§6.3 可降阶的二阶微分方程

一般的二阶微分方程的形式是

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

这一节要讲两种特殊类型的二阶方程, 通过代换, 它们能够化为一阶方程.

6.3.1 不显含未知函数的二阶方程

若二阶方程中不显含 y, 则这种方程可写成

$$F(x, y', y'') = 0. \tag{1}$$

引入新的函数 $p = y'$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx}$. 这时 (1) 化为了一阶方程

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0. \tag{2}$$

若能求出 (2) 的通积分 (或通解),

$$p = \varphi(x, C_1),$$

则将这个通积分 (或通解) 中的 p 换成 $\frac{dy}{dx}$, 这产生另一个一阶方程:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1).$$

求出了这个一阶方程的解:

$$y = \psi(x, C_1, C_2).$$

也就求出了 (1) 的解. 这一方法, 实际上是将一个二阶方程, 化为两个一阶方程来解决.

例 1 求解二阶方程 $xy'' + y' = 4x \quad (x \neq 0)$.

例 1 求解二阶方程 $xy'' + y' = 4x \quad (x \neq 0)$.

解 这是不显含未知函数的方程. 令 $p = y'$, 则方程化为

$$xp' + p = 4x.$$

这是一阶非齐次线性方程, 可以用标准的方法求解. 但更简单地, 是将这个方程变形为

$$\frac{d(xp)}{dx} = 4x.$$

于是 $xp = 2x^2 + C_1$, 即

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{C_1}{x}.$$

积分后, 得方程的通解为

$$y = x^2 + C_1 \ln|x| + C_2,$$

其中 C_1, C_2 是 (独立的) 常数. 注意, 我们前面提到过, 二阶方程的通积分 (或通解) 中, 包含着两个 (独立) 常数.

例 2 求解二阶方程 $y'' = \dfrac{y'}{x} + x, \quad (x \neq 0).$

例 2 求解二阶方程 $y'' = \dfrac{y'}{x} + x, \quad (x \neq 0)$.

解 这是不显含未知函数的方程. 令 $p = y'$, 则方程化为

$$p' = \frac{p}{x} + x,$$

即,

$$\left(\frac{p}{x}\right)' = 1.$$

积分可得 $\frac{p}{x} = x + C_1$, 即,

$$y' = x^2 + C_1 x.$$

再积分, 就得到

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2.$$

因此该方程的通解为

$$y = \frac{1}{3}x^3 + C_1 x^2 + C_2.$$

6.3.2 不显含自变量的方程

若二阶方程中不显含 x, 则方程可写为

$$F(y, y', y'') = 0.$$

我们仍令 $p = y'$, 但现在需用对 y 的导数来表示 y'':

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

于是方程可写为

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

我们把 y 看成自变量, 则这是一个一阶方程, 与前面的情形类似, 求出这个方程的通积分 (或通解) 后, 又将问题化为了另一个一阶方程求解.

例 3 求解定解问题

$$\begin{cases} 1+(y')^2=2yy'' \\ y(0)=1,\ y'(0)=0 \end{cases}$$

例 3 求解定解问题

$$\begin{cases} 1+(y')^2 = 2yy'' \\ y(0)=1,\ y'(0)=0 \end{cases}$$

解 这是不显含 x 的二阶方程. 令 $p=y'$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$. 方程化为

$$1+p^2 = 2yp\frac{dp}{dy}.$$

即,

$$\frac{2p}{1+p^2}dp = \frac{dy}{y}.$$

积分得

$$\ln(1+p^2) = \ln|y| + C_0.$$

因为 $y(0)=1>0$, 所以 y 不能取负值. 因此

$$\frac{1+p^2}{y} = C_1$$

其中 C_1 是正常数. 根据条件 $y(0)=1$, $y'(0)=0$ 可知 $C_1=1$. 因此

$$1+(y')^2=y,$$

即,

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{y-1}}=dx.$$

两边积分, 得

$$\pm 2\sqrt{y-1}=x+C_2.$$

再根据 $y(0)=1$, $y'(0)=0$ 可知 $C_2=0$. 因此

$$\pm 2\sqrt{y-1}=x.$$

即,

$$y=\frac{1}{4}x^2+1.$$

例 4 求方程

$$y'' - e^{2y} = 0$$

满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的特解.

例 4 求方程

$$y'' - e^{2y} = 0$$

满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的特解.

解 这是不显含 x 的二阶方程. 令 $p = y'$, 则 $y'' = p\frac{dp}{dy}$. 代入方程后, 得

$$p\frac{dp}{dy} - e^{2y} = 0.$$

分离变量, 并积分, 得出

$$\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1.$$

由 $y(0) = 0$, $p(0) = y'(0) = 1$, 得 $C_1 = 0$. 故 $p^2 = e^{2y}$, 所以

$$\frac{dy}{dx} = e^y.$$

分离变量, 再积分, 得出

$$-e^{-y} = x + C.$$

由 $y(0) = 0$, 得 $C = -1$, 故所求特解为 $1 - e^{-y} = x$.

§6.4 二阶线性微分方程的一般理论

在实际问题中最常见的线性微分方程是二阶的, 它的一般形式是

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{6.1}$$

相应的齐次方程是

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{6.2}$$

其中 $p(x), q(x)$ 及 $f(x)$ 都是给定的函数.

定理 1 (**初值问题解的存在唯一性**) 如果函数 $p(x), q(x)$ 在区间 I 上连续, $x_0 \in I$, 则对任何初值 α, β, 初值问题

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = \alpha, \ y'(x_0) = \beta \end{cases}$$

在 x_0 的邻域内存在惟一的解 $y(x)$.

6.4.1 线性齐次方程解的结构

对于齐次方程 (6.2) 很容易验证下面的结论.

定理 2 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 (6.2) 的解, c_1, c_2 是任意常数, 则 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的线性组合

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

也是方程 (6.2) 的解.

先引入函数组线性无关、线性相关以及 Wronski 行列式的概念.

定义 1 设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_m(x)$ 是区间 I 上的 m 个函数. 如果存在 m 个不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 使得对于区间 I 内的一切 x, 有

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_m\varphi_m(x) = 0,$$

则称这 m 个函数在区间 I 上是线性相关的, 否则就称它们在区间 I 上是线性无关的.

例 5 函数组 $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 在实轴上线性相关.

例 5 函数组 $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 在实轴上线性相关.

例 6 函数组 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 在任意长度非零的区间上线性无关.

例 5 函数组 $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 在实轴上线性相关.

例 6 函数组 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 在任意长度非零的区间上线性无关.

例 7 设 n 是自然数, 则 $n+1$ 个 n 次多项式

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

在 $[0, 1]$ 上线性无关.

例 5 函数组 $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 在实轴上线性相关.

例 6 函数组 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 在任意长度非零的区间上线性无关.

例 7 设 n 是自然数, 则 $n+1$ 个 n 次多项式

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

在 $[0, 1]$ 上线性无关.

证明 当 $n = 1$ 时, $B_0^1(x) = 1 - x$, $B_1^1(x) = x$ 是线性无关的. 假设 $B_0^{n-1}(x), B_1^{n-1}(x), \cdots, B_{n-1}^{n-1}(x)$ 在 $[0, 1]$ 上线性无关.

若存在数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 使得

$$\sum_{i=0}^{n} a_i B_i^n(x) = 0, \quad x \in [0, 1]$$

我们要证 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都为零.

首先, 在上式中令 $x = 0$, 可得 $a_0 = 0$. 因此

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{B_i^n(x)}{x}$$

首先, 在上式中令 $x = 0$, 可得 $a_0 = 0$. 因此

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{B_i^n(x)}{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \binom{n}{i} x^{i-1}(1-x)^{n-i}$$

首先, 在上式中令 $x=0$, 可得 $a_0=0$. 因此

$$0=\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{B_i^n(x)}{x}=\sum_{i=1}^{n} a_i \binom{n}{i} x^{i-1}(1-x)^{n-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \binom{n}{i+1} x^{i}(1-x)^{n-1-i}$$

首先, 在上式中令 $x=0$, 可得 $a_0=0$. 因此

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{B_i^n(x)}{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \binom{n}{i} x^{i-1}(1-x)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \binom{n}{i+1} x^i (1-x)^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1}\binom{n}{i+1}}{\binom{n-1}{i}} B_i^{n-1}(x).
\end{aligned}
$$

首先, 在上式中令 $x=0$, 可得 $a_0=0$. 因此

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{B_i^n(x)}{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \binom{n}{i} x^{i-1}(1-x)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \binom{n}{i+1} x^i (1-x)^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1}\binom{n}{i+1}}{\binom{n-1}{i}} B_i^{n-1}(x).
\end{aligned}
$$

根据假设 $B_0^{n-1}(x), B_1^{n-1}(x), \cdots, B_{n-1}^{n-1}(x)$ 在 $[0,1]$ 上线性无关.

首先, 在上式中令 $x=0$, 可得 $a_0=0$. 因此

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{B_i^n(x)}{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \binom{n}{i} x^{i-1}(1-x)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \binom{n}{i+1} x^i (1-x)^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1}\binom{n}{i+1}}{\binom{n-1}{i}} B_i^{n-1}(x).
\end{aligned}
$$

根据假设 $B_0^{n-1}(x), B_1^{n-1}(x), \cdots, B_{n-1}^{n-1}(x)$ 在 $[0,1]$ 上线性无关. 因此有

首先, 在上式中令 $x=0$, 可得 $a_0=0$. 因此

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{B_i^n(x)}{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \binom{n}{i} x^{i-1}(1-x)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \binom{n}{i+1} x^{i}(1-x)^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1}\binom{n}{i+1}}{\binom{n-1}{i}} B_i^{n-1}(x).
\end{aligned}
$$

根据假设 $B_0^{n-1}(x), B_1^{n-1}(x), \cdots, B_{n-1}^{n-1}(x)$ 在 $[0,1]$ 上线性无关. 因此有

$$
\frac{a_{i+1}\binom{n}{i+1}}{\binom{n-1}{i}} = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1
$$

首先, 在上式中令 $x=0$, 可得 $a_0=0$. 因此

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{B_i^n(x)}{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \binom{n}{i} x^{i-1}(1-x)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \binom{n}{i+1} x^{i}(1-x)^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1}\binom{n}{i+1}}{\binom{n-1}{i}} B_i^{n-1}(x).
\end{aligned}
$$

根据假设 $B_0^{n-1}(x), B_1^{n-1}(x), \cdots, B_{n-1}^{n-1}(x)$ 在 $[0,1]$ 上线性无关. 因此有

$$
\frac{a_{i+1}\binom{n}{i+1}}{\binom{n-1}{i}} = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1
$$

即, $a_i = 0$, $i = 1, \cdots, n$. 于是 $B_0^n, B_1^n, \cdots, B_n^n$ 是线性无关的.

由于 n 次多项式全体是 $n+1$ 维线性空间, 线性无关的函数个数至多有 $n+1$ 个. 因此, 上个例子表明每个 n 次多项式都可以唯一地表示为

$$B_0^n(x), B_1^n(x), \cdots, B_n^n(x)$$

的线性组合, 这种表示称为多项式的 Bernstein **表示**. $B_k^n(x)$, $k=0,1,\cdots,n$ 称为 Bernstein **基函数**.

由于 n 次多项式全体是 $n+1$ 维线性空间, 线性无关的函数个数至多有 $n+1$ 个. 因此, 上个例子表明每个 n 次多项式都可以唯一地表示为

$$B_0^n(x), B_1^n(x), \cdots, B_n^n(x)$$

的线性组合, 这种表示称为多项式的 Bernstein 表示. $B_k^n(x)$, $k=0,1,\cdots,n$ 称为 Bernstein 基函数.

定义 2 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是区间 I 上的两个可导函数. 称

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)$$

为 $y_1(x), y_2(x)$ 的朗斯基 (Wronski) 行列式.

定理 3 如果函数 $y_1(x), y_2(x)$ 在区间 I 上可导且线性相关, 那么它们的 Wronski 行列式 $W(x)$ 在 I 上恒为零.

定理 3 如果函数 $y_1(x), y_2(x)$ 在区间 I 上可导且线性相关, 那么它们的 Wronski 行列式 $W(x)$ 在 I 上恒为零.

证明 设 $y_1(x), y_2(x)$ 在区间 I 上可导且线性相关, 即, 存在不全为零的常数 c_1 和 c_2 使得

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0.$$

求导得

$$c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) = 0.$$

如果存在 $x_0 \in I$ 使得 $W(x_0) \neq 0$, 那么从方程组

$$c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = 0,$$
$$c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = 0$$

可以求解得 $c_1 = c_2 = 0$, 这与 c_1, c_2 不全为零矛盾. 故, 对任意 $x \in I$, 有 $W(x) = 0$.

注意, 这个定理的逆命题不成立.

例 8 设

$$y_1(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 1\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}\qquad y_2(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ (x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$$

则 $y_1(x), y_2(x)$ 在 $[0,2]$ 上线性无关, 但 $W(x)=0$.

事实上, 有

$$y_1'(x)=\begin{cases}2(x-1), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 1\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}\qquad y_2'(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2(x-1), & 1\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$$

所以

$$W(x)=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)=0.$$

定理 4 如果函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 (6.2) 的解, 且它们的 Wronski 行列式在区间 I 上恒为零, 那么这两个函数在区间 I 上线性相关.

定理 4 如果函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 (6.2) 的解, 且它们的 Wronski 行列式在区间 I 上恒为零, 那么这两个函数在区间 I 上线性相关.

证明 在 I 内任取一点 x_0. 根据条件有

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

由此知存在不全为零的常数 c_1, c_2 满足

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0,$$
$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0.$$

设 $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. 根据定理2 知 $y(x)$ 是方程 (6.2) 的解, 且

$$y(x_0) = 0, \ y'(x_0) = 0.$$

另一方面, 恒为零的函数也是方程 (6.2) 的解, 且满足上面的初始条件. 根据定理1 知 $y(x) \equiv 0, x \in I$, 即, $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0$.

从上面这个定理证明可看出: 只要函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 (6.2) 的解, 那么从 $W(x)$ 在区间内某一点为零, 可推出 $W(x)$ 在该区间内恒为零.

从上面这个定理证明可看出: 只要函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 (6.2) 的解, 那么从 $W(x)$ 在区间内某一点为零, 可推出 $W(x)$ 在该区间内恒为零.

定理 5 (刘维尔公式) 如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 (6.2) 的解, 那么它们的 Wronski 行列式可表示为

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}, \tag{6.3}$$

其中 x_0 是区间 I 内一点.

从上面这个定理证明可看出: 只要函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 (6.2) 的解, 那么从 $W(x)$ 在区间内某一点为零, 可推出 $W(x)$ 在该区间内恒为零.

定理 5 (刘维尔公式) 如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 (6.2) 的解, 那么它们的 Wronski 行列式可表示为

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}, \tag{6.3}$$

其中 x_0 是区间 I 内一点.

证明 因为 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 (6.2) 的解, 所以有

$$y_1''(x) = -p(x)y_1'(x) - q(x)y_1(x)$$
$$y_2''(x) = -p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x).$$

由此得

$$\begin{aligned} & y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) \\ = & -p(x)\big(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\big) \\ = & -p(x)W(x). \end{aligned}$$

另一方面,

$$\frac{dW(x)}{dx} = y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x).$$

因而,

$$\frac{dW(x)}{dx} = -p(x)W(x).$$

两端乘以 $e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}$ 可得

$$\frac{d}{dx}\left(W(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}\right) = 0.$$

这说明

$$W(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt} = C$$

是常数. 令 $x = x_0$ 得 $W(x_0) = C$. 证毕.

定理 6 若函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 (6.2) 的一对线性无关解, 则它们的 Wronski 行列式处处不为零.

定理 6 若函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 (6.2) 的一对线性无关解, 则它们的 Wronski 行列式处处不为零.

定理 7 若函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 (6.2) 的一对线性无关解, 则该方程的任何一个解可以表示为

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

其中 c_1, c_2 为常数.

定理 6 若函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 (6.2) 的一对线性无关解, 则它们的 Wronski 行列式处处不为零.

定理 7 若函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 (6.2) 的一对线性无关解, 则该方程的任何一个解可以表示为

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

其中 c_1, c_2 为常数.

证明 在 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的定义域内任取一点 x_0. 由这两个函数的线性无关性, 知

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

设 $y(x)$ 是方程 (6.2) 的解. 从上面行列式不为零可知存在常数 c_1, c_2 使得

$$c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y(x_0)$$
$$c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y'(x_0).$$

因为函数

$$\tilde{y}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

也是方程 (6.2) 的解, 且

$$\tilde{y}(x_0) = y(x_0),\ \tilde{y}'(x_0) = y'(x_0).$$

根据初值问题解的唯一性可知 $\tilde{y}(x) \equiv y(x)$. 即,

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

证毕.

设 $y(x)$ 是方程 (6.2) 的解. 从上面行列式不为零可知存在常数 c_1, c_2 使得

$$c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y(x_0)$$
$$c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y'(x_0).$$

因为函数

$$\tilde{y}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

也是方程 (6.2) 的解, 且

$$\tilde{y}(x_0) = y(x_0),\ \tilde{y}'(x_0) = y'(x_0).$$

根据初值问题解的唯一性可知 $\tilde{y}(x) \equiv y(x)$. 即,

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

证毕.

方程 (6.2) 的一对线性无关解称为一个基本解组.

定理 8 (基本解组的存在性) 方程 (6.2) 即齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

的基本解组是存在的.

定理 8 (基本解组的存在性) 方程 (6.2) 即齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

的基本解组是存在的.

证明 取两组数 α_1, β_1 和 α_2, β_2 使得 $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$, 则下面两个初值问题

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = \alpha_1, \ y'(x_0) = \beta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = \alpha_2, \ y'(x_0) = \beta_2 \end{cases}$$

所得的解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 在 x_0 处的 Wronski 行列式 $W(x_0) \neq 0$. 因而 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 线性无关. 这就说明 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 构成了 (6.2) 的一个基本解组. 证毕.

虽然齐次线性方程的基本解组是存在的, 但是并没有通用的方法来求解基本解组. 不过若已经知道 $y_1(x)$ 是齐次线性方程的一个非零解, 则可用 Liouville 公式来求另一个与 $y_1(x)$ 线性无关的解 $y_2(x)$, 从而得到基本解组. 因为

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt},$$

不妨设 $W(x_0) = 1$. 从上式得

$$\frac{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}{y_1^2(x)} = \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt},$$

即,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right) = \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}.$$

积分可得

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}dx. \tag{6.4}$$

例 9 求方程 $xy'' - y' = 0$ 的通解.

例 9 求方程 $xy'' - y' = 0$ 的通解.

解 易知 $y_1 = 1$ 是该方程的一个特解. 方程可表为

$$y'' - \frac{1}{x}y' = 0.$$

记 $p(x) = -\frac{1}{x}$. 则

$$\int_{x_0}^{x} p(t)dt = -\ln\frac{x}{x_0}.$$

由公式 (6.4) 可得

$$y_2(x) = \frac{1}{2}cx^2.$$

所以 x^2 是一个与 1 线性无关的特解. 所求通解为

$$y(x) = c_1 + c_2x^2.$$

6.4.2 二阶线性非齐次方程解的结构

对于二阶线性非齐次方程 (6.1), 我们容易验证下面的解的结构定理.

定理 9 如果 $y_0(x)$ 是非齐次方程 (6.1) 的一个特解, $y_1(x), y_2(x)$ 是相应的齐次方程 (6.2) 的基本解组, 那么方程 (6.1) 的通解是

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_0(x).$$

证明 该定理是显然的. 这是因为非齐次方程的任意两个解之差都是齐次方程的解. 证毕.

6.4.2 二阶线性非齐次方程解的结构

对于二阶线性非齐次方程 (6.1), 我们容易验证下面的解的结构定理.

定理 9 如果 $y_0(x)$ 是非齐次方程 (6.1) 的一个特解, $y_1(x), y_2(x)$ 是相应的齐次方程 (6.2) 的基本解组, 那么方程 (6.1) 的通解是

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_0(x).$$

证明 该定理是显然的. 这是因为非齐次方程的任意两个解之差都是齐次方程的解. 证毕.

现在的问题是: 当已经知道齐次方程的一个基本解组时如何求非齐次方程的一个特解?

常数变易法求特解

设 $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次方程 (6.2) 的基本解组, 并假设非齐次方程 (6.1) 有形如

$$y_0(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

的特解, 其中 $c_1(x)$ 和 $c_2(x)$ 是待定函数. 对上式求导得

$$y_0'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x).$$

为了以后不出现 $c_1(x)$ 和 $c_2(x)$ 的高阶导数, 令

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{6.5}$$

因而

$$y_0'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x).$$

对此求导, 得

$$y_0''(x) = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x).$$

将 $y_0(x), y_0'(x)$ 和 $y_0''(x)$ 的表达式代入 (6.1) 得

$$c_1(x)\big(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\big) + c_2(x)\big(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\big) + c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x).$$

由于 y_1, y_2 是 (6.2) 的解, 从上式可得

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x). \tag{6.6}$$

因为 $y_1(x), y_2(x)$ 的 Wronski 行列式 $W(x) \neq 0$, 所以从 (6.5) 和 (6.6) 可解得

$$c_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}, \quad c_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}.$$

积分后可得

$$c_1(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}\,dt, \quad c_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}\,dt.$$

于是我们得到非齐次方程 (6.1) 的一个特解

$$y_0(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{W(t)} f(t)\,dt. \tag{6.7}$$

6.4.3 二阶常系数齐次线性微分方程

现在我们讨论二阶常系数齐次线性微分方程. 这种方程可写成

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{6.8}$$

其中 p, q 是实常数. 由前小节的知识可知, 只需求得该方程的一对基本解组, 则方程的通解就清楚了. 假设方程 (6.8) 有形如 $y(x) = e^{\lambda x}$ (λ 是常数) 的解, 将此函数代入上面的方程可得,

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda p e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0.$$

因而

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{6.9}$$

此式称为方程 (6.8) 的特征方程. 当 λ 是特征方程的根时, $e^{\lambda x}$ 就是方程 (6.8) 的非零解.

以下分三种情形:

情形1. 若特征方程 (6.9) 有两个不同的实根 λ_1, λ_2, 则 $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ 是方程 (6.8) 的两个解. 容易验证 $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关. 事实上, 若

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = 0, \ (\forall\, x \in \mathbb{R}),$$

求导, 得

$$c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} = 0, \ (\forall\, x \in \mathbb{R}),$$

将前一个方程乘以 λ_2 后减去后一个方程, 得

$$c_1(\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_1 x} = 0,$$

因而 $c_1 = 0$. 进而可得 $c_2 = 0$. 这就说明 $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关, 即, 它是方程 (6.8) 的基本解组. 于是 (6.8) 的通解为

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

情形2. 若特征方程 (6.9) 有一个实重根 λ, 则 $e^{\lambda x}$ 是方程 (6.8) 的解. 由于 λ 是特征方程的重根, 此时有

$$\lambda = -\frac{p}{2}, \quad q = \frac{p^2}{4}.$$

容易验证 $xe^{\lambda x}$ 也是 (6.8) 的解, 且 $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$ 线性无关. 因而它是齐次方程 (6.8) 的基本解组. 于是 (6.8) 的通解为

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}.$$

情形2. 若特征方程 (6.9) 有一个实重根 λ, 则 $e^{\lambda x}$ 是方程 (6.8) 的解. 由于 λ 是特征方程的重根, 此时有

$$\lambda = -\frac{p}{2}, \quad q = \frac{p^2}{4}.$$

容易验证 $xe^{\lambda x}$ 也是 (6.8) 的解, 且 $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$ 线性无关. 因而它是齐次方程 (6.8) 的基本解组. 于是 (6.8) 的通解为

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}.$$

情形3. 若特征方程 (6.9) 有一对复根 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, 则

$$e^{\lambda_1 x} = (\cos\beta x + i\sin\beta x)e^{\alpha x}, \quad e^{\lambda_2 x} = (\cos\beta x - i\sin\beta x)e^{\alpha x}$$

是 (6.8) 的一对复函数解, 所以

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}}{2}, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{2i}$$

是 (6.8) 的两个实函数线性无关解. 于是 (6.8) 的通解为

$$y(x) = (c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)e^{\alpha x}.$$

例 10 求解方程 $y'' - 3y' + 2y = 0.$

例 10 求解方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$.

解 特征方程是 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. 它有两个实根 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. 因此所求通解为 $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$.

例 10 求解方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$.

解 特征方程是 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. 它有两个实根 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$. 因此所求通解为 $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$.

例 11 求解方程 $y'' + y' + y = 0$.

例 10 求解方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$.

解 特征方程是 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. 它有两个实根 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. 因此所求通解为 $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$.

例 11 求解方程 $y'' + y' + y = 0$.

解 特征方程是 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. 它有一对复根

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

因此所求方程的通解为

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

6.4.4 二阶常系数非齐次线性微分方程

在 (6.4.3) 节中, 我们讨论了求二阶常系数齐次微分方程的通解的方法. 下面我们讨论二阶常系数非齐次微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{6.10}$$

其中 p, q 是常数. 由一般理论可知我们只需求出该方程的一个特解, 然后通过齐次方程的通解, 就可以将这个方程的通解表示出来. 事实上, 在前小节中, 已经讨论了如何利用常数变易法从齐次方程的通解求非齐次方程的特解. 但这个方法在求积分时计算较为复杂.

下面我们介绍对某些特定的非齐次项 $f(x)$, 用待定系数法求方程 (6.10) 的一个特解的方法.

讨论三种类型的非齐次项 $f(x)$.

类型 1: $f(x) = P_n(x)$ 是 n 次多项式. 此时分三种情况:

类型 1: $f(x) = P_n(x)$ 是 n 次多项式. 此时分三种情况:

(i) 当 $\lambda = 0$ 不是特征根, 即系数 $q \neq 0$ 时, 令 (6.10) 的一个特解为 n 次多项式, 即,

$$y_0(x) = Q_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是待定常数. 将 $y_0(x)$ 代入 (6.10) 后比较两边多项式的系数, 即可求得 $a_0, a_1, \cdots, a_n$, 从而求得特解 $Q_n(x)$.

类型 1: $f(x) = P_n(x)$ 是 n 次多项式. 此时分三种情况:

(i) 当 $\lambda = 0$ 不是特征根, 即系数 $q \neq 0$ 时, 令 (6.10) 的一个特解为 n 次多项式, 即,

$$y_0(x) = Q_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是待定常数. 将 $y_0(x)$ 代入 (6.10) 后比较两边多项式的系数, 即可求得 $a_0, a_1, \cdots, a_n$, 从而求得特解 $Q_n(x)$.

(ii) 当 $\lambda = 0$ 是单重特征根, 即系数 $q = 0$, $p \neq 0$ 时, 令 (6.10) 的一个特解为常数项系数为零的 $n+1$ 次多项式, 即, $y_0 = xQ_n(x)$, 其中 $Q_n(x)$ 仍如上式, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是待定常数. 将 $y_0(x)$ 代入 (6.10) 后比较两边多项式的系数, 即可求得 $a_0, a_1, \cdots, a_n$, 从而求得特解 $xQ_n(x)$.

类型 1: $f(x) = P_n(x)$ 是 n 次多项式. 此时分三种情况:

(i) 当 $\lambda = 0$ 不是特征根, 即系数 $q \neq 0$ 时, 令 (6.10) 的一个特解为 n 次多项式, 即,

$$y_0(x) = Q_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是待定常数. 将 $y_0(x)$ 代入 (6.10) 后比较两边多项式的系数, 即可求得 $a_0, a_1, \cdots, a_n$, 从而求得特解 $Q_n(x)$.

(ii) 当 $\lambda = 0$ 是单重特征根, 即系数 $q = 0$, $p \neq 0$ 时, 令 (6.10) 的一个特解为常数项系数为零的 $n+1$ 次多项式, 即, $y_0 = xQ_n(x)$, 其中 $Q_n(x)$ 仍如上式, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是待定常数. 将 $y_0(x)$ 代入 (6.10) 后比较两边多项式的系数, 即可求得 $a_0, a_1, \cdots, a_n$, 从而求得特解 $xQ_n(x)$.

(iii) 当 $\lambda = 0$ 是二重特征根, 即 $p = q = 0$ 时, 直接对 (6.10) 积分两次, 就可求得通解.

类型 2: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, 这里 α 是非零常数, $P_n(x)$ 是 n 次多项式. 由于这种类型的函数的导函数仍是这种类型的函数, 因此猜测有这种类型的特解. 设方程 (6.10) 有特解 $y_0(x) = Q(x)e^{\alpha x}$. 考虑变换

$$y = ze^{\alpha x},$$

将之代入 (6.10), 得

$$z'' + (2\alpha + p)z' + (\alpha^2 + p\alpha + q)z = P_n(x). \tag{6.11}$$

这样就将类型 2 的情况转换为类型 1 的情况. 也可分三种情况讨论:

类型 2: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, 这里 α 是非零常数, $P_n(x)$ 是 n 次多项式. 由于这种类型的函数的导函数仍是这种类型的函数, 因此猜测有这种类型的特解. 设方程 (6.10) 有特解 $y_0(x) = Q(x)e^{\alpha x}$. 考虑变换

$$y = ze^{\alpha x},$$

将之代入 (6.10), 得

$$z'' + (2\alpha + p)z' + (\alpha^2 + p\alpha + q)z = P_n(x). \tag{6.11}$$

这样就将类型 2 的情况转换为类型 1 的情况. 也可分三种情况讨论:

(i) 当 α 不是特征根, 即, $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$ 时, 令 $y_0(x) = Q_n(x)e^{\alpha x}$;

类型 2: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, 这里 α 是非零常数, $P_n(x)$ 是 n 次多项式. 由于这种类型的函数的导函数仍是这种类型的函数, 因此猜测有这种类型的特解. 设方程 (6.10) 有特解 $y_0(x) = Q(x)e^{\alpha x}$. 考虑变换

$$y = ze^{\alpha x},$$

将之代入 (6.10), 得

$$z'' + (2\alpha + p)z' + (\alpha^2 + p\alpha + q)z = P_n(x). \tag{6.11}$$

这样就将类型 2 的情况转换为类型 1 的情况. 也可分三种情况讨论:

(i) 当 α 不是特征根, 即, $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$ 时, 令 $y_0(x) = Q_n(x)e^{\alpha x}$;

(ii) 当 α 是单重特征根, 即系数 $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, $2\alpha + p \neq 0$ 时, 令 $y_0(x) = xQ_n(x)e^{\alpha x}$;

类型 2: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, 这里 α 是非零常数, $P_n(x)$ 是 n 次多项式. 由于这种类型的函数的导函数仍是这种类型的函数, 因此猜测有这种类型的特解. 设方程 (6.10) 有特解 $y_0(x) = Q(x)e^{\alpha x}$. 考虑变换

$$y = ze^{\alpha x},$$

将之代入 (6.10), 得

$$z'' + (2\alpha + p)z' + (\alpha^2 + p\alpha + q)z = P_n(x). \tag{6.11}$$

这样就将类型 2 的情况转换为类型 1 的情况. 也可分三种情况讨论:

(i) 当 α 不是特征根, 即, $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$ 时, 令 $y_0(x) = Q_n(x)e^{\alpha x}$;

(ii) 当 α 是单重特征根, 即系数 $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, $2\alpha + p \neq 0$ 时, 令 $y_0(x) = xQ_n(x)e^{\alpha x}$;

(iii) 当 α 是二重特征根, 即 $\alpha^2 + p\alpha + q = 0 = 2\alpha + p = 0$ 时, 直接对 (6.11) 积分两次, 就可求得 z, 然后就得到通解 $y = ze^{\alpha x}$.

类型 3: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$. 统一为复函数的非齐次项 $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x+i\beta x}$. 分两种情形讨论:

类型 3: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$. 统一为复函数的非齐次项 $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x+i\beta x}$. 分两种情形讨论:

(i) 当 $\alpha + i\beta$ 不是特征根时, 可以假设 (6.10) 有复函数形式的特解 $y_0(x) = Q_n(x)e^{\alpha x+i\beta x}$, 其中 $Q_n(x)$ 是复系数 n 次多项式. 用待定系数法求出这种形式的复的特解后, 再分出实部与虚部.

类型 3: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$. 统一为复函数的非齐次项 $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x+i\beta x}$. 分两种情形讨论:

(i) 当 $\alpha + i\beta$ 不是特征根时, 可以假设 (6.10) 有复函数形式的特解 $y_0(x) = Q_n(x)e^{\alpha x+i\beta x}$, 其中 $Q_n(x)$ 是复系数 n 次多项式. 用待定系数法求出这种形式的复的特解后, 再分出实部与虚部.

(ii) 当 $\alpha + i\beta$ 是单重特征根时, 可以假设 (6.10) 有复函数形式的特解 $y_0(x) = xQ_n(x)e^{\alpha x+i\beta x}$, 其中 $Q_n(x)$ 是复系数 n 次多项式. 求出这种形式的复的特解后, 再分出实部与虚部.

类型 3: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$. 统一为复函数的非齐次项 $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x+i\beta x}$. 分两种情形讨论:

(i) 当 $\alpha + i\beta$ 不是特征根时, 可以假设 (6.10) 有复函数形式的特解 $y_0(x) = Q_n(x)e^{\alpha x+i\beta x}$, 其中 $Q_n(x)$ 是复系数 n 次多项式. 用待定系数法求出这种形式的复的特解后, 再分出实部与虚部.

(ii) 当 $\alpha + i\beta$ 是单重特征根时, 可以假设 (6.10) 有复函数形式的特解 $y_0(x) = xQ_n(x)e^{\alpha x+i\beta x}$, 其中 $Q_n(x)$ 是复系数 n 次多项式. 求出这种形式的复的特解后, 再分出实部与虚部.

注 1 类型 1 和类型 2 可以归到类型 3 中 ($\beta = 0$ 的情况).

注 2 如果非齐次项是多种类型的线性叠加, 那么可以将方程分解为多个方程, 分别求出特解, 然后将这些特解叠加得到原方程的特解.

注 3 这种求特解的方法也可以推广到高阶常系数线性齐次微分方程.

例 12 求二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + y' - 2y = (x-2)e^x + 4x^3 - 8x^2 - 12x + 3 \tag{1}$$

的通解.

解 齐次方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的特征根为 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = -2$. 方程 (1) 的非齐次项为 $(x-2)e^x$ 与 $4x^3 - 8x^2 - 12x + 3$ 和. 现考察两个非齐次方程:

$$y'' + y' - 2y = (x-2)e^x, \tag{2}$$

$$y'' + y' - 2y = 4x^3 - 8x^2 - 12x + 3. \tag{3}$$

因为 1 是单特征根, 所以可以假设 (2) 的一个特解为 $y_1 = x(ax+b)e^x$. 代入 (2) 得

$$2a + 6ax + 3b = x - 2,$$

比较系数得 $a = \frac{1}{6}$, $b = -\frac{7}{9}$. 故, (2) 的一个特解为 $y_1 = x(\frac{1}{6}x - \frac{7}{9})e^x$.

再设 (3) 的一个特解为 $y_2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 代入 (3), 得

$$(6ax + 2b) + (3ax^2 + 2bx + c) - 2(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$
$$= 4x^3 - 8x^2 - 12x + 3.$$

比较系数, 得

$$\begin{aligned} -2a &= 4, \\ 3a - 2b &= -8, \\ 6a + 2b - 2c &= -12, \\ 2b + c - 2d &= 3. \end{aligned}$$

解得 $a = -2, b = 1, c = 1, d = 0$. 故, $y_2 = -2x^3 + x^2 + x$. 因而方程 (1) 的一个特解为 $y_0 = x(\frac{1}{6}x - \frac{7}{9})e^x - 2x^3 + x^2 + x$. 于是所求的通解为

$$y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + x\left(\frac{1}{6}x - \frac{7}{9}\right)e^x - 2x^3 + x^2 + x.$$

例 13 求二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + y = x\cos x, \tag{1}$$

的通解.

解 对应的特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. 故, 齐次方程的通解为 $c_1\cos x + c_2\sin x$.

因为 i 是特征根, 可设 (1) 的一个复特解为 $y_0 = x(ax+b)e^{ix}$, 代入 (1), 得

$$2a + 4aix + 2bi = x.$$

比较系数可得 $a = -\frac{1}{4}i, b = \frac{1}{4}$. 因而 $y_0 = x(-\frac{1}{4}xi + \frac{1}{4})e^{ix}$. 分出其实部得到 (1) 的实特解为 $\frac{1}{4}(x^2\sin x + x\cos x)$. 故, (1) 的通解为

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{4}(x^2\sin x + x\cos x).$$