的情况下, 用 θ 表示接收屏上一点对双缝中心的张角, 如图 3.2 所示。证明:

(1) 屏幕上的光强为 $I(\theta) = 4A_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right)$ 。

(2) 第一极小出现在 $\theta = \frac{\lambda}{2d}$ 处。

解 (1) 设 S_1 、 S_2 处光波振幅为 A_0 , 则 x 处合振幅为 $\tilde{E} = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 = A_0 \exp(ikr_1) + A_0 \exp(ikr_2)$, 光强为 $I = \tilde{E}\tilde{E}^* = 2A_0^2 + 2A_0^2 \cos k(r_2 - r_1) = 4A_0^2 \cos^2\left(\frac{k\Delta r}{2}\right)$, 而在一阶近似下 $\Delta r = r_2 - r_1 \approx d \sin \theta$, 所以 $I = 4A_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right)$ 。

(2) 第一极小出现在 $\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta = \frac{\pi}{2}$, 即 $\theta \approx \sin \theta = \frac{\lambda}{2d}$ 处。

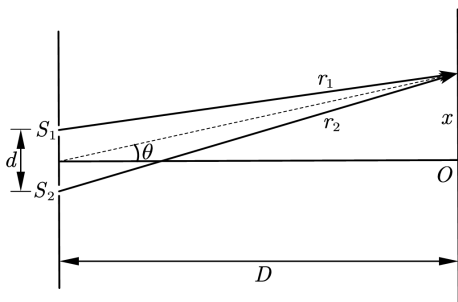


图 3.2

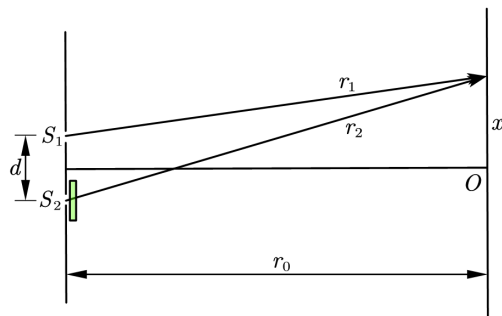


图 3.3

- 练习 3.4 如图 3.3 所示的杨氏实验装置中, 若单色光源的波长 $\lambda = 500.0 \text{ nm}$, $d = S_1S_2 = 0.33 \text{ cm}$, $r_0 = 3 \text{ m}$ 。

(1) 试求条纹间隔。

(2) 若在 S_2 后面置一厚度 $h = 0.01 \text{ mm}$ 的平行平面玻璃片, 试确定条纹移动方向和计算位移的公式; 假设一直条纹的位移为 4.73 mm, 试计算玻璃的折射率。

解 (1) $\Delta x = \frac{r_0}{d} \lambda = 0.545 \text{ mm}$ 。

(2) 我们关注 O 点的移动, 由于从 S_2 出发的光线多了附加光程 $(n-1)h$, 所以 O 点需要向下移动, 增大 $r_1 - r_2$ 来保持光程差为 0, 因此条纹向下移动。设向下移动距离为 Δ , 则有 $d \cdot \frac{\Delta}{r_0} = (n-1)h$, $\Delta = \frac{(n-1)hr_0}{d}$, 由题有 $\Delta = 4.73 \text{ mm}$, 解得 $n = 1.52$ 。

练习 3.5 用很薄的云母片 ($n = 1.58$) 覆盖在双缝装置中的一条缝上, 这时接收屏上的中心为原来的第七级亮纹所占据。若 $\lambda = 550.0 \text{ nm}$, 则云母片有多厚?

解 设云母片厚度为 d , 则 $(n-1)d = 7\lambda$ (光程差每改变一个波长, 亮纹移动一级), $d = 6.64 \mu\text{m}$ 。

练习 3.6 考虑如图 3.4 所示的三缝干涉, 假设三狭缝的宽度 a 相同 ($a \leq \frac{\lambda}{2}$)。

(1) 第一主极大的 θ 角是多少? (即 θ 角为多大时从三狭缝出来的子波同相位)。

(2) 把 (1) 的结果写为 θ_1 , 在零级主极大 ($\theta = 0$) 方向上的能流写为 F_0 , 则在 $\theta_1/2$ 方向上的能流是多少? (以 F_0 为单位, 设 $\lambda \ll d$)

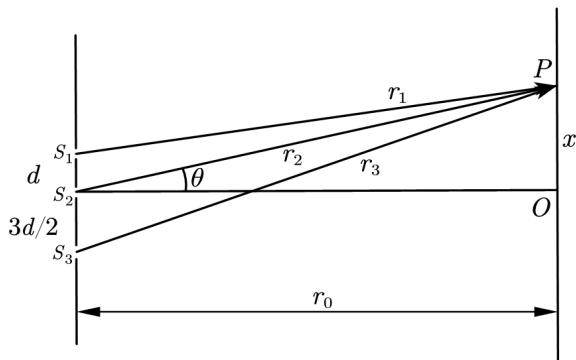


图 3.4

解 (1) $\tilde{E}_P = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 + \tilde{E}_3 = A_0(\exp(ikr_1) + \exp(ikr_2) + \exp(ikr_3)) = A_0 \exp(ikr_1)(1 + \exp(ik(r_2 - r_1)) + \exp(ik(r_3 - r_1))) \approx A_0 \exp(ikr_1)(1 + \exp(i\frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}) + \exp(i\frac{5\pi d \sin \theta}{\lambda}))$, 所以 θ 满足 $\frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = 2m\pi$, $\frac{5\pi d \sin \theta}{\lambda} = 2n\pi$, 解得 $\theta \approx \sin \theta = \frac{2\lambda}{d}$ 。

(2) $F_0 = \tilde{E}_P \tilde{E}_P^*|_{\theta=0} = 9A_0^2$, 则在 $\theta_1/2 = \frac{\lambda}{d}$ 方向上的能流为 $\tilde{E}_P \tilde{E}_P^*|_{\theta=\frac{\lambda}{d}} = A_0^2 = \frac{F_0}{9}$ 。

练习 3.7 在杨氏双缝实验中, 除了原有的光源缝 S 之外, 在 S 的正上方再开一狭缝 S' , 如图 3.5 所示。(1) 若 $S'S_2 - S'S_1 = \frac{\lambda}{2}$, 求单独打开 S 或 S' 时屏上的光强分布。

(2) 若 $S'S_2 - S'S_1 = \frac{\lambda}{2}$, S 和 S' 同时打开时, 屏上的光强分布如何?

解 (1) 设两束光在 P 的相位差为 ΔL , 则 $I_P = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos k\Delta L = 4A_0^2 \cos^2 \frac{k \cos \Delta L}{2}$

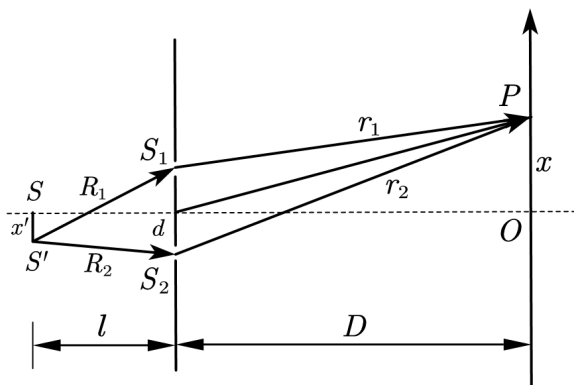


图 3.5

($A_1 = A_2 = A_0$)。单开 S 时 $\Delta L \approx d\frac{x}{D}$, $I_1 = 4A_0^2 \cos^2 \frac{\pi dx}{\lambda D}$, S' 时 $\Delta L \approx d\frac{x}{D} - \frac{\lambda}{2}$, $I_2 = 4A_0^2 \cos^2(\frac{\pi dx}{\lambda D} - \frac{\pi}{2}) = 4A_0^2 \sin^2(\frac{\pi dx}{\lambda D})$ 。

(2) $I = I_1 + I_2 = 4A_0^2 = I_0$, 无干涉条纹。

笔记 产生干涉需要满足 (1) 频率相同 (2) 光场振动方向不垂直 (3) 有稳定的相位差, 本题中 S 和 S' 无稳定的相位差, 因此总光强是各点光源单独产生的光强之和。

练习 3.8 如图 3.6 所示为一种利用干涉现象测定气体折射率的原理性装置，在 S_1 后面放置一长度为 l 的透明容器，将待测气体注入容器而将空气排出的过程中幕上的干涉条纹会移动，由移过条纹的根数即可推知气体的折射率。

(1) 设待测气体的折射率大于空气的折射率，则干涉条纹会如何移动？

(2) 设 $L = 2.0\text{cm}$ ，条纹移过 20 根，光波长 589.3nm ，空气折射率为 1.000276，求待测气体（氯气）的折射率。

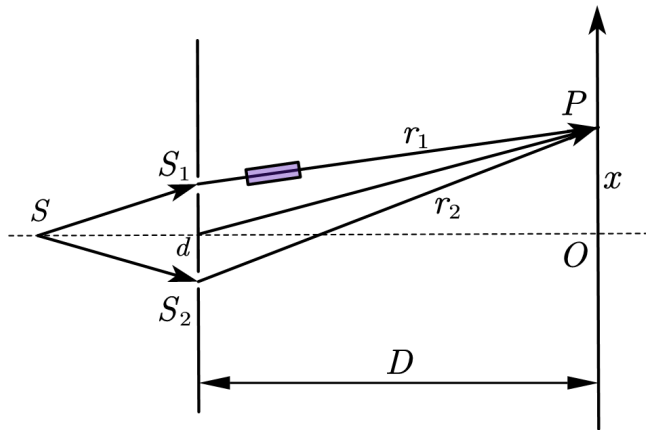


图 3.6

解 (1) 我们关注 O 点的移动，由于从 S_1 出发的光线多了附加光程 $(n - n_{air})L$ ，所以 O 点需要向上移动，增大 $r_2 - r_1$ 来保持光程差为 0，因此条纹向上移动。

(2) 每移过一个条纹，光程差增加 λ ，所以 $(n - n_{air})L = 20\lambda$ ，解得 $n = 1.000276 + 20\frac{\lambda}{L} = 1.0008653$ 。

练习 3.9 设菲涅耳双面镜的夹角 $\epsilon = 10^{-3}\text{rad}$ ，有一单色狭缝光源 S 与两镜相交处 C 的距离 r 为 0.5m ，单色波的波长 $\lambda = 500.0\text{nm}$ ，在距两镜相交处距离 $L = 1.5\text{m}$ 处的屏幕 Σ 上出现明暗干涉条纹。

(1) 求屏幕 Σ 上两相邻明条纹之间的距离。

(2) 在屏幕 Σ 上最多可以看到多少明条纹？

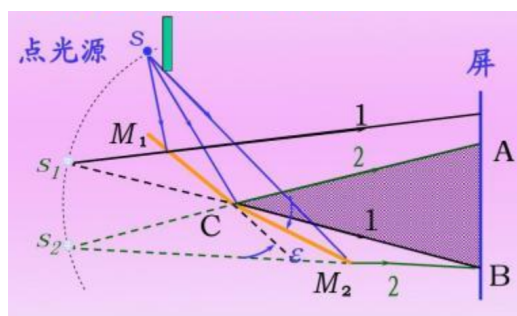


图 3.7

解 (1) 如图 (其实是网图)， S_1S_2 对 C 张角为 2ϵ ，则两者间距 $d = 2r \sin \epsilon \approx 2r\epsilon$ ，到屏距离 $D = r \cos \epsilon + L \approx r + L$ ，于是间距 $\Delta x = \frac{\lambda D}{d} = \frac{\lambda(r+L)}{2r\epsilon} = 1.00\text{mm}$ 。

(2) 重叠照射区域宽度为 $b = 2L \tan \epsilon \approx 2L\epsilon$ ， $n = \frac{b}{\Delta x} = 3$ ，即有三个间隔。可以看到 3 个条纹，最极限可以看到 4 个条纹 (比如 $(-1, 0, 1, 2)$)。

练习 3.10 将一焦距 f 为 50cm 的会聚透镜的中央部分截去 6mm ，把余下的上、下两部分再黏合在一起，成为一块比列对切透镜 L 。在透镜 L 的对称轴上，左边 300cm 处有一波长 $\lambda = 500.0\text{nm}$ 的单色点光源 S ，右边 450cm 处置一光屏 D 。

- (1) 分析 S 发出的光经过透镜 L 后的成像情况，如所成之像不止一个，计算各像之间的距离。
 (2) 在光屏 D 上能否观察到干涉条纹？

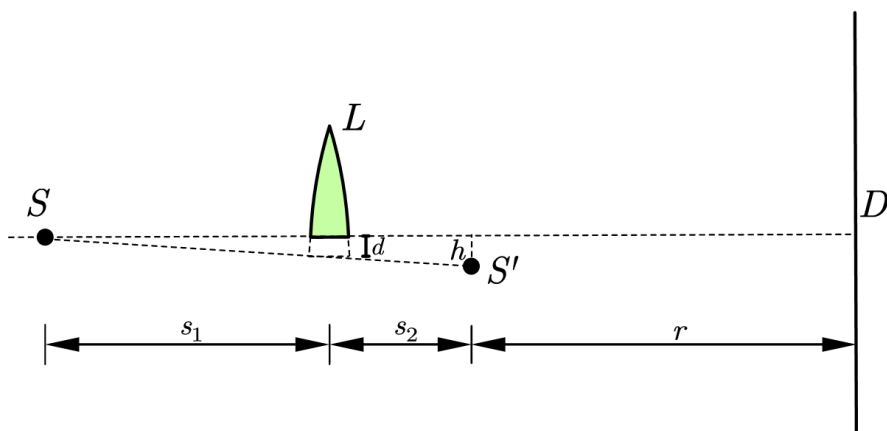


图 3.8

解 (1) 如图，由题有 $d = 3\text{mm}$ ，先考虑上半透镜的成像。由 $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f}$ 得 $s_2 = 60\text{cm}$ 。则 $h = d + d\frac{s_2}{s_1} = 3.6\text{mm}$ ，下半透镜同理，因此光经透镜后成两实像，距离为 $2h = 7.2\text{mm}$ 。

(2) 可以，条纹间距为 $\Delta x = \frac{\lambda r}{2h} = 0.27\text{mm}$ 。

笔记 原题目“梅斯林对切透镜”应改为“比列对切透镜”。

练习 3.11 波长 λ 为 $0.5\mu\text{m}$ 的平行单色光垂直入射到双缝平面上，已知双缝间距 d 为 0.5mm ，在双缝另一侧 5cm 远处，放置一枚像方焦距 f 为 10cm 的理想透镜 L ，在 L 右侧 12cm 远处放置一屏幕，问：屏幕上有无干涉条纹？若有，则条纹间距是多少？

解 $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f}$ ， $s_1 = 5\text{cm}$ ， $f = 10\text{cm}$ ，则 $s_2 = -10\text{cm}$ ，像的间距为 $d' = d\frac{|s_2|}{s_1} = 1\text{mm}$ 。屏幕上有干涉条纹，间距为 $\Delta x = \frac{\lambda D}{d'} = \frac{0.5 \times 10^{-6} (12+10) \times 10^{-2}}{1 \times 10^{-3}} = 1.1 \times 10^{-4}\text{m} = 0.11\text{mm}$ 。

练习 3.12 一束波长为 500nm 的平行光正入射到菲涅耳双棱镜上，已知棱镜顶角为 $3.5'$ ，折射率为 1.5 ，距棱镜 4.0m 处有一接收屏。

- (1) 求屏上干涉条纹间距。
 (2) 求屏上出现的亮条纹数。

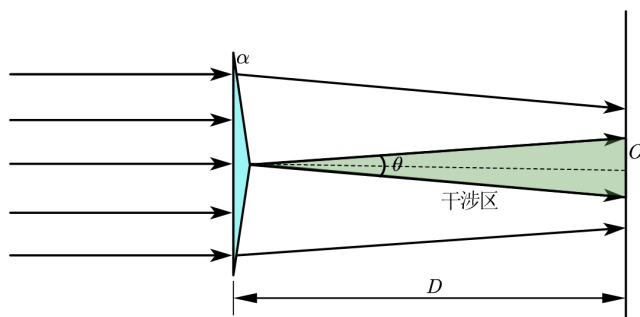


图 3.9

解 (1) 如图，光经过双棱镜后会偏转 $(n-1)\alpha$ ，则条纹间距 $\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \theta_1 + \sin \theta_2} \approx \frac{\lambda}{2(n-1)\alpha} = 0.49\text{mm}$ 。

(2) $\theta = 2(n-1)\alpha$ ， $D = 4\text{m}$ ，干涉区宽度 $b \approx D\theta$ ， $n = \frac{b}{\Delta x} = 8.3$ ，即有 8 个间隔，有 9 条亮条纹。

笔记 [*] 在 1.5、2.11 均有证明。

练习 3.13 一劳埃德镜镜面宽度为 4.0cm，一缝光源在其左侧，离镜边缘 2.0cm，比镜面高出 0.5mm，接收屏幕在镜右侧，距其边缘 300cm，入射光波长 589nm。

- (1) 求幕上的条纹间距以及出现的条纹数。
- (2) 若缝光源上下平移而改变其到镜面的高度，屏上条纹将如何变化？

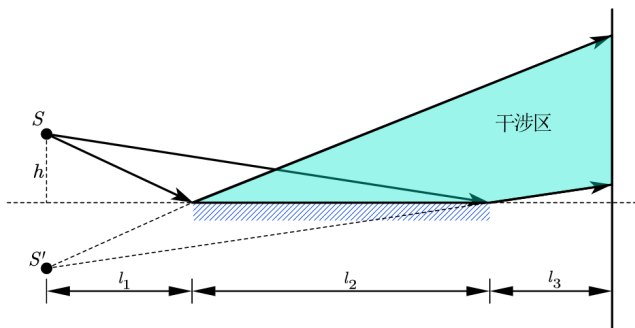


图 3.10

解 (1) 如图，条纹间距 $\Delta x = \frac{D}{d}\lambda = \frac{l_1+l_2+l_3}{2h}\lambda = 1.802\text{mm}$ ，干涉区域宽度 $b = h\frac{l_2+l_3}{l_1} - h\frac{l_3}{l_1+l_2}$ ， $n = \frac{b}{\Delta x} = 28.3$ ，即有 28 个间隔，29 条条纹。

(2) 向上平移， h 变大，条纹间隔减小，条纹数增加；向下平移， h 减小，条纹间隔增多，条纹数减少。

练习 3.14 如图 3.11 所示为一观察干涉条纹的实验装置， R_1 为透镜 L_1 下表面的曲率半径， $R_2 = 2.5\text{cm}$ 为透镜 L_2 上表面的曲率半径，今用一束波长 $\lambda = 589.3\text{nm}$ 的单色平行钠光垂直照射，由反射光测得第 20 级暗条纹半径 r 为 2.4cm。

- (1) 分析干涉图样的形状和特性。
- (2) 透镜下表面的曲率半径 R_1 是多少？

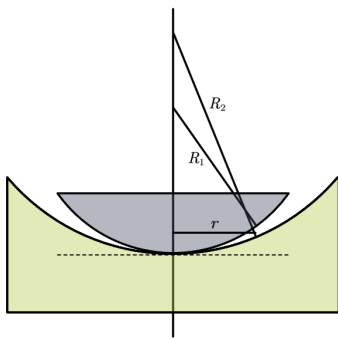


图 3.11

解 (1) 如图，从与两球面顶点相切的平面算起，半径为 r 处的高度为 $h = R - \sqrt{R^2 - r^2} \approx \frac{r^2}{2R}$ ，于是空气膜的厚度为 $\Delta h = h_1 - h_2 = r^2(\frac{1}{2R_1} - \frac{1}{2R_2})$ 。计入半波损，亮条纹满足 $2\Delta h = (j - \frac{1}{2})\lambda$ ，可得 $r_j = \sqrt{\frac{(2j-1)\lambda R_1 R_2}{2(R_2 - R_1)}}$ ，同理暗条纹半径 $r'_j = \sqrt{\frac{j\lambda R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$ ，其中 j 为正整数。干涉图样为同心圆环。

(2) 带入 $r = 2.4\text{cm}$ 和 $j = 20$ ，得 $R_1 = (\frac{1}{R_2} + \frac{j\lambda}{r^2})^{-1} = 2.4987\text{cm}$ 。

笔记 原题数据为 $R_2 = 200\text{cm}$ ， $r = 4.5\text{cm}$ 。

练习 3.15 如图 3.12 所示，在一洁净的玻璃片的上表面上放一滴油，当油滴展开成油膜时，在波长 $\lambda = 600.0\text{nm}$ 的单色光垂直照射下，从反射光中观察到油膜所形成的干涉条纹。如果油膜的折射率 $n = 1.20$ ，玻璃的折射率 $n' = 1.50$ ，实验中，由读数显微镜向下观察油膜所形成的干涉条纹。

- (1) 当油膜中心的最高点与玻璃片的上表面相距 $h = 1.20\mu\text{m}$ 时, 描述所观察到的条纹的形状, 及可以观察到几条亮条纹? 亮条纹所在处油膜的厚度是多少? 中心点的明暗程度又如何?
 (2) 当油膜逐渐扩展时, 所看到的条纹将如何变化?

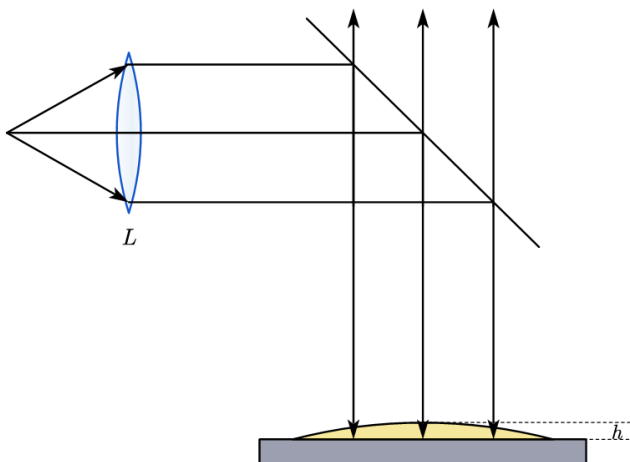


图 3.12

解 (1) 油膜的折射率大于空气折射率, 因此无半波损。同一级条纹厚度相等, 条纹应为环状。计算 $j = \frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{2nh}{\lambda} = 4.8$, 于是有五条亮条纹, 对应 $j = 0, 1, 2, 3, 4$, 相应厚度为 $h_j = j \frac{\lambda}{2n} = 0, 250\text{nm}, 500\text{nm}, 750\text{nm}, 1\mu\text{m}$ 。由于中心点对应 $j = 4.8$, 既不是整数(亮条纹), 也不等于 $n - \frac{1}{2}$ (暗条纹), 因此介于明暗之间。

(2) 油膜扩展, h 减小, 则条纹数减小, 看到亮条纹向中心收缩并被吞入, 同时在油膜新扩展的区域有条纹出现(油膜的边界一定是亮条纹)。

练习 3.16 将光滑的平板玻璃覆盖在柱形平凹透镜上, 如图 3.13 所示。

(1) 用单色光垂直照射时, 画出反射光中干涉条纹分布的大致情况。

(2) 若圆柱面的半径为 R , 且中央为暗纹, 从中央数起第 2 条暗纹与中央暗纹的距离是多少?

(3) 连续改变入射光的波长, 在 $\lambda = 500.0\text{nm}$ 和 $\lambda = 600.0\text{nm}$ 时, 中央均为暗纹, 求柱面镜的最大深度。

(4) 若轻压上玻璃片, 条纹将如何变化?

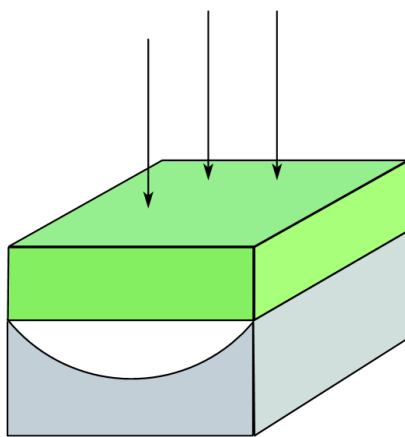


图 3.13

解 (1) 如图, 同一级条纹厚度应该相等, 因此干涉条纹为平行于柱面轴线的直条纹, 且中间稀疏, 两侧密集。图就懒的画了()

(2) 设中心处空气膜厚 H_0 , 则距离轴线 d 处的空气膜厚度为 $H = H_0 - (R - \sqrt{R^2 - d^2}) \approx H_0 - \frac{d^2}{2R}$. 计入半波损, 暗条纹满足 $2H = j\lambda$, 中央处满足 $2H_0 = j_m\lambda$, 则从中央数起第 2 条暗条纹满足 $(j_m - 1)\lambda = 2(H_0 - \frac{d^2}{2R})$, 得 $d = \sqrt{\lambda R}$.

(3) $(k + 1) \cdot 500\text{nm} = k \cdot 600\text{nm}$, 解得 $k = 5$, 于是 $H_0 = \frac{5 \times 600\text{nm}}{2} = 1.5\mu\text{m}$.

(4) H_0 减小, R 增大, 则条纹变稀疏, 且中心有条纹被吞入.

练习 3.17 如图 3.14 所示, 在一厚玻璃中有一气泡, 形状类似球面透镜, 用单色光从玻璃的左侧垂直入射.

(1) 描述在右侧看到的干涉条纹的特点, 即形状、间距、级数和边界处的条纹.

(2) 若均匀用力挤压玻璃的左、右两侧, 条纹有何变化?

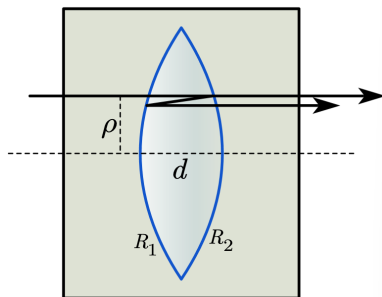


图 3.14

解 (1) 同一级条纹对应空气膜厚度应相等, 则条纹为同心圆环. 距离光轴 ρ 处的空气膜厚度为 $h = d - (R_1 - \sqrt{R_1^2 - \rho^2}) - (R_2 - \sqrt{R_2^2 - \rho^2}) \approx d - \rho^2(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2})$, 由于在气泡内反射了两次, 所以无半波损, 于是亮纹满足 $2h = j\lambda$, $\rho_j = \sqrt{\frac{(2d - j\lambda)R_1R_2}{R_1 + R_2}}$, 于是间距 $\Delta\rho = |\rho_j - \rho_{j-1}| = \sqrt{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}} \frac{\lambda}{\sqrt{2d - j\lambda} + \sqrt{2d - (j-1)\lambda}}$, 可见条纹中心稀疏, 离中心越远越密集, 类似牛顿环. 边界处 $h = 0$, 为亮条纹.

(2) d 减小, R_1, R_2 均变大, 则条纹变稀疏, 且中心有条纹被吞入.

练习 3.18 用迈克耳孙干涉仪精密测长, 以 He-Ne 激光器的 632.8 nm 谱线作为光源, 其谱线宽度为 0.0001 nm, 对干涉强度信号测量的灵敏度可达 1/8 个条纹.

(1) 这台干涉仪的测长精度是多少?

(2) 该测长仪一次测长的量程是多少?

解 (1) 设测量长度改变 l , 观测条纹强度改变 N 次, 就有 $\delta(\Delta L) = 2l = N\lambda$, $l = N\frac{\lambda}{2}$, 于是测量精度 δl 满足 $\delta l = \frac{\lambda}{2}\delta N$, 由题意有 $\delta N = \frac{1}{8}$, 则 $\delta l = \frac{\lambda}{16} = 39.55\text{nm} \approx 40\text{nm}$.

(2) 当光程差 $2l$ 等于相干长度 L_c 时. 对应的长度 $l = \frac{L_c}{2} = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} = 2.00\text{m}$ 即为量程.

笔记 非单色性有两种典型, 一种为双线结构 ($\lambda_1 < \lambda_2$), 则当光程差满足 $\Delta L = N_0\lambda_1 = (N_0 - \frac{1}{2})\lambda_2$ 时 (λ_1 亮纹, λ_2 暗纹), 总干涉条纹模糊, 此时 $\Delta L = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$. 另一种是有单色线宽, 即此题中的情况, 计算表明 $\Delta L = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ 时第一次干涉条纹模糊 (衬比度为 0). 此部分内容对应在上书 154-156 页.

练习 3.19 镉灯为准单色光源, 其谱线的中心波长为 642.8nm, 谱线宽度为 0.001 nm.

(1) 求其光场的相干长度和相干时间.

(2) 求该红色谱线的频宽.

(3) 用此灯作为迈克耳孙干涉仪的光源, 用镜面移动来观测干涉场输出的光信号曲线, 设镜面移动速度为 0.5 mm/s, 试估算需要多长时间才可以获得显示有两个波包形状的信号曲线.

解 (1) 相干长度 $L_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = 0.413\text{m}$, 相干时间 $\tau = \frac{L_c}{c} = 1.38\text{ns}$.

(2) $\nu = \frac{c}{\lambda}$, $\Delta\nu = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2} = 726\text{MHz}$.

(3) 画出光强随 ΔL 变化曲线如图, 中间大波包长度为 $2L_c$, 其余波包长度为 L_c , 光程差需变化 $3L_c$ (主波包加一个次波包) 才能看见两个波包形状, 注意到 $\Delta L = 2l$, 则 $t = \frac{l}{v} \approx 20 \text{min}$ 。

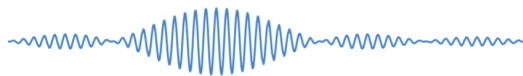


图 3.15

练习 3.20 有两条光谱线, 中心为 600 nm, 波长差 10^{-4} nm。现在要用法布里-珀罗干涉仪将它们分辨开, 则法布里-珀罗干涉仪的镜面间距至少要多长? 设每一个镜面的反射率为 95%。

解 $\delta\lambda_m = \frac{\lambda}{\pi m} \cdot \frac{1-R}{\sqrt{R}}$ (教材第 182 页), m 用中心处级次来估算: $2nh \approx m\lambda$, 得 $h \approx \frac{\lambda^2}{2\pi\delta\lambda_m} \frac{1-R}{\sqrt{R}} \approx 3 \text{cm}$ 。

笔记 在此给出一种利用电磁场性质推导法布里-珀罗干涉的方法: 不妨设入射光为 s 光 (p 光的推导是类似的), 即电场垂直于平面, 设入射电场 $\tilde{E}_1 = E_0 e^{in_1 k_0 (\cos\theta x + \sin\theta y)} \hat{e}_z$, 反射电场 $\tilde{E}_2 = \tilde{r} E_0 e^{in_1 k_0 (-\cos\theta x + \sin\theta y)} \hat{e}_z$, k_0 是真空中波矢。 n_2 介质中有两个方向的传播电场, 一个方向为 $(n_2 k_0 \cos\varphi, n_2 k_0 \sin\varphi)$, 一个为 $(-n_2 k_0 \cos\varphi, n_2 k_0 \sin\varphi)$, 又已知 $n_2 \sin\varphi = n_1 \sin\theta$, 于是可设 n_2 介质中电场为 $\tilde{E}_3 = E_0 e^{in_1 k_0 \sin\theta y} (\tilde{A}_1 e^{ik_2 x} + \tilde{A}_2 e^{-ik_2 x}) \hat{e}_z$, $k_2 = \sqrt{n_2^2 k_0^2 - n_1^2 k_0^2 \sin^2\theta} = k_0 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta}$ 。设透射光线为 $\tilde{E}_4 = E_0 \tilde{t} e^{in_1 k_0 (\cos\theta x + \sin\theta y)} \hat{e}_z$ ($E_{1,2,3,4}$ 均省略了 $e^{-i\omega t}$)。

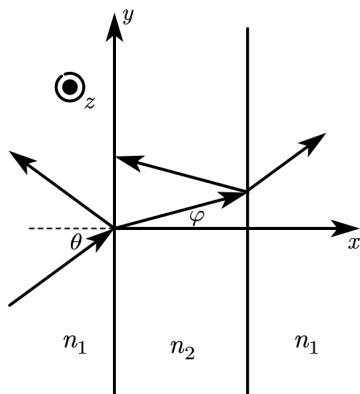


图 3.16

在 $x = 0$ 和 $x = d$ 处电场应连续 (电磁场边界条件), 于是有 $1 + \tilde{r} = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$, $\tilde{A}_1 e^{ik_2 d} + \tilde{A}_2 e^{-ik_2 d} = \tilde{t} e^{in_1 k_0 d \cos\theta}$ 。

又因为 $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = i\omega B$, 假定两介质的相对磁导率均为 1, 即 $B \propto H$, 便有: $H_y \propto \frac{\partial E}{\partial x}$, 在 $x = 0$ 和 $x = d$ 处磁场应连续 (电磁场边界条件), 于是有 $n_1 k_0 \cos\theta (1 - \tilde{r}) = k_2 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)$, $k_2 (\tilde{A}_1 e^{ik_2 d} - \tilde{A}_2 e^{-ik_2 d}) = \tilde{t} n_1 k_0 \cos\theta e^{in_1 k_0 d \cos\theta}$ 。

联立得 $\tilde{t} = \frac{4\lambda e^{i(k_2 - n_1 k_0 \cos\theta)d}}{(\lambda + 1)^2 - (\lambda - 1)^2 e^{2ik_2 d}}$, $\lambda = \frac{k_2}{n_1 k_0 \cos\theta} = \frac{n_2 \cos\varphi}{n_1 \cos\theta}$, 与教材上用级数求和所得结果相同 ($e^{i(k_2 - n_1 k_0 \cos\theta)d}$ 只是相位因子, 不影响 T 的大小)。

练习 3.21 设法布里-珀罗腔长 5.000 cm, 用扩展光源做实验, 光波波长 $\lambda = 600.0 \text{ nm}$ 。

- (1) 中心干涉级数是多少?
- (2) 在倾角 1° 附近, 干涉环的半角宽度是多少? (设光强反射率 $R = 0.98$)
- (3) 如果用该法布里-珀罗腔分辨谱线, 其色分辨本领有多大? 可分辨的最小波长间隔是多少?
- (4) 如果用其对白光进行选频, 透射最强的谱线有几条? 每条的谱线宽度是多少?
- (5) 由于热胀冷缩所引起的腔长的改变量为 10^{-5} (相对值), 则谱线的漂移量是多少?

解 (1) $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \approx 1.7 \times 10^5$ 。

$$(2)\theta_k = 1^\circ, \Delta\theta_k = \frac{1}{\pi k_0 \sin \theta_k} \frac{1-R}{\sqrt{R}} \approx \frac{1}{\pi k_0 \theta_k} \frac{1-R}{\sqrt{R}} \approx 2.2 \times 10^{-6} \text{rad}.$$

$$(3)R_c = \frac{\lambda}{\delta\lambda_m} = \pi k \frac{1-R}{\sqrt{R}} \approx \pi k_0 \frac{1-R}{\sqrt{R}} \approx 2.6 \times 10^7, \delta\lambda_m = \frac{\lambda}{R_c} \approx 2.3 \times 10^{-5} \text{nm}.$$

(4) $\lambda_k = \frac{2nh}{k}, \nu_k = \frac{c}{\lambda_k} = k \frac{c}{2nh}, \Delta\nu = \frac{c}{2nh} = 3 \times 10^9 \text{Hz}$, 可见光频段大致上为 $4 \times 10^{14} - 8 \times 10^{14} \text{Hz}$, 所以投射最强的谱线约有 $\frac{4 \times 10^{14}}{3 \times 10^9} \approx 1.3 \times 10^5$ 条。谱线宽度 $\Delta\nu_k = \frac{c}{2\pi nh} \frac{1-R}{\sqrt{R}} \approx 20 \text{MHz}$ 。

(5) $2h = k\lambda, 2\delta h = k\delta\lambda, \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta h}{h} = 10^{-5}, \delta\lambda_k = 550 \text{nm} \times 10^{-5} \approx 5.5 \times 10^{-3} \text{mm}$ (取 $\lambda \approx 550 \text{nm}$ 作为估算)。

练习 3.22 在杨氏双缝实验中, 双缝间距为 0.5mm , 接收屏距双缝 1.000m , 点光源距双缝 30cm 发射波长 $\lambda = 500.0 \text{nm}$ 的单色光。

(1) 求屏上干涉条纹间距。

(2) 若点光源由轴上向下平移 2mm , 屏上干涉条纹将向什么方向移动? 移动多少距离?

(3) 如点光源发出的光波为 $(500.0 \pm 2.5) \text{nm}$ 范围内的准单色光, 求屏上能看到的干涉极大的最高级次。

(4) 若光源具有一定的宽度, 屏上干涉条纹消失时, 它的临界宽度是多少?

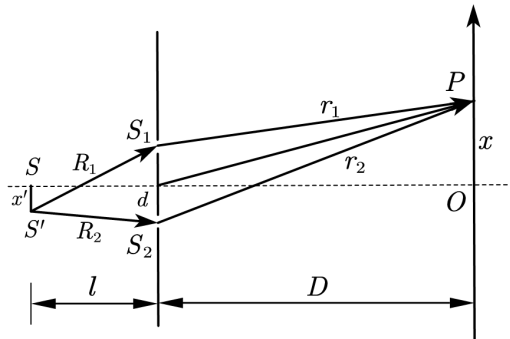


图 3.17

解 (1) 如图 (其实是搬的图 3.5), $\Delta x = \lambda \frac{D}{d} = 1 \text{mm}$ 。

(2) 关注 O 点的变化, 由于 $R_1 - R_2 > 0$, 则 O 点需向上移动增大 $r_2 - r_1$ 来保持光程差为 0, 因此条纹向上移动。设向上移动 Δ , 则 $d \frac{\Delta}{D} = d \frac{x'}{l}, \Delta = 6.67 \text{mm}$ 。

(3) 光程差 $\Delta L = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ 时衬比度为 0, 干涉条纹消失, 此时级数 $k = \frac{\Delta L}{\lambda} = 100$, 注意到 $k = 100$ 对应衬比度为 0, 因此能看到的干涉极大的最高级次为 99。

(4) 宽度 $b = \frac{l}{d} \lambda = 0.3 \text{mm}$ 。

第4章 光的衍射

练习 4.1 试证明：若圆盘遮住了 k 个半波带，则在圆盘阴影中心点 P 的光强为 $a_{k+1}^2/4$ (a_{k+1} 表示第 $k+1$ 个波带的振幅)。

解 如图，从 a_0 开始叠加的总振幅为 $\frac{a_0}{2}$ ，则从 a_{k+1} 开始叠加的总振幅 (大小) 自然为 $\frac{|a_{k+1}|}{2}$ ，对应的光强为 $a_{k+1}^2/4$ 。

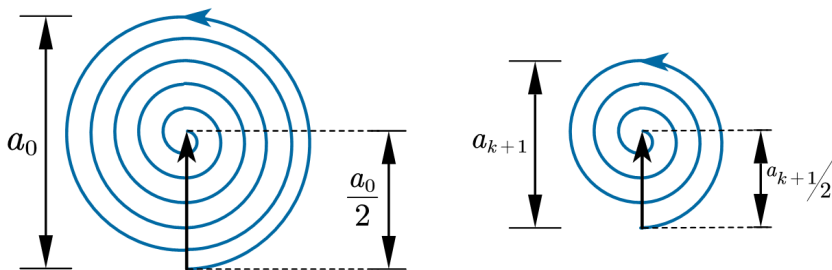


图 4.1

笔记 原题目有误， $a_{k+1}/4$ 应为 $a_{k+1}^2/4$ 。

练习 4.2 在菲涅耳圆孔衍射装置中，若圆孔大小、点光源位置均为固定而观察屏逐渐远离圆孔，试画出中心点 P 的光强变化情况，并说明之。

解 定性来看，圆孔与观察屏的距离 b 的变化会导致半波带数 m 的奇偶发生变化，于是 P 点的光强呈明暗交替的周期变化。

半波带面积满足 $\frac{\Delta \Sigma_n}{r_n} = \frac{2\pi R dr_n}{R+b}$ ，假设距离为 b 时有 m 个半波带，则有 $\tilde{E}_P = \frac{-i}{\lambda} E_0 \int_b^{b+\frac{m}{2}\lambda} e^{ikr} dr = -E_0 \frac{R}{R+b} e^{ikb} (e^{ikm\frac{\lambda}{2}} - 1)$ ，于是光强 $I(b) = \tilde{E}_P \tilde{E}_P^* = 4I_0 (\frac{R}{R+b})^2 \sin^2(\frac{m\pi}{2})$ ， m 满足 $m = \frac{\rho^2}{\lambda} (\frac{1}{R} + \frac{1}{b})$ ，图像大致如下：

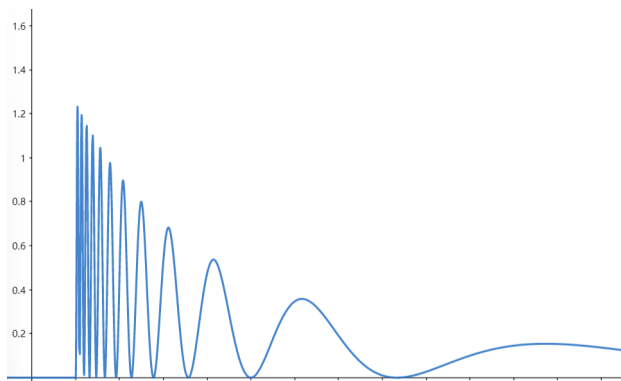


图 4.2

练习 4.3 波长为 λ 的单色平行光垂直照射在一个开有圆环孔的屏上，圆环的内半径为 r ，外半径为 R ，中心为 O 点，观察点 P 位于屏后的法线 OF 上，当 P 点逐渐远离 O 点时， P 点的光强有明暗交替变化，但达到最后的暗点为 P_0 后不再出现暗点。问：

(1) P 点在 P_0 点前时的光强如何变化？

(2) P 点在 P_0 点后时，在何处其光强为最大？可达到没有圆环屏时的多少倍？

(3) P 点在 P_0 点后为什么不再出现暗点？

解 (1) 当 P 点在 P_0 点前时，由于半波带数 m 奇偶交替变化， P 点的光强呈现明暗交替变化。

(2) 设 P 到屏距离 b , 则半波带数 $m = \frac{R^2 - r^2}{\lambda b}$ 。令 $m = 1$, 得 $b = \frac{R^2 - r^2}{\lambda}$, 即距离屏 $\frac{R^2 - r^2}{\lambda}$ 时光强最大, 为没有圆环屏时的 4 倍。

(3) 当 P 点在 P_0 后, 环形孔覆盖的菲涅尔半波带数目不足两个, 无法形成完全的相消干涉, 因此不再出现暗点。

练习 4.4 某人欲制造一个对应于 $\lambda = 5\mu\text{m}$, 焦距为 10 m 的振幅型波带片, 要求焦点处的光强为不放波带片时的 1000 倍。

(1) 如何设计这一波带片?

(2) 此片能否用在波长为 $2.5\mu\text{m}$ 的光束上? 焦距和光强情况是否改变?

(3) 若用 $n = 2.0$ 的介质材料制造上述要求的相位型波带片, 应如何设计?

(4) 这一相位型的波带片是否能用于波长为 $2.5\mu\text{m}$ 的光束中?

解 (1) 不放波带片时振幅为 a_0 , 则单个波带片贡献振幅为 $2a_0$, 设有 N 个半波带, 则 $(2N)^2 = 1000$, $N \approx 16$, 即共 32 个波带, 其中奇数波带透光, 偶数波带遮光, 各环带半径按 $r_n = \sqrt{n\lambda f}$ 计算。

(2) $r'_n = n\lambda'f'$, 令 $r'_n = r_n$ 则波带片的结构仍然有效, 所以焦距变为 $f' = \frac{\lambda}{\lambda'}f = 20\text{m}$ 。因此可以用在波长为 $2.5\mu\text{m}$ 的光束上, 焦距变为 20m , 光强仍为不放波带片时的 1024 倍。

(3) 介质可引起额外光程差, 使所有半波带干涉相长。设蚀刻深度为 t , 则 $t(n-1) = \frac{\lambda}{2}$, $t = 2.5\mu\text{m}$ 。因此设计 16 个波带, 偶数波带蚀刻 $2.5\mu\text{m}$ 深度以引入 π 相位差, 各环带半径按 $r_n = \sqrt{n\lambda f}$ 计算。

(4) 额外光程差恰好为一个波长, 相位调制失效, 所以不能用于 $2.5\mu\text{m}$ 的光束。

练习 4.5 由紫光 ($\lambda_1 = 400\text{nm}$)、绿光 ($\lambda_2 = 500\text{nm}$) 和红光 ($\lambda_3 = 750\text{nm}$) 三种波长组成的平行光束垂直入射到一光栅上, 光栅常数为 0.005mm , 用 $f = 1\text{m}$ 的透镜使光栅中出射的光谱会聚在焦平面上, 则第二级的红线、第三级的绿线和第四级的紫线之间的距离为多少?

解 $d \sin \theta = k\lambda$, 于是 $\sin \theta_{2, \text{红}} = 0.3$, $\sin \theta_{3, \text{绿}} = 0.3$, $\sin \theta_{4, \text{紫}} = 0.32$, 所以红线与绿线重合, 与紫线的距离为 $f(\tan \theta_{4, \text{紫}} - \tan \theta_{2, \text{红}}) = 2.3\text{cm}$ 。

笔记 书上数据有误。

练习 4.6 在菲涅耳圆盘衍射的实验中, 若以一枚图钉作为圆盘 ($\rho_0 = 1\text{cm}$), 并令 $R = r_0$, 取 $\lambda = 0.5\mu\text{m}$, 要求圆盘正好挡住一个波带 (此处指两个半波带), 则光源与屏的距离应为多少?

解 $2 = n = \frac{r_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r_0} \right)$, 解得 $R = 200\text{m}$, 光源与屏的距离 $R + r_0 = 400\text{m}$ 。

练习 4.7 波长为 750nm 的光波通过一个宽度为 10^{-3}mm 的狭缝, 则中央极大的衍射峰张角为多少度? 20cm 远处的屏幕上的衍射光斑宽度为多少?

解 $a \sin \theta = \lambda$, $\theta = 0.75$, 则中央极大的衍射峰张角 $2\theta = 97.18^\circ$ 。衍射光斑宽度为 $2f \tan \theta = 0.45\text{m}$, 其中 f 为狭缝到屏幕的距离。

笔记 书上数据有误。

练习 4.8 有一个刻槽为 1000 线/mm 的光栅, 波长为 400nm 和 700nm 的光波经过此光栅后的第一和第二衍射级的角度各为多少?

解 $d \sin \theta = k\lambda$, 解得 $\theta_{1, 400\text{nm}} = 23.58^\circ$, $\theta_{2, 400\text{nm}} = 53.13^\circ$, $\theta_{1, 700\text{nm}} = 44.43^\circ$, $\theta_{2, 700\text{nm}}$ 不存在。

笔记 书上数据有误。

练习 4.9 有一个单缝衍射装置, 波长为 550nm 的光束在 1.50m 处的屏幕上产生中心衍射极大光斑宽度为 3.0cm , 当用波长为 400nm 的光束照射时其极大光斑的宽度为多少?

解 主极大半角宽满足 $a \sin \theta = \lambda$, θ 很小时, 宽度 $b = 2f \tan \theta \approx 2f \sin \theta \propto \lambda$, 所以用波长为 400nm 的光束照射时其极大光斑的宽度变为 $3\text{cm} \times \frac{400\text{nm}}{550\text{nm}} = 2.2\text{cm}$ 。

练习 4.10 在双缝衍射中如何用惠更斯-菲涅耳原理定性解释在衍射主极大中出现光强为零的情况?

解 根据惠更斯-菲涅耳原理, 每个缝可以视为多个子波源。这些子波在传播到屏幕时会发生干

涉, 当光程差满足相消条件 ($a \sin \theta = k\lambda$) 时, 会出现衍射极小。即使这时双缝干涉在这些位置是干涉相长的, 总的光强也会被调制为零, 形成缺级。

练习 4.11 作 $d = 4b, N = 5$ 的光栅的光强分布图, 并求出在衍射主极大中各个 (干涉) 主极大的归一化强度。

解 $d = a + b$, 于是 $a = \frac{3}{4}d$ 。 $I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin 5\beta}{\sin \beta}\right)^2$, 其中 $\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}, \beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$ (未归一化)。以 $\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$ 为自变量且归一化后 $I = \frac{1}{25} \left(\frac{\sin \frac{3}{4}\beta}{\frac{3}{4}\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin 5\beta}{\sin \beta}\right)^2$ 。图像如下:

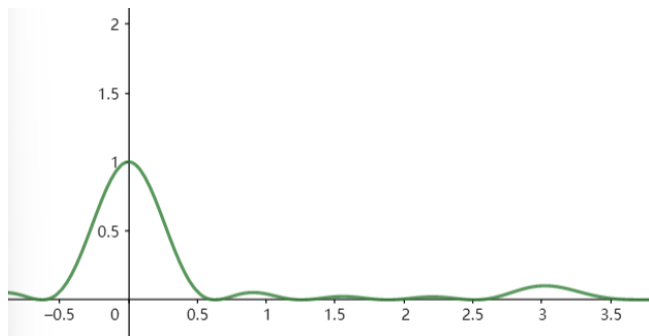


图 4.3

0 级主极大归一化强度为 1, 当 k 为 4 的倍数时, 第 k 级形成缺级: 当 k 不为 4 的倍数时, 第 k 级主极大的归一化强度为 $\left(\frac{\sin \frac{3}{4}k\pi}{\frac{3}{4}k\pi}\right)^2$ 。

练习 4.12 导出不等宽双狭缝的夫琅禾费衍射强度分布公式, 设缝宽分别为 $a, 2a$, 缝距 $d = 3a$ 。

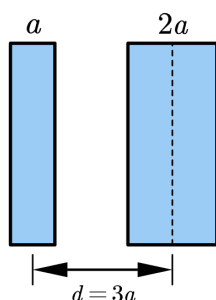


图 4.4

解 可以把缝宽为 $2a$ 的单缝看成是两个宽度为 a 的单缝并列, 则本题化为等宽不等距的三缝问题。设最左边的缝 (中间) 为 0 相位点, 则三缝相互干涉的结果为 $1 + e^{ik\frac{5a}{2}} + e^{ik\frac{7a}{2}}$ 。干涉因子为 $(1 + e^{ik\frac{5a}{2}} + e^{ik\frac{7a}{2}})(1 + e^{ik\frac{5a}{2}} + e^{ik\frac{7a}{2}})^* = 3 + 2(\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha)$, $\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ 。于是 $I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 (3 + 2(\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha))$, $\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ 。

笔记 原题未给出两个不等宽狭缝的狭缝宽度。

练习 4.13 有 $2N$ 条平行狭缝, 缝宽均为 a , 缝间不透明部分周期性变化, 间距为 $a, 3a, a, 3a, \dots$ 。求下列各种情形的夫琅禾费衍射强度分布: (1) 遮住偶数条; (2) 遮住奇数条; (3) 全开放。

解 (1) 遮住偶数条后间距 $d = 6a$, 于是 $I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin 6\alpha}\right)^2$, 其中 $\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ 。

(2) 遮住奇数条间距仍为 $6a$, 则强度分布与 (1) 相同。

(3) 把 N 条奇数缝与 N 条偶数缝看成两个相同的衍射单元, 于是两衍射单元的间距为 $2a$, 干涉结果为 $1 + e^{ik2a}$, 干涉因子为 $(1 + e^{ik2a})(1 + e^{ik2a})^* = 4 \cos^2 \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}$, 于是强度分布为 $I = 4I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}\right)^2 \cos^2 2\alpha$, $\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ (1、2、3 问中的 I_0 是相等的)。

笔记 原题目“间距为 $a, 2a, 3a, \dots$ ”应该为“间距为 $a, 3a, a, 3a, \dots$ ”。

- 练习 4.14 有一三狭缝衍射屏，缝宽均为 a ，彼此间距为 d ，中间缝盖有可以引起 180° 相位改变的滤光片，波长为 λ 的单色光正入射。计算下列各种情况下的角度：(1) 第一衍射极小；(2) 第一干涉极小；(3) 第一干涉极大。

解 设中间缝为 0 相位点，衍射角 θ ，则各缝相干涉结果为 $e^{-ikd\sin\theta} + e^{i\pi} + e^{ikd\sin\theta} = 2\cos\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda} - 1$ ，干涉因子为 $(2\cos\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda} - 1)^2$ ，衍射因子为 $(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2$ ， $\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$ ，于是 $I(\theta) = I_0(2\cos\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda} - 1)^2(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2$ 。

$$(1) \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} = \pi, \theta = \arcsin\frac{\lambda}{a}.$$

$$(2) 2\cos\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda} - 1 = 0, \theta = \arcsin\frac{\lambda}{6d}.$$

$$(3) \cos\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda} = -1, \theta = \arcsin\frac{\lambda}{2d}.$$

笔记 本题为 2024 秋光学 B 期末考试原题。

- 练习 4.15 如图 4.5 所示，有一四缝衍射屏，缝宽为 a ，缝间不透光部分宽度为 b ，且 $a = b$ 。缝 1 一直打开，其他缝可以关闭，单色平行光正入射。

(1) 打开缝 ____ 可得到图 4.6 所示的强度分布。

(2) 画出四个缝全打开时的强度分布。

(3) 若缝 1、3 打开， d 不变，而 a 减小至 $a \ll b$ ，画出强度分布曲线。

(4) 按 (2) 的情况，中央最大光强为 $I = ______ I_0$ 。（ I_0 为图 4.6 中的中央最大光强）。

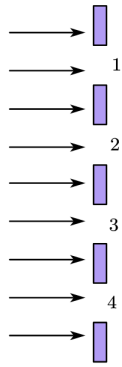


图 4.5

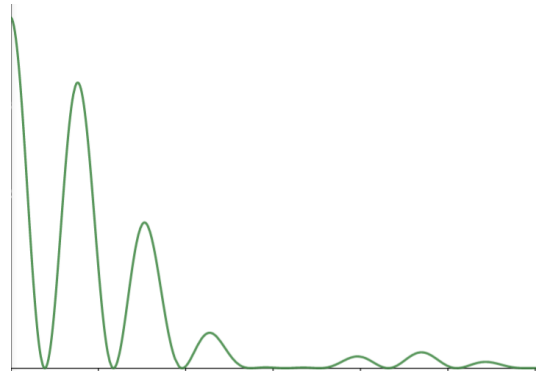


图 4.6

解 (1) 第四级缺级，因此 $d' = 4a$ ，所以打开缝 3。

(2) $I = I_0(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2(\frac{\sin 4\beta}{\sin\beta})^2$ ，其中 $\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$ ， $\beta = \frac{2\pi a\sin\theta}{\lambda}$ ，强度分布图 4.7 所示。

(3) 此时衍射因子趋于平坦，只需考虑双缝干涉，故 $I = 4I_0\cos^2(\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda})$ ，如图 4.8 所示。

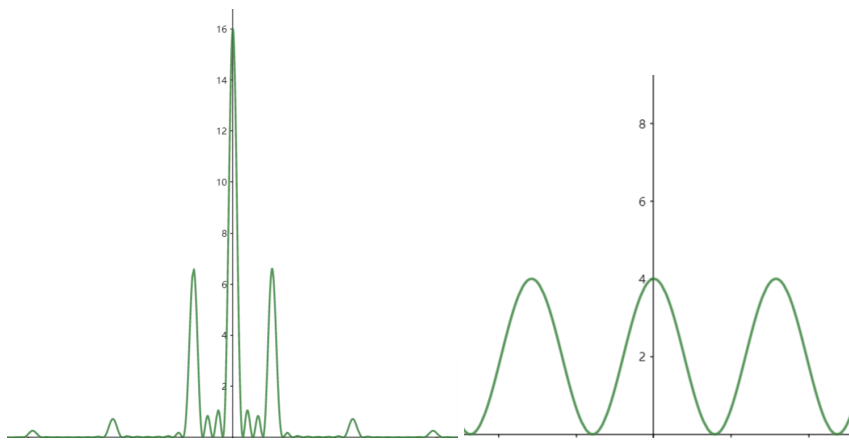


图 4.7

图 4.8

(4) 振幅为 2 倍，则光强为 4 倍。

笔记 原题图 (b) 绘制有误。

练习 4.16 为了能分辨第二级钠光谱的双线 (波长分别为 589.0 nm 和 589.6 nm), 宽度为 10 cm 的平面光栅的常数应为多少?

解 光栅分辨本领 $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$, N 为光栅的刻线数。则 $d = \frac{L}{N} = 2.04 \times 10^{-4} m$, L 为光栅长度。

笔记 关于光栅的色散本领及色分辨本领的内容详见教材 245 ~ 247 页。

练习 4.17 一光栅的光栅常数为 $4 \mu m$, 总宽度为 10 cm, 波长为 500.0 nm 和 500.01 nm 的平面波正入射, 光栅工作在二级光谱, 问: 该双线分开多大角度? 能否分辨?

解 $d \sin \theta = k\lambda$, $d \cos \theta \delta\theta = k\delta\lambda$, $\delta\theta = 5.16 \times 10^{-6} rad$ 。 $N = \frac{L}{d} = 25000$, 则 $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = 50000 = kN$, 刚好能够分辨。

练习 4.18 某光源发射波长为 650 nm 的红光, 用刻线数为 10^5 的光栅测量发现这是双线, 在该光栅的第三级光谱中刚好能分辨此双线, 求这两条谱线的波长差。

解 $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$, $\delta\lambda = 2.17 \times 10^{-3} nm$ 。

练习 4.19 一光栅宽 5.00 cm, 每毫米有 400 条刻线。波长为 500.0 nm 的平行光正入射时, 光栅的第 4 级衍射光谱在单缝衍射的第一极小值位置。

(1) 求每缝的宽度。

(2) 求第二级衍射谱的半角宽度。

(3) 求第二级可分辨的最小波长差。

(4) 如果入射光的入射方向与光栅平面的法线成 30° 角, 光栅能分辨的最小波长差又是多少?

解 (1) $a \sin \theta = \lambda$, $d \sin \theta = 4\lambda$, $a = d/4 = 625 nm$ 。

(2) $N = \frac{L}{d} = 2 \times 10^4$, $\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta_k} = \frac{\lambda}{L \sqrt{1 - (k\lambda/d)^2}} = 1.1 \times 10^{-5} rad$ 。

(3) $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$, $\delta\lambda = 0.0125 nm$ 。

(4) $d |\sin \theta - \sin 30^\circ| = k\lambda$, $k_{max} = 7$, $\frac{\lambda}{\delta\lambda_{min}} = k_{max} N$, $\delta\lambda_{min} = 0.0036 nm$ 。

练习 4.20 绿光波长为 500.0 nm, 正入射在光栅常数为 $2.5 \times 10^{-3} mm$ 、宽度为 30 mm 的光栅上, 聚光镜的焦距为 500 mm。

(1) 求第一级光谱的线色散率。

(2) 求第一级光谱中能分辨的最小波长差。

(3) 该光栅最多能看到第几级光谱?

解 (1) $D_l = \frac{kf}{d \cos \theta_k} = \frac{kf}{d \sqrt{1 - (k\lambda/d)^2}} = 0.204 mm/nm$ 。

(2) $N = \frac{L}{d} = 12000$, $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$, $\delta\lambda = 0.042 nm$ 。

(3) $d \sin \theta = k\lambda$, $k_{max} = 4 (\sin \theta < 1)$ 。

练习 4.21 国产 31WI 型 1m 平面光栅摄谱仪的技术数据如下: 物镜焦距 1050mm, 光栅刻划面积 $60mm \times 40mm$, 闪耀波长 635.0nm (1 级), 刻线 1200 条/mm, 色散 (线色散率的倒数) $0.8nm/mm$, 理论分辨率 72000 (1 级)。

(1) 求该摄谱仪能分辨的最小波长间隔。

(2) 该摄谱仪的角色散本领是多少?

(3) 光栅的闪耀角是多大? 闪耀方向与光栅平面的法线方向成多大的角度?

解 (1) $\delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = 0.09 \text{ \AA}$ 。

(2) $D_\theta = \frac{D_l}{f} = 1.2 \times 10^{-3} rad/nm$ 。

(3) $2d \sin \theta_b = \lambda_b$, $\theta_b = 22.4^\circ$, 恰为闪耀方向与光栅平面法线方向的夹角。若用 $d \sin 2\theta_b = \lambda_b$ 计算, 得到 $\theta_b = 24.8^\circ$, 闪耀方向与光栅平面法线方向的夹角为 49.6° 。

第 5 章 光的双折射

练习 5.1 如图 5.1 所示, 两块相同的冰洲石晶体 A 、 B 前后排列, 强度为 I 的自然光垂直于 A 的表面入射之后依次通过 A 、 B 。 A 、 B 的主截面之间夹角为 α 。求 $\alpha = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ 时由 B 射出的光束的数目和每束光的强度。

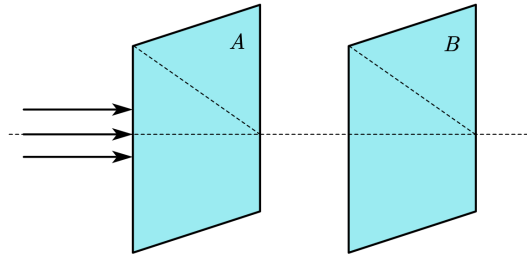


图 5.1

解 $\alpha = 0^\circ$ 时, 出射两束光, $I_o = I_e = \frac{1}{2}I$ 。

$\alpha = 45^\circ$ 时, 从 A 出射的两束光 I_o, I_e 经过 B 后分别变为两束光, 所以共有 4 束光, $I_{oo} = I_{oe} = I_{eo} = I_{ee} = \frac{I}{4}$ ($\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \sin^2 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \cos^2 45^\circ$)。

$\alpha = 90^\circ$ 时, 从 A 出射的 o 光经过 B 变为 e 光, 从 A 出射的 e 光经过 B 变为 o 光, 则 $I_{oo} = I_{ee} = 0, I_{oe} = I_{eo} = \frac{I}{2}$, 故出射两束光, 光强均为 $\frac{I}{2}$ 。

$\alpha = 180^\circ$ 时 (即 A, B 中的光轴方向关于入射面的法线对称), 从 A 出射的两束光经过 B 后又复合为一束光, 非相干叠加后光强为 I (或从能量守恒角度考虑也容易知道出射光强为 I)。

练习 5.2 如图 5.2 所示, 一棱镜由玻璃直角三棱镜 (折射率为 n) 和一个负晶体直角三棱镜 (光轴垂直于图面) 组成。自然光从玻璃一侧垂直入射, 讨论以下几种情况下双折射光束的传播方向: (1) $n = n_o$; (2) $n = n_e$; (3) $n > n_o$; (4) $n_o > n > n_e$ 。

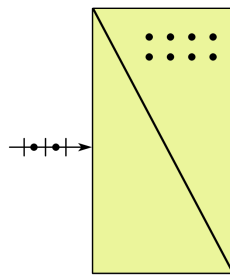


图 5.2

解 (1)(2)(3)(4) 双折射情况分别如图 5.3、5.4、5.5、5.6 所示。

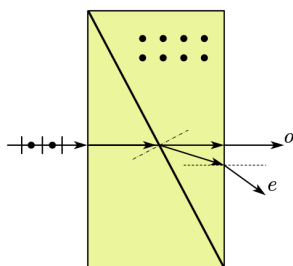


图 5.3

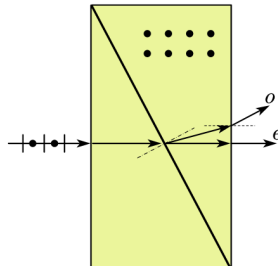


图 5.4

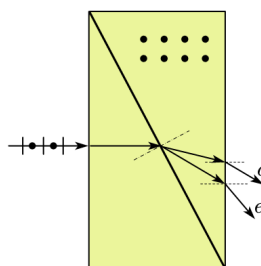


图 5.5

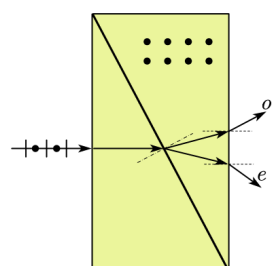


图 5.6

练习 5.3 一束线偏振的钠黄光垂直射入一方解石晶体, 其光矢量的振动方向与晶体的主截面成 20° 角。不考虑界面的反射和介质的吸收, 计算出现双折射的两束光的相对振幅和强度。

解 $A_o = A \sin 20^\circ, A_e = A \cos 20^\circ$, 故 $A_o/A_e = 0.364, I_o/I_e = (A_o/A_e)^2 = 0.132$ 。

练习 5.4 一束钠黄光掠入射到冰的晶体平板上, 平板厚度为 4.2 mm , 其光轴与入射面垂直。求平板另一表面上 o 光与 e 光两出射点的间隔。已知对于钠黄光, 冰的折射率为 $n_o = 1.3090, n_c = 1.3104$ 。

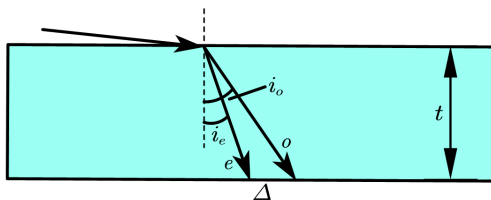


图 5.7

解 如图 5.7, $n_o \sin i_o = n_e \sin i_e = 1$, 则 $\Delta = t(\tan i_o - \tan i_e) = 12.7 \mu\text{m}$ 。

练习 5.5 如图 5.8 所示, 棱镜 $ABCD$ 由 45° 方解石直角三棱镜组成, 棱镜 ABD 的光轴平行于 AD , 棱镜 BCD 的光轴垂直于平面。当光垂直于 AD 入射时, 说明为什么 o 光和 e 光在第二块棱镜中分开, 并在图中画出它们的波面和振动方向。

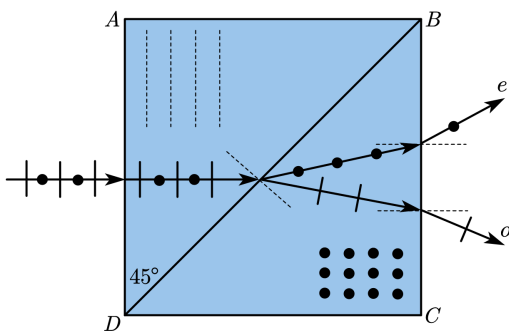


图 5.8

解 由于棱镜 ABD 的光轴在入射面内且平行于界面 AD , 当光线垂直于 AD 入射时, 其传播方向不变, o 光振动垂直于图面, e 光在图面内振动。棱镜 BCD 光轴垂直于图面, 因此在图面内振动的光波是 o 光, 垂直于图面振动的光线为 e 光。

对于垂直图面振动的光, 在 ABD 中为 o 光, 在 BCD 中为 e 光, 当此光线由左向右通过界面 BD 时, 是从光密介质进入光疏介质 (方解石 $n_o > n_e$), 所以折射角大于入射角 (45°)。对于在图面内振动的光, 在 ABD 中为 e 光, 在 BCD 中为 o 光, 当此光线由左向右通过界面 BD 时, 是从光疏介质进入光密介质 ($n_e < n_o$), 所以折射角小于入射角 (45°)。最后通过 CD 界面时, 由于 n_e 和 n_o 都大于空气的折射率 1, 因此两束光的折射光线都将偏离法线。

练习 5.6 可用什么办法区分 $1/2$ 波片和 $1/4$ 波片?

解 让圆偏光透过波片, 再用偏振片检测。若是 $1/4$ 波片, 圆偏光透过会变为线偏光, 转动偏振片会出现消光; 若是 $1/2$ 波片, 圆偏光透过后仍为圆偏光, 转动偏振片不会消光。

练习 5.7 如图 5.9 所示, 在使用激光器发出的平面偏振光的各种测量仪器上, 为避免激光返回激光器的谐振腔, 在激光器输出窗口外放一 $1/4$ 波片, 且其主截面与出射激光的振动面向有 45° 夹角, 说明此波片的作用。

解 激光器发出的线偏振光振动方向与波片主截面成 45° , 当光通过 $1/4$ 波片时, 分解到快轴和慢轴的两个正交分量振幅相等, 产生 $\frac{\pi}{2}$ 的相位差, 形成圆偏振光 (如右旋圆偏振光)。圆偏光被反射后, 由于传播方向反转, 其旋向性改变 (右旋变为左旋)。反射光返回 $1/4$ 波片时再次引入 $\frac{\pi}{2}$ 相位差, 相当于半波片的作用, 将偏振方向旋转 90° 。

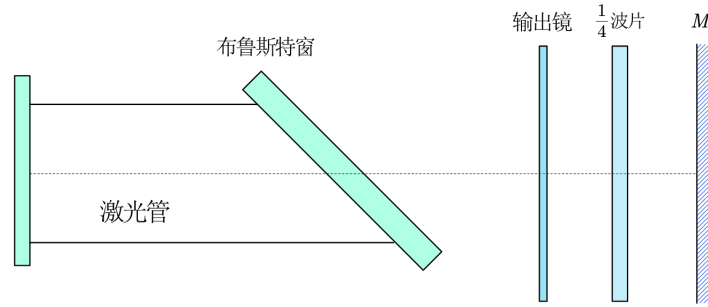


图 5.9

返回谐振腔的光为 s 光，被布鲁斯特窗逐渐反射损耗，不再进入谐振腔。

- 📌 **笔记** 布鲁斯特窗可以通过通过反射损耗实现偏振选择 (只出射 P 光)，起到类似偏振片的作用。
- 📌 **练习 5.8** 如图 5.10 所示，单色光源 S 置于透镜 L 的焦点处， P 为偏振器， K 为此单色光的 $\lambda/4$ 片，其快轴与偏振器的透振方向成 α 角， M 为平面反射镜。已知入射到偏振器的光强为 I_0 ，分析光束经过各个元件后的偏振态，计算返回 L 处的光强 (不计反射、吸收的光强损失)。

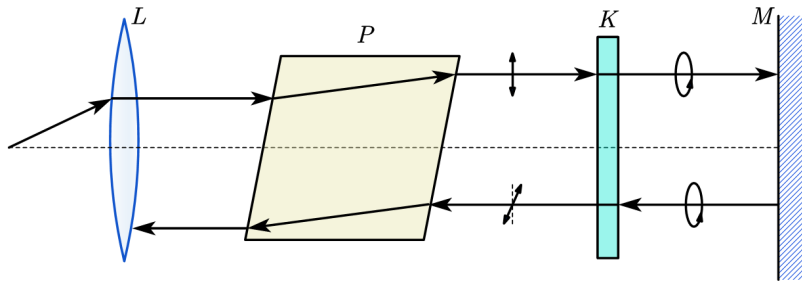


图 5.10

解 S 发出的光经过透镜后成为平行自然光束，经过偏振器后成为线偏振光，再经过 $\lambda/4$ 波片后成为椭圆偏振光。反射后成为反向旋转的椭圆偏振光，再经过波片后成为线偏振光，此时偏振面相对入射光偏振面转过 2α 角。入射光经过偏振器后光强变为 $\frac{1}{2}I_0$ ，经过波片、反射后光强不变，再经过偏振器后光强变为 $\frac{1}{2}I_0 \cos^2 2\alpha$ 。

- 📌 **练习 5.9** 一束波长为 λ 的右旋圆偏振平行光，正入射到一块两表面平行的方解石晶片上，且照射整个晶片，晶片的光轴平行于其表面 (图 5.11 中 y 方向)，晶片的 A 部分为 $\lambda/4$ 片， B 部分为 $\lambda/2$ 片，如图 5.11 所示。
 - (1) 分别指出经过晶片两部分的光的偏振态。
 - (2) 从晶片射出的光如果再经过一个透振方向与 y 成 45° 角的偏振片，在屏上将见到什么现象？
 - (3) 在将偏振片绕光线方向旋转 360° 的过程中，屏上的光强发生什么变化？

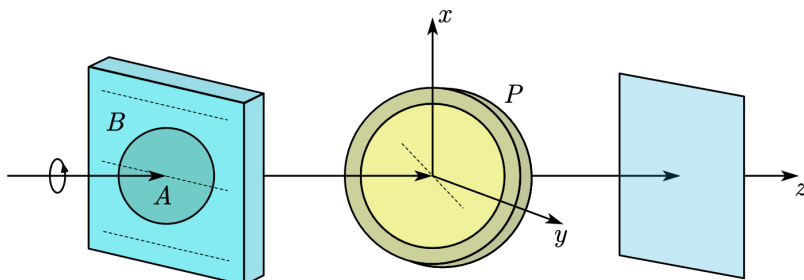


图 5.11

解 (1) A 出射 I,III 象限线偏光； B 出射左旋圆偏光。

(2) 线偏光偏振方向与 P 的透振方向垂直无光通过，圆偏光有一半光透过，因此屏中心有一较暗的圆盘区域。

(3) 屏中心圆盘区域的光强出现两次极大，两次极小，其余区域光强不变。

笔记 原题题干、图片均有错误: A 应为 $\lambda/4$ 片, B 应为 $\lambda/2$ 片, 原图的光轴方向有误。

练习 5.10 一巴比涅补偿器由两个光轴相互垂直的劈形石英组成。如图 5.12 所示, 现有一束极窄的线偏振光正入射, 其偏振方向与 x 轴成 45° 角, 光束偏离补偿器的中心线 x 。

(1) 用 n_o 、 n_e 、 λ 、 L 、 d 、 x 表示出射光线中 x, y 分量间的相对相移。

(2) x 取什么样的值可以得到线偏振光或圆偏振光?

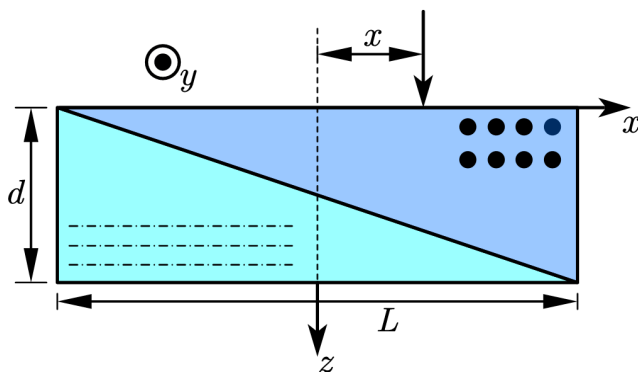


图 5.12

解 (1) 光程差 $\Delta L = \Delta d \cdot \Delta n = \frac{2xd}{L}(n_o - n_e)$, 故 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L = \frac{4\pi xd}{\lambda L}(n_o - n_e)$ 。

(2) $x = \frac{\lambda L}{4\pi d(n_o - n_e)} \Delta\varphi$, 若为线偏光, 则 $\Delta\varphi = k\pi$, $x = k \frac{\lambda L}{4d(n_o - n_e)}$; 若为圆偏光, 则 $\Delta\varphi = (k + \frac{1}{2})\pi$, $x = (k + \frac{1}{2}) \frac{\lambda L}{4d(n_o - n_e)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 。

笔记 原题目“相对位移”应改为“相对相移”。

练习 5.11 两偏振片之间有一 $\lambda/2$ 片, 波片的快轴与 P_1 的透振方向成 38° 角。设波长为 632.8 nm 的光垂直入射到 P_2 上, 要使, P_2 应如何放置? 若晶片的折射率 $n_o = 1.52, n_e = 1.48$, 计算此晶片的最小厚度。

解 线偏光经过 $\lambda/2$ 片后仍为线偏光, 其振动方向与原振动方向关于快轴对称(如图 5.13 所示)。故为使透射光最强, P_2 应与 P_1 的透振方向成 76° (与快轴成 -38°)。

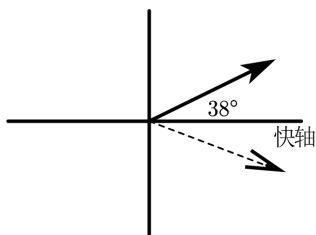


图 5.13

晶片厚度 t 满足 $\Delta n \cdot t = (k + \frac{1}{2})\lambda$, 故 $t_{min} = 7.91\mu m$ 。

练习 5.12 一块厚度为 0.04 mm 的方解石晶片, 光轴与表面平行, 将其插入正交偏振片之间, 且使主截面与第一偏振片的透振方向成 θ ($\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$) 角, 则白光中哪些波长成分不能通过此装置?

解 当从第一个偏振片出射的光经过晶片后偏振方向不变时, 会被第二个偏振片完全消光不能通过, 所以 $\Delta n \cdot t = k\lambda$ (对于方解石, $n_o = 1.658, n_e = 1.486$)。考虑到白光波长范围为 $400nm \sim 700nm$, 可得 $10 \leq k \leq 17$, 对应的波长为 $688.0nm, 655.5nm, 573.3nm, 529.3nm, 491.4nm, 458.7nm, 430.0nm, 404.7nm$ 。

练习 5.13 有哪些方法可以使一线偏振光的振动面旋转 90° ?

解 1、让光先后通过两个偏振片 P_1 和 P_2 。要求 P_2 的透振方向轴垂直于入射线偏光的振动方向, P_1 与入射线偏光的振动方向既不平行也不垂直。

2、让线偏光通过一个 $\lambda/2$ 片, 要求其快轴方向与线偏光振动方向成 45° 。

3、让线偏光通过一个 $\lambda/4$ 片变成圆偏光, 再通过一个透振方向与入射线偏光振动方向垂直的偏振片。

4、利用介质旋光性, 通过特定长度的介质使振动面旋转 90° 。

练习 5.14 如图 5.14 所示, 玻璃片堆 A 由折射率为 n 的玻璃平板组成, 半波片 C 的快轴与 y 轴夹角为 30° , 偏振片 P 的偏振化方向沿 y 轴, 自然光沿水平方向入射。

(1) 要使 A 的反射光为完全线偏振光, 玻璃片堆 A 的倾角 θ 应该是多大?

(2) 若将 A 出射的部分偏振光看成是自然光和线偏振光的叠加, 则经过 C 后线偏振光的振动面有何变化? 说明理由。

(3) 若 A 的透射光中自然光的强度为 I , 线偏振光的强度为 $3I$, 计算从 P 出射的光强。

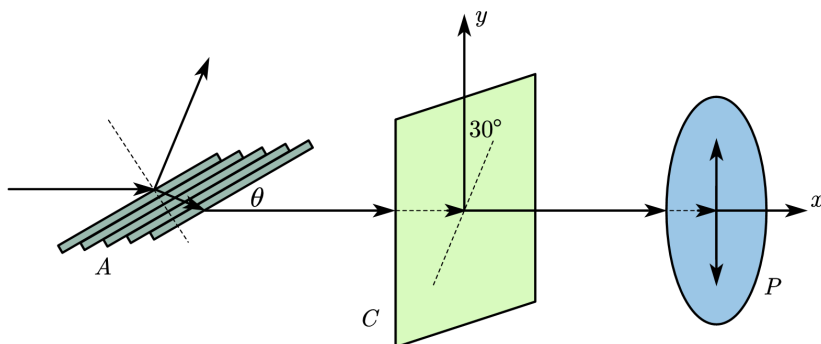


图 5.14

解 (1) 即以布鲁斯特角入射, $\cot \theta = n, \theta = \arctan \frac{1}{n}$ 。

(2) 偏振面与 y 轴平行, 经过半波片 C 后振动面转到与 y 轴成 60° 方向 (与原振动方向关于光轴对称)。

(3) $I_P = \frac{1}{2}(\text{自然光}) + 3I \cos^2 60^\circ (\text{线偏光}) = \frac{5}{4}I$ 。

练习 5.15 在两个透振方向平行的偏振片间放一半波片, 其主截面沿着 P_1 的透振方向向右旋转 27° , 半波片后再放一右旋石英片, 其旋光率为 $a = 18^\circ/\text{mm}$, 单色光正入射到 P_1 。要使在 P_2 后消光, 石英片的最小厚度应是多少?

解 线偏光经过 $\lambda/2$ 片后仍为线偏光, 其振动方向与原振动方向关于主截面对称 (即转动了 $2 \times 27^\circ = 54^\circ$), 所以 $54^\circ + \alpha d = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, d_{\min} = 2\text{mm}$ 。

练习 5.16 厚度为 1mm 的沿垂直于光轴方向切出的石英片放在两主截面平行的尼科耳棱镜之间, 对某一波长的光偏振面旋转 20° , 则当石英晶片的厚度为多少时, 该波长的光将完全消失?

解 偏振面转过 90° 完全消光, 故厚度 $t = t_0 \frac{\varphi}{\varphi_0} = 1\text{mm} \cdot \frac{90^\circ + k \times 180^\circ}{20^\circ} = (4.5 + 9k)\text{mm}, k = 0, 1, 2, \dots$ 。

练习 5.17 一表面垂直于光轴的水晶片恰好可抵消 10cm 长度的浓度为 20% 的麦芽糖溶液对钠光偏振面所引起的旋转。对此波长, 水晶的旋光率为 $\alpha = 21.75^\circ/\text{mm}$, 麦芽糖的比旋光率为 $[\alpha] = 144^\circ/[\text{dm} \cdot (\text{g}/\text{cm}^3)]$, 求此水晶片的厚度。

解 设麦芽糖浓度 ρ , 水晶片厚度 d , 则麦芽糖浓度为 $\frac{\rho}{5}$, 于是 $\alpha d = [\alpha] \cdot \frac{\rho}{5} \cdot L, d = \frac{[\alpha]\rho L}{5\alpha}$, 式中 L 为溶液长度。作为近似, 取 $\rho = 1\text{g}/\text{cm}^3$, 得 $d = 1.32\text{mm}$ 。

第6章 光的吸收、色散、散射

练习 6.1 一均匀介质的吸收系数为 $a = 0.32/cm$, 求出时光强变为入射光强 0.1、0.2、0.5 倍时介质的厚度。

解 $\frac{I}{I_0} = e^{-\alpha L}$, $L = -\frac{1}{\alpha} \ln \frac{I}{I_0}$, 故 $L = 7.2cm, 5.0cm, 2.17cm$ 。

练习 6.2 设海水的吸收系数为 $a = 2/m$, 而人眼能感受到的光强为太阳光强的 10^{-18} 。试问在海面下多深处人眼还能看见光?

解 $\frac{I}{I_0} = e^{-\alpha L}$, $L = -\frac{1}{\alpha} \ln \frac{I}{I_0}$, 故在海面下 20.7m 还能看见光。

练习 6.3 证明当介质厚度 $L = 1 \text{ cm}$ 而吸收系数又很小时, 吸收率 $G \approx (I_0 - I)/I_0$ 在数值上就等于吸收系数本身。

解 $\alpha \ll 1$, $(I_0 - I)/I_0 = 1 - e^{-\alpha} = \alpha + O(\alpha^2) \approx \alpha$ 。

练习 6.4 什么是光的色散现象? 何谓正常色散和反常色散? 什么情况下出现反常色散?

解 色散是复色光分解为单色光而形成光谱的现象。当白光通过三棱镜时, 由于不同频率的光折射率不同会分解成不同颜色的光。

正常色散情况指介质的折射率随着光的频率增加而增大, 而反常色散是指介质的折射率随着光的频率增加而减小。

当光的频率接近介质的吸收频率时, 就会出现反常色散。

练习 6.5 根据物质的正常色散曲线, 试回答:

(1) 在三棱镜色散现象中, 何种颜色的光偏折得最厉害?

(2) 可见光(波长范围 4000 7000 Å) 入射三棱镜上产生色散现象, 哪个波段的光偏折的角度变化较大?

解 (1) 紫光的波长最短, 因此其折射率最高, 偏折角度也最大。

(2) 观察色散曲线, 蓝光波段 $\frac{dn}{d\lambda}$ 较大(折射率越大, 色散曲线越陡), 因此蓝光波段的偏折角度变化较大。

练习 6.6 为什么点燃的香烟冒出的烟是淡蓝色的, 而吸烟者口中吐出的烟却呈白色?

解 香烟自燃冒出的烟的颗粒大小均匀, 线度比波长小, 发生瑞利散射 ($I \propto \frac{1}{\lambda^4}$), 蓝紫光散射的多, 所以我们看到的点着的烟是淡蓝色的。

而从嘴里吐出的烟中含有水蒸气, 使得颗粒互相聚集, 发生米氏散射, 散射光强与波长的关系不大, 所以看到呈白色。

练习 6.7 既然眼睛对黄绿光最为敏感, 为什么危险信号要用红色?

解 红光波长较长, 散射较少(散射强度 $\propto \frac{1}{\lambda^4}$), 在雾、烟、灰尘或远距离传播时比其他颜色的光更显眼, 保持可见性。

笔记 同样的道理, 日出(落)时太阳光斜射, 穿过的大气层较厚, 短波成分被大气分子散射较多, 应此看到的太阳呈橘红色。而我们平时看到天空呈蔚蓝色实际上是因为大气成分对太阳光的短波成分(蓝光)的散射较多。

练习 6.8 一块白色石头沉于水池底, 由水面看石头, 常见其边缘有蓝色与橙色条纹。为什么? 蓝色在外圈还是内圈?

解 这是因为光的色散: 波长较短的光(蓝光)折射率较大, 波长较长的光(橙光)折射率较小, 所以蓝光和橙光在通过水时的折射角度不同。

从水面看, 由于蓝光的折射角度较大, 它会在石头边缘的外圈形成蓝色条纹。而由于橙光的折射角度较小, 它会在石头边缘的内圈形成橙色条纹。

练习 6.9 用 $A = 1.53974$, $B = 4.6528 \times 10^3 nm^2$ 的玻璃做成 50° 棱角的棱镜, 当其对 550.0 nm 的入射光处于最小偏向角位置时, 求其角色散率是多少 (rad/nm)。

解 如图, $\delta_m = i'_1 - i'_2 + i_1 - i_2$, $\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{di_1}{d\lambda} + \frac{di'_1}{d\lambda} - \frac{d(i_2+i'_2)}{d\lambda} = \frac{di'_1}{d\lambda}$ (入射角 i_1 不变, $i_2 + i'_2 = \alpha$)。

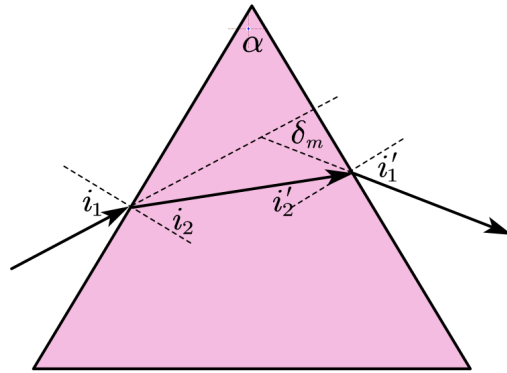


图 6.1

对 $n \sin i'_2 = \sin i'_1$, $\sin i_1 = n \sin i_2$ 两边对 λ 求导有 $\frac{dn}{d\lambda} \sin i'_2 + n \cos i'_2 = \cos i'_1 \frac{di'_1}{d\lambda}$, $\frac{dn}{d\lambda} \sin i_2 + n \cos i_2 \frac{di_2}{d\lambda} = 0$, 再结合 $\frac{di_2}{d\lambda} + \frac{di'_2}{d\lambda} = 0$ 和最小偏向角时 $i_2 = i'_2 = \frac{\alpha}{2}$ 可得 $\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \frac{dn}{d\lambda}$, 代入数据 ($n = A + \frac{B}{\lambda^2}$, $\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}$) 可得角色散率为 $-6.27 \times 10^{-5} \text{rad/nm}$ 。

练习 6.10 某种玻璃对不同波长的光折射率不同。 $\lambda_1 = 400.0 \text{ nm}$ 时, $n_1 = 1.63$; $\lambda_2 = 500.0 \text{ nm}$ 时, $n_2 = 1.58$ 。假定柯西公式此时适用, 求此种玻璃在 600.0 nm 时的 $dn/d\lambda$ 。

解 由 $n_1 = A + \frac{B}{\lambda_1^2}$, $n_2 = A + \frac{B}{\lambda_2^2}$ 得 $B = 2.22 \times 10^4 \text{ nm}^2$, 故 $dn/d\lambda = -2B/\lambda^3 = -2.06 \times 10^{-4} \text{ nm}^{-1}$ 。

练习 6.11 一块玻璃对波长为 0.070 nm 的 X 射线的折射率比 1 小 1.600×10^{-6} , 求 X 射线能在此玻璃的外表面发生全反射 (全外反射) 的最大掠射角。

解 掠射角 α 为入射角的余角, 由全反射条件 $\cos \alpha = n$ 可得 $\alpha = 0.1^\circ$ 。

练习 6.12 同时考虑介质对光的吸收和散射时, 吸收系数 $\alpha = \alpha_0 + \alpha_s$, 其中 α_0 是真正的吸收系数, 而 α_s 为散射系数, 若光经过一定厚度的某种介质后, 只有 20% 的光强通过, 已知该介质的散射系数为真正吸收系数的 1/2, 若消除散射, 透射光强可增加多少?

解 $e^{-\frac{3\alpha L}{2}} = 0.2$, 故 $\frac{I'}{I_0} = e^{-\alpha L} = 0.2^{\frac{2}{3}} = 0.34$, 可增加 71%。

练习 6.13 计算波长为 253.6 nm 和 546.1 nm 的两条谱线的瑞利散射强度之比。

解 $I \propto \frac{1}{\lambda^4}$, 故 $\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{546.1}{253.6}\right)^4 = 21.5$ 。

第7章 光的量子性

练习 7.1 黑体在某一温度时总辐射本领为 6.8 W/cm^2 , 试求这时辐射本领具有最大值的波长 λ_m 。

解 由总辐射本领 $R = \sigma T^4$ 可得 $T = 1046.5 \text{ K}$, 由维恩位移定律 $T\lambda_m = b$ 可得 $\lambda_m = 2.77 \mu\text{m}$ 。

笔记 书上 339 页把 σ 的值印错了, 憋笑.jpg。

练习 7.2 用辐射温度计测得从一个炉子的小孔射出的热辐射的总辐射本领为 22.8 W/cm^2 , 计算炉子的内部温度。

解 由总辐射本领 $R = \sigma T^4$ 可得 $T = 1416 \text{ K}$ 。

练习 7.3 如果我们把恒星表面近似看作一个黑体, 则通过测量恒星辐射光谱中与辐射本领最大值相应的波长 λ_m , 就可以估计恒星表面的温度。若已知太阳的 $\lambda_m = 510 \text{ nm}$, 北极星的 $\lambda_m = 350 \text{ nm}$, 试求它们的表面温度。

解 由 $T\lambda_m = b$, 可得太阳表面温度 5680 K , 北极星表面温度 8277 K 。

练习 7.4 黑体在加热过程中其最大辐射本领的波长由 $0.6 \mu\text{m}$ 变化到 $0.4 \mu\text{m}$, 问总辐射本领增加了几倍。

解 温度与最大辐射本领波长成反比, 总辐射本领与温度四次方成正比, 于是总辐射本领为原来的 $(\frac{\lambda_m}{\lambda'_m})^4 = 5$ 倍。

练习 7.5 热核爆炸中火球的瞬时温度可达到 10^7 K , 求: (1) 辐射最强的波长; (2) 这种波长的光子能量。

解 (1) $\lambda_m = \frac{b}{T} = 2.897 \text{ \AA}$ 。(2) $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 4.28 \times 10^3 \text{ eV}$ 。

练习 7.6 试从普朗克黑体辐射公式的频率形式导出它的波长形式: $r_0(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$ 。

解 $|r_0(\nu, T)d\nu| = |r_0(\lambda, T)d\lambda|$, 而 $\nu = \frac{c}{\lambda}$, $d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda$, $r_0(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$, 于是 $r_0(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$ 。

练习 7.7 在温度 $t = 0^\circ\text{C}$ 时, 空腔中充满平衡热辐射, 试确定空腔中 1 cm^3 体积内的光子总数。(提示: $\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2.405$)

解 能量密度为 $\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$, 位于 $(\nu, \nu + d\nu)$ 的光子数密度 $dn = \frac{\rho(\nu, T)d\nu}{h\nu}$, 于是光子密度为 $n = \int dn = \int_0^{+\infty} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu = \frac{8\pi k^3 T^3}{h^3 c^3} \cdot 2.405 = 1.72 \times 10^{14} \text{ m}^{-3}$, 于是 1 cm^3 体积内的光子总数为 $N = nV = 1.72 \times 10^8$ 。

练习 7.8 试分别用焦耳和电子伏特为单位表示下列各种光子的能量: (1) 无线电短波, $\lambda = 10 \text{ m}$ 。(2) 红外光, $\lambda = 2.5 \mu\text{m}$ 。(3) 可见光, $\lambda = 500 \text{ nm}$ 。(4) 紫外光, $\lambda = 280 \text{ nm}$ 。(5) X 射线, $\lambda = 0.1 \text{ nm}$ 。

解 $E = h\nu$, 于是 (1) $1.99 \times 10^{-26} \text{ J}$, $1.24 \times 10^{-7} \text{ eV}$; (2) $7.95 \times 10^{-20} \text{ J}$, 0.50 eV ; (3) $3.97 \times 10^{-19} \text{ J}$, 2.48 eV ; (4) $7.1 \times 10^{-19} \text{ J}$, 4.43 eV ; (5) $1.99 \times 10^{-15} \text{ J}$, $1.24 \times 10^4 \text{ eV}$ 。

练习 7.9 一个频率为 $6 \times 10^{14} \text{ Hz}$ 的光源, 其发射功率为 10 W , 则它一秒钟内能发射多少光子?

解 $\frac{dN}{dt} = P/h\nu = 2.5 \times 10^{19}$

练习 7.10 当一频率为 ν 、单位体积中有 N 个光子的单色平面波以入射角 i 入射到真空中一平面上时, 试分下列两种情况给出它施加于此表面的辐射压力的表示式: (1) 表面是黑体 (对光全部吸收); (2) 表面按反射率 R 做镜面反射。

解 光子动量为 $p = h\nu/c$, 光子在单位时间单位面积垂直于平面方向的动量变化量为 $Npc \cos i (1 + R)$, 黑体可视作 $R = 0$, 于是 (1) $\frac{dF}{dS} = Nh\nu \cos i$, (2) $\frac{dF}{dS} = Nh\nu \cos i (1 + R)$ 。

练习 7.11 已知从铯表面发射出的光电子的最大动能为 2.0 eV , 铯的脱出功为 1.9 eV , 求入射光的波长。

解 $h\frac{c}{\lambda} = E_k + W_0$, $\lambda = 317.9 \text{ nm}$ 。

练习 7.12 已知钾的光电效应红限 $\lambda_0 = 5.5 \times 10^{-5} \text{cm}$, 求:

(1) 钾的脱出功。

(2) 在波长 $\lambda = 4.8 \times 10^{-5} \text{cm}$ 的可见光照射下钾的遏止电压。

解 (1) $W_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = 2.25 \text{eV}$ 。

(2) $eU = hc(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}), U = 0.33 \text{V}$ 。

练习 7.13 波长为 200nm 的光照射到铝表面上, 铝的脱出功为 4.2eV 。试问:

(1) 铝的截止波长是多少?

(2) 光电子的最大动能为多少?

(3) 光电子的最小动能为多少?

(4) 遏止电压为多大?

(5) 如果入射光强为 2.0W/m^2 , 阴极面积为 1cm^2 , 光束垂直照射在阴极上, 可能产生的最大饱和电流是多少?

解 (1) $\lambda_0 = \frac{hc}{W_0} = 295 \text{nm}$ 。

(2) $E_k = \frac{hc}{\lambda} - W_0 = 2.0 \text{eV}$ 。

(3) 从表面逸出的光子初动能最大(脱出功最小), 从金属内部逸出的电子初动能会减小, 最小初动能应接近于 0。

(4) $eU = \frac{hc}{\lambda} - W_0, U = 2.0 \text{V}$ 。

(5) $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dNe}{dt} = \frac{dE}{dt dS} \cdot \frac{S}{h\nu} \cdot e = 3.23 \times 10^{-5} \text{A}$ 。

第8章 激光基础

练习 8.1 为使氦氖激光器的相干长度达到 1km, 它的单色性 $\Delta\lambda/\lambda$ 应是多少?

解 $L_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}, \Delta\lambda/\lambda = \frac{\lambda}{L_c} = 6.33 \times 10^{-10}$ 。

练习 8.2 (1) 一质地均匀的材料对光的吸收为 0.01mm^{-1} , 光通过 10 cm 长的该材料后, 出射光强为入射光强的百分之几?

(2) 一光束通过长度为 1 m 的均匀激活的工作物质, 如果出射光强是入射光强的两倍, 试求该物质的增益系数。

解 (1) 为入射光强的 $e^{-\alpha L} = 36.8\%$ 。(2) $e^{zL} = 2, z = 0.693\text{m}^{-1}$ 。

练习 8.3 如果激光器和微波激励器分别在 $\lambda = 10\mu\text{m}, \lambda = 5 \times 10^{-1}\mu\text{m}$ 和 $\nu = 3000\text{MHz}$ 输出 1 W 连续功率, 每秒钟从激光上能级向下能级跃迁的粒子数是多少?

解 $P = \frac{dN}{dt} h\nu = \frac{dN}{dt} h\frac{c}{\lambda}, \lambda = 10\mu\text{m}, \frac{dN}{dt} = 5 \times 10^{19}\text{s}^{-1}, \lambda = 5 \times 10^{-1}\mu\text{m}, \frac{dN}{dt} = 2.5 \times 10^{18}\text{s}^{-1}, \nu = 3000\text{MHz}, \frac{dN}{dt} = 5 \times 10^{23}\text{s}^{-1}$ 。

练习 8.4 设一对激光能级为 E_2 和 E_1 ($g_1 = g_2$), 两能级间的跃迁频率为 ν (相应的波长为 λ), 能级上的粒子数密度分别为 N_2 和 N_1 , 试求:

(1) $\nu = 3000\text{MHz}, T = 300\text{K}$ 时, N_2/N_1 的值。

(2) $\lambda = 1\mu\text{m}, T = 300\text{K}$ 时, N_2/N_1 的值。

(3) $\lambda = 1\mu\text{m}, N_2/N_1 = 0.1$ 时, T 的值。

解 (1) $\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2 e^{-\frac{E_2}{kT}}}{g_1 e^{-\frac{E_1}{kT}}} = e^{-\frac{h\nu}{kT}} = 0.9995$ 。

(2) $\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{h\nu}{kT}} = e^{-\frac{hc}{k\lambda T}} = 1.5 \times 10^{-21}$ 。

(3) $\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{hc}{k\lambda T}}, T = 6.25 \times 10^3\text{K}$ 。

笔记 g_1, g_2 指简并度, 即相同能量下不同量子态的个数。

练习 8.5 假定工作物质的折射率 $n = 1.73$, 试问 ν 为多大时 $A_{21}/B_{21} = 1\text{J} \cdot \text{S}/\text{m}^3$ 。这是什么光范围?

解 $A_{21}/B_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}, c = \frac{c_0}{n}$, 于是 $\nu = 6.79 \times 10^{18}\text{Hz}$, 为 X 射线。

练习 8.6 如果工作物质的某一跃迁波长为 100nm 的远紫外光自发跃迁几率 A_{10} 等于 10^6s^{-1} , 试问: (1) 该跃迁的受激辐射爱因斯坦系数 B_{10} 是多少? (2) 为使受激跃迁概率比自发跃迁概率大 3 倍, 腔内的单色能量密度 ρ 应为多少?

解 (1) $A_{10}/B_{10} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}, B_{10} = 6 \times 10^{16}\text{m}^3\text{s}^{-2}\text{J}^{-1}$ 。

(2) $\frac{B_{10}\rho}{A_{10}} = 4, \rho = 6.66 \times 10^{-11}\text{J} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ 。

练习 8.7 由两个全反射镜组成的稳定光学谐振腔, 腔长为 0.5 m, 腔内振荡光的中心波长为 632.8 nm, 试求该光的频带宽度 $\Delta\nu$ 的近似值。

解 $\lambda = \frac{c}{\nu}, \Delta\lambda = \left| -\frac{c}{\nu^2} \Delta\nu \right| = \lambda^2 \frac{\Delta\nu}{c} = \frac{\lambda^2}{2nL} = 4 \times 10^{-13}\text{m}$ 。

练习 8.8 红宝石激光器输出 $\lambda = 694.3\text{nm}$ 的平面波 (一种合适的近似)。

(1) 定性描述这种激光器的工作原理, 并粗略地作出有关的原子能级图。

(2) 当激光通过折射率 $n = 4/3$ 的水时, 波长和频率各为多少?

(3) 当激光以 45° 倾角斜入射于水中时, 其反射光中每一种偏振分量各有多少比例?

(4) 平面波在水中传播时, 电场、磁场振幅各为多少? 设设在水中的时间平均功为 $100\text{mW}/\text{cm}^2$ 。

(5) 激光在真空中的相干长度为多少 (即光保持相干性到 $\lambda/4$ 时传播的距离)? 设激光带宽为 $\Delta\nu = 30\text{MHz}$ 。

解 (1) 红宝石激光器的核心部件是由掺铬的氧化铝晶体 (红宝石) 制成的激光介质棒。当红宝石晶体受到氙灯等外部能量源 (激励能源) 的激发时, 晶体中的铬离子 (工作物质) 吸收光子能

量，从基态 (E_1) 跃迁到高能态 (E_3)。由于 E_3 能级的寿命很短，粒子会迅速通过无辐射跃迁到达亚稳态 (E_2)。(E_2) 能级的寿命较长，粒子在此能级上积累，形成粒子数反转。当满足阈值条件时，受激辐射的光子在谐振腔内不断被放大，最终形成激光输出。

能级图如下：

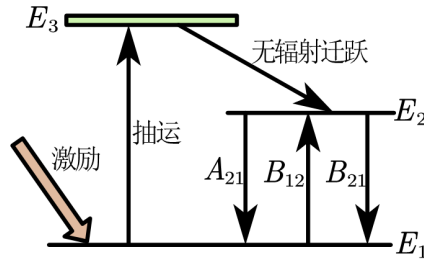


图 8.1

(2) 频率 $\nu = \frac{c}{\lambda} = 4.32 \times 10^{14} \text{Hz}$ 不变，波长变为 $\lambda' = \lambda/n = 520.7 \text{nm}$ 。

(3) s 光反射率 $r_s = \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2}$ ，p 光反射率 $r_p = \frac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2}$ 。红宝石激光器一般发出线偏振光，但题目未告知入射光 s 光、p 光的比例，所以无法计算反射光各偏振分量的比例。

(4) $\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0 \mu_r} E_0 B_0 = \frac{1}{2\mu_0 \mu_r} n/c E_0^2 = \frac{1}{2} n c \epsilon_0 E_0^2$ ($n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}, \mu_r = 1$)。带入数据有 $E_0 = 752 \text{V/m}$, $H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} E_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n E_0 = 2.66 \text{A/m}$ 。

(5) 光传播一整个 L_c 相位差一个波长，故相差 $\lambda/4$ 时传播的距离为 $L_c/4 = \frac{c}{4\Delta\nu} = 2.5 \text{m}$ 。

练习 8.9 如图 8.2 所示，一台染料激光器由两个近乎理想的反射镜 M 以及增益介质 (其带宽为 $\Delta\nu$ ，中心频率为 ν_0) 构成。

(1) 设光线在腔内往返一次的时间为 τ ，问此光腔允许激光器工作的频率是多少，并用 τ 表示。

(2) 假定激光器运转于增益带宽内的一切可能腔模，并假设这些模的相位是稳定的，没有相位的起伏，设法将这些模的相位调整得使它们在 $t = 0$ 时刻具有相同的相位，则激光器的输出将如何随时间变化？

(3) 若要产生脉宽为 1ps (10^{-12}s) 的脉冲 (波长为 600nm)，需要多大带宽 $\Delta\nu$ ？应当包括多少激光腔模？(取腔长 $l = 1.5 \text{m}$)

解

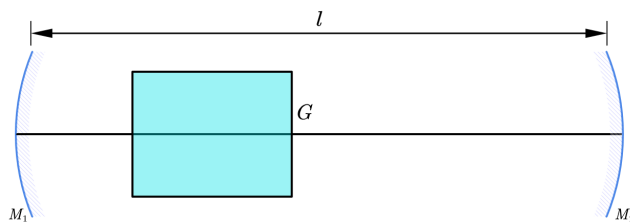


图 8.2

(1) $\omega\tau = 2\pi n, \nu = \omega/2\pi = n/\tau, n = 1, 2, 3, \dots$

(2) 由于这些模的相位在 $t = 0$ 时刻相同，所以它们的电场在 $t = 0$ 时刻相加，形成一个非常强的脉冲。随着时间的推移，这些模的相位会逐渐不同，导致它们的电场相互抵消，直到下一个 τ 时刻，它们的相位再次相同，形成另一个强脉冲。因此，激光器的输出将是一个周期为 τ 的脉冲序列。

(2) 脉宽 Δt 与带宽 $\Delta\nu$ 满足 $\Delta t \Delta\nu \approx 1$ ，于是 $\Delta\nu = 1 \text{THz}$ (10^{12}Hz)，包含 $N = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_L} = \frac{2nl}{c} \Delta\nu = 10^4$ 个激光腔模。

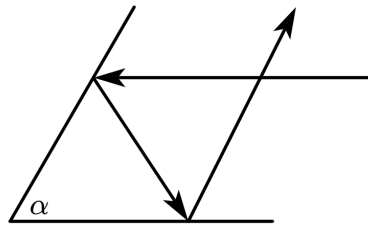
第9章 2024 秋光学 B 半期考试 (回忆版)

一、判断题 (每题 2 分)。

1. 反射定律是光程取极小值的结果。
2. 望远镜的线性放大率是-1。
3. 考虑像差，瞳孔直径越大，视网膜上成像质量越差。

二、填空题 (每题 2 分)。

1. 如图，光线经两次反射后出射，则入射光线与出射光线夹角为 _____。



2. 一透镜 $f = 100\text{mm}$ ，则其光焦度为 _____。位于无穷远处的物体经 $f = 200\text{mm}$ 的薄透镜成像，像距为 _____。

3. 人眼自然放松时，距眼 0.5 米处的物体恰好成像在视网膜上，则此人眼睛度数为 _____，他需要佩戴焦距 $f =$ _____ 的透镜。

4. 与光轴成 30° 的光线经过 $f = 3\text{mm}$ 的薄透镜后与光轴夹角变为 60° ，则光线拐点到光轴距离为 _____，物像距离为 _____。

5. 光线传输矩阵 (ABCD 矩阵) 中 A、B、C、D 分别代表 _____、_____、_____、_____。

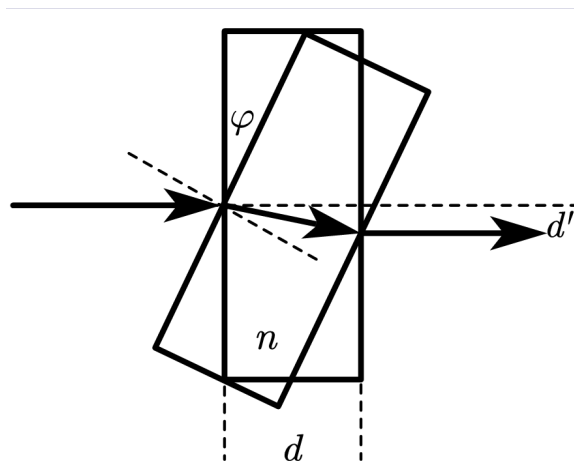
6. 显微镜物镜焦距为 32mm ，光学筒长为 160mm ，明视距离 254mm ，若目镜是 $10\times$ 的，则物镜放大率为 _____，总放大倍数为 _____。

7. 人眼中，_____ 对光线的聚焦能力最强。人眼可以看见的光亮度差异非常大，使人眼有非常大的感光范围的是 _____。

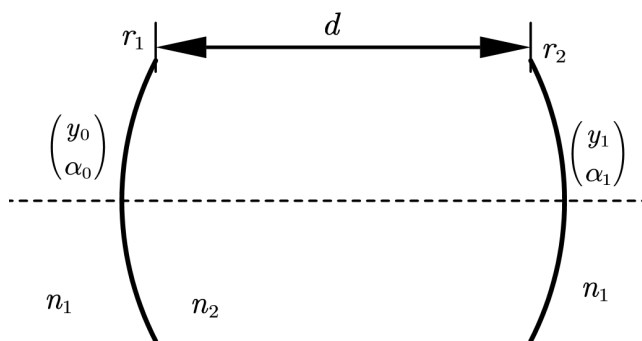
三、大题 (每题 10 分)。

1. 解释费马原理，并用费马原理推导反射定律与折射定律。

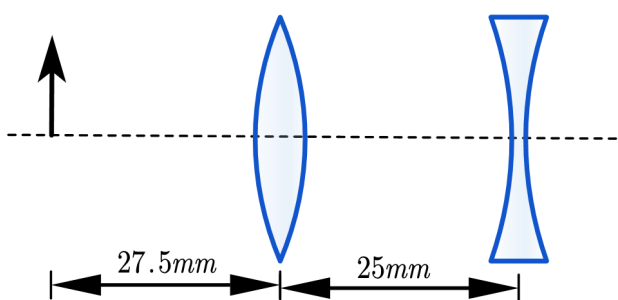
2. 如图，将玻璃砖 (折射率 n) 旋转角度 φ ，则出射光线与入射光线之间的距离 d' 为?



3. 如图， $d \gg r_1, r_2$ ，试写出厚透镜的光线变换矩阵 (不需要合并矩阵)。



4. 如图, 凸透镜焦距 $f_1 = 10\text{mm}$, 凹透镜焦距 $f_2 = -20\text{mm}$, 试用光学矩阵分析此光学系统, 并求 (1) 最终成像位置 (2) 系统的线性放大率。



解答 (仅供参考):

一、判断题: 1. 对, 2. 错, 3. 对。

二、填空题: 1. 2α , 2. 10D; 200mm, 3. -200 度 (近视 200 度); -500mm(人眼处在放松状态时, 无限远物体 (而不是明视距离处物体!) 正好成像在视网膜上), 4. $4\sqrt{3}(6.93)$ mm; 16mm, 5. 横向放大率、成像条件、光焦度、角度放大率, 6. -5; 50, 7. 角膜; 感光细胞。

三、大题:

1. 略 (注意费马原理光程取极值而不是极小值)。

2. $d' = d \sin \varphi \left(1 - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}\right)$ (不要被图误导了)。

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_1 r_2} & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 r_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}.$$

4. (1) 最终成像位置为凹透镜左侧 6.34mm , (2) 系统的线性放大率为 $-\frac{16}{41}$ 。