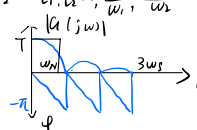


2.5 离散傅里叶变换公式 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{\sin \omega(t-nT)}{\omega(t-nT)}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$ 是信号的上限频率, 本质是卷积。

2.3.3 采样周期选取: T 越小, 损失越小, 恢复精度越高, 但增大运算量, 加速执行机构磨损。 T 过大, 不能及时反映连续信号规律, 控制不及时导致动态品质恶化。
 方法: ① 直接按照工程经验取。 ② 采样频率 ω_s 选为闭环系统频率的 5~10 倍。 ③ ω_s 取开环系统穿越频率 ω_c 的 5~10 倍。 $|G(j\omega_c)|=1$ ④ 按开环传递函数取。
 $G(s)$ 的分母中有 $s^m, T, s+1, (s+\frac{1}{T})^2 + \omega_s^2$, 取 $T = \frac{1}{4} \min(T_1, T_2, \dots, T_n, \frac{2\pi}{\omega_1}, \frac{2\pi}{\omega_2}, \dots)$ ⑤ 按开环阶跃上升时间取 $T = \frac{t_r}{2-4}$, t_r 为第一次到达稳值时间, 或稳值的 63.2% 时间 (欠阻尼系统)



2.4 零阶保持器特性: $f(nT+at) = f(nT)$ $0 \leq at < T$, 伯德图, 是低通, 但仍有高频, 可设置低通滤波器, 有较大负相移, 最大达 78° , 闭环稳定性下降, 可提高 ω_s 来改善。

2.5 Z 变换
 $[F_1^*(s) F_2^*(s)]^* = F_1^*(s) F_2^*(s)$ $Z \triangleq e^{Ts}$, $F(z) = F^*(s) |_{s=\frac{\ln z}{T}} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}$

2.6.1 Z 变换基本性质: ① $Z[f(t-kT)] = z^{-k} F(z)$, $k > 0$ ② $Z[f(t+kT)] = z^k F(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f(mT) z^{-m}$, $k > 0$ ③ $Z[e^{at} f(t)] = F(e^{aT} z)$ ④ 初值定理: 若 $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ 存在, 则 $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} z F(z)$ ⑤ 终值定理: 若 $(z-1)F(z)$ 在单位圆上和外部无极点, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$ ⑥ $Z[f+g] = Z[f] + Z[g]$ ⑦ 若 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dF(z)}{dz}$ 存在, 则 $Z[\frac{t f(t)}{T}] = -Z[F(z)] = -Z[\frac{dF(z)}{dz}]$ ⑧ 若 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{d^2 F(z)}{dz^2}$ 存在, 则 $Z[\frac{t^2 f(t)}{T^2}] = Z[F(z)] - 2Z[\frac{dF(z)}{dz}] + Z[\frac{d^2 F(z)}{dz^2}]$

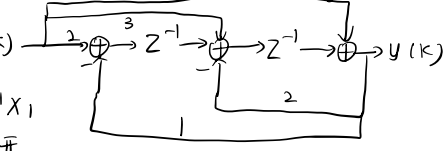
2.6.2 Z 变换求法: ① 定义式求法 ② Z 变换定理求法 ③ 部分分式展开法 ④ 留数计算法: $F(z) = Z[F(s)] = \sum_{p_i} \text{Res}[F(p) \frac{1}{1-e^{pT} z^{-1}}]_{p=p_i}$

2.6.3 Z 反变换
 ① 长除法, 幂级数展开 ② 部分分式展开法: 若 $F(z) = A_0 + \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} + \frac{A_3}{z-p_3}$, 则 $f(k) = A_0 \delta(k) + A_1 (k-1) p_1^{k-1} + A_2 p_2^{k-1} + A_3 p_3^{k-1}$
 ③ 反演积分法: $f(k) = \sum_{p_i} \text{Res}[F(z) z^{k-1}]_{z=p_i} = \sum_{p_i} \frac{1}{(m_i-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m_i-1} [(z-p_i)^{m_i} F(z) z^{k-1}]_{z=p_i}$ $k > 0$, $F(z)$ 中无 z 公因子时 $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
 $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \begin{cases} A_0 & k=0 \\ \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) & n > m \\ 0 & n < m \end{cases}$

2.7.1 修正 Z 变换 $F(z, m) = z^{-1} Z[F(s) e^{mTs}] = \sum_{p_i} \text{Res}[F(p) \frac{e^{mTp}}{z-e^{pT}}]_{p=p_i}$, $0 \leq m < 1$

3.1.2 差分方程: 前向差分描述非零初始值, 后向差分描述全零初始值。求解方法: ① 递推法 ② Z 变换法

3.2 Z 传函: 零初始条件下 $Y(z)$ 与 $X(z)$ 之比。
 由差分方程求状态空间表达式: $y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = u(k+2) + 3u(k+1) + 2u(k) \Rightarrow y(k) + 2y(k-1) + y(k-2) = u(k) + 3u(k-1) + 2u(k-2)$
 $Y(z) = U(z) + z^{-1}[3U(z) - 2Y(z) + z^{-1}(2U(z) - Y(z))]$ $\Rightarrow U(z) \xrightarrow{1} \oplus \xrightarrow{z^{-1}} \oplus \xrightarrow{2} \oplus \xrightarrow{1} Y(z)$ 每个 z^{-1} 之后取为 X



由 Z 传函求状态空间方程: 1. 直接实现法: $W(z)$ 写成关于 z^{-1} 的函数, $U(z)$ 除以 $W(z)$ 分母设为 $Q(z)$, $X_1(z) = z^{-1} Q(z)$, $X_2 = z^{-1} X_1$
 2. 嵌套实现法: 同差分方程实现。 3. 串联实现法: 部分分式展开。
 4. 串并联实现法: $W(z) = b_0 + \frac{d(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{n-1})}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)}$, 取 $X_1(z) = \frac{d}{z-p_1} U(z)$, $X_2 = \frac{z-z_1}{z-p_2} X_1(z)$, \dots , $X_n(z) = \frac{z-z_{n-1}}{z-p_n} X_{n-1}(z)$

由状态空间方程求 Z 传递函数: $W(z) = [C(zI-A)^{-1}B + d]$ 。求解离散状态方程: 1. 递推法, 一项一项算。 2. Z 变换法: $X(z) = (zI-A)^{-1} z X_0 + (zI-A)^{-1} B U(z)$

4.1 稳定性分析: 1. W 变换与劳斯判据 $W = \frac{z-1}{z+1}$, $z = \frac{1+W}{1-W}$ 劳斯判据: 闭环特征方程为 $F(w) = a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \dots + a_0$ $(zI-A)^{-1} B U(z)$
 则劳斯表头 W^n a_n a_{n-2} a_{n-4} \dots $b_1 = -\frac{1}{a_n} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$ 稳定的充要条件: 第一列系数同号且不为 0。第一列变号次数等于正实部根数目。
 W^{n-1} a_{n-1} a_{n-3} a_{n-5} \dots $b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$
 W^{n-2} b_1 b_3 b_5 \dots $c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-4} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$
 W^{n-3} c_1 c_3 c_5 \dots
 \vdots
 W^0 b_n

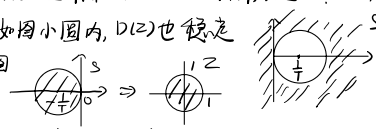
2. 雷尔判据: $F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ ($a_0 > 0$), 计算雷尔阵列 z^0
 设第一列中大于 0 的元素个数 n_p , 小于 0 个数 n_n , 则 n_p 为单位圆内根个数, n_n 为外面个数。若某行第一个数为 0, 则用 $(1+\epsilon)z^i$ 取代 $F(z)$ 中的 z^i , $i=1, 2, \dots, n$
 相当于把单位圆搬到 $1+\epsilon$, 计算时分子的 ϵ -项和分母中 ϵ^2 项全舍, 计算出阵列后, 令 $\epsilon > 0$ 且很小, 记 n_p^+ , n_n^+ , 令 $\epsilon > 0$ 且 $|\epsilon|$ 很小, 记 n_p^-, n_n^- , 则单位圆内根个数 n_p^+ , 单位圆外根个数 n_n^+ , 单位圆上根数 $n_p^+ - n_p^- = n_n^- - n_n^+$

3. M-S-C 判据: $F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ ($a_0 > 0$), 则 $F(z)$ 根全位于单位圆内的充要条件是下列都成立: ① $F(1) > 0$ ② $(-1)^n F(-1) > 0$ ③ $|a_j| < 1$ $j=0, 1, \dots, n-2$
 其中 $\alpha_j = \frac{a_{n-j}}{a_0}$ $j=1, 2, \dots, n-2$ $\alpha_0 = \frac{a_0}{a_0}$ $a_i^{(j)}$ 为雷尔阵列系数。

李雅普诺夫判据: $X(k+1) = f(X(k), k)$ 取正定标量函数 $V(X(k)) = V_k$ 。若 $\Delta V_k = V_{k+1} - V_k$ 半负定 \Rightarrow 平衡点 $X_e = 0$ 在其邻域内一致稳定。若 ΔV_k 负定, 则为渐近稳定。若 ΔV_k 正定, 则不稳定。对于线性定常系统, 有 $-a = A^T P A - P$ 。给定正定对称阵 Q , 求 P , 若 P 正定, 则渐近稳定。

4.2 稳态误差分析: $W_0(z)$ 为开环传函, 位置误差系数 $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} W_0(z)$ 速度 $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) W_0(z)$ 加速度 $K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 W_0(z)$ $e_{p\infty} = \frac{1}{1+K_p}$ $e_{v\infty} = \frac{T}{K_v}$ $e_{a\infty} = \frac{T^2}{K_a}$ T 为采样周期。单位阶跃 $u(t)$ 单位速度 $tu(t)$ 单位加速度 $\frac{1}{2} t^2 u(t)$

5.1.2 控制器离散化: 1. 脉冲响应不变法 (Z 变换法) imp, $D(z) = Z[D(s)]$ 。特点: ① $D(z)$ 与 $D(s)$ 有相同单位脉冲响应序列。② 若 $D(s)$ 稳定, 则 $D(z)$ 稳定。③ $D(z)$ 与 $D(s)$ 频率特性不同容易出现混叠, 需适当提高采样频率, 至少为 $D(s)$ 带宽的 10 倍以避免。④ 适用于锁截止型控制器。2. 加虚拟保持器 Z 变换法 (阶跃响应不变法) zoh, $D(z) = Z[\frac{1-e^{-Ts}}{s} D(s)]$, 特点: $D(s)$ 稳定则 $D(z)$ 稳定, ⑤ 各阶跃响应序列相同。⑥ 对于其他类型输入的响应不相同, 只近似。3. 后向差分变换法: $D(z) = D(s) |_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}}$ T 为采样周期。特点: 变换计算简单。若 $D(s)$ 稳定, 则 $D(z)$ 稳定。若 $D(s)$ 不稳定, 只有极点不在如图小圆内, $D(z)$ 也稳定。



⑦ 相应 $D(z)$ 不能保持和 $D(s)$ 相同的频率响应。4. 前向差分变换法: $D(z) = D(s) |_{s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$ 特点: 离散化精度高于差分变换法, 把 s 平面虚轴变成 z 平面单位圆。5. 双线性代换 (tustin) $D(z) = D(s) |_{s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$ 特点: 离散化精度高于差分变换法, 把 s 平面虚轴变成 z 平面单位圆内。⑧ $D(s)$ 与 $D(z)$ 稳定性相同。⑨ $D(z)$ 在低频段与 $D(s)$ 频率响应相似。高频段畸变大。6. 频率预畸变双线性变换法, 步骤: 把 $D(s)$ 中极点和零点修正: $s+a_i \rightarrow s + \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_i T}{2}$ 如 $D(s)$ 中有 n -阶因子 $s^2 + a_1 s + b_1$, 则化成 $(\frac{s}{\omega_c})^2 + 2\zeta(\frac{s}{\omega_c}) + 1$ 并将 a 换成 $\frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$, 得到 $D'(s)$, $D'(z) = D'(s) |_{s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$, 计算增益 K , 若要求低通特性, 则 $K = \frac{D'(s)|_{s=0}}{D'(z)|_{z=1}}$, 若要高通特性, $K = \frac{D'(s)|_{s=\infty}}{D'(z)|_{z=-1}}$ $D(z) = K D'(z)$ 7. 零极点匹配法: 零极点 $s+a \Rightarrow z = e^{-aT}$, $s \Rightarrow z = 1$ 复极零点 $(s^2 + 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2) \Rightarrow z^2 - 2e^{-\sigma T} z + e^{-2\sigma T} + e^{-j\omega T} + e^{j\omega T}$, 无穷远零点 $\Rightarrow z=1$, 得到 $D'(z)$ 。增益计算公式与预畸变法相同。5.2 PID 控制: 连续理想: $u(t) = K_p [e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt}] \Rightarrow D(s) = K_p [1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s]$ \Rightarrow 离散化 (后向差分): $D(z) = K_p [1 + \frac{T}{T_i} \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{T^2}{T_d} (1-z^{-1})]$ 递推算法: $u(k) = u(k-1) + v(k) = u(k-1) + K_p [e(k) - e(k-1)] + K_I e(k) + K_D [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]$

