理论力学期中自测试卷

一、　　弹性圈的自然长度为l_0，劲度系数为k，质量为m，水平地套在垂直放置的光滑锥面上，锥顶朝上，锥顶角为2α。利用虚功原理，求在平衡时圆锥顶点与弹性圈所在平面的距离。

二、　　两个质点构成的系统拉氏量为

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

（1）证明伽利略推动

$$\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \vec{v}_0 t$$

是准对称变换，其中$\vec{v}_0$是常数。

（2）求此变换对应的诺特守恒量。

三、　　自聚焦光线具有轴对称的折射率

$$n = n_0\sqrt{1-\alpha^2 r}$$

柱坐标(r,θ,z)中，z为光纤轴向坐标，r为点到光纤中轴的距离。

设在光纤中传播的光线轨迹为$r = r(z), \theta = \theta(z)$。利用费马原理写出相应的拉氏量和拉氏方程。

四、　　在库伦势

$$\mathrm{V} = \frac{\alpha}{r}$$

中运动的带电粒子，作平面运动，(r,θ)为平面的极坐标。令广义坐标为

$$u = \frac{1}{r}$$

利用莫培督原理，求粒子的轨迹$u = u(\theta)$满足的方程。

五、　　考虑弦的横向振动

$$\psi = \psi(t,x), \qquad x \in [-a,a]$$

在小曲率近似下，Lagrange 密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho(\partial_t\psi)^2 - \frac{1}{2}Y(\partial_x\psi)^2$$

设弦的两端固定，则任意时刻弦的形状可写成$(x^2-a^2)f(x)$，在长波近似下可展开为

$$\psi(t,x) = q_1(t)(x^2-a^2) + q_2(t)(x^2-a^2)x$$

其中$q_1(t), q_2(t)$为展开系数，可作为描述弦振动的广义坐标。

（1）求拉氏量$L(t,q,\dot{q})$。

（2）写出$q_1(t), q_2(t)$满足的运动方程。